3 Determinanty

3.1 Determinaty druhého stupňa a sústavy lineárnych rovníc

Začneme úlohou, v ktorej je potrebné riešiť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych.

$$\begin{array}{l|l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 & a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 & -a_{12} \end{array}$$

Ak prvú rovnicu vynásobíme číslom a_{22}, druhú číslom $-a_{12}$ a obe rovnice následne sčítame, dostaneme rovnicu o jednej neznámej x_1.

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = c_1a_{22} - c_2a_{12}$$

Podobne môžeme pomocou vhodných násobkov (akých?) získať rovnicu o neznámej x_2.

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}c_2 - a_{21}c_1$$

Riešenie sústavy potom má tvar $x_1 = \dfrac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $\quad x_2 = \dfrac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Poznamenajme, že tento postup môžeme použiť iba v prípade, že výraz v menovateli je rôzny od nuly.

Všimnime si teraz podobnosť vzorcov pre riešenie jednotlivých neznámych. Menovatele oboch vzorcov sú rovnaké a aj výrazy v čitateľoch sú dosť podobné. Takéto súčty súčinov budeme nazývať „determinant matice druhého stupňa“.

Nech $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ je matica nad množinou $\boldsymbol{R}$. Potom výraz $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ nazývame determinantom (druhého stupňa) prislúchajúcim k matici A a označujeme ho

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = |A|.$$

Poznámka. Pre výpočet je dobré si zapamätať, že od súčinu prvkov na hlavnej diagonále (ktorá je vyznačená červenou farbou) odpočítame súčin prvkov na vedľajšej diagonále (ktorá je vyznačená modrou farbou).

V zmysle tejto definície potom riešenie predchádzajúcej sústavy môžeme zapísať v tvare:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Príklad 3.1. Riešte sústavu rovníc použitím predchádzajúcich vzorcov.

$2x - 3y = 1$

$x + 4y = 6$

Riešenie:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 11$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 6 = 22 \qquad x = \frac{|D_x|}{|A|} = \frac{22}{11} = 2$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = 11 \qquad y = \frac{|D_y|}{|A|} = \frac{11}{11} = 1$$

$$K = \{(2;1)\}$$

3.2 Determinanty tretieho stupňa, Sarrusovo pravidlo

Podobnú úvahu, ako sme urobili v prípade sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych, urobíme teraz aj v prípade troch rovníc o troch neznámych.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

Násobme prvú rovnicu číslom $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, druhú rovnicu číslom $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, tretiu číslom $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$, potom prvé dve pričítajme k tretej a dostaneme:

$(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 = c_1a_{22}a_{33} - c_1a_{23}a_{32} + c_2a_{13}a_{32} - c_2a_{12}a_{33} + c_3a_{12}a_{23} - c_3a_{13}a_{22}$

Podobne môžeme pomocou vhodných násobkov eliminovať ďalšie neznáme a dostaneme (čitateľovi doporučujeme, aby si premyslel výber týchto vhodných násobkov):

$(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31})x_2 = a_{11}c_2a_{33} - a_{11}a_{23}c_3 + a_{13}a_{21}c_3 - c_1a_{21}a_{33} + c_1a_{23}a_{31} - a_{13}c_2a_{31}$

$(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31})x_3 = a_{11}a_{22}c_3 - a_{11}c_2a_{32} + c_1a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}c_3 + a_{12}c_2a_{31} - c_1a_{22}a_{31}$

Opäť si všimnime, že pri neznámych sme dostali rovnaké výrazy a naviac aj výrazy na pravých stranách sú podobné. Takéto súčty súčinov budeme nazývať „determinanty tretieho stupňa"

Nech A je štvorcová matica tretieho stupňa s prvkami z množiny reálnych čísel. Potom determinantom (tretieho stupňa) prislúchajúcim k matici A nazývame výraz

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|.$$

Ak označíme postupne $A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{pmatrix}$, potom v zmysle predchádzajúcej definície riešenie sústavy troch rovníc dostávame v tvare

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}.$$

Poznamenajme znova, že determinant matice sústavy musí byť rôzny od nuly.

Výraz pre výpočet determinantu tretieho stupňa je komplikovanejší ako pri výpočte determinantu druhého stupňa. Teraz si uvedieme Sarrusovo pravidlo, ktoré nám umožní ľahšie zapamätanie vzorca pre výpočet determinantu tretieho stupňa. Pod determinant pripíšeme prvý a druhý riadok príslušnej matice. Pre takto zostrojenú schému urobíme súčet súčinov trojíc v smere hlavnej diagonály (vyznačené červenou farbou) a od týchto odčítame súčiny trojíc v smere vedľajšej diagonály (vyznačené modrou farbou).

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Príklad 3.2.

Riešte sústavu rovníc použitím predchádzajúcich vzorcov.

$$2x - 3y + 3z = 1$$
$$x + 4y + z = 6$$
$$y - 2z = 1$$

Riešenie:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot 4\cdot(-2)+3\cdot 1\cdot 1+(-3)\cdot 1\cdot 0-3\cdot 4\cdot 0-2\cdot 1\cdot 1-(-3)\cdot 1\cdot(-2)=-16+3+0-0-2-6=-21$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot 4\cdot(-2)+3\cdot 6\cdot 1+(-3)\cdot 1\cdot 1-3\cdot 4\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1-(-3)\cdot 6\cdot(-2)=-8+18-3-12-1-36=-42$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot 6\cdot(-2)+3\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 0-3\cdot 6\cdot 0-2\cdot 1\cdot 1-1\cdot 1\cdot(-2)=-24+3+0-0-2+2=-21$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot 4\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1+(-3)\cdot 6\cdot 0-1\cdot 4\cdot 0-2\cdot 6\cdot 1-(-3)\cdot 1\cdot 1=8+1+0-0-12+3=0$$

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{-42}{-21} = 2 \qquad y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{-21}{-21} = 1 \qquad z = \frac{|D_3|}{|A|} = \frac{0}{-21} = 0$$

$$K = \{(2;1;0)\}$$

3.3 Determinanty n-tého stupňa, ich výpočet

Označenie: Nech A je štvorcová matica stupňa $n>1$. Znakom A_{ij} budeme označovať maticu, ktorá vznikne z matice A vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca. Je to znova štvorcová matica stupňa n-1.

Determinantom štvorcovej matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ **stupňa n je číslo, označené $|A|$, ktoré sa rovná:**

1. **$|A|=a_{11}$, ak matica A je stupňa 1, t.j. $A=(a_{11})$**
2. **$|A|=a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}| - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\,|A_{1n}|$, ak matica je stupňa $n>1$.**

Poznámka. Táto definícia sa nazýva rekurentná definícia. Pomocou tejto definície vypočítame determinant matice stupňa n pomocou determinantov matíc stupňa n-1.

Poznámka. Číslo $D_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot |A_{ik}|$ sa nazýva algebraický doplnok prvku a_{ik} matice A.

Príklad 3.3. Použitím predchádzajúcej definície vypočítajte determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Riešenie:

$$|A| = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$4 \cdot (-71) - (-1) \cdot (-27) + 3 \cdot 19 - 5 \cdot (-40) = -284 - 27 + 57 + 200 = -54$$

Vlastnosti determinantov

Príklad 3.4. Rozviňte determinant podľa prvkov prvého riadku a potom podľa prvkov druhého stĺpca:

Všimnime si, že determinant tretieho stupňa (a nielen tretieho) má tú vlastnosť, že v každom súčinovom člene sa nachádza prvok z každého riadku aj z každého stĺpca. Môžeme teda z determinantu vyňať pred zátvorku prvky ľubovoľného riadku alebo ľubovoľného stĺpca. Tejto procedúre hovoríme „rozvoj determinantu" podľa prvkov príslušného riadku, resp. príslušného stĺpca. Ukážeme si teraz rozvoj determinantu podľa prvého riadku.

Majme determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ak z jednotlivých súčinov vyberieme pred zátvorky prvky prvého riadku, dostaneme
$\boldsymbol{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}$.

Ak teraz využijeme tú skutočnosť, že výrazy v zátvorkách sú vlastne isté determinanty druhého stupňa, môžeme predchádzajúci výraz v súlade s dohovorom na začiatku podkapitoly zapísať v tvare $\boldsymbol{a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|}$. Tento výraz sa nazýva rozvoj determinantu podľa prvkov prvého riadku.

Podobne, ak z determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

vyberieme pred zátvorky prvky druhého stĺpca, dostaneme
$a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) = \boldsymbol{-a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}|}$.

Tento výraz sa nazýva rozvoj podľa prvkov druhého stĺpca. Upozorňujeme čitateľa na zmenu znamienok. Podrobnejšie sa určovaniu znamienok budeme venovať vo vete 3.3. Nasledujúce vety nám opisujú niektoré základné vlastnosti determinantov. Vybrali sme hlavne tie vlastnosti, ktoré sú potrebné pre výpočet determinantov. Poznamenajme, že **pre**

determinanty vyššieho stupňa ako 3 neexistuje pre výpočet pravidlo podobné Sarrusovmu pravidlu. Môžeme ich počítať iba postupným znižovaním rádu s použitím nasledujúcich viet.

Veta 3.1. Ak všetky prvky niektorého riadku (stĺpca) matice A sú rovné 0, tak $|A| = 0$.

Veta 3.2. Determinant násobíme číslom tak, že ním násobíme niektorý riadok alebo stĺpec determinantu.

Veta 3.3. Pre determinant matice A a pre ľubovoľné $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ platí:

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|,$$

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|.$$

Veta 3.4. Nech matica B vznikne z A trasponovaním. Potom $|B| = |A|$.

Veta 3.5. Ak v determinante sú dva riadky navzájom rovné, tak determinant sa rovná 0. (Platí aj pre stĺpce.)

Veta 3.6. Hodnota determinantu matice A sa nezmení, keď k nejakému riadku pričítame násobok iného riadku. (Platí aj pre stĺpce.)

Poznámka.

Posledná veta je dôležitá najmä pre skutočnosť, že jej použitím vieme vyrábať v riadkoch, prípadne stĺpcoch, nuly bez toho, aby sa zmenila hodnota determinantu. Po vyrobení núl v niektorom riadku alebo stĺpci následne urobíme rozvoj determinantu pomocou tohto riadku, resp. stĺpca.

Príklad 3.5. Ak v determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ pričítame 2-násobok 2. riadku k 3. riadku, dostaneme $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, pričom sa hodnota determinantu nezmení. Druhý zápis determinantu je však pre výpočet jednoduchší. Stačí urobiť rozvoj podľa tretieho riadku:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 11 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$11 \cdot (-12 - 5 - 9 - 30 + 2 - 9) = 11 \cdot (-63) = -693$$

3.4 Použitie determinantov

Použitie determinantov pri riešení sústav rovníc

Našou úlohou bude riešiť nasledujúcu sústavu rovníc použitím determinantov. V úvode tohto paragrafu sme úlohu vyriešili v prípade n=2, resp. n=3. Nasledujúca veta, ktorá sa nazýva Cramerovo pravidlo, je zovšeobecnením predchádzajúcich výsledkov pre ľubovoľné n.

Veta 3.7. (Cramerovo pravidlo)
Nech
$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = c_1$
$a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = c_2$
....
$a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = c_n$
je sústava n lineárnych rovníc o n neznámych. Nech determinant matice sústavy je rôzny od nuly. Potom sústava má jediné riešenie $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$, **kde**

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & c_n & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & c_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & c_n \end{pmatrix}.$$

Príklad 3.6.
Riešte sústavu rovníc:
$2x - 3y + 3z + 5t = -4$
$x + 4y + z - t = 7$
$y - 2z + 2t = -1$
$3x - t = 7$
Riešenie:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 237 \quad |A_1| = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 474 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 237$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -237$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{474}{237} = 2 \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{237}{237} = 1 \qquad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{237} = 0 \qquad t = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-237}{237} = -1$$

$$K = \{(2;1;0;-1)\}$$

Použitie determinantov na výpočet inverznej matice

S výpočtom inverznej matice sme sa už stretli v kapitole 2. Tam sme inverznú maticu počítali pomocou ERO. Nasledujúca veta nám dáva návod, ako môžeme inverznú maticu vypočítať pomocou determinantov.

Veta 3.8. Nech A je regulárna matica. Potom $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{|A|} & \frac{D_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{D_{n1}}{|A|} \\ \frac{D_{12}}{|A|} & \frac{D_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{D_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{D_{1n}}{|A|} & \frac{D_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{D_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$**.**

Príklad 3.7.

Nájdite inverznú maticu k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Riešenie:
Vypočítame jednotlivé determinanty:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 2 - 6 - 6 + 1 + 20 = 1$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 1 = -9 \qquad D_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 3) = 7$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \qquad D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 - 1) = 11$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8 \qquad D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 6) = 5$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \qquad D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$$

Inverzná matica k matici A je $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{1} & \frac{11}{1} & \frac{-4}{1} \\ \frac{7}{1} & \frac{-8}{1} & \frac{3}{1} \\ \frac{-4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{-2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 & -4 \\ 7 & -8 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Príklad 3.8.

Nájdite inverznú maticu k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Riešenie:
Vypočítame jednotlivé determinanty:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 \qquad D_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad D_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -24 \qquad D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 \qquad D_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$D_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -13 \qquad D_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Inverzná matica k matici A je $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & \frac{-4}{3} & -8 & \frac{-13}{3} \\ \frac{-7}{3} & \frac{2}{3} & 3 & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{-2}{3} & -2 & \frac{-5}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Z kapitoly o maticiach vieme, že inverzná matica existuje iba k regulárnej matici. V predchádzajúcej vete sú použité zlomky, v ktorých je menovateľom determinant matice A. Korektnosť vzorca pre regulárne matice zabezpečuje nasledujúca veta.

Veta 3.9.
Štvorcová matica je regulárna vtedy a len vtedy, keď jej determinant je rôzny od 0. Štvorcová matica je singulárna vtedy a len vtedy, keď sa jej determinant rovná 0.

Príklad 3.9.

Zistite, či je matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ regulárna alebo singulárna.

Riešenie:
Vypočítame determinant matice A. Ak bude tento determinant nulový, matica je singulárna, inak je regulárna.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+4+1-0-0=5$$

Pretože determinant je nenulový, matica je regulárna.

Príklad 3.10.

Zistite, či je matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ regulárna alebo singulárna.

Riešenie:

Pretože determinant $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (pozri príklad 3.8.) matica je regulárna.

Príklad 3.11.

Zistite, či je matica $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$ regulárna alebo singulárna.

Riešenie:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

Matica je singulárna.
(Pri výpočte hodnoty determinantu sme najprv pričítali (-2)-násobok 1. riadku k 4. riadku a potom sme využili poznatok, že ak matica obsahuje nulový riadok, jej determinant je nulový.)

3.5 Úlohy

Vypočítajte hodnoty determinantov nasledujúcich matíc, ak existujú.

1. $\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 7 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & -7 & -2\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 4 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 4 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 5 & 4\\ -2 & 1 & -3 & 0 & 5\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 5 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 2 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

Riešenia:

1.

$|5|=5$

2.

$$\begin{vmatrix}2 & 5\\ -2 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-5\cdot(-2)=-2+10=8$$

3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot7\cdot1+0\cdot3\cdot2+1\cdot2\cdot5-0\cdot7\cdot5-2\cdot2\cdot2-1\cdot3\cdot1=14+0+10-0-8-3=13$$

4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -7 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-7)\cdot(-1)+0\cdot(-3)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)\cdot5$$

$$-0\cdot(-7)\cdot5-2\cdot(-2)\cdot(-2)-(-1)\cdot(-3)\cdot(-1)=14+0+10-0-8+3=19$$

5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot1\cdot2+2\cdot2\cdot(-1)+5\cdot3\cdot(-2)-2\cdot1\cdot(-2)-4\cdot3\cdot(-1)-5\cdot2\cdot2=$$

$$8-4-30+4+12-20=-30$$

6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 11 & 15 \\ 0 & -4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 6 & 11 & 15 \\ -4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 6 & 11 & 15 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$4\cdot11\cdot(-2)+2\cdot6\cdot(-1)+5\cdot15\cdot0-2\cdot11\cdot0-4\cdot15\cdot(-1)-5\cdot6\cdot(-2)=-88-12+0-0+60+60=20$$

7.

Matica nie je štvorcová, preto determinant neexistuje.

8.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$5\cdot2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot2\cdot\left(3\cdot4-(-2)\cdot0\right)=5\cdot2\cdot3\cdot4=120$$

9.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 \\ 5 & 6 & -7 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & 1 \\ 5 & 6 & -7 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1,5 & 1\\ 0 & 5 & -8 & 1\\ 0 & 1 & -14,5 & -9\\ 0 & 4 & -5 & 3\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}5 & -8 & 1\\ 1 & -14,5 & -9\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -8 & 1\\ 2 & -29 & -18\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}=-155$$

10.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=0$$

Pri výpočte sme najprv pričítali (-1)-násobok 1. riadku k 2. riadku a potom sme využili skutočnosť, že determinant matice obsahujúcej nulový riadok je nula.

11.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=0$$

Pri výpočte sme najprv pričítali (-1)-násobok 1. riadku k 3. riadku, potom sme pričítali (-1)-násobok 2. riadku k 3. riadku a napokon sme využili skutočnosť, že determinant matice obsahujúcej nulový riadok je nula.

Použitím determinantov riešte sústavy rovníc.

12. $\begin{aligned}x+2y&=7\\ 3x-y&=0\end{aligned}$

13. $\begin{aligned}x+y+z&=6\\ 2x+2y+z&=11\\ x+3z&=6\end{aligned}$

14. $\begin{aligned}y+3z&=3\\ 2x+10y+z&=5\\ x+3y&=2\end{aligned}$

15. $\begin{aligned}a+b+c+d&=2\\ 2a+3b+d&=5\\ b+3c+d&=1\\ a-5b+c+2d&=-4\end{aligned}$

Riešenie:

12.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1-6=-7$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix}7 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-7-0=-7 \qquad |A_y|=\begin{vmatrix}1 & 7\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0-21=-21$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-7}{-7}=1 \qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-21}{-7}=3 \qquad K=\{[1;3]\}$$

13.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6+0+1)-(2+0+6) = 7-8 = -1$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (36+0+6)-(12+0+33) = 42-45 = -3$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (33+12+6)-(11+6+36) = 51-53 = -2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (12+0+11)-(12+0+12) = 23-24 = -1$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3 \qquad x = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad K = \{[3;2;1]\}$$

14.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+18+1)-(30+0+0) = 19-30 = -11$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+45+2)-(60+9+0) = 47-69 = -22$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0+12+3)-(15+0+0) = 15-15 = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (0+18+5)-(30+0+4) = 23-34 = -11$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-22}{-11} = 2 \qquad x = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{-11} = 0 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-11}{-11} = 1 \qquad K = \{[2;0;1]\}$$

15.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+0+12-18-0+2 = -1$$

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -15 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 13 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -15 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \\ -1 & 13 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$-(60+52-15+20-26-90) = -1$$

$$|A_b| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+12-18+2 = -1$$

$$|A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 1+6-6-6+6-1 = 0$$

$$|A_d| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -18+12+18-12 = 0$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad d = \frac{|A_d|}{|A|} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad K = \{[1;1;0;0]\}$$

Pomocou determinantov nájdite inverznú maticu k danej matici. Ak existuje, urobte aj skúšku správnosti.

16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Riešenia:

16.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

$$D_{11} = |2| = 2 \quad D_{12} = -|3| = -3 \quad D_{21} = -|1| = -1 \quad D_{22} = |2| = 2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & \frac{-1}{1} \\ \frac{-3}{1} & \frac{2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Skúška správnosti:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot(-3) & 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot(-3) & 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 4 - 12 - 0 - 2 = -8$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{-8} & \frac{-2}{-8} & \frac{-4}{-8} \\ \frac{1}{-8} & \frac{-5}{-8} & \frac{2}{-8} \\ \frac{-4}{-8} & \frac{4}{-8} & \frac{0}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Skúška správnosti:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 - 2 - 0 - 0 = 2$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{0}{2}\\ \frac{-2}{2} & \frac{4}{2} & \frac{0}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Skúška správnosti:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

19.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 5\end{vmatrix}=0+7+6-3-0-10=0$$

Pretože determinant matice A je nulový, inverzná matica k matici A neexistuje.

20.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 5 & 11 & 5 & 3\\ 2 & 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & -3 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=2-4=-2$$

$$D_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 11 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=57 \qquad D_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 5 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=-14$$

$$D_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 5 & 11 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-19 \qquad D_{14}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 11 & 5\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=-12$$

$$D_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 11 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=-16 \qquad D_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$D_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 11 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=6 \qquad D_{24}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 11 & 5\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=2$$

$$D_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=-9 \qquad D_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 11 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad D_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{57}{-2} & \frac{-16}{-2} & \frac{-9}{-2} & \frac{1}{-2} \\ \frac{-14}{-2} & \frac{4}{-2} & \frac{2}{-2} & \frac{0}{-2} \\ \frac{-19}{-2} & \frac{6}{-2} & \frac{3}{-2} & \frac{-1}{-2} \\ \frac{-12}{-2} & \frac{2}{-2} & \frac{2}{-2} & \frac{0}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-57}{2} & 8 & \frac{9}{2} & \frac{-1}{2} \\ 7 & -2 & -1 & 0 \\ \frac{19}{2} & -3 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skúška správnosti:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-57}{2} & 8 & \frac{9}{2} & \frac{-1}{2} \\ 7 & -2 & -1 & 0 \\ \frac{19}{2} & -3 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$