

4 Reálna funkcia reálnej premennej a jej vlastnosti

Táto kapitola je venovaná štúdiu reálnej funkcie jednej reálnej premennej. Pojem funkcie patrí medzi základné pojmy v matematike. Je to vlastne matematický popis závislosti jednej veličiny na inej veličine. Predtým ako zavedieme definíciu funkcie, je potrebné zaviesť niekoľko označení a symbolov, ktoré nám zjednodušia a spresnia vyjadrovanie a formulovanie pojmov.

4.1 Množinové symboly

Budeme používať nasledovné matematické symboly:

Prvok:	$x \in A, x \notin A$	x leží v A , x neleží v A
Podmnožina:	$A \subseteq B, A \subset B$	A je časťou B
Množina vytvorená prvkami: $\{a, b, c\}$		množina je vytvorená prvkami a, b, c
Prázdna množina:	$\{\} = \emptyset$	prázdna množina
Zjednotenie množín:	$A \cup B$	$\{x; x \in A \text{ alebo } x \in B\}$
Prienik množín:	$A \cap B$	$\{x; x \in A \text{ a } x \in B\}$

Príklad 4.1

Nech $A = \{x; x > 0\}$ a $B = \{x; x \geq 5\}$.

Potom platí: $A \supseteq B, A \cup B = A, A \cap B = B$.

4.2 Intervaly reálnych čísel, vnútro intervalu

V tejto časti uvedieme významné podmnožiny množiny reálnych čísel. Týmito množinami sú intervaly: otvorené, uzavreté, sprava otvorené zľava uzavreté, sprava uzavreté zľava otvorené, neohraničené.

Ak $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, potom nasledujúce podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ nazývame intervaly:

$(a, b) = \{x; a < x < b\}$,

$\langle a, b \rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$,

$[a, b) = \{x; a \leq x < b\}$,

$(a, b] = \{x; a < x \leq b\}$,

$(a, \infty) = \{x; x > a\}$,

$\langle a, \infty \rangle = \{x; x \geq a\}$,

$(-\infty, b) = \{x; x < b\}$,

$(-\infty, b] = \{x; x \leq b\}$,

a nakoniec celá množina $\mathbb{R}$ a ľubovoľná jednobodová množina.

Prvý interval sa nazýva otvorený, druhý uzavretý, ďalšie sú polootvorené, resp. neohraničené. Uzavretý interval má dva krajné body, ktoré do neho patria, otvorený má taktiež dva krajné body, ktoré do neho nepatria. Polootvorené intervaly majú iba jeden krajný bod a $\mathbb{R}$ nemá krajný bod. Vnútro intervalu je tento interval bez krajných bodov. Napríklad vnútro intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je interval $(0, 1)$ a vnútro intervalu $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$.

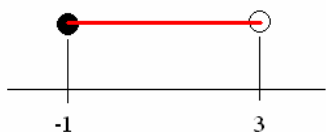
Príklad 4.2

Zapíšte nasledujúce intervaly ako množiny a potom ich graficky znázornite:

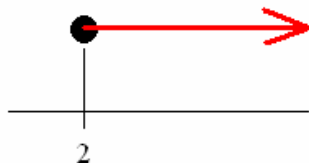
$\langle -1, 3 \rangle, \langle 2, \infty \rangle, (-\infty, 5)$.

Riešenie:

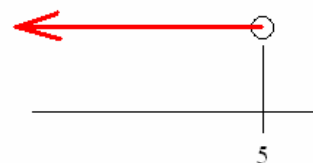
$$\langle -1, 3 \rangle = \{x; -1 \leq x < 3\},$$



$$\langle 2, \infty \rangle = \{x; x \geq 2\},$$



$$(-\infty, 5) = \{x; x < 5\},$$



Obr. 4.1

4.3 Definícia reálnej funkcie reálnej premennej

Reálna funkcia reálnej premennej definovaná na množine A (podmnožine reálnych čísel) je pravidlo (predpis), ktorým každému prvku x z množiny A priradíme jediný prvok y z množiny R (hodnota funkcie v bode x). Zapisujeme $y=f(x)$, resp. $f:A \rightarrow R$.

Poznámka: Funkciu f môžeme považovať za nejaké zariadenie (čierna skrinka), do ktorej vchádza x a vychádza $f(x)$.



Obr. 4.2

Príklad 4.3.

Nech funkcia f je daná predpisom $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, x \neq 2$.

Potom:

$$f(5) = \frac{5+1}{5-2} = 2$$

$$f(-3) = \frac{-3+1}{-3-2} = \frac{2}{5}$$

$$f(z) = \frac{z+1}{z-2}, z \neq 2$$

$$f(3x) = \frac{3x+1}{3x-2}, x \neq \frac{2}{3}$$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-2} + 1}{\frac{x+1}{x-2} - 2} = \frac{\frac{x+1+x-2}{x-2}}{\frac{x+1-2x+4}{x-2}} = \frac{2x-1}{5-x} = \frac{(2x-1)(x-2)}{(5-x)(x-2)} = \frac{2x-1}{5-x}, x \neq 2, x \neq 5$$

4.4 Definičný obor a obor hodnôt funkcie

Množina A sa nazýva **definičný obor** funkcie. Množina **všetkých hodnôt funkcie** sa nazýva **obor hodnôt** funkcie.

Ak nie je definičný obor daný a funkcia je daná vzorcom, tak jej definičným oborom rozumieme „**prirodzený**“ definičný obor, t.j. množinu všetkých čísel, pre ktoré má daný vzorec zmysel.

Príklad 4.4.

Nájdite definičné obory funkcií $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ a $h(x) = \frac{x^2+4x}{5x-x^2}$. Nájdite aj hodnoty týchto funkcií v bode $x=10$.

Riešenie:

$f(x) = \sqrt{x-5}$... nakoľko pod odmocninou nesmie byť záporné číslo, definičný obor funkcie f získame riešením nerovnice $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow D(f) = \langle 5; \infty \rangle$

$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$... nakoľko pod odmocninou nesmie byť záporné číslo a v menovateli nesmie

$$x-2 \neq 0$$

byť nula, definičný obor funkcie g získame riešením sústavy nerovnic $\frac{x}{x-2} \geq 0$

Z prvej nerovnice vyplýva $x \neq 2$. Teraz vyriešime druhú nerovnicu.

$$\frac{x}{x-2} \geq 0$$

$$[(x \geq 0) \wedge (x-2 > 0)] \vee [(x \leq 0) \wedge (x-2 < 0)]$$

$$[(x \geq 0) \wedge (x > 2)] \vee [(x \leq 0) \wedge (x < 2)]$$

$$(x > 2) \vee (x \leq 0)$$

$$x \in \langle -\infty; 0 \rangle \cup (2; \infty)$$

Z riešenia oboch nerovnic vyplýva, že $D(g) = \langle -\infty; 0 \rangle \cup (2; \infty)$

$h(x) = \frac{x^2 + 4x}{5x - x^2}$... nakoľko hodnota menovateľa nesmie byť nulová, definičný obor funkcie h

získame riešením nerovnosti $5x - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \cdot (5 - x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 5 \Rightarrow D(h) = \mathbb{R} - \{0; 5\}$

4.5 Graf funkcie

Graf funkcie $y = f(x)$ je množina bodov $[x, y]$ (roviny), pre ktoré platí $y = f(x)$.

Príklad 4.5.

Dané sú funkcie

a. $f(x) = 2x + 3$, definovaná na intervale $(-1, 2)$,

b. $F(x) = -x + 3$, definovaná na intervale $(-1, 2)$.

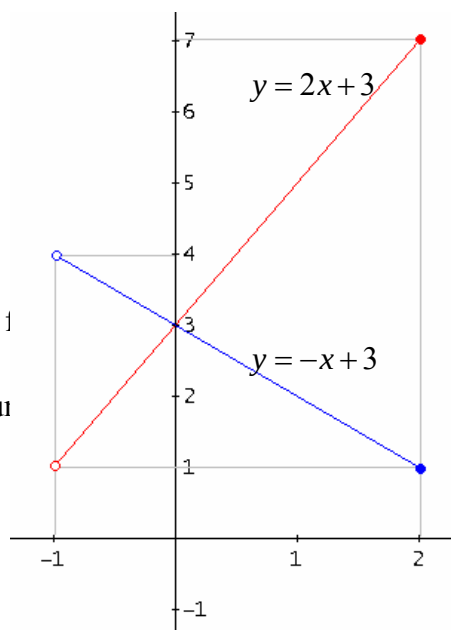
Nakreslite ich grafy a určte obor hodnôt.

Riešenie:

Pretože obe funkcie majú tvar $f(x) = ax + b$, sú tieto funkcie lineárne a preto je ich grafom priamka alebo jej časť.

Graf lineárnej funkcie zostrojíme tak, že určíme hodnotu funkcie

x	$f(x)$	$F(x)$
-1	$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$	$F(-1) = -(-1) + 3 = 4$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$	$F(2) = -2 + 3 = 1$



Obr. 4.3

Z grafov funkcií vidíme, že obory hodnôt sú $H(f) = (1; 7)$, $H(F) = (1; 4)$.

Príklad 4.6.

Daná je funkcia $y = x \cdot (x - 6)$, kde definičný obor je interval $(0, 6)$.

Nakreslite graf tejto funkcie. Určte obor hodnôt tejto funkcie.

Riešenie:

Funkciu najskôr upravíme: $y = x \cdot (x - 6) = x^2 - 6x$.

Pretože funkcia má tvar $y = ax^2 + bx + c$, kde $a = 1, b = -6, c = 0$, je táto funkcia kvadratická a jej grafom je parabola.

Vrchol paraboly má súradnice $V\left[\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$,

$$\text{teda } V\left[\frac{-(-6)}{2 \cdot 1}; f\left(\frac{-(-6)}{2 \cdot 1}\right)\right] = [3; f(3)] = [3; 3^2 - 6 \cdot 3] = [3; -9].$$

Nakoľko $a > 0$, parabola je „otvorená smerom nahor“.

Priesečníky paraboly s osou x získame riešením rovnice $f(x) = 0$, teda $x^2 - 6x = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 36$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{36} = 6$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) + 6}{2 \cdot 1} = 6$$

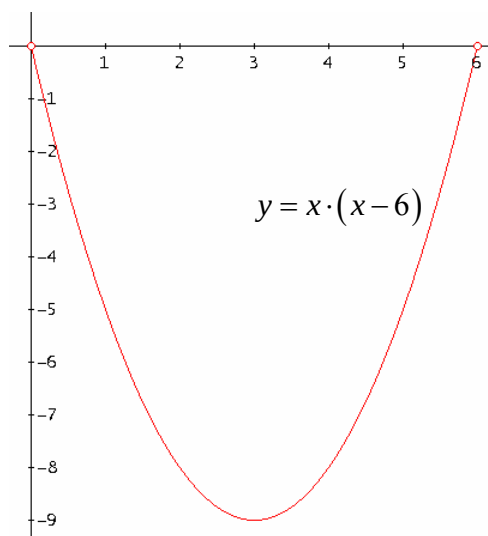
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) - 6}{2 \cdot 1} = 0$$

Teda priesečníky s osou x sú $[6; 0]$ a $[0; 0]$.

Priesečník s osou y je $[0; c]$, teda $[0; 0]$.

Z grafu funkcie vidíme, že obor hodnôt je

$$H(f) = \langle -9; 0 \rangle.$$



Obr. 4.4

4.6 Ohraničená funkcia (zdola, zhora)

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je **zdola ohraničená** na množine

A , ak **existuje číslo a** , že pre **každé** $x \in A$ platí $a \leq f(x)$.

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je **zhora ohraničená** na množine

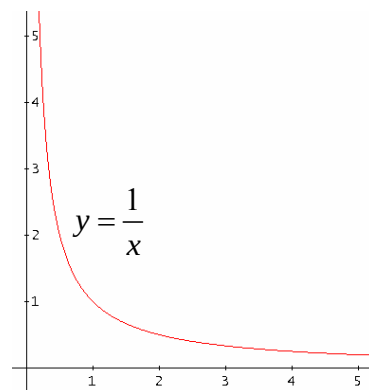
A , ak **existuje číslo b** , že pre **každé** $x \in A$ platí $f(x) \leq b$.

Funkcia je ohraničená ak je ohraničená aj zdola aj zhora.

Príklad 4.7.

Funkcia $y = \frac{1}{x}$ na intervale $(0; \infty)$ je ohraničená zdola, ale

nie zhora a na intervale $(1; \infty)$, resp. $\langle 1; \infty)$ je ohraničená.



Obr. 4.5

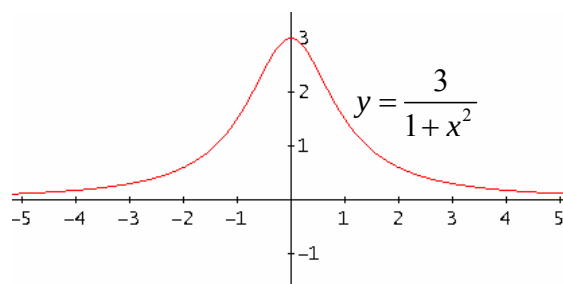
Príklad 4.8.

Dokážte, že funkcia $y = \frac{3}{1+x^2}$ je na celom

svojom definičnom obore ohraničená.

Riešenie:

Zrejme definičným oborom funkcie je množina všetkých reálnych čísel, nakoľko výraz $1+x^2$ nadobúda pre všetky reálne čísla kladné (a teda nenulové) hodnoty.



Obr. 4.6

Dokážeme, že výraz $\frac{3}{1+x^2}$ nadobúda iba hodnoty z intervalu $(0; 3]$.

Zrejme $0 \leq x^2 \Rightarrow 1 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{3}{1+x^2} \leq 3$.

Pretože výraz $\frac{3}{1+x^2}$ nadobúda iba hodnoty z intervalu $(0; 3]$, daná funkcia je ohraničená na celom svojom definičnom obore.

4.7 Monotónne funkcie

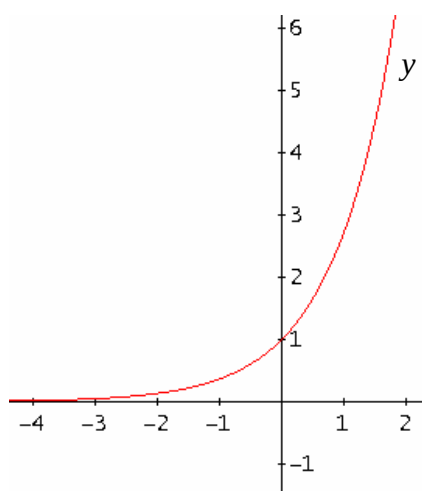
Hovoríme, že funkcia f definovaná na množine A je:

- a. rastúca na $A \Leftrightarrow$ pre každé $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$;
- b. klesajúca na $A \Leftrightarrow$ pre každé $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ je $f(x_1) > f(x_2)$;
- c. nerastúca na $A \Leftrightarrow$ pre každé $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ je $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- d. neklesajúca na $A \Leftrightarrow$ pre každé $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ je $f(x_1) \leq f(x_2)$.

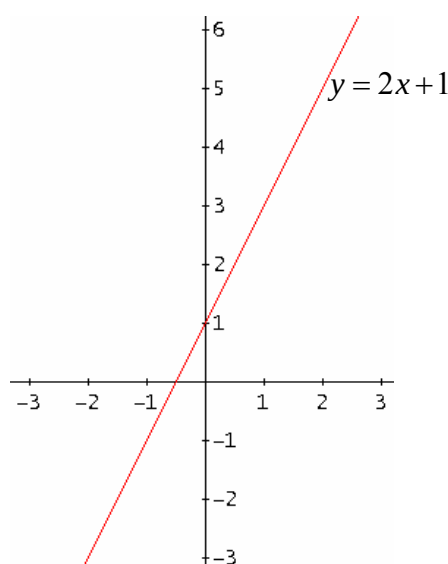
Poznámka: Rastúca a klesajúca funkcia sa nazývajú **rýdzomonotónne** funkcie.

Príklad 4.9.

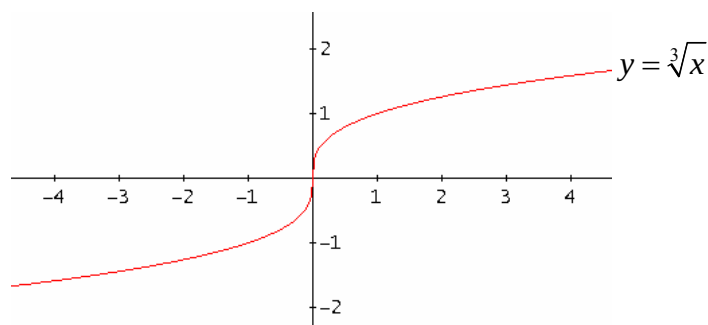
Rastúce funkcie:



Obr. 4.7a

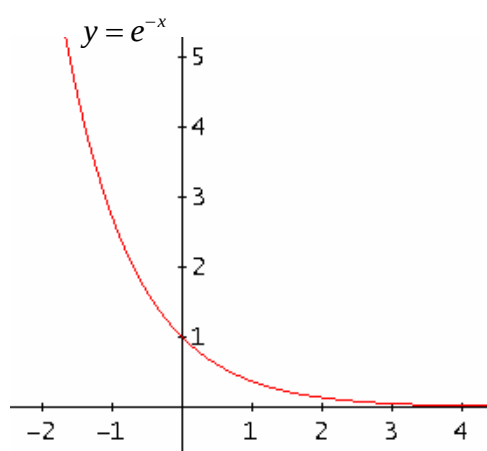


Obr. 4.7b

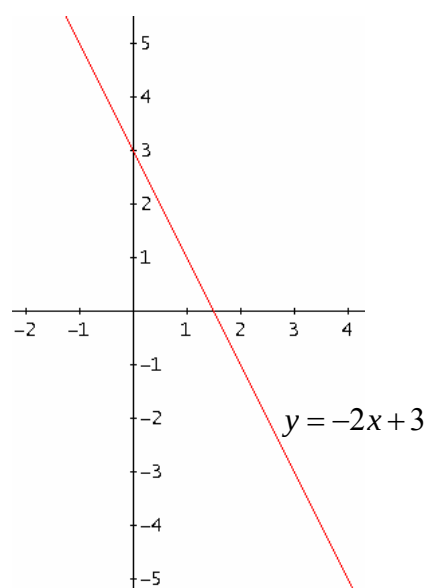


Obr. 4.7c

Klesajúce funkcie:



Obr. 4.8a



Obr. 4.8b

Príklad 4.10.

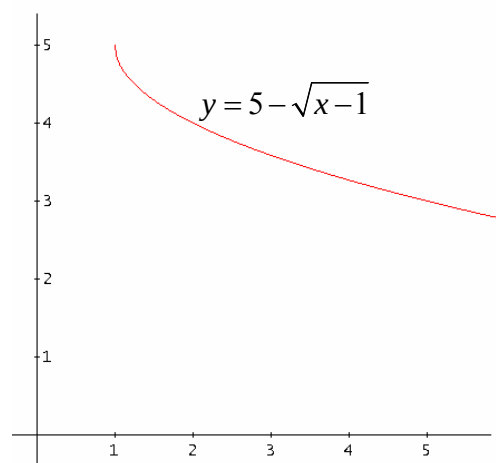
Vyšetrite monotónnosť funkcie $y = 5 - \sqrt{x-1}$ na celom jej definičnom obore.

Riešenie:

Vieme, že definičným oborom tejto funkcie je interval $\langle 1; \infty \rangle$.

Nech $x_1 < x_2$ sú ľubovoľné čísla z intervalu $\langle 1; \infty \rangle$. Potom dostávame:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ \sqrt{x_1 - 1} &< \sqrt{x_2 - 1} \\ 5 - \sqrt{x_1 - 1} &> 5 - \sqrt{x_2 - 1} \\ f(x_1) &> f(x_2). \end{aligned}$$



Obr. 4.9

Tým sme ukázali, že pre všetky $x_1 < x_2$ z intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ platí $f(x_1) > f(x_2)$, čo v zmysle definície dokazuje, že funkcia $y = 5 - \sqrt{x-1}$ je na celom definičnom obore klesajúca.

4.8 Operácie s funkciami

Dve funkcie f a g sa **rovnajú** (píšeme $f = g$) práve vtedy, ak sa rovnajú ich definičné obory (ako množiny) a pre každé x z definičného oboru platí $f(x) = g(x)$.

Nech sú dané dve funkcie f a g s príslušnými definičnými obormi $D(f)$ a $D(g)$. Nech množina $D = D(f) \cap D(g)$ je neprázdna množina. Potom pre každé $x \in D$ možno definovať nasledujúce funkcie: $h_1 = f + g$, $h_2 = f - g$, $h_3 = f \cdot g$ a za predpokladu, že $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ platí $g(x) \neq 0$, aj funkciu $h_4 = \frac{f}{g}$. Funkciu h_1 nazývame **súčtom** funkcií f a g a označujeme ju $f + g$. Funkciu h_2 nazývame **rozdielom** funkcií f a g a označujeme ju $f - g$. Funkciu h_3 nazývame **súčinom** funkcií f a g a označujeme ju $f \cdot g$. Napokon, funkciu h_4 nazývame **podielom** funkcií f a g a označujeme ju $\frac{f}{g}$.

Príklad 4.11.

Zistite, či sa nasledujúce funkcie f a g rovnajú:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x}{x^2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, g(x) = x + 1$$

Riešenie:

a) Definičným oborom oboch funkcií je množina $D(f) = D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$. Navyše, pre každé číslo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$, teda $f(x) = g(x)$. Preto sa funkcie f a g rovnajú.

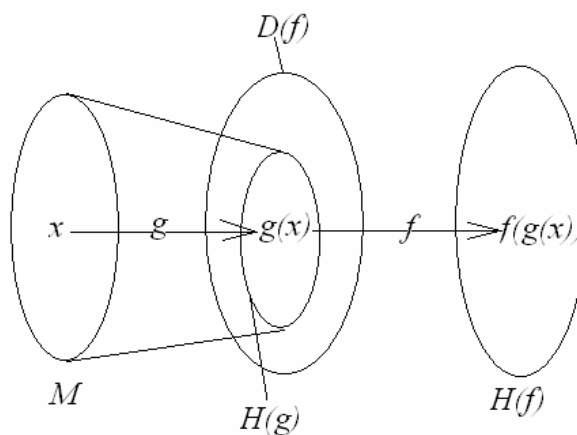
b) Definičným oborom funkcie f je množina $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, zatiaľ čo definičným oborom funkcie g je množina $D(g) = \mathbb{R}$. Nakoľko definičné obory funkcií f a g sa nerovnajú, nerovnajú sa ani funkcie f a g .

4.9 Zložená funkcia

Nech je na množine M definovaná funkcia g . Nech pre každé $x \in M$ je hodnota $g(x) \in D(f)$.

Potom možno na množine M definovať funkciu h nasledovne: $\forall x \in M$ $h(x) = f[g(x)]$. Funkciu h nazývame **zloženou funkciou**, utvorenou z funkcií f a g . Označujeme ju $f \circ g$. Funkciu f nazývame **vonkajšou** zložkou a funkciu g **vnútornou** zložkou zloženej funkcie h .

Upozorňujeme čitateľa, že zložená funkcia môže byť utvorená z viacerých ako dvoch „častí“. Presnejšie povedané, vonkajšia zložka f alebo vnútorná zložka g môžu byť zase zložené funkcie.



Obr. 4.10

Príklad 4.12.

Nech $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$, $g(x) = x+1$. Nájdite $f(f(x)), f(g(x)), g(f(x)), g(g(x))$.

Riešenie:

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad f(g(x)) = f(x+1) = \frac{1}{x+1}, x \neq -1$$

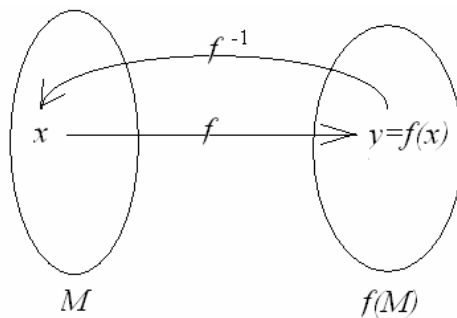
$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x} \qquad g(g(x)) = g(x+1) = (x+1)+1 = x+2$$

4.10 Inverzná funkcia

Nech f je reálna funkcia. Budeme hovoriť, že funkcia f je **prostá** na množine $M \subseteq D(f)$, ak pre každú dvojicu $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$ platí: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Veta 4.1: Každá rýdzomonotónna funkcia je prostá.

Nech f je reálna funkcia, ktorá je prostá na neprázdnej množine $M \subset D(f)$. Označme znakom $f(M)$ obraz množiny M pri zobrazení funkciou f (t.j. $f(M) = \{y, y = f(x), x \in M\}$). Potom funkciu, ktorá každému $y \in f(M)$ priradí práve to $x \in M$, ktoré funkcia f zobrazila na bod $y \in f(M)$, nazývame **inverznou funkciou k funkcii f a označujeme ju f^{-1}** .



Obr. 4.11

Poznamenajme, že výraz f^{-1} neznamena mocninu funkcie f , ale je to iba zaužívaný symbol na označenie inverznej funkcie. Teda inverzná funkcia je vlastne „spätné zobrazenie“ množiny $f(M)$ na množinu M .

Nech f je prostá funkcia na celom svojom definičnom obore $D(f)$. Nech $H(f)$ je obor hodnôt tejto funkcie. Priamo z definície inverznej funkcie vidno, že platí:

Veta 4.2: Nech f je prostá funkcia. Potom pre každé $a \in D(f)$ platí: $f^{-1}[f(a)] = a$ a pre každé $b \in H(f)$ platí: $f[f^{-1}(b)] = b$.

Príklad 4.13.

Dokážte, že funkcia $f(x) = 2x+4$ je prostá a vypočítajte k nej inverznú funkciu.

Riešenie:

Zrejme definičným oborom funkcie f je množina všetkých reálnych čísel.

Dokážeme, že pre každú dvojicu $x_1, x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$ platí: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$. Potom $2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 4 \neq 2x_2 + 4 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverznú funkciu nájdeme tak, že v rovnici $y = 2x + 4$ navzájom zameníme premenné x a y a potom vyjadríme premennú y v závislosti od x .

Teda:

$$x = 2y + 4$$

$$x - 4 = 2y$$

$$y = \frac{x}{2} - 2$$

Inverznou funkciou k funkcii $f(x) = 2x + 4$ je funkcia $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2$.

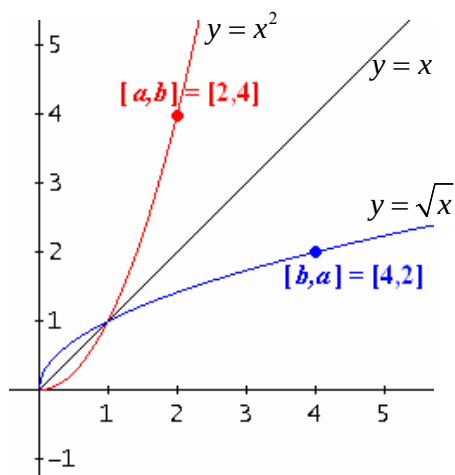
Pozorný čitateľ si môže klásť otázku, prečo možno určiť inverznú funkciu iba k funkcii prostej. (Ak by napríklad k funkcii $y = x^2$ existovala inverzná funkcia, na akú hodnotu by zobrazila bod „4“?)

Poznamenajme však, že ak nejaká funkcia nie je prostá na celom svojom definičnom obore, môže byť prostá na nejakej podmnožine tohto definičného oboru. A na takejto podmnožine už môžeme hovoriť o inverznej funkcii.

Konkrétne funkcia $y = x^2$ nie je prostá na $D(f) = \mathbb{R}$, ale je prostá napr. na intervale $\langle 0; \infty \rangle$. Tu teda možno hovoriť o inverznej funkcii, ktorou, ako sa ľahko zistí, je na tomto intervale funkcia $y = \sqrt{x}$.

Nech f je funkcia, ku ktorej existuje inverzná funkcia f^{-1} . Ak bod $[a, b]$ leží na grafe funkcie f (t.j. $f(a) = b$), potom z definície inverznej funkcie platí, že bod $[b, a]$ leží na grafe funkcie f^{-1} , lebo $f^{-1}(b) = a$.

Z tohto faktu môžeme usúdiť, že graf funkcie f^{-1} je zrkadlovým obrazom grafu funkcie f podľa priamky $y = x$.



Obr. 4.12

4.11 Párne a nepárne funkcie

Nech definičný obor $D(f)$ funkcie $f(x)$ má nasledujúcu vlastnosť:

Ak $x \in D(f)$, tak aj $(-x) \in D(f)$. Potom hovoríme, že:

- $f(x)$ je **párna** funkcia, ak pre každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$,
- $f(x)$ je **nepárna** funkcia, ak pre každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Príklad 4.14

Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť nasledujúcich funkcií:

a) $f(x) = \frac{3x^4 + 2}{2x}$

b) $f(x) = x^2 + x - 3$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^2$

Riešenie:

a)

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^4 + 2}{2x} \\ f(-x) &= \frac{3(-x)^4 + 2}{2(-x)} = \frac{3x^4 + 2}{-2x} = -\frac{3x^4 + 2}{2x} = -f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ je nepárna}$$

b)

$$f(1) = 1^2 + 1 - 3 = -1$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) - 3 = -3$$

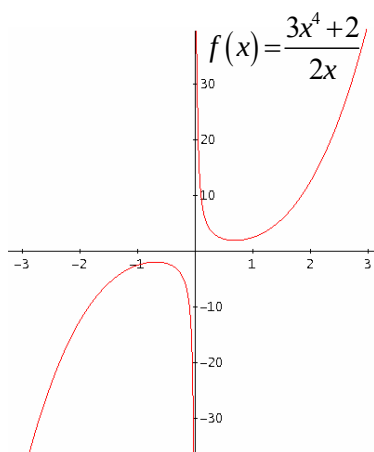
Pretože neplatí ani $f(1) = f(-1)$, ani $f(1) = -f(-1)$, funkcia f nie je ani párna, ani nepárna.

c)

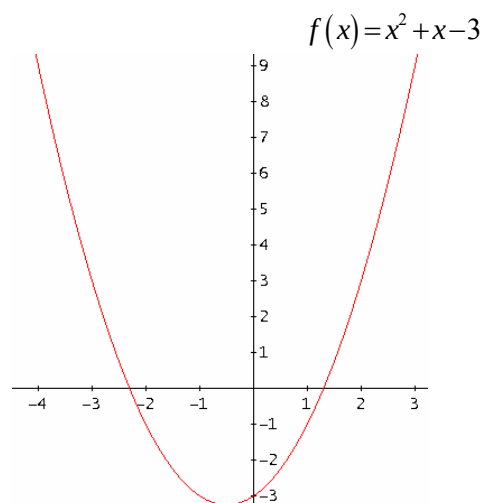
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f(-x) &= (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ je nepárna}$$

d)

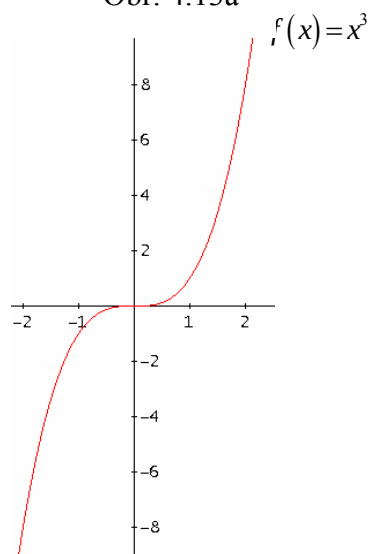
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(-x) &= (-x)^2 = x^2 = f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ je párna}$$



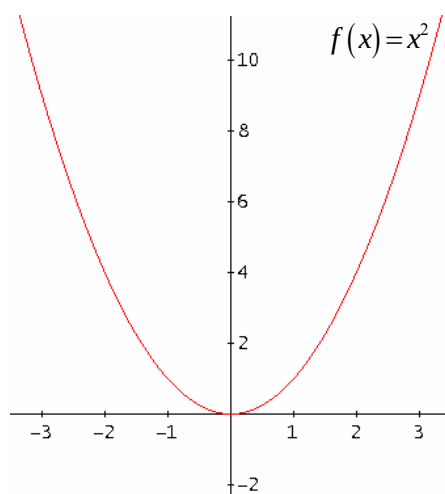
Obr. 4.13a



Obr. 4.13b



Obr. 4.13c



Obr. 4.13d

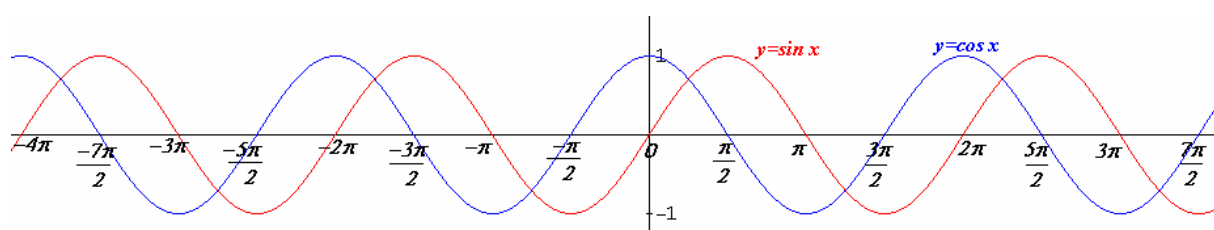
Poznámka. Graf párnej funkcie je súmerný vzhľadom na os y , graf nepárnej funkcie je súmerný vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy.

4.12 Periodické funkcie

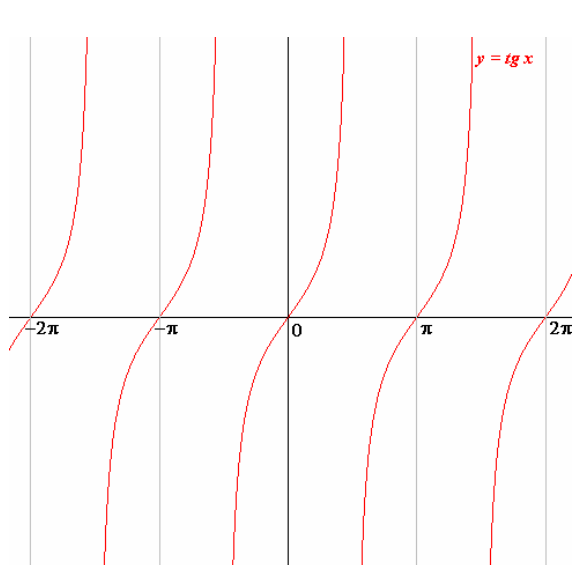
Nech f je funkcia s definičným oborom $D(f)$ a p je kladné reálne číslo. Funkcia f sa nazýva periodická s periódou p , ak

1. $x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f), x - p \in D(f)$,
2. $\forall x \in D(f): f(x + p) = f(x)$.

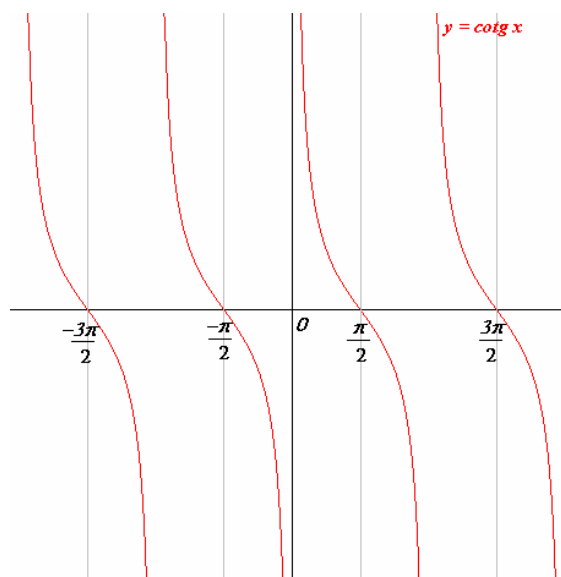
Najmenšia perióda p sa nazýva základnou periódou. Napríklad funkcie $\sin x$ a $\cos x$ majú periódy $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ a ich základná perióda je 2π . Podobne funkcie $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ majú periódy $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ a ich základná perióda je π .



Obr. 4.14a



Obr. 4.14b



Obr. 4.14c

Príklad 4.15 Určte základnú periódu pre funkcie

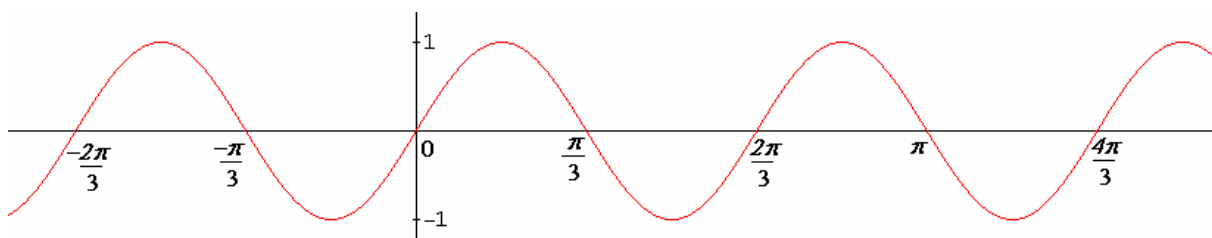
- a) $y = \sin 3x$ b) $y = \sin \frac{x}{4}$

Riešenie:

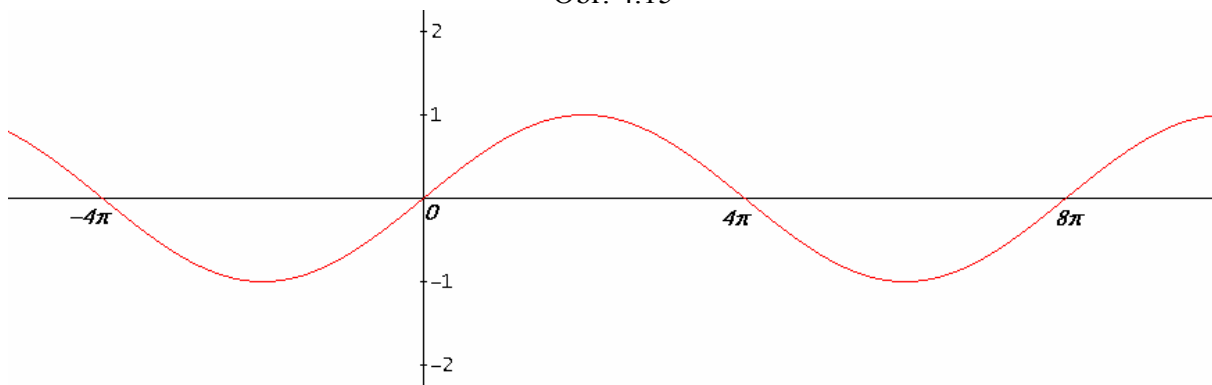
- a) Predpokladajme, že p je perióda. Má platiť: $\sin 3x = \sin[3(x + p)]$, čiže $\sin[3(x + p)] - \sin 3x = 0$. Použijeme vzorec $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$. Potom

$\sin[3(x+p)] - \sin 3x = \sin(3x+3p) - \sin 3x = 2 \cdot \sin \frac{3p}{2} \cdot \cos \frac{6x+3p}{2} = 0$. Aby tento vzťah platil pre ľubovoľné x , musí platiť $\sin \frac{3p}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3p}{2} = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$. Pre $k=1$ dostaneme $p = \frac{2\pi}{3}$. Graf funkcie je znázornený na obr. 4.15.

b) Predpokladajme, že p je perióda. Má platiť: $\sin \frac{x}{4} = \sin \left(\frac{x+p}{4} \right)$, čiže $\sin \left(\frac{x+p}{4} \right) - \sin \frac{x}{4} = 0$. Opäť použijeme vzorec $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$. Potom $\sin \left(\frac{x+p}{4} \right) - \sin \frac{x}{4} = 2 \cdot \sin \frac{p}{8} \cdot \cos \frac{2x+p}{8} = 0$. Aby tento vzťah platil pre ľubovoľné x , musí platiť $\sin \frac{p}{8} = 0 \Rightarrow \frac{p}{8} = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$. Pre $k=1$ dostaneme $p = 8\pi$. Graf funkcie je znázornený na obr. 4.16.



Obr. 4.15



Obr. 4.16

4.13 Úlohy

Načrtnite graf uvedenej funkcie, určte jej definičný obor, obor hodnôt, základné vlastnosti (intervaly monotónnosti, ohraničenosť, maximum/minimum, párnosť/nepárnosť, prostosť, periodickosť). Určte rovnicu inverznej funkcie, ak existuje (okrem goniometrických). V príkladoch 1-3 načrtnite grafy inverzných funkcií.

1. $f : y = 7 - 3x$

2. $f : y = x^2 - x - 6$

3. $f : y = 8 - 2x^2$

4. $f : y = (x - 2)^3 - 5$

5. $f : y = x^4 - 16$

6. $f : y = \frac{1}{x+3}$

7. $f : y = \frac{2x-2}{x+3}$

8. $f : y = 2^{x-3} - 5$

9. $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$

10. $f : y = 3 + \log_5 x$

11. $f : y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

12. $f : y = \ln(5x)$

13. $f : y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

14. $f : y = 2 + \cos x$

15. $f : y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

16. $f : y = 3 - \operatorname{cotg} x$

Riešenie:

1. $f : y = 7 - 3x$

pre $x = 0$ $y = 7 - 3 \cdot 0 = 7$

pre $x = 2$ $y = 7 - 3 \cdot 2 = 1$

... grafom je priamka prechádzajúca bodmi $[0;7]$ a $[2;1]$

$D = \mathbb{R}; H = \mathbb{R}$

klesajúca

nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

prostá

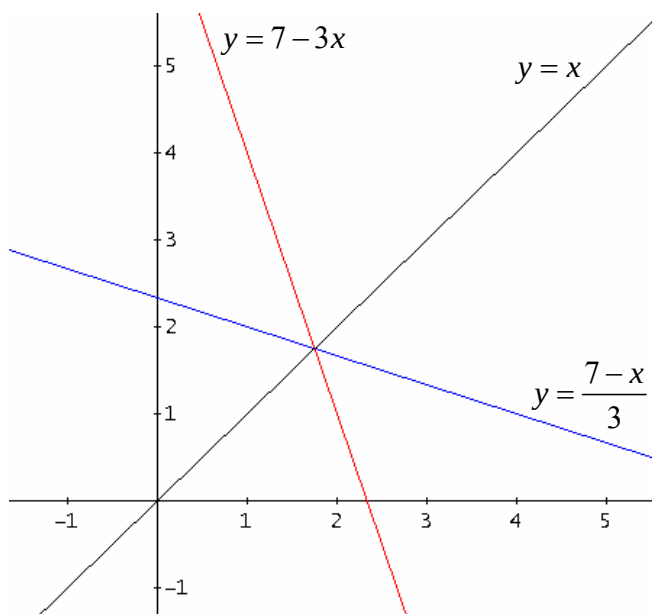
nie je periodická

$f^{-1} :$

$x = 7 - 3y$

$3y = 7 - x$

$y = \frac{7-x}{3}$



2. $f : y = x^2 - x - 6$

Priesečníky s osou x :

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

$$\sqrt{D} = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm 5}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -2$$

$$D = R; H = \left\langle -\frac{25}{4}; \infty \right\rangle; \text{ zdola ohraničená číslom } -\frac{25}{4}$$

klesajúca na intervale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; rastúca na intervale $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

nemá maximum; má minimum v bode $x_0 = \frac{1}{2}, y_{\min} = -\frac{25}{4}$

nie je ani párna ani nepárna; nie je prostá; nie je periodická

Pretože funkcia f nie je prostá na celom svojom definičnom obore, neexistuje k nej inverzná funkcia.

Ak by sme však uvažovali funkciu f iba na

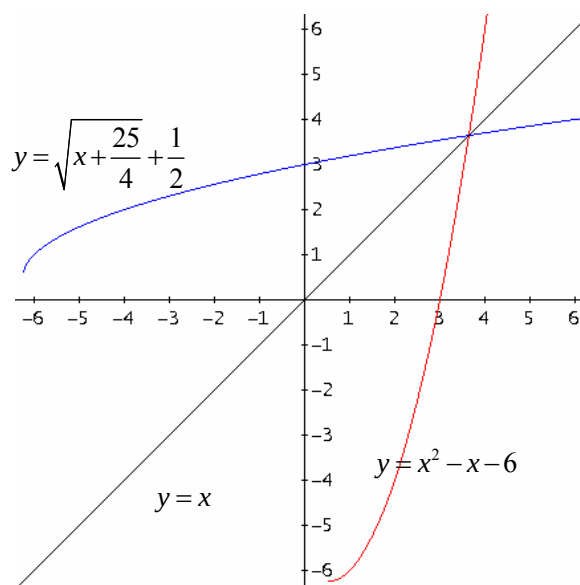
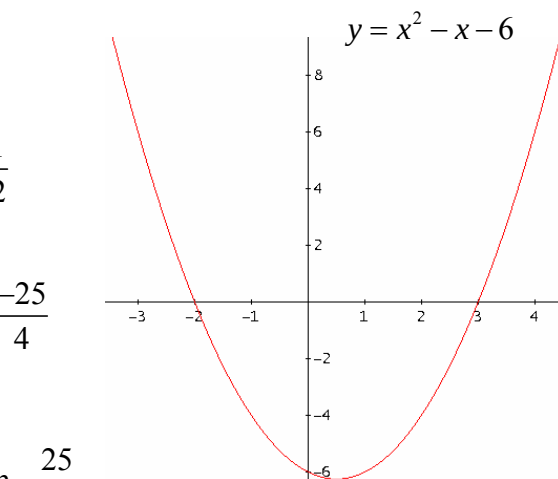
intervale $x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$, potom by bola prostá

a existovala by k nej inverzná funkcia f^{-1} .

$$f^{-1} : x = y^2 - y - 6$$

$$x = y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{25}{4} \Rightarrow x = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x + \frac{25}{4}} = y - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x + \frac{25}{4}} + \frac{1}{2} = y$$



3. $f : y = 8 - 2x^2$

Priesečníky s osou x :

$$8 - 2x^2 = 0$$

$$8 = 2x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Vrchol:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} = 0$$

$$y = 8 - 2x^2$$

$$y = 8 - 2 \cdot 0^2 = 8$$

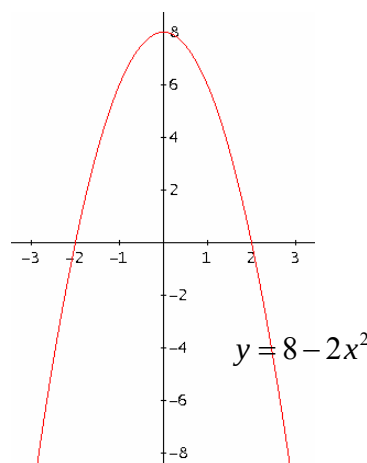
f^{-1} :

$$x = 8 - 2y^2$$

$$2y^2 = 8 - x$$

$$y^2 = \frac{8 - x}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{8 - x}{2}}$$



$$D = \mathbb{R}; H = (-\infty; 8]$$

rastúca na intervale $(-\infty; 0)$

klesajúca na intervale $\langle 0; \infty)$

zhora ohraničená číslom 8

nemá minimum

má maximum v bode $x_0 = 0, y_{\max} = 8$

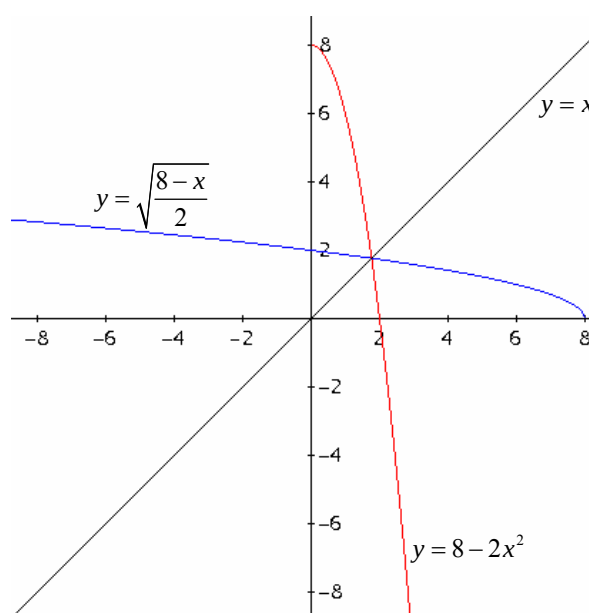
je párna; nie je nepárna

nie je prostá

nie je periodická

Pretože funkcia f nie je prostá na celom svojom definičnom obore, neexistuje k nej inverzná funkcia.

Ak by sme však uvažovali funkciu f iba na intervale $x \in \langle 0; \infty)$, potom by bola prostá a existovala by k nej inverzná funkcia f^{-1} .



$$4. f : y = (x-2)^3 - 5$$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1 : y = x^3$.

Graf funkcie f získame z grafu funkcie f_1 posunutím o vektor $(2; -5)$.

$$f : y = (x-2)^3 - 5$$

$$D = \mathbb{R}; H = \mathbb{R}$$

rastúca

nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

prostá

nie je periodická

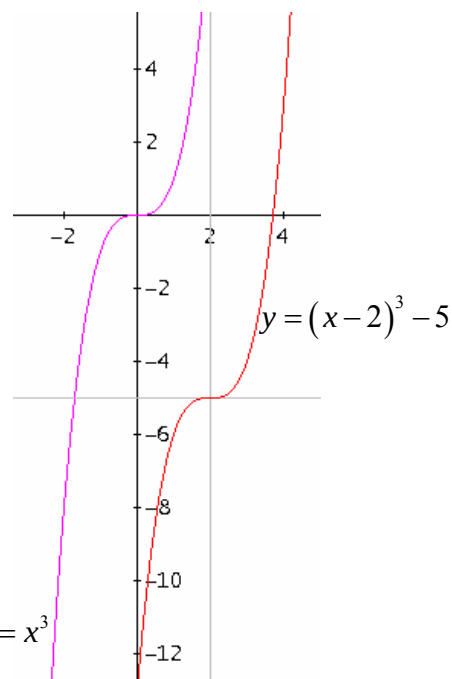
$$f^{-1} :$$

$$x = (y-2)^3 - 5$$

$$x+5 = (y-2)^3$$

$$\sqrt[3]{x+5} = y-2$$

$$y = \sqrt[3]{x+5} + 2$$



$$5. \quad f : y = x^4 - 16$$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1 : y = x^4$.

Graf funkcie f získame z grafu funkcie f_1 posunutím o vektor $(0; -16)$.

$$f : y = x^4 - 16$$

$$D = \mathbb{R}; H = \langle -16; \infty \rangle$$

klesajúca na intervale $(-\infty; 0)$

rastúca na intervale $\langle 0; \infty \rangle$

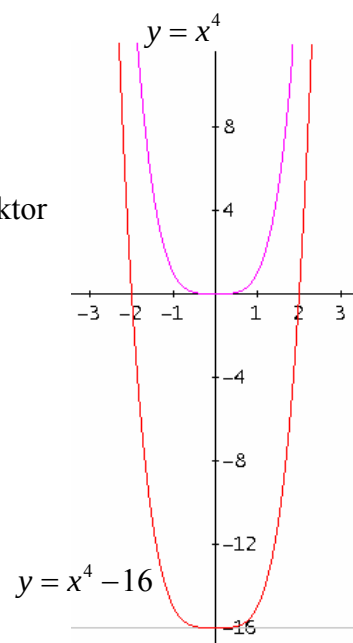
zdola ohraničená číslom -16

nemá maximum

má minimum v bode $x_0 = 0, y_{\min} = -16$

je párna; nie je nepárna

nie je prostá; nie je periodická



Pretože funkcia f nie je prostá na celom svojom definičnom obore, neexistuje k nej inverzná funkcia.

Ak by sme však uvažovali funkciu f iba na intervale $x \in \langle 0; \infty \rangle$, potom by bola prostá

a existovala by k nej inverzná funkcia f^{-1} :

$$x = y^4 - 16$$

$$x + 16 = y^4$$

$$y = \sqrt[4]{x + 16}$$

$$6. \quad f : y = \frac{1}{x+3}$$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1 : y = \frac{1}{x}$. Graf funkcie f získame z grafu funkcie f_1

posunutím o vektor $(-3; 0)$.

$$D = \mathbb{R} - \{-3\}; H = \mathbb{R} - \{0\}$$

klesajúca na intervale $(-\infty; -3)$ a na intervale

$(-3; \infty)$

nie je ohraničená

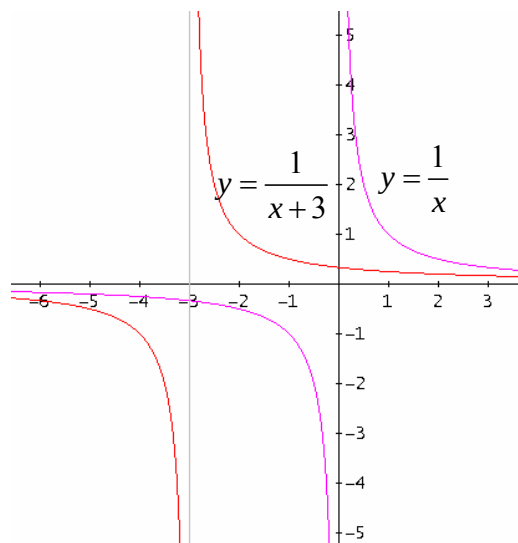
nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

je prostá; nie je periodická

f^{-1} :

$$x = \frac{1}{y+3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{y+3}{1} \Rightarrow y = \frac{1}{x} - 3$$



$$7. \quad f: y = \frac{2x-2}{x+3}$$

$$f: y = \frac{2x-2}{x+3} = \frac{2x+6-8}{x+3} = 2 - \frac{8}{x+3}$$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1: y = \frac{-8}{x}$. Graf funkcie f získame z grafu funkcie f_1 posunutím o vektor $(-3; 2)$.

$$D = \mathbb{R} - \{-3\}; H = \mathbb{R} - \{2\}$$

rastúca na intervale $(-\infty; -3)$

a na intervale $(-3; \infty)$

nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

je prostá

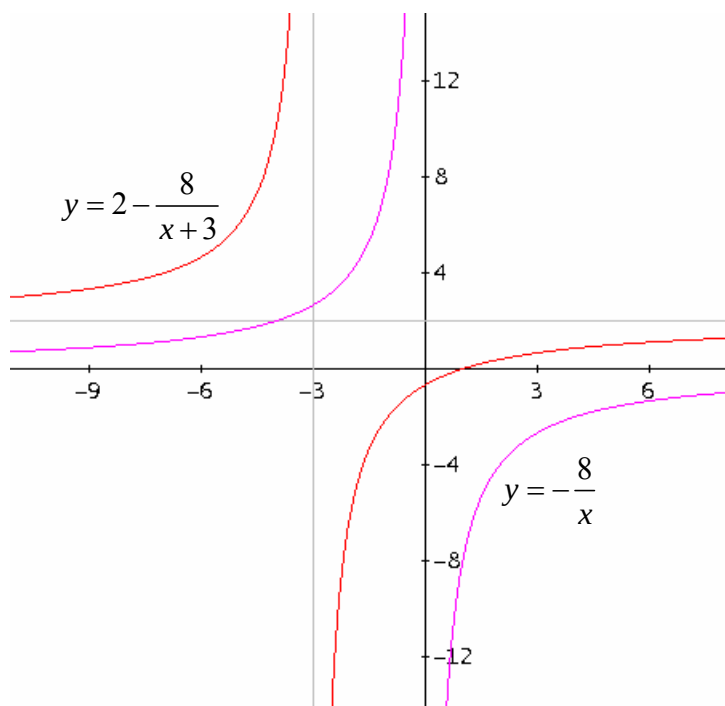
nie je periodická

$$f^{-1}:$$

$$x = 2 - \frac{8}{y+3} \Rightarrow x - 2 = \frac{-8}{y+3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{y+3}{-8} \Rightarrow \frac{8}{2-x} = y+3 \Rightarrow$$

$$y = \frac{8}{2-x} - 3$$



$$8. \quad f: y = 2^{x-3} - 5$$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1: y = 2^x$. Graf funkcie f získame z grafu funkcie f_1 posunutím o vektor $(3; -5)$.

$$D = \mathbb{R}; H = (-5; \infty)$$

rastúca

zdola ohraničená číslom -5

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

je prostá

nie je periodická

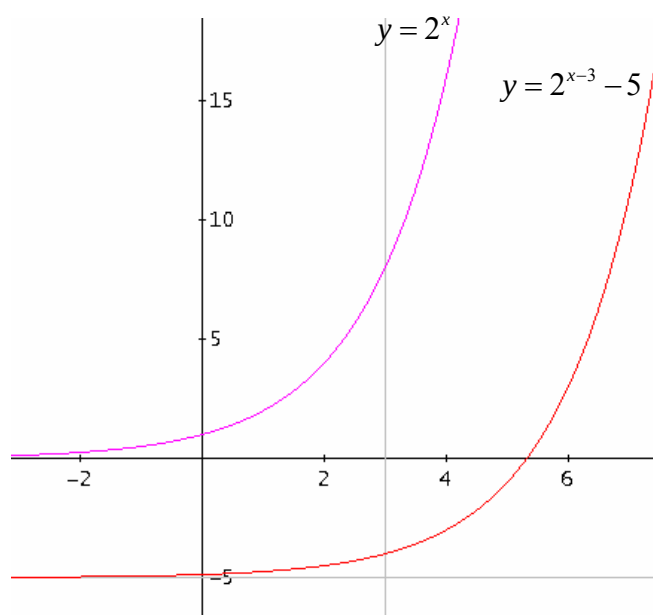
$$f^{-1}: x = 2^{y-3} - 5$$

$$x + 5 = 2^{y-3}$$

$$\log_2(x+5) = \log_2(2^{y-3})$$

$$\log_2(x+5) = y - 3$$

$$y = \log_2(x+5) + 3$$



9. $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Graf funkcie f získame z grafu funkcie

f_1 posunutím o vektor $(-4; 0)$.

$$D = \mathbb{R}; H = (0; \infty)$$

klesajúca

zdola ohraničená číslom 0

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

je prostá

nie je periodická

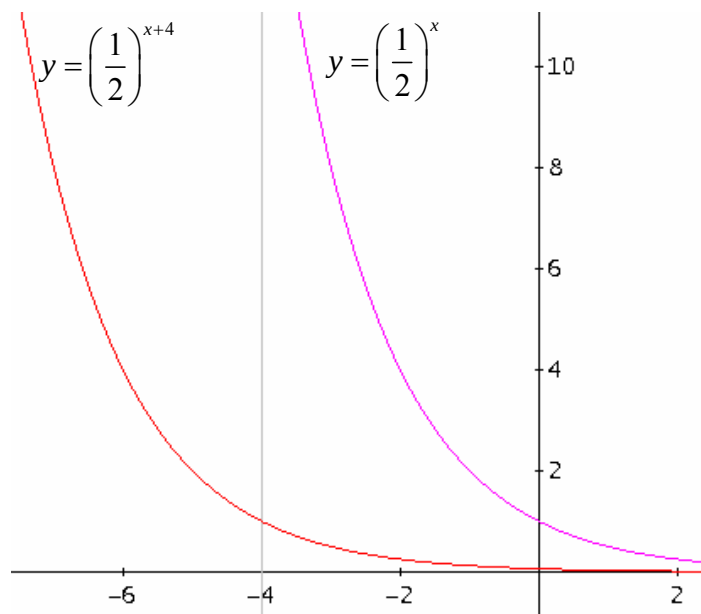
$$f^{-1} :$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+4}$$

$$\log_{1/2} x = \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{y+4}$$

$$\log_{1/2} x = y + 4$$

$$y = (\log_{1/2} x) - 4$$



10. $f : y = 3 + \log_5 x$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1 : y = \log_5 x$. Graf funkcie f získame z grafu funkcie f_1 posunutím o vektor $(0; 3)$.

$$D = (0; \infty); H = \mathbb{R}$$

rastúca

nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

je prostá

nie je periodická

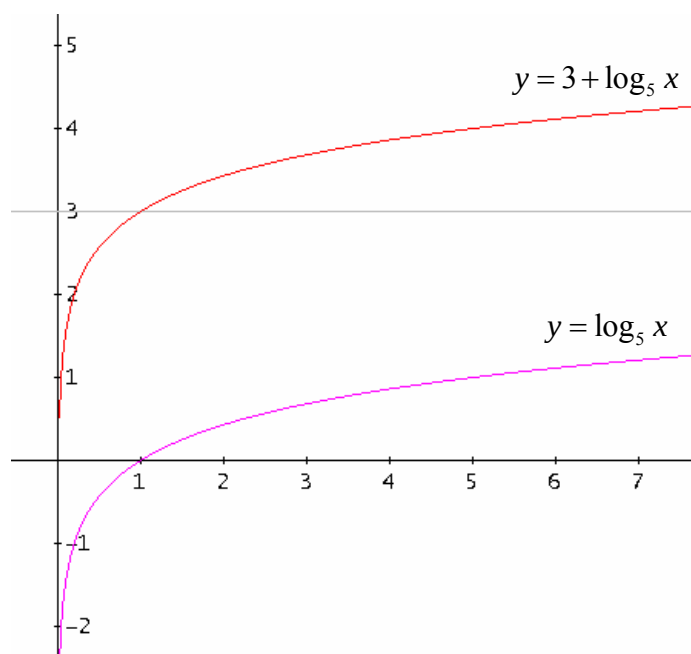
$$f^{-1} :$$

$$x = 5^{y-3}$$

$$\log_5 y = x - 3$$

$$5^{\log_5 y} = 5^{x-3}$$

$$y = 5^{x-3}$$



11. $f : y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1 : y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Graf funkcie f získame z grafu

funkcie f_1 posunutím o vektor $(-2; 0)$.

$D = (-2; \infty); H = \mathbb{R}$

klesajúca

nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

je prostá

nie je periodická

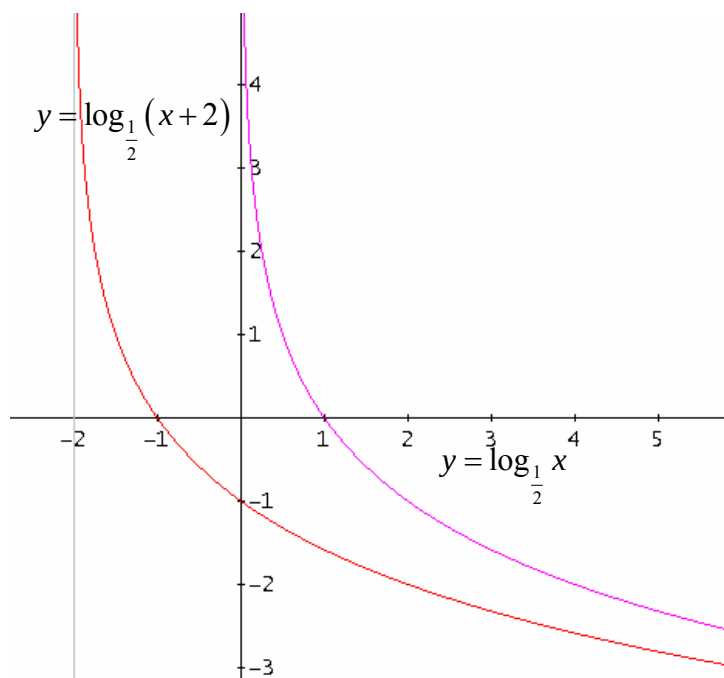
$f^{-1} :$

$x = \log_{1/2}(y+2)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2}(y+2)}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = y+2$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$



12. $f : y = \ln(5x)$

$D = (0; \infty); H = \mathbb{R}$

rastúca

nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna

je prostá

nie je periodická

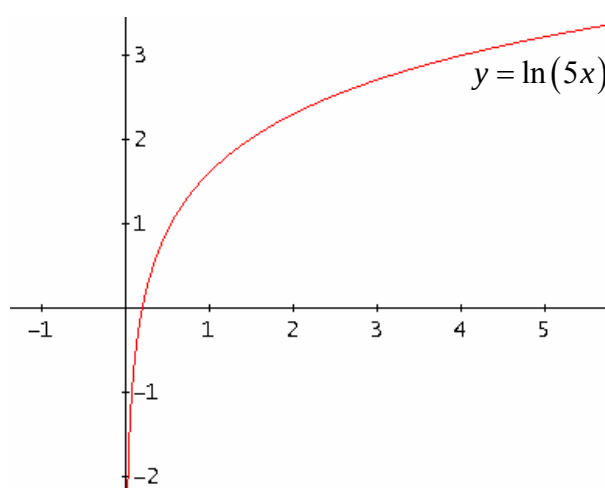
$f^{-1} :$

$x = \ln(5y)$

$e^x = e^{\ln(5y)}$

$e^x = 5y$

$y = \frac{e^x}{5}$



13. $f : y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$D = \mathbb{R}; H = \langle -1; 1 \rangle$

rastúca na intervaloch

$\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$

klesajúca na intervaloch

$\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$

zdola ohraničená číslom -1 , zhora

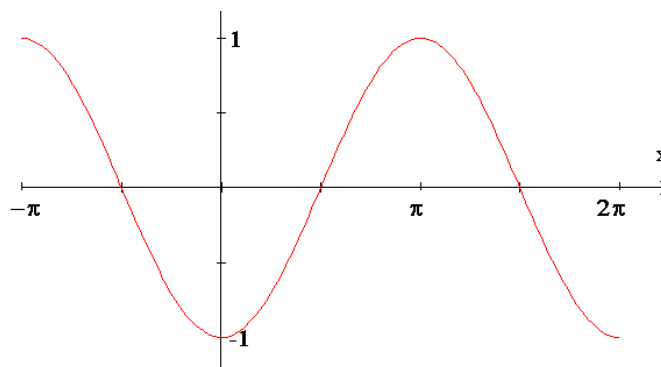
ohraničená číslom 1

maximum v bodoch $x_{\max} = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}; y_{\max} = 1$

minimum v bodoch $x_{\min} = 0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}; y_{\min} = -1$

je párna, nie je nepárna

nie je prostá

je periodická s najmenšou periódou 2π


14. $f : y = 2 + \cos x$

Najskôr urobíme graf pomocnej funkcie $f_1 : y = \cos x$. Graf funkcie f získame z grafu funkcie f_1 posunutím o vektor $(0; 2)$.

$D = \mathbb{R}; H = \langle 1; 3 \rangle$

rastúca na intervaloch

$\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$

klesajúca na intervaloch

$\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$

zdola ohraničená číslom 1 ,

zhora ohraničená číslom 3

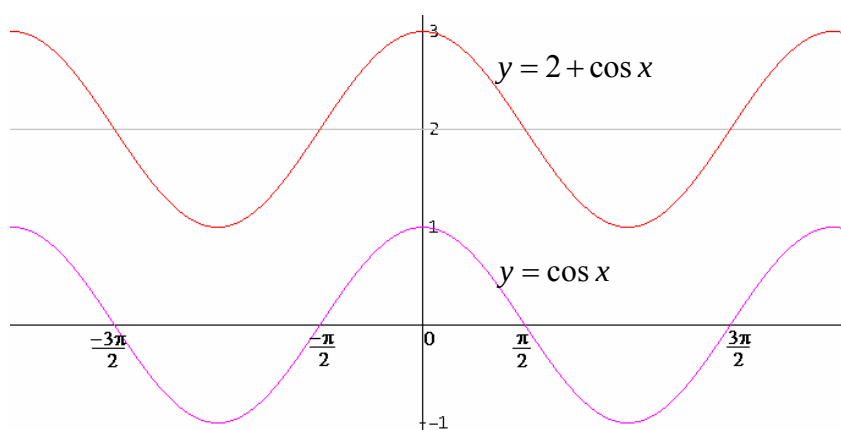
maximum v bodoch

$x_{\max} = 0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}; y_{\max} = 3$

minimum v bodoch $x_{\min} = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}; y_{\min} = 1$

je párna, nie je nepárna

nie je prostá

je periodická s najmenšou periódou 2π


15. $f : y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Graf funkcie $f : y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ získame z grafu funkcie $f_1 : y = \operatorname{tg}(x)$ posunutím o vektor $\left(0; -\frac{\pi}{3}\right)$. Z dôvodu prehľadnosti je znázornený iba graf funkcie f .

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}; H = \mathbb{R}$$

$$\left(\text{poznámka: } -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \right)$$

rastúca na intervaloch

$$\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{7\pi}{6} + k\pi \right); k \in \mathbb{Z}$$

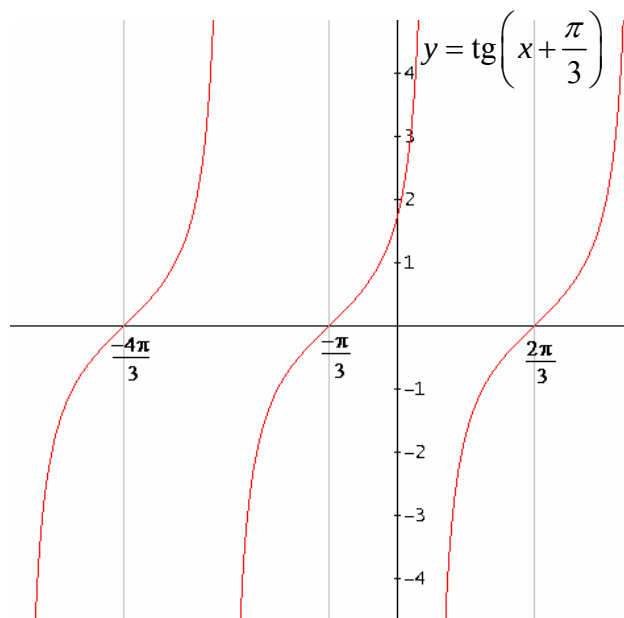
nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna, ani nepárna

nie je prostá

je periodická s najmenšou periódou π



16. $f : y = 3 - \cotg x$

Graf funkcie $f : y = 3 - \cotg x$ získame z grafu funkcie $f_1 : y = -\cotg x$ posunutím o vektor $(0; 3)$. Z dôvodu prehľadnosti je znázornený iba graf funkcie f .

$$D = \mathbb{R} - \{0 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}; H = \mathbb{R}$$

rastúca na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi); k \in \mathbb{Z}$

nie je ohraničená

nemá maximum ani minimum

nie je ani párna, ani nepárna

nie je prostá

je periodická s najmenšou periódou π

