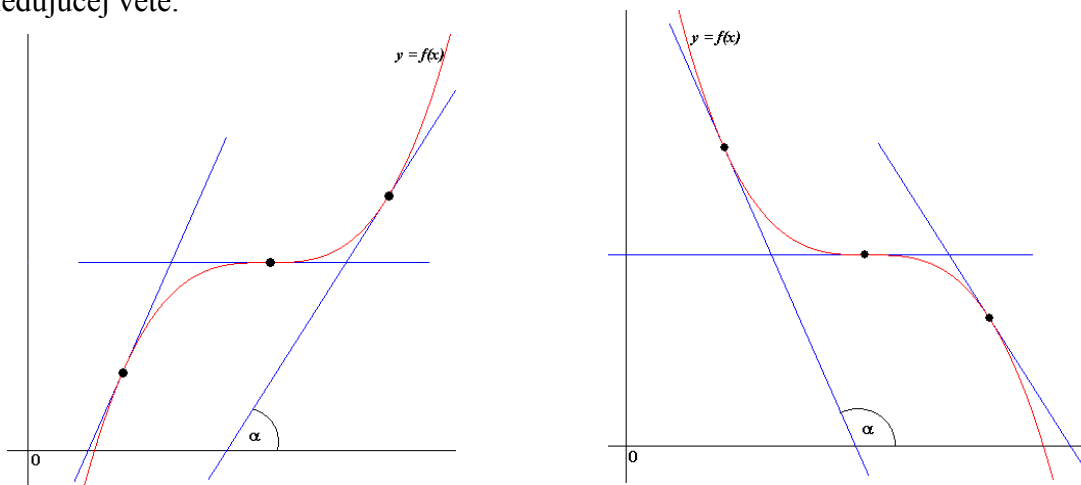


8 Priebeh funkcie

V tejto kapitole uvedieme praktické využitie derivácií funkcie na zisťovanie vlastností funkcie, konkrétne na zisťovanie monotónnosti funkcie, konvexnosti a konkávnosti funkcie, lokálnych extrémov funkcie a globálnych extrémov funkcie. Taktiež uvedieme praktické využitie derivácií funkcie na výpočet limit istého druhu pomocou l'Hospitalovho pravidla.

8.1 Monotónnosť a derivácia

Z predchádzajúcich kapitol vieme, že derivácia funkcie v danom bode je smernica dotyčnice ku grafu funkcie v tomto bode. Ďalej z geometrie je známe, že priamky s kladnou smernicou sú rastúce a so zápornou smernicou klesajúce. Situácia je znázornená na obr. 8.1 a opísaná v nasledujúcej vete.



Obr. 8.1

Veta 8.1: Nech funkcia $f(x)$ je spojitá v intervale J a nech v každom vnútornom bode tohto intervalu má deriváciu. Potom platí:

Ak $f'(x) > 0$, potom $f(x)$ je na intervale J rastúca.

Ak $f'(x) < 0$, potom $f(x)$ je na intervale J klesajúca.

Príklad 8.1 Vyšetrite monotónnosť funkcie $f(x) = \ln x$.

Riešenie:

Najskôr určíme definičný obor funkcie $f(x)$.

$$D(f) = (0; \infty)$$

Teraz vypočítame prvú deriváciu funkcie $f(x)$ a určíme, kedy nadobúda kladné a kedy záporné hodnoty.

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Na intervale $(0; \infty)$, ktorý je definičným oborom funkcie $f(x)$, nadobúda derivácia iba kladné hodnoty. Funkcia $f(x)$ je preto na celom svojom definičnom obore rastúca.

Na obr. 8.2 je červenou farbou znázornený graf funkcie $f(x) = \ln x$ a modrou farbou graf jej

derivácie $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Príklad 8.2 Vyšetrite monotónnosť funkcie $f(x) = x^3 - 3x$.

Riešenie:

Najskôr určíme definičný obor funkcie $f(x)$.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Teraz vypočítame prvú deriváciu funkcie $f(x)$ a určíme, kedy nadobúda kladné a kedy záporné hodnoty.

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

Riešime nerovnice $3x^2 - 3 \geq 0$, $3x^2 - 3 \leq 0$.

$$3x^2 - 3 \geq 0 \qquad 3x^2 - 3 \leq 0$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \qquad x^2 - 1 \leq 0$$

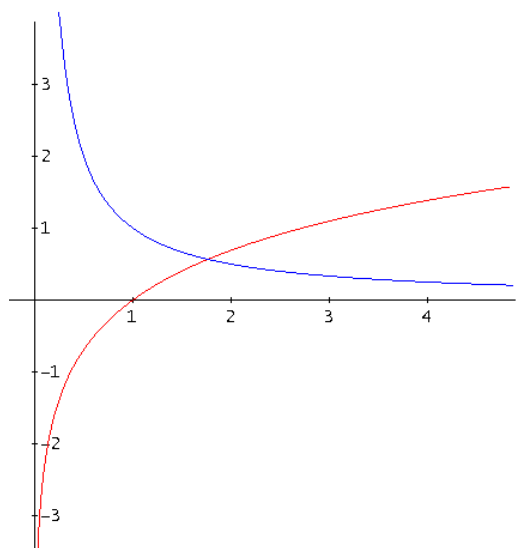
$$x^2 \geq 1 \qquad x^2 \leq 1$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \qquad x \in [-1; 1]$$

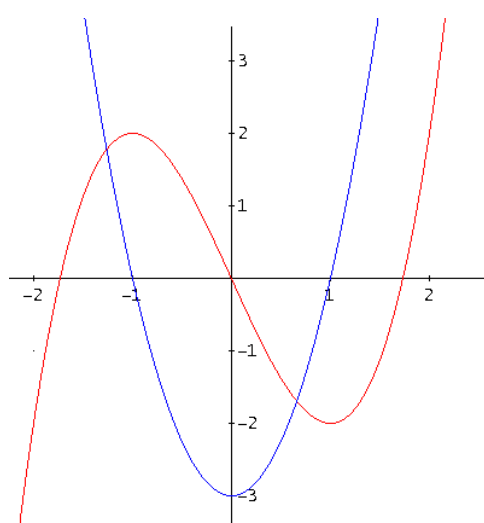
Na intervaloch $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$ je funkcia $f(x) = x^3 - 3x$ rastúca, lebo jej derivácia nadobúda nezáporné hodnoty.

Na intervale $[-1; 1]$ je funkcia $f(x) = x^3 - 3x$ klesajúca, lebo jej derivácia nadobúda nekladné hodnoty.

Na obr. 8.3 je červenou farbou znázornený graf funkcie $f(x) = x^3 - 3x$ a modrou farbou graf jej derivácie $f'(x) = 3x^2 - 3$.



Obr. 8.2



Obr. 8.3

Poznámka: Predchádzajúca veta hovorí, že podmienka $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ je postačujúca na to, aby funkcia $f(x)$ bola na príslušnom intervale rastúca, resp. klesajúca. Nutná a postačujúca podmienka je uvedená v nasledujúcej vete.

Veta 8.2. Nech funkcia $f(x)$ je spojitá v intervale J a vo vnútri intervalu J má deriváciu. Nutná a postačujúca podmienka na to, aby funkcia $f(x)$ bola na intervale J rastúca (klesajúca) je, aby $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) v každom vnútornom bode intervalu J , pričom rovnosť $f'(x) = 0$ nastáva len v konečnom počte bodov intervalu J .

Poznámka: Obe funkcie na obrázku 8.1 majú aj derivácie rovné nule, t.j. dotyčnica je rovnobežná s osou x , ale iba v jednom bode (nie na určitom intervale).

8.2 Maximum (minimum) a derivácia

Na začiatku definujeme globálne a lokálne extrémny funkcie.

Nech funkcia f je definovaná na množine $D(f)$. Funkčnú hodnotu $f(a)$, $a \in M \subset D(f)$, nazývame globálnym maximom funkcie $f(x)$ v bode a na množine M práve vtedy, ak pre každé $x \in M$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Nech funkcia f je definovaná na množine $D(f)$. Funkčnú hodnotu $f(a)$, $a \in M \subset D(f)$, nazývame globálnym minimom funkcie $f(x)$ v bode a na množine M práve vtedy, ak pre každé $x \in M$ platí $f(x) \geq f(a)$.

Nech funkcia f je definovaná na množine $D(f)$. Funkčnú hodnotu $f(a)$, $a \in D(f)$, nazývame lokálnym maximom funkcie $f(x)$ v bode a práve vtedy, ak existuje také okolie $O(a) \subset D(f)$, že pre každé $x \in O(a)$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Nech funkcia f je definovaná na množine $D(f)$. Funkčnú hodnotu $f(a)$, $a \in D(f)$, nazývame lokálnym minimom funkcie $f(x)$ v bode a práve vtedy, ak existuje také okolie $O(a) \subset D(f)$, že pre každé $x \in O(a)$ platí: $f(x) \geq f(a)$

Poznámka:

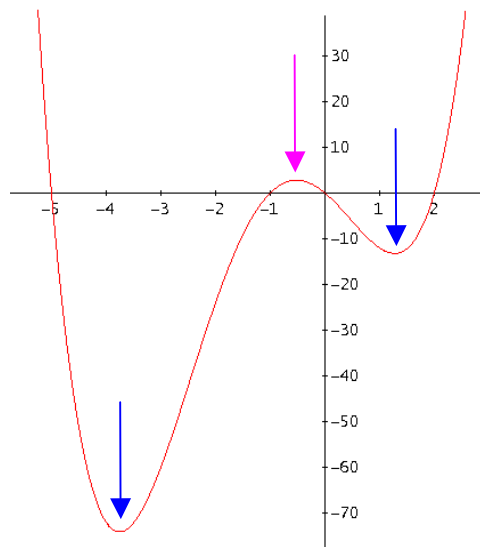
Ak sú splnené podmienky lokálneho maxima (minima) a naviac pre každé $x \in O(a) \subset D(f)$, $x \neq a$, platí $f(x) < f(a)$, resp. $f(x) > f(a)$, potom hovoríme, že funkcia f má v bode a **ostré lokálne maximum**, resp. **ostré lokálne minimum**.

Na obrázku 8.4 je znázornený graf funkcie

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 10x.$$

Modrými šípkami sú vyznačené body, v ktorých funkcia nadobúda lokálne minimum a fialovou šípkou je vyznačený bod, v ktorom funkcia nadobúda lokálne maximum.

Všimnime si, že lokálne minimum vľavo je zároveň aj globálnym minimom. Globálne maximum funkcia nemá.

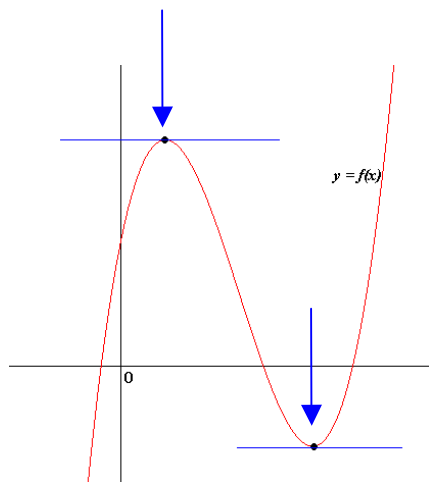


Obr. 8.4

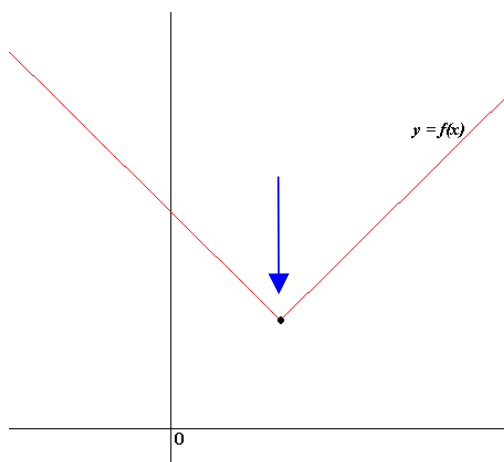
Veta 8.3 (nutná podmienka existencie lokálneho extrém): Nech funkcia $f(x)$ má v bode x_0 lokálny extrém. Potom buď $f'(x_0) = 0$ alebo derivácia funkcie f v bode x_0 neexistuje.

Poznámka:

1. Bod $x = a$, v ktorom $f'(a) = 0$, sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f .
2. Geometricky môžeme nutnú podmienku existencie lokálneho extrém interpretovať takto: ak funkcia $f(x)$ má v bode $x = a$ ostrý lokálny extrém, potom jej graf v bode $P[a, f(a)]$ buď má dotyčnicu rovnobežnú s osou x (obr. 8.5) alebo v tomto bode dotyčnicu nemá (obr. 8.6).



Obr. 8.5



Obr. 8.6

Skutočnosť, že $f'(a)=0$, ešte neznamená, že funkcia $f(x)$ má v bode a lokálny extrém. Napríklad funkcia $f(x)=x^3$ má deriváciu $f'(x)=3x^2$ a $x=0$ je nulovým bodom derivácie funkcie, ale funkcia $f(x)$ nemá v tomto bode extrém (obr. 8.7).

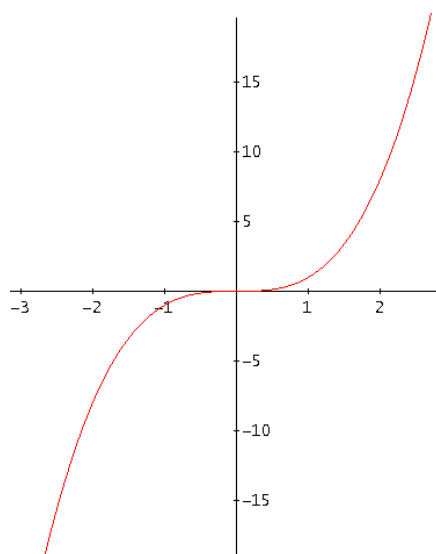
Veta 8.4 (postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v bode a):

Nech funkcia f má v bode $x=a$ deriváciu druhého rádu a nech $f'(a)=0$. Nech $f''(a)>0$ (resp. $f''(a)<0$). Potom funkcia f má v bode a ostré lokálne minimum (resp. ostré lokálne maximum).

Veta 8.5 (postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v bode a):

Nech existuje také okolie $O(a)$ bodu a , že funkcia f je v $O(a)$ spojitá, má deriváciu v každom $x \in O(a)$, $x \neq a$ a navyše pre všetky $x < a$ je $f'(x) > 0$ a pre všetky $x > a$ je $f'(x) < 0$. Potom funkcia $f(x)$ má v bode a ostré lokálne maximum.

Nech existuje také okolie $O(a)$ bodu a , že funkcia f je v $O(a)$ spojitá, má deriváciu v každom $x \in O(a)$, $x \neq a$ a navyše pre všetky $x < a$ je $f'(x) < 0$ a pre všetky $x > a$ je $f'(x) > 0$. Potom funkcia $f(x)$ má v bode a ostré lokálne minimum.



Obr. 8.7

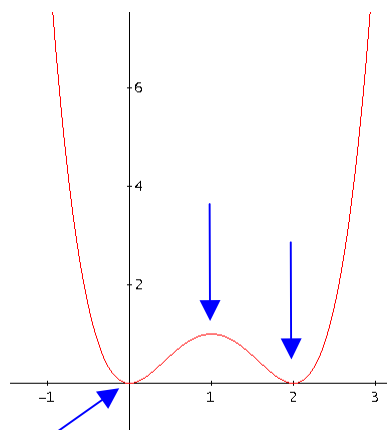
Príklad 8.3 Nájdite lokálne extrémum funkcie $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

Riešenie:

Najskôr určíme prvú deriváciu funkcie $f(x)$.

$$f'(x) = (x^4 - 4x^3 + 4x^2)' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

Teraz vypočítame, kedy nadobúda prvá derivácia funkcie $f(x)$ nulové hodnoty.



Obr. 8.8

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$$

Pretože prvá derivácia je spojitá na celom svojom definičnom obore, jedinými kandidátmi na lokálne extrémny sú body 0, 1 a 2.

Určíme hodnoty druhej derivácie v bodoch 0, 1 a 2.

$$f''(x) = (4x^3 - 12x^2 + 8x)' = 12x^2 - 24x + 8$$

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 8 = 8 > 0 \Rightarrow \text{v bode 0 má funkcia } f \text{ lokálne minimum}$$

$$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{v bode 1 má funkcia } f \text{ lokálne maximum}$$

$$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 8 = 8 > 0 \Rightarrow \text{v bode 2 má funkcia } f \text{ lokálne minimum}$$

Na obr. 8.8 je znázornený graf funkcie $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ s vyznačenými lokálnymi extrémami.

Poznámka:

Pri hľadaní najväčšej a najmenšej hodnoty funkcie (teda globálnych extrémov funkcie) v nejakom uzavretom intervale $J = \langle a; b \rangle$ postupujeme takto:

1. Nájdeme body z vnútra intervalu, v ktorých je buď $f'(x) = 0$ alebo v ktorých prvá derivácia neexistuje. Označíme ich $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$
2. Vypočítame funkčné hodnoty v bodoch $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, a, b$, t.j. $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), \dots, f(a), f(b)$. Najväčšie z týchto čísel je globálne maximum, najmenšie globálne minimum funkcie f na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle$.

Príklad 8.4 Nájdite globálne extrémny funkcie $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ v intervale $\langle -2, 4 \rangle$.

Riešenie:

Najskôr určíme prvú deriváciu funkcie $f(x)$.

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 1)' = 6x^2 - 6x - 12$$

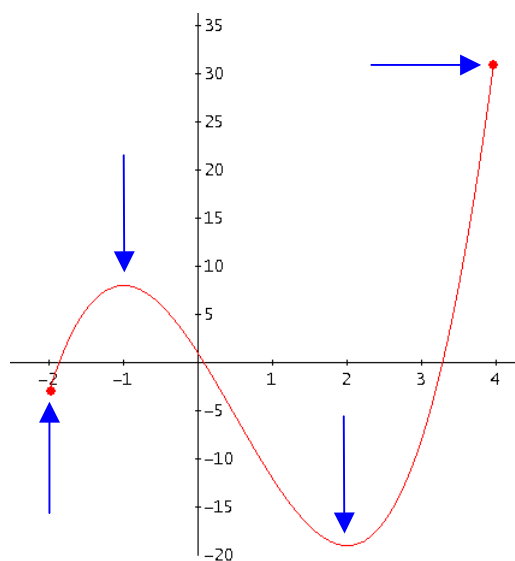
Teraz vypočítame, kedy nadobúda prvá derivácia funkcie $f(x)$ nulové hodnoty.

$$6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad (x-2)(x+1) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad x = -1 \vee x = 2$$

Pretože prvá derivácia je spojitá na celom svojom definičnom obore, jedinými kandidátmi na lokálne extrémny sú body -1 a 2. Pridáme k nim ešte kandidátov na globálne extrémny, t.j. krajné body intervalu $\langle -2, 4 \rangle$.

Určíme hodnoty funkcie f v bodoch -2, -1, 2 a 4.



Obr. 8.9

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 1 =$$

$$-16 - 12 + 24 + 1 = -3$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 1 =$$

$$-2 - 3 + 12 + 1 = 8$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 1 =$$

$$16 - 12 - 24 + 1 = -19$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 1 =$$

$$128 - 48 - 48 + 1 = 33$$

Najväčšiu hodnotu nadobúda funkcia f v bode $x_1 = 4, y_{\max} = 33$. V tomto bode má funkcia f globálne maximum.

Najmenšiu hodnotu nadobúda funkcia f v bode $x_2 = 2, y_{\min} = -19$. V tomto bode má funkcia f globálne minimum.

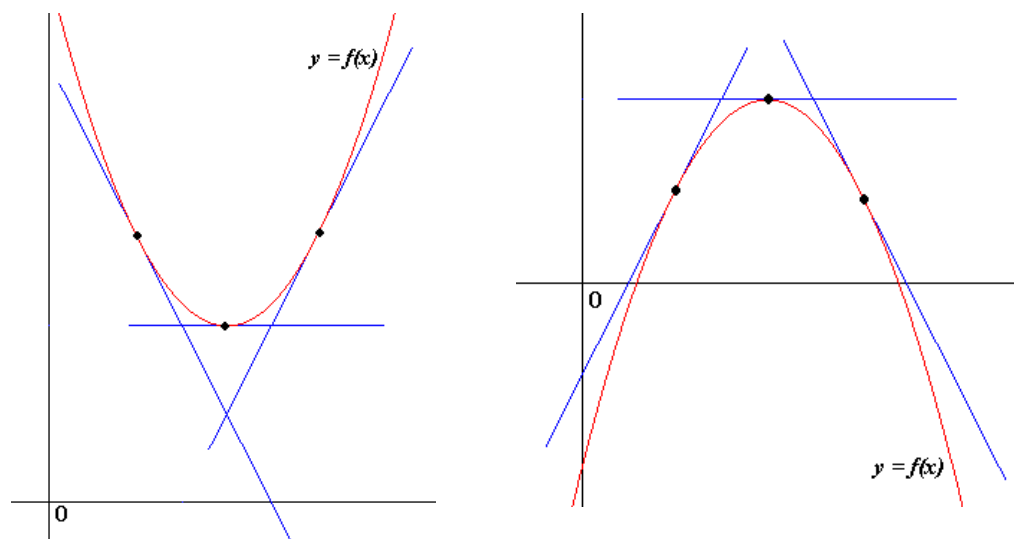
Na obr. 8.9 je znázornený graf funkcie $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ s vyznačenými kandidátmi na globálne extrém.

8.3 Konvexnosť, konkávnosť a derivácia

Nech f je funkcia, ktorá je spojitá v intervale J a v každom vnútornom bode tohto intervalu má deriváciu.

Hovoríme, že funkcia f je konvexná na intervale J , ak pre každú dotyčnicu k jej grafu platí, že všetky body grafu funkcie okrem dotykového bodu ležia nad touto dotyčnicou.

Hovoríme, že funkcia f je konkávna na intervale J , ak pre každú dotyčnicu k jej grafu platí, že všetky body grafu funkcie okrem dotykového bodu ležia pod touto dotyčnicou.



Obr. 8.10

Na obr. 8.10 vľavo je graf konvexnej funkcie a vpravo je graf konkávnej funkcie.

Poznámka:

Niekedy sa funkcia, ktorú sme nazvali konvexnou (konkávnu) na intervale J , nazýva rýdzo konvexnou (rýdzo konkávnu) v intervale J na rozdiel od prípadu, keď pripúšťame, aby body grafu ležali buď nad (pod) každou dotyčnicou, alebo na niektorej dotyčnici.

Veta 8.6: Nech funkcia f je spojitá v intervale J a v každom vnútornom bode intervalu J má druhú deriváciu.

Ak pre každé x z vnútra intervalu J platí $f''(x) \geq 0$, pričom rovnosť platí len pre konečný počet bodov, potom funkcia f je v intervale J rýdzokonvexná.

Ak pre každé x z vnútra intervalu J platí $f''(x) \leq 0$, pričom rovnosť platí len pre konečný počet bodov, potom funkcia f je v intervale J rýdzokonkávna.

Príklad 8.5

Zistite, v ktorých intervaloch je funkcia $f(x) = x^3 - 3x$ konvexná, resp. konkávna.

Riešenie:

Najskôr určíme prvú a druhú deriváciu funkcie $f(x)$.

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$$

Teraz vypočítame, kedy nadobúda druhá derivácia funkcie $f(x)$ kladné a kedy záporné hodnoty.

$$6x \geq 0$$

$$6x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$x \leq 0$$

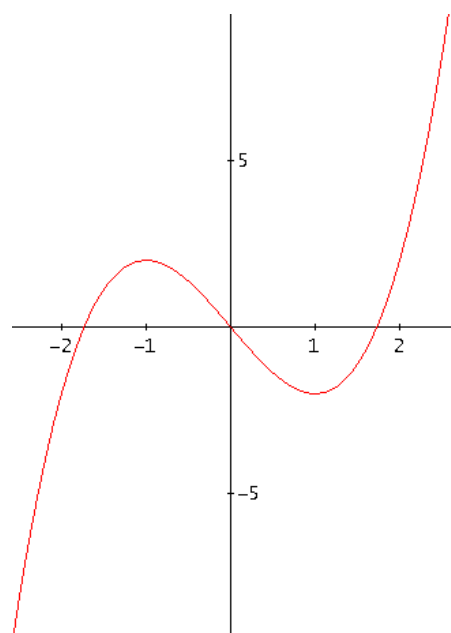
$$x \in \langle 0; \infty \rangle$$

$$x \in \langle -\infty; 0 \rangle$$

Pretože druhá derivácia nadobúda nezáporné hodnoty na intervale $\langle 0; \infty \rangle$, je funkcia f na tomto intervale konvexná.

Pretože druhá derivácia nadobúda nekladné hodnoty na intervale $\langle -\infty; 0 \rangle$, je funkcia f na tomto intervale konkávna.

Graf funkcie $f(x) = x^3 - 3x$ je znázornený na obr. 8.11.



Obr. 8.11

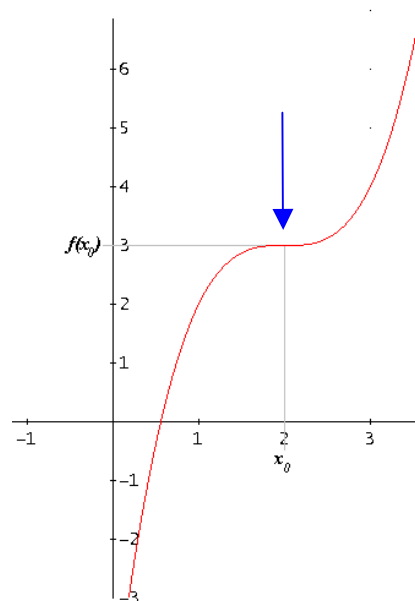
Poznámka:

Podmienka $f''(x) \geq 0$ je postačujúca, ale nie nutná na to, aby funkcia f bola v intervale J konvexná.

Podobne, podmienka $f''(x) \leq 0$ je postačujúca, ale nie nutná na to, aby funkcia f bola v intervale J konkávna.

Možno dokázať nasledujúce tvrdenie:

Veta 8.7: Nutná a postačujúca podmienka na to, aby funkcia f bola v intervale J konvexná (resp. konkávna), je, aby jej derivácia f' bola v intervale J rastúca (resp. klesajúca).



Obr. 8.12

Bod (číslo) x_0 , v ktorom má funkcia f deriváciu, nazývame inflexným bodom funkcie f práve vtedy, keď existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre každé $x \in O(x_0)$, $x < x_0$ je funkcia konvexná (resp. konkávna) a pre každé $x \in O(x_0)$, $x > x_0$ je funkcia konkávna (resp. konvexná).

Ak x_0 je inflexným bodom funkcie f , potom bod $[x_0, f(x_0)]$ nazývame inflexným bodom grafu funkcie. (obr. 8.12)

Veta 8.8:

Nech funkcia f má v nejakom okolí bodu x_0 spojitú druhú deriváciu. Nutná podmienka, aby x_0 bol inflexný bod funkcie f , je, aby $f''(x) = 0$ alebo aby $f''(x) = 0$ neexistovala.

Veta 8.9:

Nech funkcia f má v bode x_0 tretiu deriváciu a nech $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$. Potom bod $[x_0, f(x_0)]$ je inflexný bod grafu funkcie f .

Príklad 8.6

Nájdite inflexné body funkcie $f(x) = x^3$.

Riešenie:

Najskôr určíme prvú, druhú a tretiu deriváciu funkcie $f(x)$.

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

$$f''(x) = (3x^2)' = 6x$$

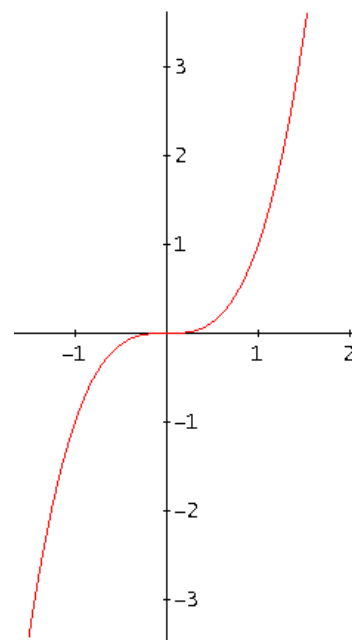
$$f'''(x) = (6x)' = 6$$

Zistíme, kedy je druhá derivácia rovná nule. Tieto body sú kandidátmi na inflexné body. Taktiež zistíme, kedy druhá derivácia neexistuje.

Druhá derivácia je nulová iba v bode $x = 0$ a existuje pre všetky reálne čísla. Preto jediným kandidátom na inflexný bod je $x = 0$.

Tretia derivácia v bode $x = 0$ je $f'''(0) = 6 \neq 0$, preto bod $x = 0$ je jediným inflexným bodom funkcie $f(x) = x^3$.

Graf funkcie $f(x) = x^3$ je znázornený na obr. 8.13.



Obr. 8.13

Príklad 8.7

Zistite intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ konvexná, konkávna a nájdite jej inflexné body.

Riešenie:

Najskôr určíme prvú a druhú deriváciu funkcie f .

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$\frac{-2x \cdot (x^2+1) - (1-x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

Druhá derivácia je definovaná pre všetky reálne čísla, nakoľko $(x^2+1)^3$ je vždy kladné. Zistíme, kedy je druhá derivácia rovná nule, kedy nadobúda kladné a kedy záporné hodnoty.

$$\frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$2x^3 - 6x = 0$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

$$\frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \geq 0$$

$$2x^3 - 6x \geq 0$$

$$x^3 - 3x \geq 0$$

$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geq 0$$

$$x \in \langle -\sqrt{3}; 0 \rangle \cup \langle \sqrt{3}; \infty \rangle$$

$$\frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \leq 0$$

$$2x^3 - 6x \leq 0$$

$$x^3 - 3x \leq 0$$

$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \leq 0$$

$$x \in \langle -\infty; -\sqrt{3} \rangle \cup \langle 0; \sqrt{3} \rangle$$

Druhá derivácia je nulová v bodoch $x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$. Tieto body sú

inflexnými bodmi funkcie $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Druhá derivácia nadobúda nezáporné hodnoty na intervaloch $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle, \langle \sqrt{3}; \infty \rangle$.

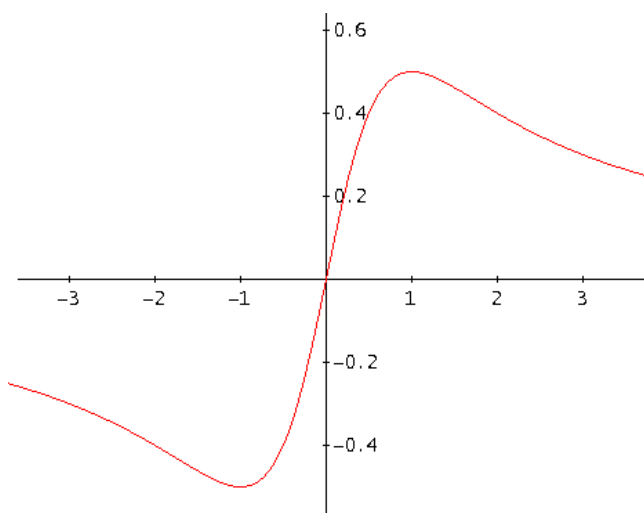
Na týchto intervaloch je funkcia f konvexná.

Druhá derivácia nadobúda nekladné hodnoty na intervaloch

$\langle -\infty; -\sqrt{3} \rangle, \langle 0; \sqrt{3} \rangle$. Na týchto intervaloch je funkcia f konkávna.

Graf funkcie $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ je znázornený

na obr. 8.14.



Obr. 8.14

8.4 l'Hospitalove pravidlá

V tejto časti uvedieme, ako je možné využiť deriváciu funkcie pre výpočet limit typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Pravidlá pre počítanie takýchto limit sú uvedené v nasledujúcich vetách a ich dôsledkoch.

Veta 8.10 (prvé l'Hospitalovo pravidlo)

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a nech existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastná alebo nevlastná). Potom

existuje aj $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Veta 8.11 (druhé l'Hospitalovo pravidlo)

Nech $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ a nech existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastná alebo nevlastná). Potom existuje

$$\text{aj } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ a platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka:

Uvedené vety platia aj v prípade, že ide o jednostranné limity, aj v prípade že a predstavuje symbol ∞ alebo $-\infty$.

Príklad 8.8 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$.

Riešenie:

Najprv skúsime riešiť dosadením.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \frac{0 + \sin 0}{0 - \sin 0} = \frac{0}{0}$$

Pretože sa jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

Po dosadení sa čitateľ blíži k číslu 2, kým menovateľ k nule. Navyše, menovateľ je vždy kladný, nakoľko $\cos x < 1$ pre všetky x z okolia bodu 0 (s výnimkou bodu 0). Ide teda o limitu

$$\text{typu } \frac{2}{0} \text{ s kladným menovateľom. Preto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \infty.$$

Príklad 8.9 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Riešenie:

Najprv skúsime riešiť dosadením.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{\operatorname{tg} 0}{\operatorname{tg} 0} = \frac{0}{0}$$

Pretože sa jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} 3x)'}{(\operatorname{tg} 5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3}{\frac{1}{\cos^2(5x)} \cdot 5} = \frac{\frac{3}{\cos^2 0}}{\frac{5}{\cos^2 0}} = \frac{3}{5}$$

Príklad 8.10 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x^2-4)+7}$.

Riešenie:

Najprv skúsime riešiť dosadením.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x^2-4)+7} = \frac{\ln(2-2)}{\ln(2^2-4)+7} = \frac{\ln 0}{\ln 0+7}$$

Pretože sa jedná o limitu typu $\frac{-\infty}{-\infty}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x^2-4)+7} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\ln(x-2))'}{(\ln(x^2-4)+7)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x^2-4} \cdot 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\frac{2x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2x} = \frac{2+2}{2 \cdot 2} = 1 \end{aligned}$$

Príklad 8.11 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Riešenie:

Najprv skúsime riešiť dosadením.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}}$$

Pretože sa jedná o limitu typu $\frac{-\infty}{\infty}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Poznámka:

Limity, ktorých výpočet vedie k výrazom $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$, možno za istých predpokladov upraviť na tvar limit, ktoré už vieme vypočítať pomocou l'Hospitalových pravidiel.

1. Limita $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) \cdot \frac{1}{\frac{f(x) - g(x)}{f(x) \cdot g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{g(x)}{f(x) \cdot g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Limitu typu $\infty - \infty$ sme previedli na limitu typu $\frac{0}{0}$.

2. Limita $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$

Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$,

$$\text{resp. } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Limitu typu $0 \cdot \infty$ sme previedli na limitu typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Limita $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)}$.

Ak pri výpočte $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)}$ dostaneme výrazy typu $1^\infty, \infty^0, 0^0$, pričom $f(x) > 0$, použijeme

$$\text{pravidlo } \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}.$$

Príklad 8.12 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$.

Riešenie:

Najprv skúsime riešiť dosadením.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \frac{2}{1^2 - 1} - \frac{1}{1 - 1} = \frac{2}{0} - \frac{1}{0}$$

Pretože sme dostali limitu typu $\infty - \infty$, použijeme pravidlo

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x - 1}{1} - \frac{x^2 - 1}{2}}{\frac{2}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2 - x^2 + 1}{\frac{2}{(x^2 - 1)(x - 1)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(x + 1)(x - 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)^2}{(x + 1)(x - 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x + 1} = \frac{-1}{2}$$

Príklad 8.13 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln x)$.

Riešenie:

Najprv skúsime riešiť dosadením.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln x) = 0^2 \cdot \ln 0$$

Pretože sme dostali limitu typu $0 \cdot (-\infty)$, použijeme pravidlo $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

Potom použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Príklad 8.14 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

Riešenie:

Pretože ide o limitu typu 0^0 , použijeme pravidlo $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^0 = 1, \text{ pretože}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(\operatorname{tg} x))'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{-\sin x \cdot \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{-\sin 0}{\cos^2 0} = \frac{0}{1^2} = 0$$

8.5 Úlohy

1. Nájdite intervaly monotónnosti a lokálne extrémny funkcie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Potom určte globálne extrémny funkcie na intervale $\langle 0; 3 \rangle$.

Riešenie:

a) vypočítame deriváciu funkcie f

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

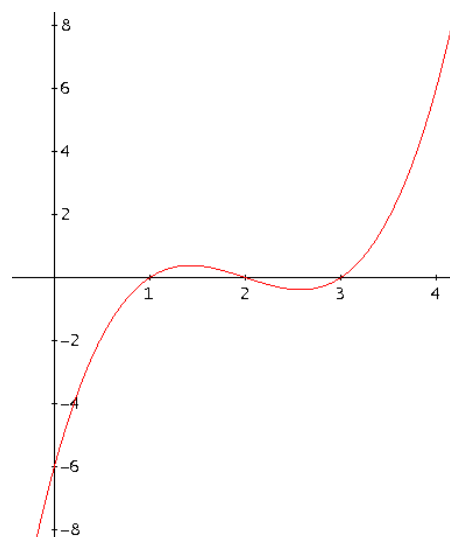
b) nájdeme kandidátov na lokálne extrémny tak, že riešime rovnicu $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 \approx 1,42 \quad x_2 \approx 2,58$$



Pretože parabola je otvorená smerom nahor, prvá derivácia je kladná na intervaloch

$\left(-\infty; 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ a $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$. Na týchto intervaloch je potom funkcia f rastúca. Prvá

derivácia je záporná na intervale $\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Na tomto intervale je potom funkcia f

klesajúca.

c) vypočítame druhú deriváciu funkcie f

$$f''(x) = 6x - 12$$

d) určíme znamienka $f''(x_1)$ a $f''(x_2)$

$$f''\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6 \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 12 = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lokálne minimum}$$

$$f''\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6 \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 12 = -2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lokálne maximum}$$

e) vypočítame hodnoty funkcie f v krajných bodoch intervalu $\langle 0; 3 \rangle$ a v lokálnych extrémoch patriacich tomuto intervalu (využijeme predpoklad, že funkcia f je na tomto intervale spojitá)

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 11 \cdot 0 - 6 = -6$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$f\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 11 \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6 \approx 0,38$$

$$f\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 11 \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6 \approx -0,38$$

Funkcia f má globálne minimum v bode $[0; -6]$ a globálne maximum v bode

$$\left[2 - \frac{\sqrt{3}}{3}; \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 11 \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6\right].$$

2. Nájdite intervaly monotónnosti a lokálne

extrémy funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

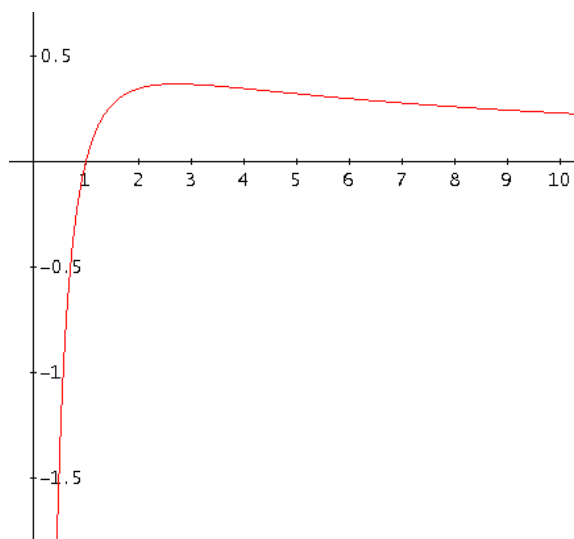
Riešenie:

a) vypočítame deriváciu funkcie f

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

b) nájdeme kandidátov na lokálne extrém

tak, že riešime rovnicu $f'(x) = 0$



$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

Riešime nerovnice

$$1 - \ln x > 0 \quad 1 - \ln x < 0$$

$$\ln x < 1 \quad \text{a} \quad \ln x > 1$$

$$0 < x < e \quad x > e$$

Prvá derivácia je kladná na intervale $(0; e)$. Na tomto intervale je potom funkcia f rastúca.

Prvá derivácia je záporná na intervale $(e; \infty)$. Na tomto intervale je potom funkcia f klesajúca.

c) vypočítame druhú deriváciu funkcie f

$$f''(x) = \frac{(1 - \ln x)' \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{-1 \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \cdot \ln x}{x^3}$$

d) určíme znamienko $f''(e)$

$$f''(e) = \frac{-3 + 2 \cdot \ln e}{e^3} = \frac{-3 + 2 \cdot 1}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } e \text{ lokálne maximum}$$

3. Nájdite intervaly monotónnosti a lokálne extrémym funkcie $f(x) = x \cdot \ln^2 x$. Potom určte globálne extrémym funkcie na intervale $\left(\frac{1}{e}; e\right)$.

Riešenie:

a) vypočítame deriváciu funkcie f

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)' = \\ &= \ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x \end{aligned}$$

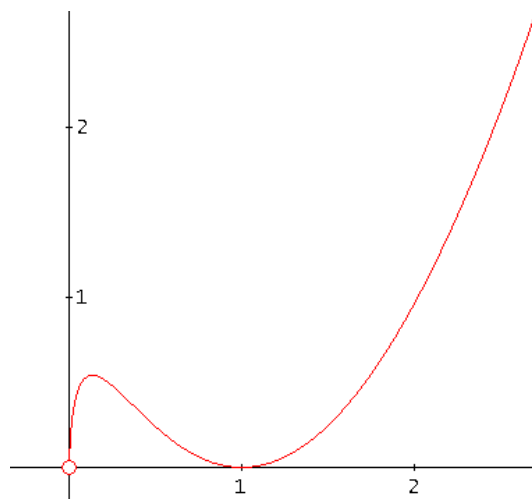
b) nájdeme kandidátov na lokálne extrémym tak, že riešime rovnicu $f'(x) = 0$

$$\ln^2 x + 2 \ln x = 0$$

$$\ln x (\ln x + 2) = 0$$

$$\ln x = 0 \vee \ln x = -2$$

$$x = 1 \vee x = \frac{1}{e^2}$$



Prvá derivácia je kladná na intervaloch $\left(0; \frac{1}{e^2}\right)$ a $(1; \infty)$. Na týchto intervaloch je potom funkcia f rastúca. Prvá derivácia je záporná na intervale $\left(\frac{1}{e^2}; 1\right)$. Na tomto intervale je potom funkcia f klesajúca.

c) vypočítame druhú deriváciu funkcie f ... $f''(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x + 2}{x}$

d) určíme znamienko $f''(1)$ a $f''\left(\frac{1}{e^2}\right)$

$$f''(1) = \frac{2\ln 1 + 2}{1} = \frac{2}{1} > 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } 1 \text{ lokálne minimum}$$

$$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2}{\frac{1}{e^2}} = \frac{2 \cdot (-2) + 2}{\frac{1}{e^2}} = -2e^2 < 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } \frac{1}{e^2} \text{ lokálne maximum}$$

e) vypočítame hodnoty funkcie f v krajných bodoch intervalu $\left\langle \frac{1}{e}; e \right\rangle$ a v lokálnych

extrémoch patriacich tomuto intervalu (využijeme predpoklad, že funkcia f je na tomto intervale spojitá)

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(\ln \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{e}$$

$$f(e) = e \cdot (\ln e)^2 = e \cdot (1)^2 = e$$

$$f(1) = 1 \cdot (\ln 1)^2 = 1 \cdot (0)^2 = 0$$

Funkcia f má globálne minimum v bode $[1; 0]$ a globálne maximum v bode $[e; e]$.

4. Číslo 100 napíšte v tvare súčtu $x+y$ tak, aby súčin xy bol čo najväčší.

Riešenie:

$$100 = x + y \Rightarrow y = 100 - x$$

$$xy = x(100 - x) = 100x - x^2$$

Hľadáme teda maximum funkcie $f(x) = 100x - x^2$.

a) vypočítame deriváciu funkcie f

$$f'(x) = 100 - 2x$$

b) nájdeme kandidátov na lokálne extrémy tak, že riešime rovnicu $f'(x) = 0$

$$100 - 2x = 0$$

$$x = 50$$

c) vypočítame druhú deriváciu funkcie $f \dots f''(x) = -2$

d) určíme znamienko $f''(50)$

$$f''(50) = -2 < 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } 50 \text{ lokálne maximum}$$

$$x = 50$$

$$y = 100 - x = 100 - 50 = 50$$

Pretože funkcia má v bode 50 lokálne maximum, súčin xy je maximálny pre $x = 50$ a $y = 50$.

5. Pri testovaní stroja sa zistilo, že jeho výkon závisí od nastavenia hodnoty x podľa vzťahu $14x - 10 - x^2$. Ako treba nastaviť hodnotu x , aby bol výkon maximálny?

Riešenie:

Hľadáme maximum funkcie $f(x) = 14x - 10 - x^2$.

a) vypočítame deriváciu funkcie f

$$f'(x) = 14 - 2x$$

b) nájdeme kandidátov na lokálne extrémym tak, že riešime rovnicu $f'(x) = 0$

$$14 - 2x = 0$$

$$x = 7$$

c) vypočítame druhú deriváciu funkcie $f \dots f''(x) = -2$

d) určíme znamienko $f''(7)$

$$f''(7) = -2 < 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } 7 \text{ lokálne maximum}$$

Pretože funkcia má v bode 7 lokálne maximum, hodnotu x treba nastaviť na 7.

6. Akú veľkú obdĺžnikovú záhradu (zaujíma nás plocha) môžeme oplotiť, ak máme k dispozícii 400 m pletiva?

Riešenie:

Pre obsah a obvod obdĺžnika platí:

$$o = 2a + 2b \Rightarrow 400 = 2a + 2b \Rightarrow b = 200 - a$$

$$S = a \cdot b = a \cdot (200 - a) = 200a - a^2$$

Hľadáme teda maximum funkcie $f(a) = 200a - a^2$.

a) vypočítame deriváciu funkcie f

$$f'(a) = 200 - 2a$$

b) nájdeme kandidátov na lokálne extrémym tak, že riešime rovnicu $f'(a) = 0$

$$200 - 2a = 0$$

$$a = 100$$

c) vypočítame druhú deriváciu funkcie $f \dots f''(a) = -2$

d) určíme znamienko $f''(100)$

$$f''(100) = -2 < 0 \Rightarrow \text{funkcia } f \text{ má v bode } 100 \text{ lokálne maximum}$$

$$a = 100$$

$$b = 200 - a = 200 - 100 = 100$$

Pretože funkcia má v bode 100 lokálne maximum, záhrada bude mať tvar štvorca so stranou dĺžky 100 m.

Vypočítajte nasledujúce limity:

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 7x + 2}{x^4 + 11}$

Riešenie:

Nakoľko čitateľ aj menovateľ sa „blížia do nekonečna“, použijeme l'Hospitalovo pravidlo, to znamená, že zvlášť zderivujeme čitateľ a zvlášť menovateľ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 7x + 2}{x^4 + 11} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^3 + 7x + 2)'}{(x^4 + 11)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9x^2 + 7)}{(4x^3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9x^2 + 7)'}{(4x^3)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18}{12x} = 0 \end{aligned}$$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Riešenie:

Najprv dosadíme: $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$. Pretože po dosadení dostávame výraz typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo, to znamená, že zvlášť zderivujeme čitateľ a zvlášť menovateľ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Dostali sme vzorec, ktorý často používame pri výpočte limit. Pozri napríklad úlohy 11, 12, 13 v kapitole 6.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2 - x}$

Riešenie:

$$\text{Najprv dosadíme: } \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2 - x} = \frac{\sin 2 \cdot 0 - \sin 0}{0^2 - 0} = \frac{\sin 0 - \sin 0}{0 - 0} = \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Pretože po dosadení dostávame výraz typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo, to znamená, že zvlášť zderivujeme čitateľ a zvlášť menovateľ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x - \sin x)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos 2x - \cos x}{2x - 1} = \frac{2 \cdot \cos 0 - \cos 0}{0 - 1} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{-1} = -1$$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - x}$

Riešenie:

Najprv dosadíme: $\frac{\ln x}{x^2 - x} = \frac{\ln 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$. Pretože po dosadení dostávame výraz typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo, to znamená, že zvlášť zderivujeme čitateľ a zvlášť menovateľ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 1} = \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$