

5 Postupnosť reálnych čísel a limita postupnosti

5.1 Definícia postupnosti

Postupnosťou nazývame každú funkciu, ktorej definičným oborom je množina prirodzených čísel.

Hodnoty tejto funkcie nazývame **členmi** postupnosti. Teda hodnotu v čísle 1 nazývame prvým členom postupnosti a označujeme a_1 , hodnotu v čísle 2 druhým členom postupnosti a označujeme a_2 , atď. Ak sú členmi postupnosti čísla, hovoríme o číselnej postupnosti a označujeme ju $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 5.1.

Zapíšte prvých 5 členov týchto postupností:

$$\{n\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \{1\}_{n=1}^{\infty}, \left\{1+\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

Prvých 5 členov postupnosti určíme tak, že za n postupne dosádzame čísla 1, 2, 3, 4, 5.

Teda:

$$\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2 \cdot 1}, \frac{1}{2 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 5}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots\right\}$$

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5, \dots\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \frac{5}{5+1}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$$

$$\{1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$\begin{aligned} \left\{1+\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} &= \left\{1+\left(-\frac{1}{1}\right)^1, 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2, 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^3, 1+\left(-\frac{1}{4}\right)^4, 1+\left(-\frac{1}{5}\right)^5, \dots\right\}_{n=1}^{\infty} = \\ &= \left\{1-1, 1+\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{27}, 1+\frac{1}{256}, 1-\frac{1}{3125}, \dots\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{0, \frac{2}{4}, \frac{26}{27}, \frac{257}{256}, \frac{3124}{3125}, \dots\right\}_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

Pretože postupnosť je špeciálnym prípadom funkcie (presnejšie je to funkcia so špeciálnym definičným oborom), je ihneď zrejмый pojem **monotónnej** postupnosti. Teda postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca (klesajúca, nerastúca, neklesajúca), ak pre každé prirodzené číslo n platí: $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}, a_n \geq a_{n+1}, a_n \leq a_{n+1}$).

Z predchádzajúceho príkladu sú rastúcimi postupnosťami $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Klesajúcimi sú postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Postupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{1+\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ nie sú ani rastúce, ani klesajúce.

5.2 Limita postupnosti a symbol ∞

Budeme hovoriť, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnú číslu a , ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$, čo zapisujeme: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Ak má postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu rovnú číslu a , tak postupnosť je **konvergentná**, resp. **konverguje k číslu a** . Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, tak **nie je konvergentná**, alebo hovoríme, že je **divergentná**.

Skutočnosť, že daná postupnosť má limitu, zvykneme pomocou kvantifikátorov zapisovať nasledovne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} |a_n - a| < \varepsilon.$$

Poznámka:

- Upozorňujeme čitateľa, že pod pojmom „číslo a “ sa myslí reálne číslo, teda nie $+\infty$, ani $-\infty$. Inými slovami: „konvergovať“ znamená mať za limitu konečné reálne číslo. (O postupnostiach, ktoré majú za limitu $+\infty$ alebo $-\infty$ sa zmienime neskôr.)
- Uvedomme si, že zápis $|a_n - a| < \varepsilon$ je ekvivalentný dvom nerovnostiam $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, čo v skutočnosti znamená, že ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má číslo a za limitu, tak od istého indexu počnúc (t.j. pre všetky $n > n_0$) sa všetky body $[1, a_1], [2, a_2], \dots$ nachádzajú v „páse“ medzi hodnotami $a - \varepsilon$ a $a + \varepsilon$, presnejšie sú z intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Príklad 5.2.

Na obrázku vysvetlite, čo znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

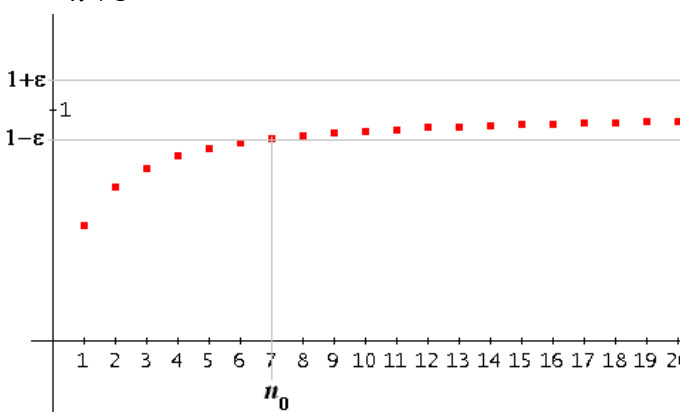
Riešenie:

Členy postupnosti si zobrazíme pomocou grafu.

Vidíme, že ak si zvolíme ľubovoľne malé epsilonové okolie bodu 1, vždy nájdeme taký index n_0 , že od tohto indexu budú všetky body $[1, a_1], [2, a_2], \dots$ ležať v páse od $1 - \varepsilon$ do $1 + \varepsilon$.

Na obrázku vidíme, že pre nami zvolené ε platí, že počnúc bodom

$[7, a_7]$ všetky ostatné body grafu ležia v páse od $1 - \varepsilon$ do $1 + \varepsilon$.



5.3 Vlastnosti limity postupnosti

Veta 5.1. (O jednoznačnosti limity.) Každá konvergentná postupnosť má práve jednu limitu.

Veta 5.2. (O konvergentnej postupnosti) Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Poznámka:

Upozorňujeme čitateľa, že obrátené tvrdenie nemusí platiť. Teda ak nejaká postupnosť je ohraničená, ešte nemusí byť konvergentná. Napríklad postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je evidentne ohraničená, ale nie je konvergentná. Napriek tejto „nedokonalosti“ majú však všetky ohraničené postupnosti reálnych čísel jednu peknú a významnú vlastnosť, a to že z každej ohraničenej postupnosti reálnych čísel možno vybrať konvergentnú postupnosť.

Veta 5.3. (Veta o limite súčtu a súčinu postupností.)

Nech $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ sú konvergentné postupnosti, t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$.

Potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B.$$

Ak navyše predpokladáme, že všetky členy postupnosti b_n sú rôzne od nuly a tiež $B \neq 0$,

potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$.

Ak c je reálne číslo, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot A$.

Veta 5.4.

Nech $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ sú konvergentné postupnosti, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^+$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^+ = B$.

Potom platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = A^B$.

Veta 5.5. Ak $\{a_n\}$ je taká postupnosť, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a postupnosť $\{b_n\}$ je ohraničená, tak pre limitu súčinu týchto postupností platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Príklad 5.3.

Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 + 3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 8}{10n^3 + 9}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 4}{n^2 - 5} \cdot \sin n$

Riešenie:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 + 3} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{3}{n^2}} =$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{4 + 0} = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 8}{10n^3 + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 8}{10n^3 + 9} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^3} - \frac{5n}{n^3} + \frac{8}{n^3}}{\frac{10n^3}{n^3} + \frac{9}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^3}}{10 + \frac{9}{n^3}} =$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 + \frac{9}{n^3} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 10 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^3}} = \frac{0 - 0 + 0}{10 + 0} = 0$$

$$\text{c) Najprv určíme } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 4}{n^2 - 5}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 4}{n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n^2} + \frac{4}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

Z priebehu funkcie $y = \sin n$ vieme, že postupnosť $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená (nadobúda hodnoty z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$).

Podľa vety 5.5 teda platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 4}{n^2 - 5} \cdot \sin n = 0$.

5.4 Rastúce, klesajúce a ohraničené postupnosti

Veta 5.6. Každá ohraničená monotónna postupnosť je konvergentná.

Dôsledok. (Definícia Eulerovho čísla e .)

Postupnosť $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná. Jej limitu označujeme písmenom e , teda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Príklad 5.4.

Využitím vlastností limit a definície čísla e vypočítajte:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{2n-3} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n+1} \right)^{2n-3}$$

Riešenie: (Pozri aj vetu 5.8.)

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1+3}{n+1} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{3}} \right)^{2n-3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{3}} \right)^{\frac{n+1}{3}} \right]^{\frac{1}{\frac{n+1}{3}}(2n-3)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n+1}{3}}(2n-3)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{\frac{n+1}{3}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n-3)}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-9}{n+1}} = e^6$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{3n+1} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1+3}{3n+1} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3n+1} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n+1}{3}} \right)^{2n-3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n+1}{3}} \right)^{\frac{3n+1}{3}} \right]^{\frac{1}{\frac{3n+1}{3}}(2n-3)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3n+1}{3}}(2n-3)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{\frac{3n+1}{3}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n-3)}{3n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-9}{3n+1}} = e^{\frac{6}{3}} = e^2$$

5.5 Nevlastná limita postupnosti

Budeme hovoriť, že postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastnú limitu rovnú $+\infty(-\infty)$ práve vtedy, ak k ľubovoľnému reálnemu číslu K existuje taký index n_0 , že pre všetky $n > n_0$ platí $c_n > K$ ($c_n < K$).

Skutočnosť, že postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastnú limitu $+\infty(-\infty)$, zapisujeme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty \left(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty \right).$$

Veta 5.7. (vlastnosti nevlastných limit)

a) Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ a všetky členy $a_n \neq 0$, potom postupnosť $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je

konvergentná a jej limita sa rovná nule.

b) Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a všetky čísla a_n sú nenulové. Ak existuje index n_0 taký, že pre

všetky $n > n_0$ je $a_n > 0$ ($a_n < 0$), tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty \right)$.

c) Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \right)$. Potom platí:

Ak $c > 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = \infty$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = -\infty \right)$.

Ak $c < 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = -\infty$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = \infty \right)$.

d) Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená alebo má nevlastnú limitu rovnú $+\infty$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Poznámka:

Symbolicky túto situáciu tiež zapisujeme: $\infty + \infty = \infty$, resp. $\infty + c = \infty$. Ale pozor! Ak by limita postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bola rovná $(-\infty)$, tak o limite súčtu $(a_n + b_n)$ nevieme nič povedať.

Výraz „ $\infty - \infty$ “ patrí totiž medzi tzv. nedefinované výrazy. Takéto výrazy budeme skúmať neskôr.

Príklad 5.5.

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 2n + 5} - \sqrt{n^2 - 5n - 12}$.

Riešenie:

Využijeme vzorec $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$, z ktorého vyplýva, že $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$.

Dosaďme za x výraz $\sqrt{a}$ a za y výraz $\sqrt{b}$. Dostaneme: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 2n + 5} - \sqrt{n^2 - 5n - 12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2n + 5) - (n^2 - 5n - 12)}{\sqrt{n^2 - 2n + 5} + \sqrt{n^2 - 5n - 12}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 17}{\sqrt{n^2 - 2n + 5} + \sqrt{n^2 - 5n - 12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{17}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} - \frac{12}{n^2}}} = \frac{3 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + \sqrt{1 - 0 - 0}} = \frac{3}{2}$$

Veta 5.8. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, pre ktorú platí $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Nech výraz

$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ je definovaný pre všetky prirodzené n . Potom platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Príklad 5.6.

Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1}\right)^{2n^2 + 7n - 2}$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1}\right)^{2n^2 + 7n - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1 + 4}{n^2 - 1}\right)^{2n^2 + 7n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2 - 1}\right)^{2n^2 + 7n - 2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 - 1}{4}}\right)^{\frac{n^2 - 1}{4} \cdot \frac{4}{n^2 - 1} (2n^2 + 7n - 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 - 1}{4}}\right)^{\frac{n^2 - 1}{4} \cdot \frac{4}{n^2 - 1} (2n^2 + 7n - 2)} = \end{aligned}$$

$$e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n^2 - 1}{4}} (2n^2 + 7n - 2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(2n^2 + 7n - 2)}{n^2 - 1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 28n - 8}{n^2 - 1}} = e^8$$

5.6 Úlohy

1. Napíšte prvých päť členov postupnosti $\{3n+2\}_{n=1}^{\infty}$.

Určte postupnosť pomocou 1. člena a vzorca pre a_{n+1} v závislosti od a_n .

Určte typ a vlastnosti postupnosti.

Určte súčet prvých 100 členov postupnosti.

Vypočítajte limitu postupnosti pre $n \rightarrow \infty$.

Riešenie:

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$a_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$$

$$a_1 = 5$$

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

typ postupnosti: **aritmetická** (rozdiel po sebe idúcich členov je konštantný)

diferencia: $d = 3$ (rozdiel po sebe idúcich členov)

vlastnosti: rastúca

zdola ohraničená (číslom 5)

Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti určíme podľa vzorca $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

Teda: $a_{100} = 3 \cdot 100 + 2 = 302$

$$s_{100} = (5 + 302) \cdot \frac{100}{2} = 307 \cdot 50 = 15350$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n + 2) = \infty$$

2. Napíšte prvých päť členov postupnosti $a_1 = 3; a_{n+1} = 2 \cdot a_n$.

Určte postupnosť pomocou vzorca pre a_n .

Určte typ a vlastnosti postupnosti.

Určte súčet prvých 20 členov postupnosti.

Vypočítajte limitu postupnosti pre $n \rightarrow \infty$.

Riešenie:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 6 = 12$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 12 = 24$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 = 2 \cdot 24 = 48$$

vzorec pre a_n : $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

typ postupnosti: **geometrická** (podiel po sebe idúcich členov je konštantný)

kvocient: $q = 2$ (podiel po sebe idúcich členov)

vlastnosti: rastúca
 zdola ohraničená (číslom 3)

Súčet prvých n členov geometrickej postupnosti určíme podľa vzorca $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Teda: $s_{20} = a_1 \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{1048575}{1} = 3145725$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3 \cdot 2^{n-1}) = \infty$$

3. Napíšte prvých päť členov postupnosti $a_1 = 3; a_{n+1} = -a_n$.

Určte postupnosť vzorcom pre a_n .

Určte typ a vlastnosti postupnosti.

Určte súčet prvých 20 členov postupnosti.

Vypočítajte limitu postupnosti.

Riešenie:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = -a_1 = -3$$

$$a_3 = -a_2 = -(-3) = 3$$

$$a_4 = -a_3 = -3$$

$$a_5 = -a_4 = -(-3) = 3$$

vzorec pre a_n : $a_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}$

typ postupnosti: **geometrická** (podiel po sebe idúcich členov je konštantný)

kvocient: $q = -1$ (podiel po sebe idúcich členov)

vlastnosti: ani rastúca ani klesajúca
 ohraničená (zdola číslom -3 , zhora číslom 3)

Súčet prvých 20 členov: $s_{20} = 3 + (-3) + 3 + (-3) + \dots + 3 + (-3) = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot (-1)^{n-1}$ neexistuje (pretože postupnosť striedavo nadobúda hodnoty 3 a -3)

4. Napíšte prvých päť členov postupnosti $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Určte postupnosť pomocou 1. člena a vzorca pre a_{n+1} v závislosti od a_n .

Určte vlastnosti postupnosti.

Vypočítajte limitu postupnosti.

Riešenie:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

$$a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+1+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

vlastnosti: rastúca, lebo: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

ohraničená (zdola číslom $\frac{1}{2}$, zhora číslom 1, lebo menovateľ je stále o 1 väčší ako číateľ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$$

Použili sme metódu „odstránenia minoritných členov“. Podľa tejto metódy v prípade, keď

počítame limitu typu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$, použijeme vzťah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

5. Určte súčet postupnosti $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots; \frac{1}{2^n}; \dots$

Určte postupnosť vzorcom pre a_n .

Určte typ a vlastnosti postupnosti.

Vypočítajte limitu postupnosti.

Riešenie:

Pretože každý člen vznikne z predchádzajúceho vynásobením číslom $\frac{1}{2}$, ide

o **geometrickú** postupnosť s kvocientom $q = \frac{1}{2}$.

Súčet **nekonečnej geometrickej** postupnosti s kvocientom $q \in (-1; 1)$ vypočítame podľa

$$\text{vzorca } s = \frac{a_1}{1-q}. \text{ Teda } s = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\text{Vzorec pre } a_n: a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

vlastnosti: klesajúca

ohraničená (zdola číslom 0, zhora číslom $\frac{1}{2}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

6. Daná je postupnosť 3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; ...

Určte postupnosť vzorcom pre a_n .

Určte postupnosť pomocou 1. člena a vzorca pre a_{n+1} v závislosti od a_n .

Určte typ a vlastnosti postupnosti.

Vypočítajte limitu postupnosti.

Riešenie:

$$\begin{aligned} 1. \text{ člen a vzorec pre } a_{n+1} \text{ v závislosti od } a_n: & \quad a_1 = 3 \\ & \quad a_{n+1} = a_n + 4 \end{aligned}$$

$$\text{vzorec pre } a_n: a_n = 4n - 1$$

typ postupnosti: **aritmetická** (rozdiel po sebe idúcich členov je konštantný)

diferencia: $d = 4$ (rozdiel po sebe idúcich členov)

vlastnosti: rastúca
zdola ohraničená (čísлом 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4n - 1) = \infty$$

7. Rozhodnite, či je postupnosť $\left\{ \frac{3n-2}{2n+4} \right\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca alebo klesajúca. Určte jej limitu.

Riešenie:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)-2}{2(n+1)+4} - \frac{3n-2}{2n+4} = \frac{3n+1}{2n+6} - \frac{3n-2}{2n+4} = \frac{(3n+1)(2n+4) - (3n-2)(2n+6)}{(2n+6)(2n+4)} = \\ &= \frac{6n^2 + 12n + 2n + 4 - (6n^2 + 18n - 4n - 12)}{(2n+6)(2n+4)} = \frac{16}{(2n+6)(2n+4)} > 0 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

$$a_{n+1} > a_n$$

rastúca, lebo $a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2} \dots \text{použili sme metódu „odstránenia minoritných členov“}$$

8. Rozhodnite, či je postupnosť $\left\{ \frac{3n-2}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca alebo klesajúca. Určte jej limitu.

Riešenie:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)-2}{(n+1)^2} - \frac{3n-2}{n^2} = \frac{3n+1}{n^2+2n+1} - \frac{3n-2}{n^2} = \frac{(3n+1)n^2 - (n^2+2n+1)(3n-2)}{(n^2+2n+1)n^2} = \\ &= \frac{3n^3 + n^2 - (3n^3 - 2n^2 + 6n^2 - 4n + 3n - 2)}{(n^2+2n+1)n^2} = \frac{3n^3 + n^2 - (3n^3 + 4n^2 - n - 2)}{(n^2+2n+1)n^2} = \frac{-3n^2 + n + 2}{(n^2+2n+1)n^2} \leq 0 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

$$a_{n+1} \leq a_n$$

postupnosť je nerastúca, lebo $a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0 \dots \text{použili sme metódu „odstránenia minoritných členov“}$$

Vypočítajte limity postupností.

$$9. \left\{ \frac{15n^3 - 3n + 2}{n^2(2n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3 - 3n + 2}{n^2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3 - 3n + 2}{2n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3}{2n^3} = \frac{15}{2}$$

$$10. \left\{ \frac{15n^3 - 3n + 2}{n^2(2\sqrt{n}+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3 - 3n + 2}{n^2(2\sqrt{n}+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3}{2n^2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15\sqrt{n}\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15\sqrt{n}}{2} = \infty$$

$$11. \left\{ \frac{(7n+2)(n+3)(2n^3+2)}{n^2(7n^2+14)(n-22)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n+2)(n+3)(2n^3+2)}{n^2(7n^2+14)(n-22)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n)(n)(2n^3)}{n^2(7n^2)(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n^5}{7n^5} = \frac{14}{7} = 2$$

$$12. \left\{ 3n - \sqrt{9n^2 - 10n + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

$$\text{použijeme vzorec } a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

za a dosadíme $3n$... potom a^2 je $9n^2$

za b dosadíme $\sqrt{9n^2 - 10n + 1}$... potom b^2 je $9n^2 - 10n + 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3n - \sqrt{9n^2 - 10n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 - (9n^2 - 10n + 1)}{3n + \sqrt{9n^2 - 10n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n - 1}{3n + \sqrt{9n^2 - 10n + 1}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{3n + \sqrt{9n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{3n + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{6n} = \frac{5}{3}$$

$$13. \left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 2} - \sqrt{n^2 + 3n - 7} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

použijeme vzorec $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$

za a dosadíme $\sqrt{n^2 + 5n + 2}$... potom a^2 je $n^2 + 5n + 2$

za b dosadíme $\sqrt{n^2 + 3n - 7}$... potom b^2 je $n^2 + 3n - 7$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 5n + 2} - \sqrt{n^2 + 3n - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n + 2 - (n^2 + 3n - 7)}{\sqrt{n^2 + 5n + 2} + \sqrt{n^2 + 3n - 7}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 9}{\sqrt{n^2 + 5n + 2} + \sqrt{n^2 + 3n - 7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n + n} = 1$$

$$14. \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n+5} \right)^{3n-4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

Použijeme vetu 5.8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+5} \right)^{3n-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n+5} \right)^{2n+5} \right]^{\frac{3n-4}{2n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-4}{2n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n}} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$$

Uvedomme si, že ak $n \rightarrow \infty$, potom aj $2n + 5 \rightarrow \infty$.

$$15. \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n+5} \right)^{n^2-4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

Použijeme vetu 5.8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+5} \right)^{n^2-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n+5} \right)^{2n+5} \right]^{\frac{n^2-4}{2n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-4}{2n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2}} = \infty$$

Uvedomme si, že ak $n \rightarrow \infty$, potom aj $2n + 5 \rightarrow \infty$.

$$16. \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n^3+5} \right)^{n^2-4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Riešenie:

Použijeme vetu 5.8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n^3+5} \right)^{n^2-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n^3+5} \right)^{2n^3+5} \right]^{\frac{n^2-4}{2n^3+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-4}{2n^3+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n}} = e^0 = 1$$

Uvedomme si, že ak $n \rightarrow \infty$, potom aj $2n^3 + 5 \rightarrow \infty$.

17. $\left\{ \left(1 + \frac{n}{2n+5} \right)^{n-4} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Riešenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{2n+5} \right)^{n-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{2n} \right)^{n-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{n-4} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n-4} = \infty$$

18. $\left\{ \sqrt[n]{n^3} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Riešenie:

použijeme vzorec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{n}} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} \right)^3 = 1^3 = 1$$

Nájdite nekonečnú postupnosť, ktorej limita je:

19. 0 Napríklad $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

20. 3 Napríklad $\left\{ \frac{3n+1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

21. $\frac{7}{3}$ Napríklad $\left\{ \frac{7n+1}{3n-23} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

22. ∞ Napríklad $\left\{ \frac{n^3+2}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

23. $-\infty$ Napríklad $\left\{ \frac{4-n^2}{n+3} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

24. e Napríklad $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$.

25. $\sqrt{e}$ Napríklad $\left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right]^{\frac{n}{2n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$