Možnosti využitia fraktálovej geometrie v prírodných a iných vybraných vedách

The Possibilities of Using Fractal Geometry in Natural and Other Chosen Sciences

Jana Žolnová

Katedra chémie, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Abstract: Each area of science has its own attractive themes which attract attention of many scientists and due to today's rapid dissemination of information, these themes get into awareness of grass-roots. For example, the Theory of Strings, or Theory of Chaos in Physics, the possibilities of repairing of DNA or its cloning with use restricted endonucleases in Biology and Chemistry, trying to prove famous Riemann's zeta hypothesis in Mathematics. Another interesting area of Mathematics is fractal geometry. Its applicability is not stopped only at an abstract level, but in the applied form it is used in already mentioned natural sciences. In contrast with classic Euclid's geometry, which deals with geometrically smooth and regular geometric shapes, the fractal geometry is the geometry of real world, where we can see mostly irregularities. Just look at the clouds, lightning, branching up of lops at trees or vessels in human body.

Keywords: fractals, Mandelbrot set, Koch snowflake, Sierpinski triangle, application of fractals.

1 Úvod

Matematici často rozprávajú o kráse a elegantnosti matematických dôkazov a vzťahov. Tento ich zápal pre abstraktnú krásu sa často stretáva s nepochopením, a to jednak zo strany študentov základných alebo stredných škôl, ktorých vzťah k matematike ovplyvňuje predovšetkým učiteľ (Papert, 2004), a tiež zo strany vedeckej spoločnosti, ktorá preferuje viditeľné výsledky práce a jej aplikovateľnosť v praxi (Mordukhovich, 2011).

V diele Dejiny matematiky (Čižmár, 2017) je podrobne opísaný historický vývoj matematiky ako vedy. Ak sa pozrieme do minulosti, narazíme na množstvo geniálnych matematikov, ktorí svojím uvažovaním a vedomosťami predbehli svoju dobu a často boli nepochopenými a zavrhovanými vedeckou spoločnosťou danej doby. K takýmto géniom patrili v staroveku napríklad Pytagoras, Euklides, Archimedes, či Ptolemaios, ktorých diela sú

DOI: https://doi.org/10.31262/2585-8556/2018/2/1/29-40

známe dodnes a položili základy dnešnej matematiky. V stredoveku svet matematiky ovládla Čína, na čele s matematikom Zu Chongzhou ktorá bola v tom čase najrozvinutejšou krajinou v tejto oblasti. Nezaostávala ani Perzia – veď práve z priezviska perzského matematika 9. storočia Al-Chorezmího je odvodené slovo algoritmus, ktoré je dnes už neodmysliteľnou súčasťou matematickej terminológie. Najväčší posun od konkrétneho ku abstraktnému nastal v 16. storočí. Mená Fibonacci, Bacon, Kopernik, Viète, Kuzánsky alebo Mercator sú všeobecne známe nielen študentom matematiky. Zmena spoločenských podmienok priniesla nové otvorené problémy, ktorými sa bolo potrebné zaoberať. Aby sa matematické výpočty optimalizovali, v súvislosti s presnosťou a rýchlosťou, začali vznikať rôzne pomôcky, ako napríklad tabuľky logaritmov. Bolo potrebné odpovedať aj na niektoré významné otázky z oblasti mechaniky, ktorých riešenie si vyžadovalo vytvorenie nových matematických prostriedkov. Tie priniesli nezávisle na sebe v druhej polovici 17. storočia matematici Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibnitz v podobe infinitezimálneho počtu (Reyes, 2004).

Takto by sme vedeli pokračovať ďalej a spomenúť matematické princípy formulované Cantorom, Kleinom, Hausdorffom, Turingom a inými významnými matematikmi 18. a 19. storočia. Nové spôsoby riešenia matematických problémov, ktoré sa vďaka nim začali používať v teoretických matematických výpočtoch, prispeli k rozvoju matematiky ako vedy a tiež sa stali využiteľnými v praxi. Prihliadnuc k tomu, že náš článok sa zaoberá predovšetkým fraktálovou geometriou, nie je možné dopodrobna opísať prácu a dielo každého z nich. Spomedzi týchto velikánov sme vybrali dielo Benoîta Mandelbrota, ktorý položil základy fraktálovej geometrie (Čižmár, 2017). Vďaka fraktálom, ktoré bolo možné generovať počítačom, začala byť krása matematiky zjavná aj tým, ktorí touto abstraktnou vedou predtým opovrhovali.

Fraktálová geometria si však nenašla uplatnenie len v matematike, ale v mnohých ďalších prírodovedných oblastiach. Cieľom tohto článku je priblíženie niektorých zaujímavých detailov a možností aplikácie fraktálovej geometrie a to nie len v matematike, ktorá je jej materskou vednou disciplínou, ale tiež v oblasti chémie, biológie, fyziky, medicíny a informatiky. Fraktálové štruktúry je možné vidieť bežne v prírode – vlny, slimačie ulity, či papraďové listy, využívajú sa v počítačovej grafike pri vytváraní pozadia do filmov – hory, oblaky, rieky, a dnes sa stali aj neodmysliteľnou súčasťou medicíny – elektrokardiografia.

2 Počiatky fraktálovej geometrie

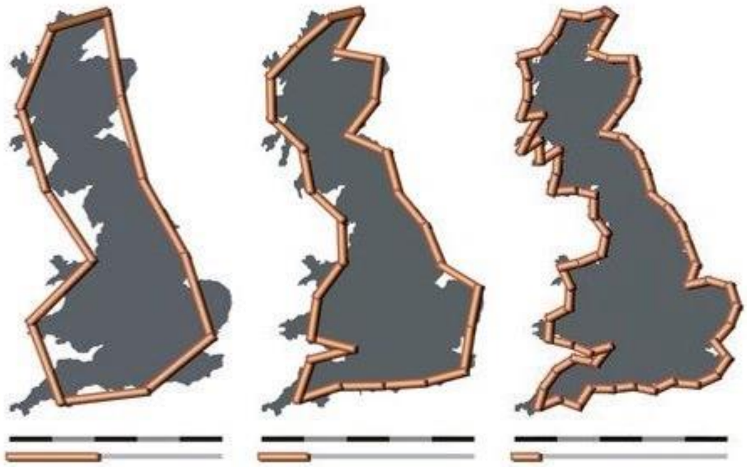
Fraktálová geometria úzko súvisí s teóriou chaosu, preto v krátkosti predstavíme jej hlavnú myšlienku.

Pod pojmom chaos si väčšina ľudí predstaví niečo neusporiadané, neorganizovanú alebo amorfnú štruktúru. Chaos by sme vedeli dobre definovať ako neexistenciu štruktúry alebo poriadku. Slovo chaos samozrejme používa množstvo autorov vo vágnom zmysle, ale vo fyzike znamená celkom určitý jav, totiž, že v nelineárnom systéme je výsledok často neurčito a ľubovoľne citlivý na nepatrné zmeny počiatočných podmienok. Teória chaosu sa zaoberá správaním sa istých nelineárnych dynamických systémov, ktoré za určitých podmienok vykazujú stav známy ako chaos. Tento stav je charakterizovaný veľkou citlivosťou počiatočných podmienok, známou ako motýlí efekt (Kellert, 1994). Táto odvážna reklama na teóriu chaosu hovorí, že už malé zmeny môžu mať za následok veľké variácie v nasledujúcom vývoji udalostí. Predstavme si, že motýľ, ktorý zamáva krídlami v Európe, môže v konečnom dôsledku vyvolať tajfún na druhej polovici sveta, napríklad v Južnej Amerike. Hoci pravdepodobnosť, že takéto niečo sa stane je mizivá, stále je tu prítomná a teda nie je chybou ju spomenúť.

Samotná teória chaosu je postavená na nedokonalosti ľudského merania. Hoci vieme pomocou rôznych vzorcov a výpočtov predvídať počasie, musíme uznať, že vzhľadom na obrovské množstvo parametrov, ktoré jeho vývoj ovplyvňujú, je z dlhodobého hľadiska nepredvídateľné. Ide teda o chaotický systém, ktorý je veľmi citlivý na podmienky, ktoré ovplyvňujú jeho vývoj. Ďalším príkladom zdanlivo neorganizovanej štruktúry môžu byť vodopády, oblaky, blesky a mnohé ďalšie chaotické systémy.

Klasickým problémom, ktorým vstúpime do oblasti fraktálovej geometrie, je meranie dĺžky pobrežia ostrova, resp. určenie hranice. Týmto problémom sa ako prvý začal vážnejšie zaoberať Lewis Fry Richardson (1881 – 1953), keďže si všimol nepresnosti v údajoch o dĺžke hraníc a pobreží v rôznych encyklopédiách (Richardson, Ashford, 1985). Akým spôsobom by sme vedeli čo najpresnejšie zmerať dĺžku pobrežia ostrova? Prvou voľbou sa zdá byť prechádzka okolo ostrova s meradlom určitej dĺžky. Takto zistená hodnota by však stále bola iba aproximáciou skutočnej dĺžky ostrova.

Pobrežie ostrova môžeme tiež začať obkladať palicami (obrázok 1), najprv dlhšími, ktoré však nepokryjú všetky výčnelky členitého pobrežia ostrova, preto bude nutné vziať stále kratšie palice, aby sme dokázali ostrov obložiť a takto určiť dĺžku jeho hranice s maximálnou možnou presnosťou.



Obrázok 1: Dĺžka hranice ostrova.

Na rozdiel od „rozumných kriviek“ (napríklad kružnica), aproximácia dĺžky, získaná použitím stále kratšieho meradla (palice), nesmeruje k určitej hodnote, ale stále rastie. Je to logické vzhľadom na to, že zmenšovaním meradla zahŕňame do meranej dĺžky pobrežia stále viac detailov, ktoré sme predtým zanedbali. Paradoxom, s ktorým sa pri takomto obkladaní ostrova stretneme, je zistenie, že hoci plocha, na ktorej sa ostrov nachádza je konečná, dĺžka ohraničujúca túto plochu je nekonečná.

Richardson naniesol do grafu hodnoty logaritmov nameraných dĺžok v závislosti od dĺžky použitého meradla a dostal pomerne presnú priamku, teda lineárnu závislosť medzi týmito dvoma premennými (Ashford, 1985). Novou charakteristikou členitosti jednotlivých pobreží sa na základe sklonu priamky stala smernica uvedenej logaritmickej závislosti. Túto závislosť si o niekoľko rokov neskôr všimol francúzsko-americký matematik poľského pôvodu a otec fraktálovej geometrie Benoît Mandelbrot a vysvetlil ju v rámci fraktálovej geometrie v diele „Fractals and the Geometry of Nature" (Mandelbrot, 1982).

Každý systém, ktorý vykonáva nejakú prácu, má svoj počiatočný a konečný stav. Atraktor definujeme ako stabilný stav daného systému. Napríklad pre reálne kyvadlo platí, že atraktorom je stav, v ktorom kyvadlo nemá už žiadnu kinetickú energiu. Atraktorom pohybu planéty (napríklad Zeme) je zase uzavretá elipsa. Niektoré systémy majú tzv. podivný atraktor, čiže vykazujú chaotické správanie. Všetky chaotické atraktory sú fraktálmi (Eckmann, Ruelle, 1985).

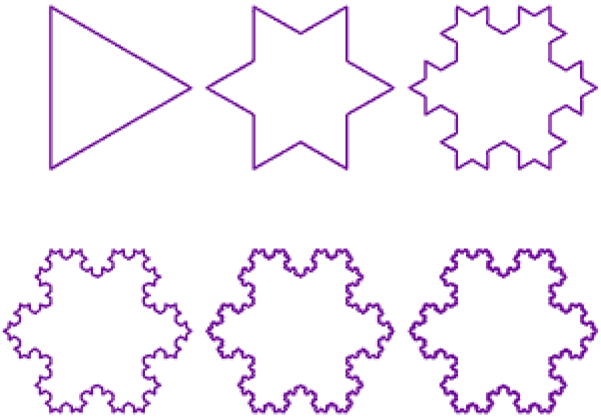
Pôvod slova fraktál môžeme nájsť v latinčine pod pojmom fractus, čo znamená zlomený, rozlámaný, rozbitý. Fraktálmi sa označujú v istom zmysle nepravidelné geometrické útvary, deliteľné tak, že ak z pôvodného útvaru určitú časť odoberieme (obrázok 2), vzniknú nám jednotlivé časti, z ktorých každá je v ideálnom prípade zmenšenou kópiou celku (Mandelbrot, 1982). Túto vlastnosť nazývame aj sebapodobnosť (Peitgen et al., 2004). Pojem fraktál použil po prvýkrát Benoît Mandelbrot v roku 1975.

Obrázok 2: Princíp tvorby fraktálu.

Jedným z najznámejších fraktálov je Kochova krivka (obrázok 3), ktorá sa po prvýkrát objavila v článku švédskeho matematika Helge von Kocha z roku 1904. Princíp jej konštrukcie je jednoduchý. Vezmeme si rovnostranný trojuholník a rozdelíme každú z jeho strán na tretiny. Nad prostrednou tretinou skonštruujeme nový, menší rovnostranný trojuholník. Takto vznikne hviezda so šiestimi vrcholmi a 12 hranami. Ďalej pokračujeme podľa uvedeného návodu, pričom výsledkom bude vločka, ktorej hrany budú stále členitejšie. Postup môžeme opakovať donekonečna (Peitgen et al., 2004).

Dôležitým pojmom je tiež dimenzia, ktorá nám udáva, do koľkých na seba kolmých smerov sa môžeme v danom priestore vydať. Kochova krivka má neceločíselnú – fraktálnu – dimenziu. Fraktálna dimenzia Kochovej krivky je 1,2619, teda z topologického hľadiska je to niečo medzi priamkou (dimenzia = 1) a hladkou plochou (dimenzia = 2). Neceločíselnú dimenziu spôsobuje práve značná štruktúrovanosť krivky a toto číslo uvádza mieru zložitosti krivky (Crilly, 2011).

Kurióznou vlastnosťou Kochovej krivky je, podobne ako bola meraná dĺžka hranice ostrova, že hoci ohraničuje len konečnú plochu, lebo celé jej vnútro sa v každom kroku zmestí do jedného konkrétneho útvaru (napríklad kruhu), jej obvod donekonečna narastá. Je to teda krivka, ktorá ohraničuje konečnú plochu, ale jej hranica má nekonečnú dĺžku (Peitgen et al., 2004).

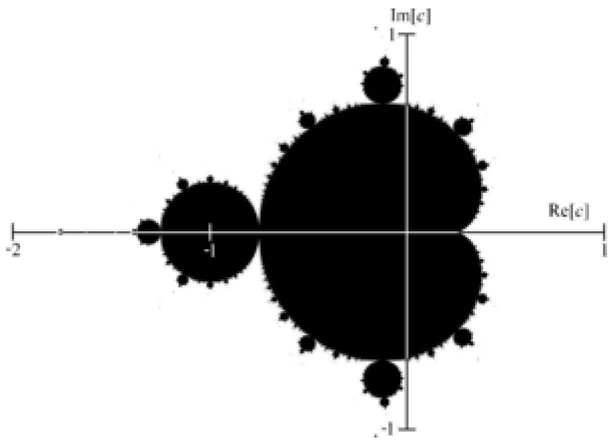


Obrázok 3: Kochova krivka.

Konštrukcia Kochovej krivky je postavená na jednoduchom opakujúcom sa pravidle iterácie alebo rekurzie. Ak si zvolíme ľubovoľnú mierku, pod ktorou budeme krivku skúmať, vždy budeme vidieť základnú opakujúcu sa členitosť. Obvod krivky nebude, ani pri najväčšom možnom zväčšení jej detailov, hladký. Hladkosť typická pre euklidovskú geometriu tu chýba.

Najslávnejším fraktálom je tzv. Mandelbrotova množina. Podobne ako Kochova krivka, aj táto množina vzniká použitím rekurzívneho, iteračného pravidla. Benoît Mandelbrot skúmal jednoduchý vzorec $x_{n+1} = x_n^2 + c$. Ak vezmeme počiatočnú hodnotu x a konštantu c, ďalšiu hodnotu vypočítame tak, že x umocníme na druhú a pripočítame konštantu. Takto novo získanú hodnotu dosadíme opäť do rovnice a celý proces môžeme opakovať teoreticky donekonečna. Mandelbrotov úžasný objav spočíval v tom, že pokiaľ x a c môžu byť komplexné čísla, teda čísla obsahujúce $\sqrt{-1}$, a za počiatočnú hodnotu x zvolíme 0, môže viesť zmena hodnoty c k dvom rôznym výsledkom. Vzniknutá postupnosť čísel môže divergovať k nekonečnu, ale existuje tiež nekonečne veľa hodnôt, ktoré k nemu nevedú (Mandelbrot, 2003). Mandelbrotova množina (obrázok 4) je práve množinou týchto hodnôt.

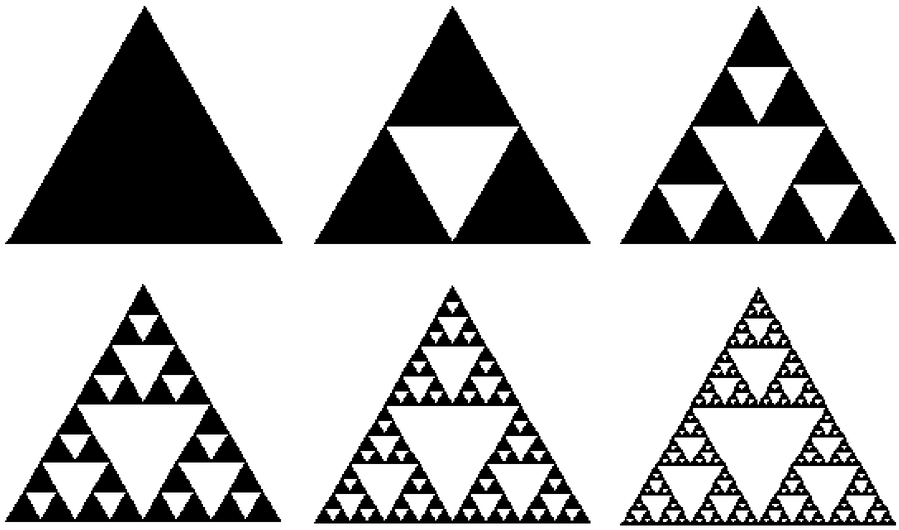
Ako to už býva, pri niektorých slávnych objavoch zohrala svoju úlohu do istej miery aj náhoda. Benoît Mandelbrot do počítača napísal uvedený rekurzívny vzorec a zvolil počiatočné hodnoty. Počítač však zabudol pred odchodom domov vypnúť, takže výpočty prebiehali stále a stále dookola, pričom program vykresľoval postupnosť, ktorá vznikala. Ráno Mandelbrot uvidel na monitore počítača krásny fraktál. Mandelbrot neskôr zistil, že v chaose sa vyskytujú niektoré fraktálne zásady a princípy, ktoré sa dajú uplatniť v modernej matematike na popísanie javov, ktoré by boli bez tohto objavu považované len za dielo náhody.



Obrázok 4: Mandelbrotova množina.

Mandelbrot svoje objavy publikoval vo svojom diele „Fractals and the Geometry of Nature“ (Mandelbrot, 1982), ktoré sa zaoberá práve fraktálovou geometriou, sebapodobnosťou a vzťahom medzi poriadkom a chaosom.

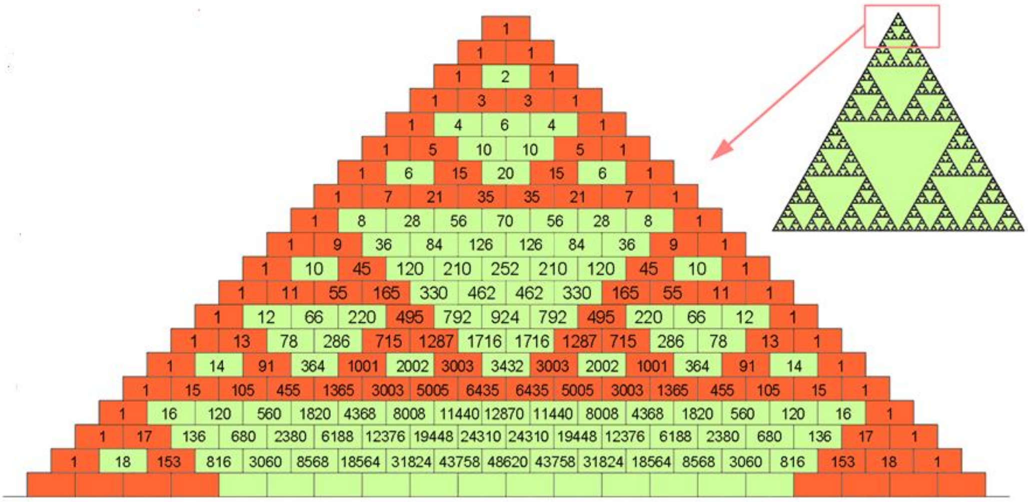
Jedným z ďalších významných fraktálov je tzv. Sierpinského trojuholník (obrázok 5; Peitgen et al., 2004), pomenovaný po poľskom matematikovi Waclawovi Sierpinskom.



Obrázok 5: Sierpinského trojuholník.

Základom Sierpinského trojuholníka je plný rovnostranný trojuholník, ktorý vieme pomocou stredných priečok rozdeliť na štyri zhodné a tiež rovnostranné trojuholníky, čo vyplýva z podobnosti a z vlastností rovnostranného trojuholníka. Prostredný trojuholník „vyberieme“ a uvedený postup ďalej opakujeme.

Zaujímavou skutočnosťou je ďalší objav, ak vezmeme Pascalov trojuholník (obrázok 6) a vyfarbíme rôznymi farbami párne (zelená) a nepárne (oranžová) čísla, získame obrázok, kopírujúci štruktúru Sierpinského trojuholníka (Peitgen et al., 2004).



Obrázok 6: Pascalov a Sierpinského trojuholník.

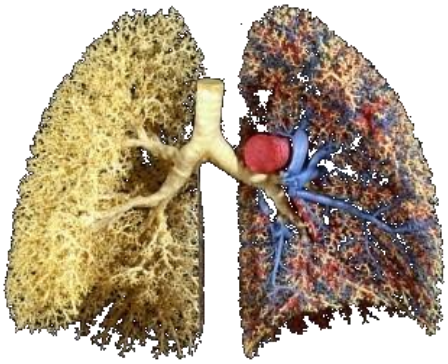
3 Využitie fraktálovej geometrie

Postupne sa fraktálová geometria presúvala z fázy objavovania do fázy praktického využitia. Vďaka Mandelbrotovmu objavu, že v chaose sa vyskytujú niektoré fraktálne zásady a princípy, sa modernej matematike darí nachádzať matematické vzťahy aj v javoch, ktoré by boli bez tohto objavu považované len za dielo náhody. Tá naďalej ostáva do istej miery prítomná. Chaos je sebapodobný, teda nezáleží na tom, akú mierku na pozorovanie si zvolíme, stále pôjde o chaos.

Fraktály nie sú len počítačom vygenerované obrazce, na pohľad síce pekné, ale z praktického hľadiska nevyužiteľné. V prírode sú fraktály bohato zastúpené (obrázok 7) napríklad v podobe papraďového listu, karfiolu, slimačích ulít, bleskov, oblakov, či vodopádov. Aj keď sú to veľmi nepravidelné fraktály a nedajú sa korektne matematicky zapísať, môžeme si všimnúť, že po priblížení sa opakuje pôvodný vzor (Voss, 1988).

Obrázok 7: Fraktály v prírode.

Ani ľudské telo nie je výnimkou a fraktály sú v ňom prítomné vo vetvení sa ciev a pľúcnych alveol, ktoré je detailne viditeľné, ak sa pozrieme na obrázok pľúc (obrázok 8; Comanescu et al., 2006).



Obrázok 8: Fraktály v ľudskom tele.

Fraktály si našli miesto svojho využitia v medicíne, chémii, biológii, či informatike. Využívajú sa napríklad na modelovanie rôznych procesov. Metódy rozvíjané v teórii chaosu sa uplatnili pri riešení mnohých biologických a fyziologických problémov dotýkajúcich sa človeka.

3.1 V medicíne

Ľudské telo je malou elektrárňou. Elektrická aktivita srdca sa prejavuje zmenami elektrického napätia a to nielen v svalovine, ale i na povrchu tela (Trojan, 1999). Tieto zmeny vznikajú sumáciou elektrických prejavov (akčných potenciálov) všetkých srdcových buniek. Pretože jednotlivé bunky nemajú v danom čase rovnakú hodnotu akčného potenciálu, na povrchu membrán a všade v okolí srdca vniká tok elektrického prúdu. Tkanivo ľudského tela je vodivé, keďže obsahuje veľké množstvo nabitých iónov. Medzi rôznymi miestami na povrchu tela vzniká napätie, ktoré vieme v čase zaznamenávať pomocou elektrogardiogramu (EKG; Trojan, 1999).

Pri sledovaní signálu z EKG, sa zistilo, že srdcová činnosť vykazuje nepravidelnosti, ktoré sú typické práve pre nelineárne dynamické systémy. Hoci by sa mohlo zdať, že činnosť srdca je viac-menej pravidelnou, nie je to tak, keďže je ovplyvňovaná mnohými podmienkami ako fyzická záťaž, trávenie, spánok, dýchanie. V podstate ide o synchronizáciu srdcovej činnosti s rytmom dýchania. Signál srdca môže byť krátkodobo aj úplne periodický, vtedy však ide prevažne o patologické javy, napríklad fibrilácia (Mäkikallio, 1998).

V tehotenstve je možné pomocou chaotických filtrov oddeliť EKG signál plodu od celkového signálu EKG matky a ďalšieho šumu. Proces eliminácie okolitého šumu a spôsob oddelenia EKG signálu plodu o matky opisujú podrobne Richter, Schreiber a Kaplan (1998).

3.2 Vo fyzike

Fyzika opisuje tzv. problém troch telies, ktorý takisto súvisí s fraktálmi a dynamickými systémami. Problém je zadaný takto: Máme vo vesmíre tri telesá a dané počiatočné podmienky – polohu telies, ich hmotnosť a počiatočnú rýchlosť a smer pohybu. Úlohou je analyticky vypočítať polohu telies v ľubovoľnom okamihu. Bolo dokázané (XiaoMing, ShiJun, 2014), že tento problém sa analyticky nedá riešiť. Vzhľadom na to, že pre problém dvoch telies je riešenie v newtonovskej mechanike triviálne, toto zistenie bolo prinajmenšom prekvapivé. Tri telesá sa pohybujú po čiastočne chaotických dráhach a sú priťahované k určitým bodom – podivným atraktorom – na svojej dráhe (XiaoMing, ShiJun, 2014).

3.3 V chémii

V chémii sa s fraktálnou štruktúrou môžeme stretnúť pri skúmaní Brownovho pohybu, ktorý vzniká chaotickým pohybom častíc v látke (Krätsmár-Šmogrovič et al., 2007). Je spôsobený nenulovou teplotou telesa, pričom v tomto prípade sa nulou nemyslí 0 °C, ale absolútna nula (−273,15 °C alebo 0 K). Pri tejto teplote, alebo skôr mraze, sa zastavuje všetok pohyb, teda častice sú v pokoji. Pri každej teplote, ktorá je vyššia od absolútnej nuly, je pohyb častíc prítomný buď v podobe slabého kmitania, alebo v podobe voľného pohybu častíc v priestore. Brownov pohyb môžeme sledovať napríklad pri miešaní dvoch kvapalín alebo plynov. Klasickým príkladom, ktorý demonštruje Brownov pohyb častíc, je difúzia (Růžičková, Kotlík, 2009). S využitím fraktálovej geometrie vieme tento neusporiadaný pohyb častíc pomerne presne simulovať aj na počítači.

3.4 V biológii

V biológii, ale i v chémii, stále stúpa záujem o odhalenie tajomstva genetickej informácie, uloženej v nukleových kyselinách DNA a RNA. Jednou z otázok je, ako rozlíšiť kódujúce a nekódujúce sekvencie (Kyriazis, 1991). Keďže predošlé výskumné postupy nepriniesli žiadne uspokojujúce odpovede, v roku 2002 sa čínsky tím rozhodol využiť, okrem iných výskumných prostriedkov, aj fraktálnu dimenziu a multifraktálnu analýzu. Matematickú reprezentáciu štruktúry DNA popisujú vo svojom diele „Fractals in DNA sequence analysis“ (Zu-Guo et al., 2002), pričom na jej vytvorenie im poslúžili poznatky z oblasti teórie chaosu aj fraktálovej geometrie. V dvojzávitnici DNA si všimli opakujúce sa úseky (fraktálové štruktúry), teda úseky s rovnakým poradím báz, a práve uvedené úseky sú vhodnými kandidátmi na naviazane restrikčných endonukleáz, teda enzýmov, ktoré dokážu štiepiť reťazec DNA. Následne je odštiepená časť reťazca za účinku enzýmu DNA-ligázy „pripevnená“ na klonovací vektor (plazmid), za vzniku rekombinantného vektora, ktorý je vložený do hosťovskej bunky. Takýmto klonovaním je možné vytvoriť mnoho kópií rekombinantnej DNA.

3.5 V ekonomike

Fraktály si našli svoje uplatnenie aj v ekonomike. Američan R. N. Elliottovi v polovici tridsiatych rokov 20. storočia prichádza na burzu, kde ho fascinujú pohyby cien na Wall Street. Uvedomuje si dynamické cyklické správanie sa trhu a spíše pre toto správanie zoznam pravidiel. Tie vydáva vo svojej práci „The Wave Principle“ (Elliott, 1992). Po úspešných prognózach, ktoré s využitím predchádzajúcich zistení urobil, získava povesť burzového mága. Podľa neho dostala názov Eliotova vlna, ktorá predstavuje tendenciu cien na burze pohybovať sa vo vlnách. Vlna v grafe vzniká prispôsobovaním sa cien aktuálnej potrebe daného tovaru. Keď je tovaru málo, jeho cena stúpa, keď je ho prebytok, cena zaň klesá. Bolo dokázané, že Eliotove vlny sú fraktálmi, pretože jedna Eliotova vlna je tvorená mnohými ďalšími, pričom nezáleží na mierke, ktorú si pri sledovaní priebehu vlny zvolíme. Pri analýze vlny môžeme spozorovať dve fázy, ktoré sa cyklicky opakujú – impulzívna fáza (v smere trendu) a korekčná fáza (proti smeru trendu; Elliott, 1992).

3.6 V informatike

Pravdepodobne najväčšie uplatnenie má fraktálová geometria v počítačovej grafike. Rozvoj grafických možností počítačov si vyžiadal objavenie a zapojenie nových postupov, postupov ako modelovať prírodné objekty.

Na modelovanie objektov sa dlhý čas používali modelovacie programy CAD a CAM (Crilly et al., 1991), ktoré boli veľmi užitočné v prípade modelovania technických a geometrických predmetov. Programy však neprinášali vierohodné a kvalitné zobrazenia zložitejších prírodných objektov, napríklad pohorí, stromov, rastlín, kameňov alebo morských vĺn. Kvôli členitosti týchto objektov bola práca časovo náročná (Žára et al., 2004).

Obrázok 9: Fraktálmi generovaný obraz pohoria.

Grafikom na pomoc prišlo procedurálne modelovanie (Žára et al., 2004), kedy animátor nezadáva priamo tvar objektu, ale spôsob (predpis), akým bude objekt generovaný. Tento spôsob nielenže prináša kvalitné výsledky, vďaka ktorým diváci v kinách nevedia rozoznať simulovaný objekt od reálneho, ale i niekoľkonásobne skracuje čas potrebný na vytvorenie týchto objektov. Pri procedurálnom modelovaní sa okrem iného využívajú aj fraktály (obrázok 9). Výhoda spočíva nielen v rýchlosti generácie objektov, ale i v menšom úložnom priestore, ktorý je potrebný na textúru generovanú fraktálmi, keďže zaberá len niekoľko bitov.

4 Záver

Mnohí matematici, vrátane Mandelbrota, boli uchvátení a nadchnutí krásou fraktálov. Nejeden z nich si vytváral obrázky fraktálov len pre ich krásu, bez toho, aby sa snažil objavovať ich aplikáciu v praktickom živote. Práve tieto obrázky prispeli k popularizácii fraktálovej geometrie aj medzi laikmi.

Ak by chýbalo akékoľvek využitie fraktálovej geometrie, fraktály by sa stali iba umeleckými dielami, ktoré sú síce krásne na pohľad, ale v bežnej praxi nepoužiteľné. Pokrok vo vede si však žiadal experimentovať a pokúsiť sa prepojiť také oblasti a témy, ktoré zdanlivo nemajú nič spoločné. Takýmto spôsobom sa fraktálová geometria stala dôležitou aj pre iné vedné odbory ako matematiku a našla si svoje miesto a možnosti využitia v medicíne, fyzike, biológii, chémii, ekonomike, či informatike. Samozrejme, nepopierateľné využitie fraktálov sa nachádza aj v umení a architektúre.

Elegantné zákony, ktoré v prírode platia a je ich možné opísať jazykom matematiky, navonok prejavujú svoju eleganciu v tvaroch, štruktúrach, či dráhach objektov. Táto chaotická krása je výsledkom mnohých faktorov, ktoré ju ovplyvňujú a podmieňujú. Môžeme považovať za zázrak, že dokážeme nahliadnuť aspoň sčasti za oponu a uvidieť tú najnapínavejšiu a najkrajšiu scénu, ktorú tam – na pódiu „organizovaného chaosu“, hrá tá najtalentovanejšia umelkyňa – príroda sama.

Literatúra

1. Ashford, O. M. 1985. *Prophet or Professor? : Life and work of Lewis Fry Richardson.* Bristol : Adam Hilger. ISBN 978-0-85274-774-2.
2. Comanescu, A. – Comanescu, D. – Neagoe, A. 2006. Fractal models for human body systems simulation. In *Journal od Biomechanics.* Vol. 39, no. 1, pp. 431. ISSN 0021-9290.
3. Crilly, T. 2011. *Matematika : 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať.* Bratislava : SLOVART. ISBN 978-80-556-0294-3, s. 103.
4. Crilly, A. J. – Earnshaw, R. – Jones Huw. 1991. *Fractals and Chaos.* New York : Springer-Verlag. ISBN 978-1-4612-7770-5.
5. Čižmár, J. 2017. *Dejiny matematiky : od najstarších čias po súčasnosť.* 1. vyd. Bratislava : Perfekt, a. s. ISBN 978-80-8046-829-3, s. 130–221, 227–231, 332–336, 355–373, 835.
6. Eckmann, J. P. – Ruelle, D. 1985. Ergodic Theory of chaos and strange attractors. In *Reviews of modern physics.* Vol. 57, no. 3, pp. 617. ISSN 0034-6861, s. 279–312.
7. Elliott, R. K. 1992. The Third Wave Breaks on the Shores of Accounting. In *Accounting Horizons.* Vol. 6, no. 2, pp. 61–96. ISSN 0888-7993.
8. Krätsmár-Šmogrovič, J. et al. 2007. *Všeobecná a anorganická chémia.* 2., upravené vyd. Martin : Osveta. ISBN 978-80-8063-245-8, s. 131.
9. Kyriazis, M. 1991. Applications of chaos theory to the molecular biology of aging. In *Experimental Gerontology.* Vol. 26, no. 6, pp. 569–572. ISSN 0531-5565.
10. Kellert, S. H. 1994. *In the wake of chaos : Unpredictable Order in Dynamical Systems.* London : The University of Chicago Press. ISBN 0-226-42976-8, s. 1–5, 12.
11. Mäkkikallio, T. 1998. *Analysis of heart rate dynamics by methods derived from nonlinear mathematics.* Oulu : Oulu University Library. ISBN 951-42-5013-3, s. 19–20.
12. Mandelbrot, B. B. 1982. *The fractal geometry of nature.* New York : W. H. Freeman and Company. ISBN 978-0716711865.

13. Mandelbrot, B. B. 2003. *Fraktály : tvar, náhoda, dimenzia.* 1. vyd. Praha : Mladá Fronta. ISBN 80-204-1009-0.
14. Mordukhovich, B. 2011. Beauty of mathematics. In *Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti.* Vol. 89, no. 2, ISSN 1825-1242.
15. Papert, S. et al. 2004. Affective Learning – A Manifesto. In *BT Technology Journal.* Vol. 22, no. 4, str. 263.
16. Peiten, H.-O. – Jürgens, H. – Saupe, D. 2004. *Chaos and fractals.* 2. vyd. New York : Springer--Verlag. ISBN 978-0-387-21823-6, s. 62, 76–79, 81, 87–90.
17. Reyes, M. G. 2004. The rhetoric in mathematics: Newton, Leibniz, the calculus, and the rhetorical force of the infinitesimal. In *Quarterly Journal of Speech.* Vol. 90, no. 2, pp. 159–184. ISSN 0033-5630.
18. Richter, M. – Schreiber, T. – Kaplan, D. T. 2004. Fetal ECG extraction with nonlinear state--space projections. In *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* Vol. 45, no. 1, pp. 133–137. ISSN 0018-9294.
19. Růžičková, K. – Kotlík, B. 2009. *Chemie v kostce.* 1. vyd. Praha : FRAGMENT. ISBN 978-80--253-0599-7, s. 191.
20. Trojan, S. 2004. *Lékařská fyziologie.* 4. prepracované a doplnené vyd. Praha : Grada. ISBN 80-247-0512-5, s. 276–277.
21. Voss, R. F. 1988. Fractals in nature. In Barnsley, M. F., ed. *The Science of Fractal Images.* New York : Springer-Verlag. S. 21-70. ISBN 978-1-4612-8349-2.
22. XiaoMing, L. – ShiJun, L. 2014. On the stability of the three classes of Newtonian three-body planar periodic orbits. In *Science China Physics, Mechanics & Astronomy.* Vol. 57, no. 11, pp. 2121–2126. ISSN 1674-7348.
23. Zu-Guo, Y. et al. 2002. Fractals in DNA sequence analysis. In *Chinese Physics.* Vol. 11, no. 12, pp. 1313–1318. ISSN 1009-1963.
24. Žára, J. et al. 2004. *Moderní počítačová grafika.* 2. vyd. Brno : Computer Press. ISBN 8025104540, s. 265–300.

Kontakt

Mgr. Jana Žolnová

Katedra chémie, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda Andreja Hlinku 603/1, 949 74 Nitra
jana.zolnova95@gmail.com

Cirkevná základná škola sv. Cyrila a Metoda
Komenského ul. 3064/41, 926 01 Sereď