9 Neurčitý integrál

9.1 Primitívna funkcia a neurčitý integrál

Funkcia $F(x)$ sa nazýva primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b), ak pre každé $x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Príklad 9.1

Funkcia $F(x) = x^3 + 2$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x) = 3x^2$, pretože $F'(x) = \left(x^3 + 2\right)' = 3x^2 = f(x) \quad \forall x \in R$.

Všimnite si, že aj funkcia $G(x) = x^3 - 5$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$, lebo $G(x) = \left(x^3 - 5\right)' = 3x^2 = f(x)$.

Veta 9.1

Nech $F(x)$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b). Funkcia $G(x)$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na (a,b) vtedy a len vtedy, ak existuje také reálne číslo c, že pre všetky $x \in (a,b)$ platí $G(x) = F(x) + c$.

Množinu všetkých primitívnych funkcií $F(x)$ k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b) nazývame neurčitým integrálom funkcie $f(x)$ na intervale (a,b) a označujeme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

Metódu, ako nájsť k danej funkcii neurčitý integrál, nazývame integrovaním.

9.2 Integračné vzorce

Základné vzorce pre integrovanie funkcií dostaneme použitím (obrátením) základných vzorcov na derivovanie.

Veta 9.2

1. $\int 1 dx = \int dx = x + c$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ pre $a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ pre $a \neq 1, a > 0$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + c$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, x + c \\ -\mathrm{arccotg}\, x + c \end{cases}$
11. $\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c, a \in R$
14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$

Vzorce platia pre tie intervaly, v ktorých sú funkcie na pravej strane rovnosti definované. O ich správnosti sa môžeme presvedčiť derivovaním.

Veta 9.3 (o integrovaní súčtu a rozdielu funkcií a c – násobku funkcie)

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)dx$$

$$\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx=c\int f(x)\,dx$$

Príklad 9.2 Vypočítajte $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Riešenie:

$$\int\frac{3x-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\int 3\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$$

$$3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=2x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+c=2\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{x}\right)+c$$

na intervale $(0,\infty)$.

9.3 Substitučná metóda a metóda per partes

Z vety o derivácii zloženej funkcie získame jednu z najdôležitejších metód integrovania – substitučnú metódu. Je založená na nasledujúcom tvrdení.

Veta 9.4 (prvá veta o substitúcii)
Nech je funkcia $F(t)$ primitívna k funkcii $f(t)$ na intervale J_T. Nech má funkcia $\varphi(x)$ na otvorenom intervale J_X deriváciu $\varphi'(x)$ a nech pre každé $x\in J_X$ platí $\varphi(x)=t\in J_T$. Potom je funkcia $F(\varphi(x))$ primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ na intervale J_X, t.j. $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=F[\varphi(x)]+c$.

Poznámka:
Tvrdenie vety používame nasledovne:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\left|\begin{matrix}t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)\,dx\end{matrix}\right|=\int f(t)\,dt=F[t]+c=F[\varphi(x)]+c.$$

Celý postup si môžeme mechanicky zapamätať takto:

Ak máme substitučnú rovnicu $\varphi(x)=t$, potom po derivovaní $\varphi'(x)=\frac{dt}{dx}$ a po úprave $\varphi'(x)\,dx=dt$.

Všimnime si, že integrovaná funkcia má tieto vlastnosti:

1. je súčinom dvoch funkcií $f[\varphi(x)]$ a $\varphi'(x)$,
2. prvá z nich je zloženou funkciou s hlavnou zložkou f a vedľajšou zložkou φ. Druhá z nich je deriváciou vedľajšej zložky φ.

Príklad 9.3 Vypočítajte $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} arctgx = t \\ \frac{1}{1+x^2}dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + c$$

Najprv sme použili substitúciu $\operatorname{arctg} x = t$. Potom sme zderivovali zvlášť jej pravú stranu a zvlášť jej ľavú stranu, čím sme získali vzťah $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Napokon sme v pôvodnom integráli $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ nahradili čitateľ výrazom t^2 a zvyšok výrazom dt, čím sme získali $\int t^2 \mathrm{d}t$, ktorý sa rovná $\frac{t^3}{3} + c$. Nahradením t výrazom $\operatorname{arctg} x$ sme získali výsledok v tvare $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + c$.

Príklad 9.4 Vypočítajte $\int \frac{\ln x}{2x}\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int \frac{\ln x}{2x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + c = \frac{t^2}{4} + c = \frac{\ln^2 x}{4} + c$$

Príklad 9.5 Vypočítajte $\int \operatorname{tg} x dx$.

Riešenie:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{-1}{t}dt = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

Príklad 9.6 Vypočítajte $\int x \cdot \sin\left(x^2\right) dx$.

Riešenie:

$$\int x \cdot \sin\left(x^2\right)dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + c$$

Pri integrovaní substitučnou metódou zvyčajne postupujeme takto:

Ak máme vypočítať $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx$, použijeme substitúciu $\varphi(x) = t$, $\varphi'(x)\,dx = dt$ a dostaneme $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx = \int f(t)dt = F(t) + c = F\left[\varphi(x)\right] + c$.

Pri použití tejto metódy integrál $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx$ upravíme na integrál $\int f(t)\,dt$ tak, že integračnú premennú x nahradíme novou premennou $t = \varphi(x)$. Je zrejmé, že tento postup má zmysel použiť len vtedy, ak vieme vypočítať integrál $\int f(t)\,dt$.

Ak, naopak, máme vypočítať $\int f(t)\,dt$, pričom vieme vypočítať $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$, môžeme tiež použiť substitučnú metódu. Pre tento prípad uvedieme novú vetu, ktorá je však bezprostredným dôsledkom vety predchádzajúcej.

Veta 9.5 (druhá veta o substitúcii)
Nech funkcia $x=\varphi(t)$ má na intervale (α,β) deriváciu $\varphi'(t)\neq 0$ a nech funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$, definovaná na intervale (a,b) je inverzná funkcia k funkcii $x=\varphi(t)$ na intervale (α,β). Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale (a,b). Nech $G(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ na intervale (α,β). Potom je funkcia $G(\varphi^{-1}(x))$ primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b).

Poznámka:
Tvrdenie tejto vety môžeme zapísať pomocou vzorca

$$\int f(x)dx=\begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt\end{vmatrix}=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=G(t)+c=G\left(\varphi^{-1}(x)\right)+c\,.$$

Príklad 9.7 Vypočítajte $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.
Riešenie:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\begin{vmatrix} x=2\sin t \\ dx=2\cos t\,dt\end{vmatrix}=\int\sqrt{4-(2\sin t)^2}\cdot 2\cos t\,dt=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$=2\cdot\int\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}\cdot\cos t\,dt=4\cdot\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=4\cdot\int\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt=$$

$$4\cdot\int|\cos t|\cdot\cos t\,dt=4\cdot\int\cos^2 t\,dt=2\int(1+\cos 2t)dt=2\int 1dt+2\int(\cos 2t)dt=$$

$$2t+\sin 2t+c=2\arcsin\frac{x}{2}+\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)+c=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2}+c$$

Pri výpočte sme použili vzorce:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow 1-\sin^2 x=\cos^2 x$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)=\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2}$ (poznámka: tento vzorec presahuje vedomostný rozsah tejto publikácie)

Uvedomme si, že ak $x\in\langle -2;2\rangle$ (čo je definičným oborom výrazu $\sqrt{4-x^2}$), potom $t\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$, a preto $|\cos t|=\cos t$.

Všimnime si, že na začiatku sme použili substitúciu $x=2\sin t$. Žiaľ, neexistuje žiadna metóda, ktorá by nám jasne napovedala, akú substitúciu treba pri ktorom integrále použiť.

Poznámka:
Ak pri výpočte jedného integrálu použijeme rôzne substitúcie, môžeme dostať rôzne výsledky. Funkcie, ktoré dostaneme sa však líšia iba o aditívnu konštantu. Správnosť výpočtu overíme derivovaním výslednej funkcie.

Metóda per partes

Metódu integrovania, ktorú nazývame per partes, dostaneme z vety o derivovaní súčinu dvoch funkcií. Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 9.6
Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú na intervale (a,b) derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$. Nech $H(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f'(x)g(x)$ na intervale (a,b). Potom je funkcia $f(x)g(x)-H(x)$ primitívnou funkciou k funkcii $f(x)g'(x)$ na intervale (a,b).
Dôkaz:
Pretože podľa predpokladu $H'(x)=f'(x)g(x)$ na intervale (a,b), dostávame
$[f(x)g(x)-H(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-f'(x)g(x)=f(x)g'(x)$ na intervale (a,b).

Poznámka:
Tvrdenie tejto vety môžeme zapísať v tvare $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$.
Aby bol výpočet prehľadnejší, zvykneme požívať symbolický zápis $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$, kde u,v sú funkcie premennej x.

Poznámka:
Metódu per partes (t.j. integrovanie po častiach) používame najmä na integrovanie súčinu dvoch funkcií. Úspech použitia metódy závisí od toho, ako si zvolíme funkcie u a v'. Nie každá voľba týchto funkcií vedie k cieľu. Zaručený návod na použitie tejto metódy neexistuje. Uvedieme niekoľko základných typov funkcií, ktoré integrujeme metódou per partes.

1. Integrál z funkcií tvaru $P_n(x)f(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupňa n
Pokiaľ funkciu $f(x)$ vieme integrovať, volíme označenie funkcií v per partes takto: $u=P_n(x), v'=f(x)$. Funkcie u a v' volíme opačne len vtedy, keď $f(x)$ nevieme integrovať.

Príklad 9.8 Vypočítajte $\int x\sin xdx$.
Riešenie:

$$\int x\sin xdx=\begin{vmatrix} u=x & v'=\sin x \\ u'=1 & v=-\cos x\end{vmatrix}=x\cdot(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx=$$

$$-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+c$$

Príklad 9.9 Vypočítajte $\int x\ln xdx$.
Riešenie:

$$\int x\ln xdx=\begin{vmatrix} u=\ln x & v'=x \\ u'=\dfrac{1}{x} & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=(\ln x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=(\ln x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$

2. Integrál niektorých funkcií, ktoré nie sú uvedené medzi základnými vzorcami

V tomto prípade funkciu $f(x)$ zapíšeme v tvare $1\cdot f(x)$ a metódou per partes počítame integrál tohto súčinu.

Príklad 9.10 Vypočítajte $\int \text{arctg}x dx$.

Riešenie:

$$\int \text{arctg}\, x dx = \int 1\cdot \text{arctg}\, x \text{d}x = \begin{vmatrix} u = \text{arctg}\, x & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{1+x^2} & v = x \end{vmatrix} = \text{arctg}x\cdot x - \int\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot x\right)dx =$$

$$x\cdot \text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$$

Pomocný výpočet:

$$\int\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot x\right)dx = \int\frac{x}{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{vmatrix} = \int\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\ln|t| + c = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|1+x^2\right| + c$$

Týmto spôsobom počítame aj integrály z funkcie $\ln x$, zo všetkých cyklometrických funkcií, atď.

9.4 Úlohy

Nájdite primitívne funkcie k daným funkciám.

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7$

   Riešenie:

   $$\int f(x)dx = \int\left(x^3 + 3x^2 + 7\right)dx = \int x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int 7dx =$$

   $$\int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 7\int 1dx = \frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} + 7\cdot x + c = \frac{x^4}{4} + x^3 + 7x + c$$

   Pravidlá:

   $\int 1dx = x$ $\qquad$ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

   $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx$ $\qquad$ $\int\left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $f(x) = 4x^6 - 8x^2 + 2x$

   Riešenie:

   $$\int f(x)dx = \int\left(4x^6 - 8x^2 + 2x\right)dx = 4\int x^6 dx - 8\int x^2 dx + 2\int xdx =$$

   $$= 4\cdot\frac{x^7}{7} - 8\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} + c = \frac{4x^7}{7} - \frac{8x^3}{3} + x^2 + c$$

   Pravidlá:

   $\int 1dx = x$ $\qquad$ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

   $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx$ $\qquad$ $\int\left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $f(x)=\frac{x^3}{4}-\frac{3x^2}{2}$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{x^3}{4}-\frac{3x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int x^3dx-\frac{3}{2}\int x^2dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+c=\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{2}+c$$

Pravidlá:

$$\int 1dx=x \qquad \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx \qquad \int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

4. $f(x)=\sin x+\cos x$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int(\sin x+\cos x)dx=\int\sin x dx+\int\cos x dx=-\cos x+\sin x+c$$

Pravidlá:

$$\int\sin x dx=-\cos x \qquad \int\cos x dx=\sin x$$

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

5. $f(x)=2^x-3^x+4^x-5^x+6^x$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int\left(2^x-3^x+4^x-5^x+6^x\right)dx=\int 2^x dx-\int 3^x dx+\int 4^x dx-\int 5^x dx+\int 6^x dx=$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{6^x}{\ln 6}+c$$

Pravidlá:

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a} \qquad \int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

Metódou per partes nájdite primitívne funkcie k daným funkciám.

6. $f(x)=4x\cdot\sin x$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int 4x\cdot\sin x dx=\begin{vmatrix}u=4x & v'=\sin x\\ u'=4 & v=-\cos x\end{vmatrix}=-4x\cos x-\int -4\cos x dx=$$

$$=-4x\cos x+4\int\cos x dx=-4x\cos x+4\sin x+c$$

Pravidlá:

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx$$

7. $f(x)=x^2\cdot e^x$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int x^2\cdot e^x dx=\begin{vmatrix}u=x^2 & v'=e^x\\ u'=2x & v=e^x\end{vmatrix}=x^2e^x-\int 2xe^x dx=\begin{vmatrix}u=2x & v'=e^x\\ u'=2 & v=e^x\end{vmatrix}=$$

$$=x^2e^x-\left[2xe^x-\int 2e^x dx\right]=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$$

Pravidlá:

$$\int e^x dx=e^x \qquad \int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx$$

Substitučnou metódou nájdite primitívne funkcie k daným funkciám.

8. $f(x)=\sin(3x+2)$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int \sin(3x+2)dx=\begin{vmatrix} t=3x+2 \\ dt=3dx \Rightarrow dx=\frac{1}{3}dt \end{vmatrix}=\int \sin t\cdot\frac{1}{3}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int \sin t dt=\frac{1}{3}(-\cos t)=\frac{-\cos(3x+2)}{3}+c$$

9. $f(x)=\ln(x-4)$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int \ln(x-4)dx=\begin{vmatrix} t=x-4 \\ dt=dx \end{vmatrix}=\int \ln t dt=\int 1\cdot\ln t dt=\begin{vmatrix} u'=1 & v=\ln t \\ u=t & v'=\frac{1}{t} \end{vmatrix}=t\cdot\ln t-\int t\cdot\frac{1}{t}dt=$$

$$=t\cdot\ln t-\int 1dt=t\cdot\ln t-t=(x-4)\ln(x-4)-x+4+c=(x-4)\ln(x-4)-x+c$$

10. $f(x)=\sqrt{2x+3}$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int \sqrt{2x+3}dx=\begin{vmatrix} t=2x+3 \\ dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt \end{vmatrix}=\int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{t\cdot\sqrt{t}}{3}=\frac{(2x+3)\cdot\sqrt{2x+3}}{3}+c$$

11. $f(x)=2x.\sin x^2$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int 2x.\sin x^2dx=\begin{vmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{vmatrix}=\int \sin t dt=-\cos t=-\cos x^2+c$$

12. $f(x)=x^2.\ln(x^3+3)$

Riešenie:

$$\int f(x)\,dx=\int x^2.\ln(x^3+3)dx=\begin{vmatrix} t=x^3+3 \\ dt=3x^2dx \Rightarrow \frac{1}{3}dt=x^2dx \end{vmatrix}=\int \ln t\cdot\frac{1}{3}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int \ln t dt=\frac{1}{3}\int 1\cdot\ln t dt=\begin{vmatrix} u'=1 & v=\ln t \\ u=t & v'=\frac{1}{t} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}\left(t\cdot\ln t-\int t\cdot\frac{1}{t}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(t\cdot\ln t-\int 1dt\right)=\frac{1}{3}(t\cdot\ln t-t)=\frac{t\cdot\ln t-t}{3}=\frac{(x^3+3)\cdot\ln(x^3+3)-(x^3+3)}{3}+c$$