

7 Derivácia funkcie

7.1 Motivácia k derivácii

S využitím derivácií sa stretávame veľmi často v matematike, geometrii, fyzike, či v rôznych technických aplikáciách. Derivácia funkcie f v bode a nám určuje veľkosť prírastku funkcie f v bode a .

Zrejme všetci už zo školských lavíc poznáme vzorec vyjadrujúci závislosť času, rýchlosti a dráhy pri rovnomernom priamočiariom pohybe $s = v \cdot t$. Ak napríklad každú sekundu prejdeme vzdialenosť 3 metre, potom rýchlosť vyjadruje prírastok dráhy za jednotku času. Pomocou nástrojov matematickej analýzy teda môžeme rýchlosť charakterizovať ako deriváciu dráhy v určitom čase t .

Taktiež sa v praxi stretávame s úlohami, keď treba pomerne zložitú funkciu v okolí určitého bodu aproximovať pomocou priamky. Smernica tejto priamky zrejme vyjadruje prírastok na osi y v určitom bode x_0 . Pomocou nástrojov matematickej analýzy opäť možno vyjadriť rovnicu tejto priamky pomocou derivácie funkcie.

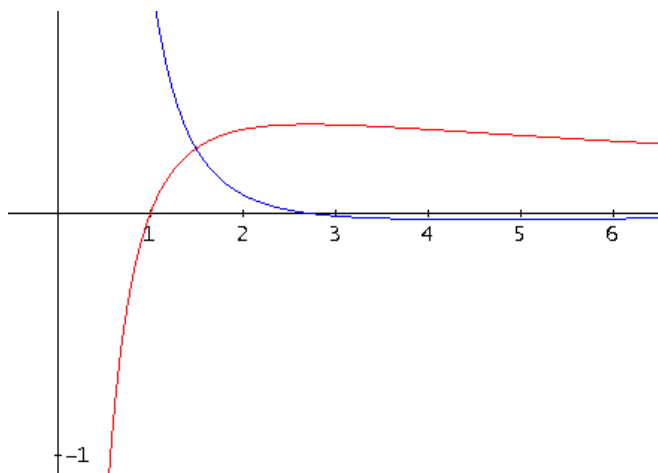
Derivácia funkcie nám dokáže povedať mnoho o priebehu pôvodnej funkcie. Na obrázku 7.1 je červenou farbou

znázornený graf funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

a modrou farbou graf jej derivácie

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Všimnime si, že funkcia

f je rastúca, keď jej derivácia nadobúda kladné hodnoty a klesajúca, keď derivácia nadobúda záporné hodnoty. Bod, v ktorom má funkcia f maximum, je typický tým, že hodnota derivácie je nulová. Vďaka deriváciám teda vieme povedať mnoho o priebehu funkcie. Žiaľ, mnohokrát je vyjadrenie derivácie funkcie komplikovanejšie ako pôvodná funkcia.



Obr. 7.1

Geometrická úloha

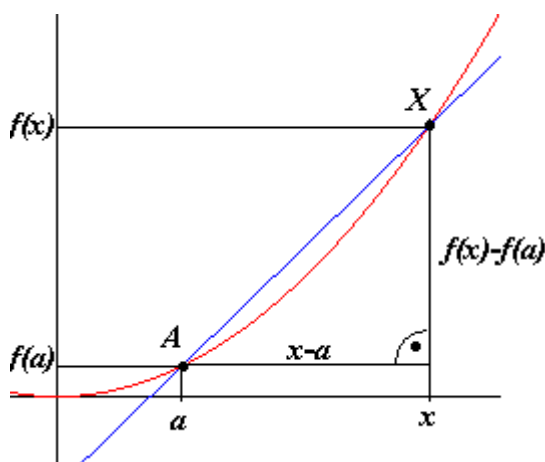
Nech je daná spojitá funkcia $y = f(x)$. Na grafe tejto funkcie je pevne zvolený bod $A = [a, f(a)]$ (obr. 7.2). Budeme sa snažiť zaviesť pojem dotyčnice ku grafu funkcie

$y = f(x)$ v bode $A = [a, f(a)]$. Zvoľme na grafe funkcie iný bod $X = [x, f(x)]$.

Z pravouhlého trojuholníka na obr. 7.2 je zrejmé, že smernica priamky AX je

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, kde φ je uhol, ktorý

zvíera priamka AX s osou x . Ak sa bod X blíži k bodu A , t.j. ak sa rozdiel $x - a$ blíži k 0,



Obr. 7.2

mení sa aj poloha priamky AX . Ak sa priamka AX blíži k istej limitnej polohe, t.j. ak sa jej smernica blíži k limite $k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, nazveme túto limitnú polohu priamky AX dotyčnicou grafu funkcie f v bode $A = [a, f(a)]$.

Fyzikálna úloha

Nech sa bod P pohybuje po číselnej osi. Poloha bodu P závisí od času t , ktorý uplynul od začiatku pohybu. Táto závislosť je vyjadrená funkciou $s = f(t)$. Nech v čase t_0 je súradnica bodu P rovná $s_0 = f(t_0)$. Za čas $t - t_0$ sa táto súradnica zmení o $f(t) - f(t_0)$. Podiel $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ sa nazýva stredná rýchlosť bodu P v časovom úseku $t - t_0$. Okamžitá rýchlosť v čase t_0 bude $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$. Vzhľadom na podobnosť limitných vzťahov v predchádzajúcich úlohách je užitočné zaoberať sa touto limitou a dať jej osobitný názov.

7.2 Definícia derivácie funkcie f v bode a

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná v okolí bodu a . Ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, potom túto limitu nazveme deriváciou funkcie $f(x)$ v bode a a budeme ju označovať symbolom $f'(a)$. Ak uvedená limita neexistuje, hovoríme, že funkcia v danom bode nemá deriváciu.

Nech f je reálna funkcia. Označme M množinu všetkých tých bodov definičného oboru $D(f)$, v ktorých má funkcia f deriváciu. Funkciu f' , ktorá každému bodu $a \in M$ priradí hodnotu $f'(a)$ (deriváciu funkcie f v bode a), nazývame deriváciou funkcie f na množine M .

Príklad 7.1 Použitím definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^2$ v bode a .
Riešenie:

Použijeme vzorec $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = a + a = 2a$$

Príklad 7.2 Použitím definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^3$ v bode a .
Riešenie:

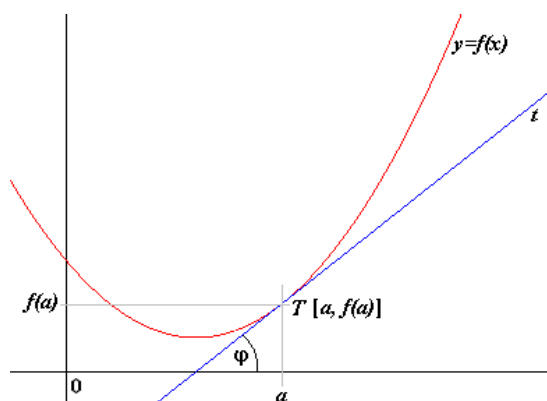
Opäť použijeme vzorec $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

7.3 Dotyčnica ku grafu funkcie

Z definície derivácie funkcie f v bode a je zrejmé, že derivácia v bode a je smernicou dotyčnice ku grafu funkcie f v bode a (pozri obr. 7.3). Z tejto skutočnosti a zo smernicového tvaru rovnice priamky dostávame vzťah pre výpočet rovnice dotyčnice ku grafu funkcie f v bode a . Rovnica je uvedená v nasledujúcej vete.

Veta 7.1: Nech funkcia $f(x)$ má deriváciu v bode a . Potom dotyčnica t ku grafu funkcie $f(x)$ v bode $T[a, f(a)]$ má rovnicu $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.



Obr. 7.3

Príklad 7.3 Nájdite rovnicu tej dotyčnice k parabole $f(x) = x^2 - x + 3$, ktorá je:

- dotyčnicou paraboly v jej bode $T[1, 3]$,
- rovnobežná s priamkou $p: 3x - y + 5 = 0$,
- kolmá na priamku $q: x + y - 1 = 0$.

Riešenie:

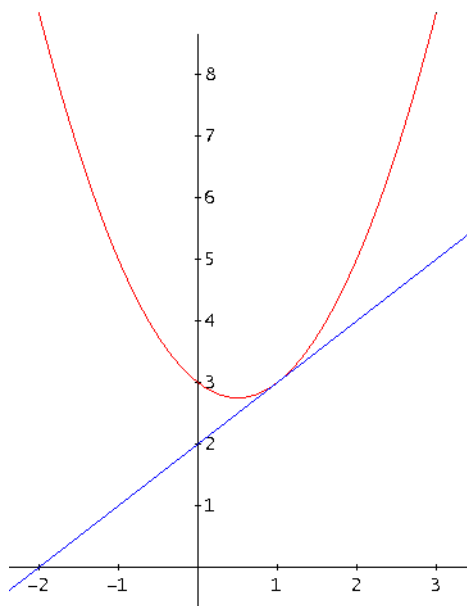
a) Na obr. 7.4 je znázornený graf funkcie $f(x) = x^2 - x + 3$ červenou farbou a dotyčnica ku grafu v bode $T[1, 3]$ modrou farbou.

Najskôr určíme deriváciu funkcie $f(x) = x^2 - x + 3$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - x + 3) - (a^2 - a + 3)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2) - (x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a) - (x - a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a - 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a - 1) = 2a - 1 \end{aligned}$$

Teraz určíme hodnotu derivácie v bode $a = 1$.

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$



Obr. 7.4

Hodnota derivácie je smernicou dotyčnice t . Rovnica dotyčnice je zatiaľ $y = 1 \cdot x + c$. Hodnotu konštanty c určíme tak, že do rovnice $y = 1 \cdot x + c$ dosadíme súradnice bodu $T[1, 3]$.

Teda: $3 = 1 \cdot 1 + c \Rightarrow c = 2$.

Rovnica dotyčnice je teda $y = x + 2$.

b) Na obr. 7.5 je znázornený graf funkcie $f(x) = x^2 - x + 3$ červenou farbou, priamka $p: 3x - y + 5 = 0$ fialovou farbou a dotyčnica ku grafu funkcie f rovnobežná s priamkou p modrou farbou.

Najskôr určíme smernicu priamky p .

$$p: 3x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 3x + 5 \Rightarrow \text{smernica}$$

priamky p je 3.

Teraz určíme bod, v ktorom derivácia funkcie f nadobúda hodnotu 3.

$$f'(a) = 3 \Rightarrow 2a - 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

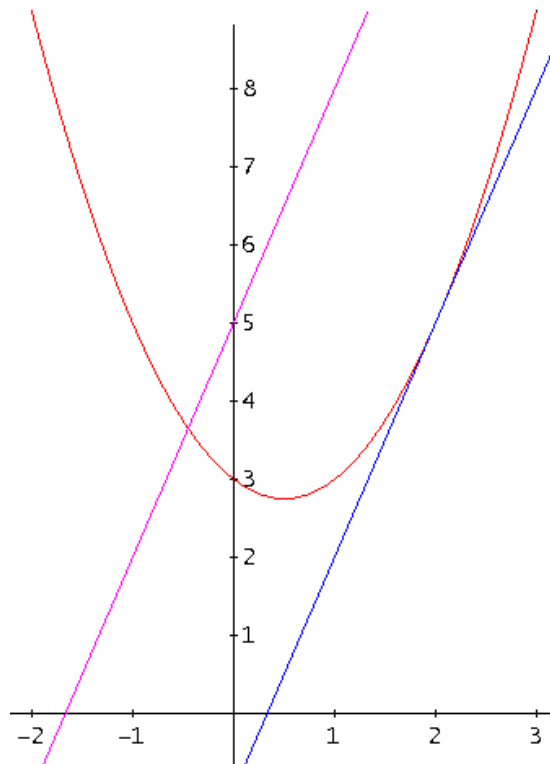
$$f(x) = x^2 - x + 3 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 2 + 3 \Rightarrow f(2) = 5$$

Bod, v ktorom derivácia funkcie f nadobúda hodnotu 3, má súradnice $[2, 5]$.

Pretože smernica dotyčnice je 3, rovnica dotyčnice je zatiaľ $y = 3 \cdot x + c$. Hodnotu konštanty c určíme tak, že do rovnice $y = 3 \cdot x + c$ dosadíme súradnice bodu $[2, 5]$.

$$\text{Teda: } 5 = 3 \cdot 2 + c \Rightarrow c = -1.$$

Rovnica dotyčnice je teda $y = 3x - 1$.



Obr. 7.5

c) Na obr. 7.6 je znázornený graf funkcie $f(x) = x^2 - x + 3$ červenou farbou, priamka $q: x + y - 1 = 0$ fialovou farbou a dotyčnica t ku grafu funkcie f kolmá na priamku q modrou farbou.

Najskôr určíme smernicu priamky q .

$$q: x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -x + 1 \Rightarrow \text{smernica priamky } q \text{ je } k = -1$$

Smernicu kolmej priamky t na priamku q vypočítame podľa vzorca $\frac{-1}{k}$. Teda smernica dotyčnice t je $\frac{-1}{-1} = 1$.

Teraz určíme bod, v ktorom derivácia funkcie f nadobúda hodnotu 1.

$$f'(a) = 1 \Rightarrow 2a - 1 = 1 \Rightarrow a = 1$$

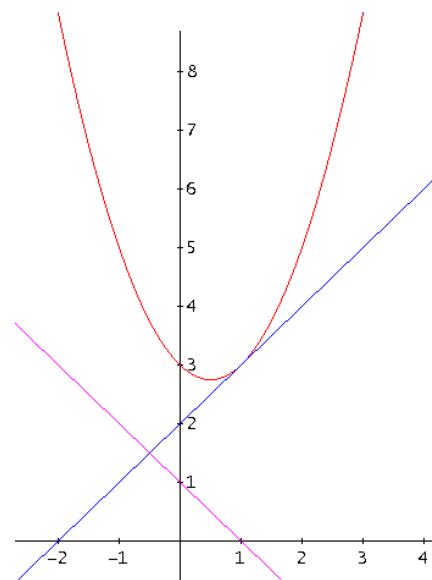
$$f(x) = x^2 - x + 3 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 1 + 3 \Rightarrow f(1) = 3$$

Bod, v ktorom derivácia funkcie f nadobúda hodnotu 1, má súradnice $[1, 3]$.

Pretože smernica dotyčnice je 1, rovnica dotyčnice je zatiaľ $y = 1 \cdot x + c$. Hodnotu konštanty c určíme tak, že do rovnice $y = 1 \cdot x + c$ dosadíme súradnice bodu $[1, 3]$.

$$\text{Teda: } 3 = 1 \cdot 1 + c \Rightarrow c = 2.$$

Rovnica dotyčnice je teda $y = x + 2$.



Obr. 7.6

7.4 Základné derivačné vzorce

Pre derivovanie elementárnych funkcií platia nasledujúce vzťahy (vzorce), ktoré používame pri počítaní derivácií zložitejších funkcií. Tieto vzorce sa dajú odvodiť z definície derivácie. Pre praktické počítanie derivácií je ich potrebné vedieť naspamäť.

Veta 7.2:

1. Ak $f(x) = c$ (konštantná funkcia), tak pre každé $x \in R$ je

$$f'(x) = [c]' = 0.$$

2. Ak $f(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$), tak pre každé $x \in R$ je $f'(x) = [x^n]' = n \cdot x^{n-1}$.

3. Ak $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in R$, tak pre každé $x > 0$ je $f'(x) = [x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

4. Ak $f(x) = a^x$ ($a > 0$), tak pre každé $x \in R$ je $f'(x) = [a^x]' = a^x \cdot \ln a$.

Špeciálne, ak $f(x) = e^x$, tak $f'(x) = [e^x]' = e^x$.

5. Ak $f(x) = \sin x$, tak pre všetky $x \in R$ je $f'(x) = [\sin x]' = \cos x$.

6. Ak $f(x) = \cos x$, tak pre všetky $x \in R$ je $f'(x) = [\cos x]' = -\sin x$.

7. Ak $f(x) = \operatorname{tg} x$, tak pre tie $x \in R$, pre ktoré $\cos x \neq 0$, je

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. Ak $f(x) = \operatorname{cotg} x$, tak pre tie $x \in R$, pre ktoré $\sin x \neq 0$, je

$$f'(x) = [\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

9. Ak $f(x) = \log_z x$, $z > 0$, $z \neq 1$, tak pre všetky $x > 0$ je

$$f'(x) = [\log_z x]' = \frac{1}{x \cdot \ln z}.$$

Špeciálne, ak $f(x) = \ln x$, tak pre všetky $x > 0$ je $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$.

10. Ak $f(x) = \arcsin x$, tak pre všetky $x \in (-1, 1)$ je

$$f'(x) = [\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. Ak $f(x) = \arccos x$, tak pre všetky $x \in (-1, 1)$ je

$$f'(x) = [\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12. Ak $f(x) = \operatorname{arctg} x$, tak pre všetky $x \in R$ je $f'(x) = [\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$.

13. Ak $f(x) = \operatorname{arccotg} x$, tak pre všetky $x \in R$ je $f'(x) = [\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Príklad 7.4 Ovod'zte vzorec pre deriváciu funkcie $f(x) = x^n$ v bode a .

Riešenie:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + \dots + a^{n-2}a + a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}$$

7.5 Derivácia súčtu, rozdielu, súčinu a podielu, derivácia zloženej funkcie

Nasledujúca veta nám opisuje, ako derivujeme funkcie, ktoré dostaneme z elementárnych funkcií pomocou operácií súčtu, rozdielu, súčinu a podielu.

Veta 7.3: Nech funkcie f a g majú derivácie na množine M . Potom aj funkcie $c \cdot f$ (c je reálne číslo), $f + g$, $f - g$ a $f \cdot g$ majú na tejto množine derivácie a platí:

1. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$,
2. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,
3. $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$,
4. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Ak navyše $g(x) \neq 0$ pre všetky $x \in M$, tak na množine M majú

derivácie aj funkcie $\frac{1}{g(x)}$ a $\frac{f(x)}{g(x)}$, pričom platí:

5. $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$,
6. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Poznámka:

Vlastnosti derivácií funkcií, ako mnemotechnickú pomôcku bez presných predpokladov, si možno zapamätať takto:

$$\begin{array}{ll} [cf]' = cf' & \left[\frac{1}{g}\right]' = -\frac{g'}{g^2} \\ [f+g]' = f' + g' & \\ [f-g]' = f' - g' & \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \\ [fg]' = f'g + fg' & \end{array}$$

Príklad 7.5 Vypočítajte deriváciu funkcie $y = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$.

Riešenie:

$$(x^3 - 5x^2 + 4x - 2)' = (x^3)' - (5x^2)' + (4x)' - (2)' = (x^3)' - 5 \cdot (x^2)' + 4 \cdot (x)' - (2)' =$$

$$3x^2 - 5 \cdot 2x + 4 \cdot 1 - 0 = 3x^2 - 10x + 4$$

Príklad 7.6 Vypočítajte deriváciu funkcie $y = \frac{\sqrt{x}}{2x^3 + \sqrt[3]{x^2}}$.

Riešenie:

Použijeme vzorec $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, pričom $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ a $g(x) = 2x^3 + \sqrt[3]{x^2} = 2x^3 + x^{\frac{2}{3}}$.

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2x^3 + \sqrt[3]{x^2}}\right)' = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'(2x^3 + x^{\frac{2}{3}}) - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)(2x^3 + x^{\frac{2}{3}})'}{(2x^3 + \sqrt[3]{x^2})^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}(2x^3 + x^{\frac{2}{3}}) - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)\left(6x^2 + \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)}{(2x^3 + \sqrt[3]{x^2})^2} =$$

$$\frac{\frac{2x^3 + x^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)\left(6x^2 + \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)}{(2x^3 + \sqrt[3]{x^2})^2} = \frac{x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{6}{2}}}{2} - 6x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{1}{6}}}{(2x^3 + \sqrt[3]{x^2})^2} = \frac{-5 \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{x} - \frac{\sqrt[6]{x}}{6}}{(2x^3 + \sqrt[3]{x^2})^2}$$

Veta 7.4 (o derivácii zloženej funkcie): Nech $h(x) = f[g(x)]$ je zložená funkcia, definovaná v nejakom okolí bodu a . Nech funkcia $g(x)$ má deriváciu v bode a a funkcia f má deriváciu v bode $g(a)$. Potom aj funkcia $h(x)$ má deriváciu v bode a a platí $h'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a)$.

Príklad 7.7 Zderivujte funkciu $y = \sin(x^2 + 5x + 6)$.

Riešenie:

$$(\sin(x^2 + 5x + 6))' = \cos(x^2 + 5x + 6) \cdot (x^2 + 5x + 6)' = \cos(x^2 + 5x + 6) \cdot (2x + 5)$$

Príklad 7.8 Zderivujte funkciu $y = \ln(x^2 + 5x + 6)$.

Riešenie:

$$(\ln(x^2 + 5x + 6))' = \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \cdot (x^2 + 5x + 6)' = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 6}$$

Príklad 7.9 Zderivujte funkciu $y = \operatorname{tg}(x^2 + 5x + 6)$.

Riešenie:

$$(\operatorname{tg}(x^2 + 5x + 6))' = \frac{1}{\cos^2(x^2 + 5x + 6)} \cdot (x^2 + 5x + 6)' = \frac{2x + 5}{\cos^2(x^2 + 5x + 6)}$$

Príklad 7.10 Zderivujte funkciu $y = x - \ln \sqrt{1 + e^{4x}} + 3^x \operatorname{arctg}(3x + e^x)$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} (x - \ln \sqrt{1 + e^{4x}} + 3^x \operatorname{arctg}(3x + e^x))' &= (x)' - (\ln \sqrt{1 + e^{4x}})' + (3^x \operatorname{arctg}(3x + e^x))' = \\ &= 1 - \frac{2 \cdot e^{4x}}{1 + e^{4x}} + 3^x \cdot \ln 3 \cdot \operatorname{arctg}(3x + e^x) + \frac{3^x \cdot (3 + e^x)}{1 + (3x + e^x)^2} \end{aligned}$$

Čiastkové výpočty:

$$\begin{aligned} \left(\ln \sqrt{1+e^{4x}} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{4x}}} \left(\sqrt{1+e^{4x}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1+e^{4x}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+e^{4x}}} (1+e^{4x})' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{4x}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+e^{4x}}} \cdot e^{4x} \cdot (4x)' = \frac{1}{\sqrt{1+e^{4x}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+e^{4x}}} \cdot e^{4x} \cdot 4 = \frac{2 \cdot e^{4x}}{1+e^{4x}} \\ \left(3^x \arctg(3x+e^x) \right)' &= (3^x)' (\arctg(3x+e^x)) + (3^x) (\arctg(3x+e^x))' \\ &= 3^x \cdot \ln 3 \cdot \arctg(3x+e^x) + 3^x \cdot \frac{1}{1+(3x+e^x)^2} \cdot (3x+e^x)' \\ &= 3^x \cdot \ln 3 \cdot \arctg(3x+e^x) + 3^x \cdot \frac{1}{1+(3x+e^x)^2} \cdot (3+e^x) \\ &= 3^x \cdot \ln 3 \cdot \arctg(3x+e^x) + \frac{3^x \cdot (3+e^x)}{1+(3x+e^x)^2} \end{aligned}$$

Příklad 7.11 Odvoďte vzorec pre deriváciu $(f(x))^{g(x)}$.

Riešenie:

Pre zjednodušenie budeme miesto $f(x)$ písať iba f a miesto $g(x)$ iba g .

$$(f^g)' = (e^{\ln f^g})' = (e^{g \cdot \ln f})' = e^{g \cdot \ln f} \cdot (g \cdot \ln f)' = e^{\ln f^g} \cdot [g' \cdot \ln f + g \cdot (\ln f)'] = f^g \cdot \left(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

Příklad 7.12 Vypočítajte deriváciu funkcie $y = (\sin 3x)^{(4x^2-2x+6)}$.

Riešenie:

Použijeme vzorec z príkladu 7.11.

Zrejme:

$$f(x) = \sin 3x \quad f'(x) = 3 \cos 3x$$

$$g(x) = 4x^2 - 2x + 6 \quad g'(x) = 8x - 2$$

$$\left((\sin 3x)^{(4x^2-2x+6)} \right)' = (\sin 3x)^{(4x^2-2x+6)} \cdot \left[(8x-2) \cdot \ln(\sin 3x) + (4x^2-2x+6) \cdot \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x} \right]$$

7.6 Derivácie vyšších rádov

Derivácie vyšších rádov (alebo krátko **vyššie derivácie**) definujeme rekurentne:

Nech funkcia f má deriváciu v každom bode neprázdnej množiny M , t.j. v každom bode $x \in M$ existuje $f'(x)$, čo je opäť funkcia definovaná na množine M . Preto má zmysel uvažovať a pýtať sa, či existuje derivácia funkcie $f'(x)$ na množine M . Ak táto derivácia existuje, tak ju nazývame **druhou** deriváciou funkcie f na množine M a označujeme ju $f''(x) = [f'(x)]'$.

Analogicky tretiu deriváciu (ak existuje) definujeme ako deriváciu druhej derivácie, atď. (Pôvodnú hodnotu funkcie zvykneme tiež nazývať „nultou deriváciou“.)

Obece: Hovoríme, že funkcia f **má n -tú deriváciu** na množine M , ak na tejto množine existuje derivácia $(n-1)$ -ej derivácie funkcie f . N -tú deriváciu funkcie f označujeme $f^{(n)}(x)$. Teda $f^{(n)} = \left[f^{(n-1)} \right]'$.

Príklad 7.13. Vypočítajte druhú deriváciu funkcie $y = x^2 \ln x$.

Riešenie:

Najskôr určíme prvú deriváciu funkcie f .

$$(x^2 \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$$

Teraz vypočítame druhú deriváciu funkcie f tak, že opäť zderivujeme jej prvú deriváciu.

Teda:

$$\begin{aligned} (x^2 \ln x)'' &= \left((x^2 \ln x)' \right)' = (2x \cdot \ln x + x)' = (2x)' \cdot \ln x + 2x \cdot (\ln x)' + 1 = \\ &= 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \cdot \ln x + 2 + 1 = 2 \cdot \ln x + 3 \end{aligned}$$

7.7 Úlohy

Vypočítajte derivácie funkcií.

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

Riešenie:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x^1 - 6 \cdot 1 \cdot x^0 = 3x^2 + 6x - 6$$

Použité pravidlá:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

2. $f(x) = 2x^7 - 8x^4 + 5x^2$

Riešenie:

$$f'(x) = 2 \cdot 7 \cdot x^{7-1} - 8 \cdot 4 \cdot x^{4-1} + 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 14x^6 - 32x^3 + 10x$$

Použité pravidlá:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

3. $f(x) = \ln(x+3)$

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{1}{x+3} \cdot (x+3)' = \frac{1}{x+3} \cdot 1 = \frac{1}{x+3}$$

Použité pravidlá:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4. $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot (x^2 + 3)' = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

Použité pravidlá:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

5. $f(x) = \ln(2x + 3)$

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{1}{2x + 3} \cdot (2x + 3)' = \frac{1}{2x + 3} \cdot 2 = \frac{2}{2x + 3}$$

Použité pravidlá:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. $f(x) = x \cdot \ln x$

Riešenie:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Použité pravidlá:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

Riešenie:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Použité pravidlá:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Riešenie:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)' = \left((x^2 + 1)^{-1} \right)' = (-1) \cdot (x^2 + 1)^{-2} (x^2 + 1)' = \frac{-1}{(x^2 + 1)^2} \cdot (2x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

alebo

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Použité pravidlá:

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

V ďalších príkladoch už pripomenieme iba novopoužívané pravidlá.

$$9. f(x) = \frac{3x+7}{x^2+1}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x+7)' \cdot (x^2+1) - (3x+7) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x+7) \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{3x^2+3-6x^2-14x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2-14x+3}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$10. f(x) = \frac{\ln(3x+7)}{x^2+1}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln(3x+7))' \cdot (x^2+1) - \ln(3x+7) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{3x+7} \cdot (3x+7)' \cdot (x^2+1) - \ln(3x+7) \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{\frac{3}{3x+7} \cdot (x^2+1) - 2x \cdot \ln(3x+7)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$11. f(x) = 3^{6x-7}$$

Riešenie:

$$f'(x) = 3^{6x-7} \cdot \ln 3 \cdot (6x-7)' = 3^{6x-7} \cdot \ln 3 \cdot 6 = 6 \cdot \ln 3 \cdot 3^{6x-7}$$

Používané pravidlá:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$12. f(x) = \log_3(7-5x^2)$$

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{1}{(7-5x^2) \cdot \ln 3} \cdot (7-5x^2)' = \frac{1}{(7-5x^2) \cdot \ln 3} \cdot (-10x) = \frac{-10x}{(7-5x^2) \cdot \ln 3}$$

Používané pravidlá:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$13. f(x) = x^3 \cdot \ln x + x \cdot \ln x^3$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' + (x)' \cdot \ln x^3 + x \cdot (\ln x^3)' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x^3 + x \cdot \frac{1}{x^3} (x^3)' = \\ &= 3x^2 \ln x + x^2 + \ln x^3 + x \cdot \frac{1}{x^3} (3x^2) = 3x^2 \ln x + x^2 + \ln x^3 + 3 \end{aligned}$$

$$14. f(x) = \frac{\cos 4x}{\sin x}$$

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{(\cos 4x)' \cdot (\sin x) - (\cos 4x) \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin 4x \cdot 4 \cdot (\sin x) - (\cos 4x) \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$$

Použité pravidlá:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$15. f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)' \cdot (x^2) - (\cos x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-\sin x \cdot x^2 - (\cos x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x \cdot \sin x - 2 \cos x}{x^3}$$

$$16. f(x) = (x-2)^{x+2}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)^{x+2} \cdot \left[(x+2)' \cdot \ln(x-2) + (x+2) \cdot \frac{(x-2)'}{x-2} \right] = \\ &= (x-2)^{x+2} \cdot \left[1 \cdot \ln(x-2) + (x+2) \cdot \frac{1}{x-2} \right] = (x-2)^{x+2} \cdot \left[\ln(x-2) + \frac{x+2}{x-2} \right] \end{aligned}$$

Použité pravidlá:

$$(f^g)' = f^g \cdot \left[g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f} \right]$$

$$17. f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left[(\cos x)' \cdot \ln \sin x + (\cos x) \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} \right] = \\ &= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left[(-\sin x) \cdot \ln \sin x + (\cos x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right] = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left[(-\sin x) \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] \end{aligned}$$

$$18. f(x) = (2x)^{3x}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)^{3x} \cdot \left[(3x)' \cdot \ln(2x) + 3x \cdot \frac{(2x)'}{2x} \right] = (2x)^{3x} \cdot \left[3 \cdot \ln(2x) + 3x \cdot \frac{2}{2x} \right] = \\ &= (2x)^{3x} \cdot [3 \cdot \ln(2x) + 3] \end{aligned}$$

19. Vypočítajte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = x^2 + 3x - 7$ v bode $[2; ?]$.

Riešenie:

dosadíme za x číslo 2 a vypočítame y :

$$y = f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 7 = 3$$

vypočítame $k = f'(2)$:

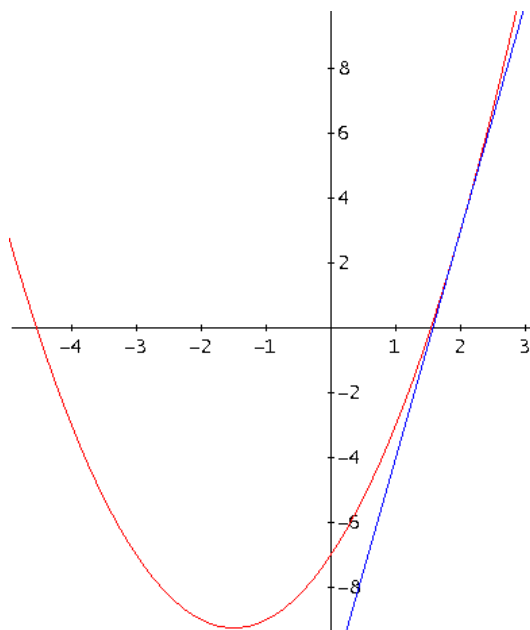
$$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

z rovnice dotyčnice $y = kx + c$ vypočítame c :

$$3 = 7 \cdot 2 + c \Rightarrow c = -11$$

dosadíme hodnoty k a c späť do rovnice

dotyčnice $y = kx + c$: $y = 7x - 11$



20. Vypočítajte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bode $[1; ?]$.

Riešenie:

dosadíme za x číslo 1 a vypočítame y :

$$y = f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

vypočítame $k = f'(1)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$f'(1) = \frac{-2}{1^3} = -2$$

z rovnice dotyčnice $y = kx + c$

vypočítame c : $1 = (-2) \cdot 1 + c \Rightarrow c = 3$

dosadíme hodnoty k a c späť do rovnice

dotyčnice $y = kx + c$... $y = -2x + 3$

