

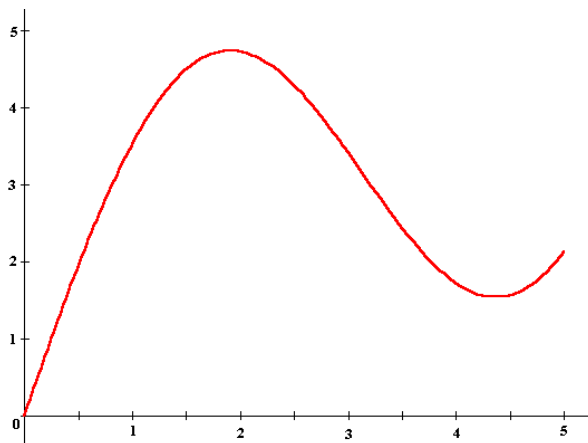
10 Určitý integrál, jeho výpočet a aplikácie

10.1 Motivácia k určitému integrálu

Úvodom sa budeme zaoberať jednou úlohou z geometrie, riešenie ktorej vedie k zavedeniu pojmu určitý integrál.

Úloha o plošnom obsahu:

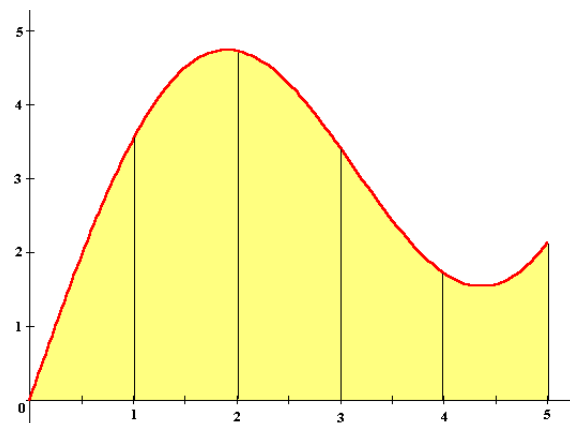
Zvoľme si v rovine pravouhlý súradnicový systém. Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a nadobúda na tomto intervale nezáporné hodnoty, t.j. $f(x) \geq 0$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Graf funkcie $f(x)$ na intervale $\langle 0; 5 \rangle$ je znázornený na obr. 10.1.



Obr. 10.1

Nech $f(x)$ je nezáporná spojitá funkcia definovaná na intervale $\langle a, b \rangle$. Priamky $x = a, x = b, y = 0$ a graf funkcie $y = f(x)$ ohraničujú geometrický rovinný útvar, ktorý nazývame krivočiary lichobežník L . Teda L je množina bodov $L = \{[x, y] \in E_2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$

Krivočiary lichobežník ohraničený priamkami $x = 0, x = 5, y = 0$ a grafom funkcie $f(x) = x + 3 \sin x$ je znázornený na obr. 10.2 žltou farbou.

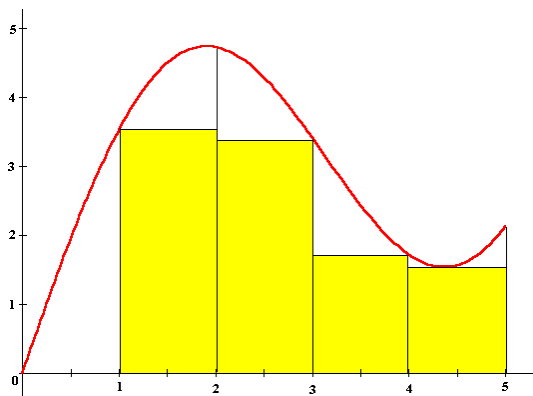


Obr. 10.2

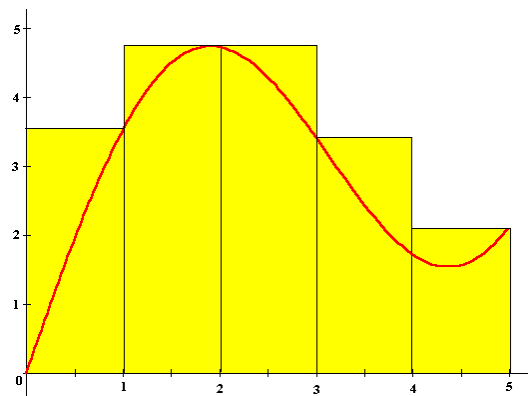
Chceme určiť plošný obsah krivočiareho lichobežníka L . Ponúka sa nám tu prirodzene táto myšlienka: rozdeľme interval $\langle a, b \rangle$ deliacimi bodmi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ na n častí. Nech bod $a = x_0, b = x_n$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$). Rovnobežkami s y -ovou osou, prechádzajúcimi bodmi x_i pre $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, rozdelíme krivočiary lichobežník L na n krivočiarych lichobežníkov. Funkcia f je podľa predpokladu spojitá na $\langle a, b \rangle$, z čoho vyplýva, že je spojitá na každom uzavretom intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Preto má na každom uzavretom intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ minimum aj maximum. Označme $\min_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) = m_i$, $\max_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) = M_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Obdĺžniky so stranami dĺžok Δx_i a m_i tvoria stupňovitý mnohoúhelník Q vpísaný do krivočiareho lichobežníka L s plošným obsahom $P_Q = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$. Obdĺžniky so stranami dĺžok Δx_i a M_i tvoria stupňovitý mnohoúhelník R opísaný krivočiaremu

lichobežníku L o plošnom obsahu $P_R = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, kde $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$ je dĺžka základne krivočiareho lichobežníka.

Na obrázkoch 10.3 a 10.4 sú znázornené stupňovité mnohoúhelníky pre delenie $a = x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = b = 5$.



Obr. 10.3



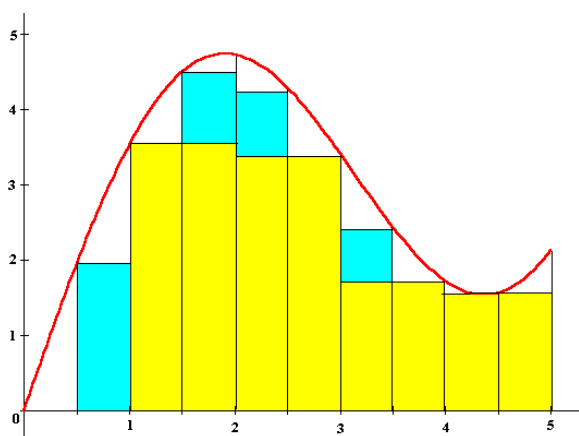
Obr. 10.4

Je zrejmé, že pri ľubovoľnom delení intervalu $\langle a, b \rangle$ krivočiary lichobežník L obsahuje vpísaný mnohoúhelník Q a je obsiahnutý v opísanom mnohoúhelníku R , t.j. platí

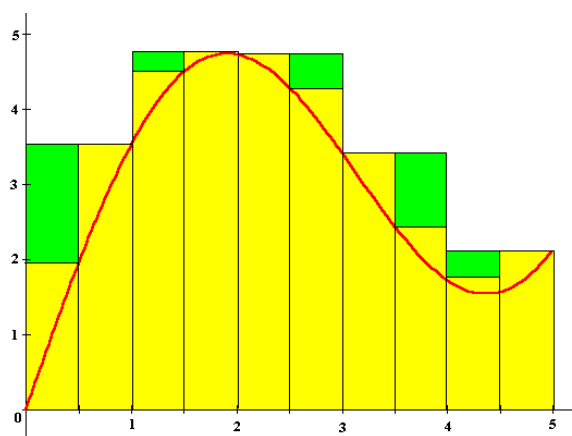
$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq P_L \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Poznámka:

Ak zväčšíme počet deliacich bodov, potom sa dĺžky Δx_i zmenšujú. Preto sa aj rozdiel medzi príslušnými plošnými obsahmi vpísaných a opísaných stupňovitých mnohoúhelníkov stále znižuje a teda číslo P_L bude stále presnejšie určené predchádzajúcimi nerovnosťami. Geometrická interpretácia zahusťovania deliacich bodov je znázornená na obrázkoch 10.5 a 10.6.



Obr. 10.5



Obr. 10.6

Na obr. 10.5 je modrou farbou vyjadrené práve „spresnenie dolného odhadu“ obsahu P_L oproti obr. 10.3. Podobne na obr. 10.6 je zelenými obdĺžnikmi vyjadrené „spresnenie horného odhadu“ obsahu P_L oproti obr. 10.4.

Pri postupnom zjemňovaní delenia intervalu použitím limitného procesu dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \right) = P_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \right)$. Túto limitu označujeme $\int_a^b f(x) dx$ a čítame integrál od a po b z funkcie $f(x)$.

Funkcia f , pre ktorú existuje $\int_a^b f(x) dx$, sa nazýva **integrovateľná** na intervale $\langle a, b \rangle$.

Ďalšie aplikácie určitého integrálu:

Určitý integrál má omnoho širšie využitie ako len pri výpočte obsahov. V geometrii ním možno určiť objemy či dĺžky kriviek. Vo fyzike a technických vedách sa mnohé veličiny vyjadrujú pomocou integrálov. Napríklad dráha prejdená pri priamočiarom pohybe, ktorého rýchlosť je vyjadrená ako funkcia času $v(t)$, v časovom intervale $\langle t_1, t_2 \rangle$ je vyjadrená

rovnícou $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$. Práca vykonaná silou $F(x)$, ktorá posunie teleso po priamej dráhe

v smere osi x z bodu a do bodu b je vyjadrená rovnicou $W = \int_a^b F(x) dx$. Podobných príkladov sú vo fyzike stovky.

10.2 Veta o výpočte určitého integrálu

Nasledujúca veta charakterizuje vzťah medzi určitým a neurčitým integrálom a slúži pri výpočte určitého integrálu.

Veta 10.1

Nech $f(x)$ je funkcia integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ a nech funkcia $F(x)$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) .

Potom platí $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Tento vzťah nazývame Newtonov - Leibnizov vzorec a zapisujeme ho $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Príklad 10.1 Vypočítajte $\int_2^5 x^2 dx$.

Riešenie:

$$\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3}$$

Príklad 10.2 Vypočítajte $\int_0^\pi \sin x dx$.

Riešenie:

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Príklad 10.3 Vypočítajte $\int_1^e \ln x dx$.

Riešenie:

Najprv nájdeme primitívnu funkciu k funkcii $\ln x$. Použijeme metódu per partes.

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int_1^e \ln x dx = [x \cdot \ln x - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 0 - (-1) = 1$$

Príklad 10.4 Vypočítajte $\int_1^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx$.

Riešenie:

Najprv nájdeme primitívnu funkciu k funkcii $\frac{2x+4}{x^2+4x+8}$. Použijeme substitučnú metódu.

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+4x+8=t \\ (2x+4)dx=dt \end{array} \right| \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|x^2+4x+8| + c$$

$$\int_1^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx = \left[\ln|x^2+4x+8| \right]_1^2 = \ln|2^2+4 \cdot 2+8| - \ln|1^2+4 \cdot 1+8| = \ln 20 - \ln 13 = \ln \left(\frac{20}{13} \right)$$

10.3 Obsah plochy pod grafom funkcie

V podkapitole 10.1 sme definovali krivočiary lichobežníky. Príklad krivočiareho lichobežníka

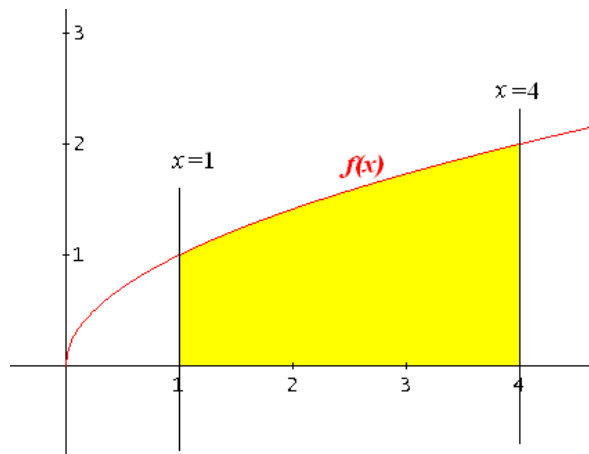
spĺňajúceho nerovnosti $1 \leq x \leq 4$ je

znázornený žltou farbou na obr. 10.7.

Veta 10.2

Ak množina A je krivočiary lichobežník, potom jej plošný obsah vypočítame podľa

vzorca $P(A) = \int_a^b f(x) dx$.



Obr. 10.7

Príklad 10.5 Vypočítajte obsah krivočiareho lichobežníka z obrázku 10.7.

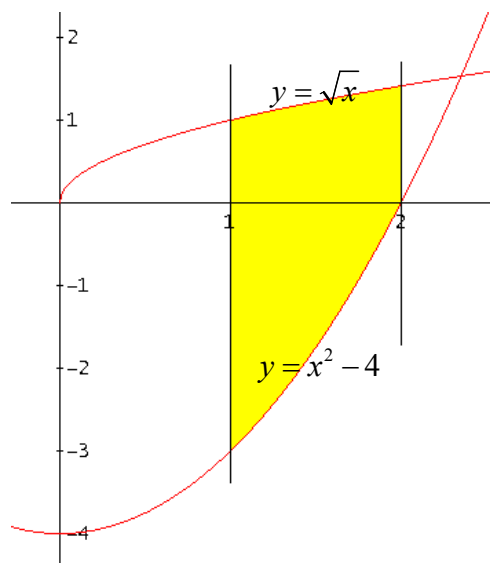
Riešenie:

$$P(A) = \int_a^b f(x) dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} \right]_1^4 = \frac{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}}{3} - \frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú spojité funkcie na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$.

Množinu bodov $[x, y]$ v rovine, ktoré spĺňajú nerovnosti $a \leq x \leq b$
 $g(x) \leq y \leq f(x)$, nazývame
elementárna oblasť typu x, y .

Príklad elementárnej oblasti typu x, y spĺňajúcej
 nerovnosti $1 \leq x \leq 2$
 $x^2 - 4 \leq y \leq \sqrt{x}$ je znázornený žltou farbou
 na obr. 10.8.



Obr. 10.8

Príklad 10.6 Vypočítajte obsah elementárnej oblasti z obrázku 10.8.

Riešenie:

$$P(A) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_1^2 (\sqrt{x} - (x^2 - 4)) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \right]_1^2 = \left[\frac{2 \cdot x \cdot \sqrt{x}}{3} - \frac{x^3}{3} + 4x \right]_1^2 = \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}}{3} - \frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1 \right) = \frac{4\sqrt{2} - 8 + 24}{3} - \frac{2 - 1 + 12}{3} = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{3}$$

Príklad 10.7 Vypočítajte plošný obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y = -x^2 + 4x - 2$, $y = 2 - x$.

Riešenie:

Situáciu si graficky znázorníme na obr. 10.9.

Najprv určíme priesečníky oboch kriviek.

$$-x^2 + 4x - 2 = 2 - x$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$$

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5+3}{2} = 4$$

Časť roviny ohraničená krivkami

$y = -x^2 + 4x - 2$, $y = 2 - x$ je teda elementárna oblasť typu x , y spĺňajúca nerovnosti

$$1 \leq x \leq 4$$

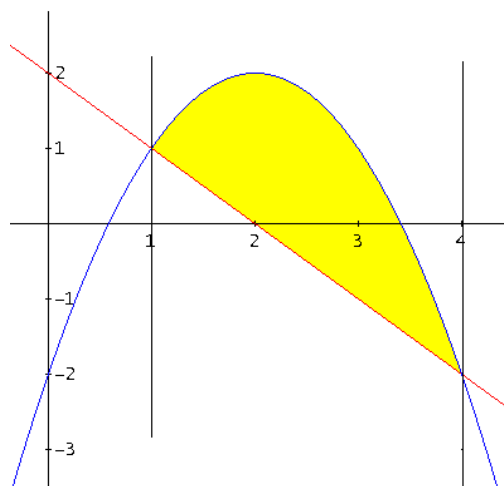
$$2 - x \leq y \leq -x^2 + 4x - 2$$

Jej obsah určíme podľa vety 10.3.

$$P(A) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_1^4 ((-x^2 + 4x - 2) - (2 - x)) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx =$$

$$\left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 = \left(\frac{-4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{-1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 4 \cdot 1 \right) =$$

$$\left(\frac{-64}{3} + 40 - 16 \right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) = \frac{-128 + 240 - 96 + 2 - 15 + 24}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$



Obr. 10.9

Poznámka:

Ak časť roviny, ktorej plochu máme vypočítať, nie je elementárnou oblasťou, ale sa dá napísať ako zjednotenie konečného počtu elementárnych oblastí, t.j. $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, pričom dve rôzne množiny nemajú spoločné vnútorné body, potom $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Príklad 10.8 Vypočítajte plošný obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y = x^2$, $y = 2 - x$ a osou x .

Riešenie:

Situáciu si graficky znázorníme na obr. 10.10. Oblasť je tam rozdelená na 2 časti: žltú a modrú.

Najprv určíme priesečník kriviek $y = x^2$, $y = 2 - x$.

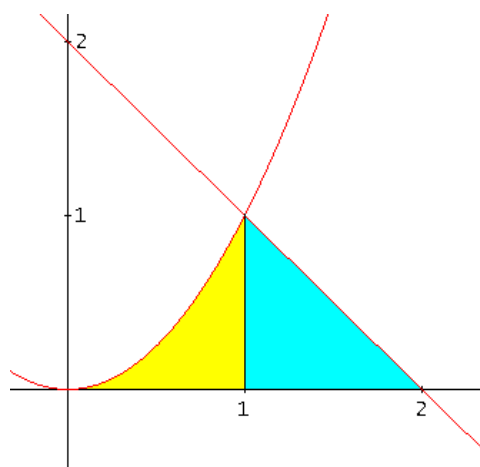
$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$



Obr. 10.10

Na obrázku je vyznačený práve priesečník x_2 .

Vidíme, že časť roviny ohraničená krivkami $y = x^2$, $y = 2 - x$ a osou x nie je elementárna oblasť typu x, y , pretože je zhora ohraničená dvoma rôznymi krivkami. Dá sa však rozdeliť na dve elementárne oblasti typu x, y – žltú a modrú. Žltá (označme ju A) spĺňa nerovnosti $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$, modrá (označme ju B) spĺňa nerovnosti $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$. Ich obsahy určíme podľa vety 10.3 a napokon ich sčítame.

$$P(A) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (x^2 - 0) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} \right) - \left(\frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_1^2 ((2-x) - 0) dx = \int_1^2 (2-x) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$\left(2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) - \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Plošný obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y = x^2$, $y = 2 - x$ a osou x je $\frac{5}{6}$.

10.4 Objem rotačného telesa

Nech je v priestore daná rovina a v nej pravouhlý súradnicový systém. Nech funkcia $f(x)$ je spojitá a nezáporná na $\langle a, b \rangle$. Telo, ktoré opíše elementárna oblasť určená funkciou $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ pri rotácii okolo osi x nazývame rotačným telesom určeným funkciou $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$. (obr. 10.11)

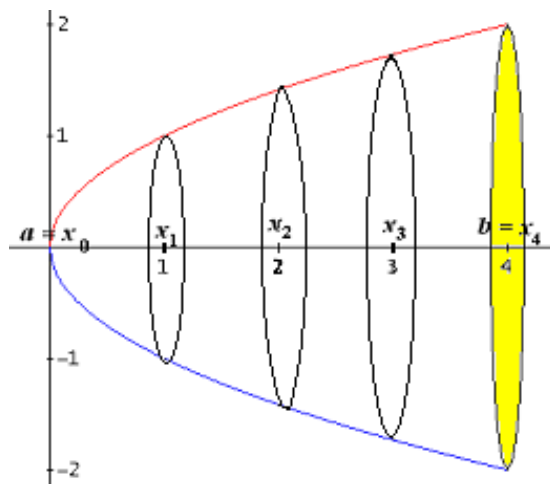
Tak ako pri výpočte plošného obsahu, aj v tomto prípade urobíme delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ a v intervaloch delenia nahradíme krivočiare rotačné teleso vpísaným valcom s polomerom m_i a opísaným valcom s polomerom M_i . Pre objem telesa V_i platí:

$$\pi m_i^2 \Delta x_i \leq V_i \leq \pi M_i^2 \Delta x_i,$$

kde $\pi m_i^2 \Delta x_i$ je objem valca vpísaného a $\pi M_i^2 \Delta x_i$ je objem valca opísaného telesu T_i .

Ak sčítame nerovnosti pre $i = 1, 2, \dots, n$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \Delta x_i.$$



Obr. 10.11

Ak budeme zjemňovať delenie intervalu, objemy vpísaných a opísaných valcov sa budú približovať k objemu rotačného telesa. Ak prejdeme k limitnému procesu (delíme na nekonečne veľa častí) získame požadovaný objem. Takýto limitný proces vedie k určitému integrálu, ktorý je opísaný v nasledujúcej vete.

Veta 10.4

Nech A je krivočiary lichobežník, t.j. množina bodov v rovine určená nerovnosťami
 $a \leq x \leq b$
 $0 \leq y \leq f(x)$. Potom objem telesa, ktoré vznikne rotáciou tejto oblasti okolo osi x , je

daný vzťahom $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Poznámka:

Podobnými úvahami, ako sme použili pri odvodzovaní plošného obsahu elementárnej oblasti, by sme odvodili vzorec na výpočet objemu rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi x .

Veta 10.5

Nech A je elementárna oblasť v rovine, ktorej body $[x, y]$ spĺňajú nerovnosti
 $a \leq x \leq b$
 $0 \leq g(x) \leq y \leq f(x)$. Potom objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou tejto oblasti

okolo osi x , je daný vzťahom $V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$.

Príklad 10.9 Vypočítajte objem rotačného telesa znázorneného na obrázku 10.11.

Riešenie:

Rotačné teleso vzniklo rotáciou krivočiareho lichobežníka určeného nerovnosťami
 $0 \leq x \leq 4$
 $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. Jeho objem určíme podľa vety 10.4.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 8\pi$$

Príklad 10.10 Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti ohraňenej krivkami $y = x^2, y^2 = x$ okolo osi x .

Riešenie:

Situáciu si graficky znázorníme na obr. 10.12.

Najprv určíme priesečník kriviek $y = x^2, y^2 = x$.

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

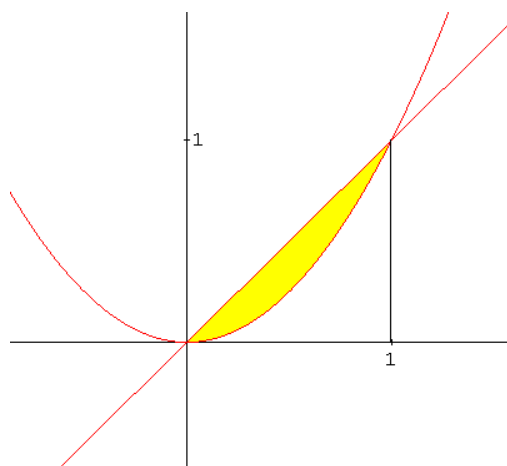
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

Je to elementárna oblasť určená nerovnosťami

$$0 \leq x \leq 1$$

$x^2 \leq y \leq x$. Jej objem určíme podľa vety 10.5.



Obr. 10.12

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5} \right) \right] = \frac{2\pi}{15}$$

10.5 Úlohy

Vypočítajte.

$$1. \int_1^3 (x^3 + 3x^2 + 7) dx$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^3 + 3x^2 + 7) dx &= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + 7x \right]_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} + 3^3 + 7 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^4}{4} + 1^3 + 7 \cdot 1 \right) = \\ &= \left(\frac{81}{4} + 27 + 21 \right) - \left(\frac{1}{4} + 1 + 7 \right) = \frac{81}{4} + 27 + 21 - \frac{1}{4} - 1 - 7 = \frac{80}{4} + 48 - 8 = 60 \end{aligned}$$

$$2. \int_0^5 (4x^6 - 8x^2 + 2x) dx$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int_0^5 (4x^6 - 8x^2 + 2x) dx &= \left[\frac{4x^7}{7} - \frac{8x^3}{3} + x^2 \right]_0^5 = \left(\frac{4 \cdot 5^7}{7} - \frac{8 \cdot 5^3}{3} + 5^2 \right) - \left(\frac{4 \cdot 0^7}{7} - \frac{8 \cdot 0^3}{3} + 0^2 \right) = \\ &= \frac{4 \cdot 78125}{7} - \frac{8 \cdot 125}{3} + 25 = \frac{312500}{7} - \frac{1000}{3} + 25 = \frac{937500 - 7000 + 525}{21} = \frac{931025}{21} \end{aligned}$$

$$3. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx &= [-\cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\cos \frac{-\pi}{2} + \sin \frac{-\pi}{2} \right) = \\ &= (-0 + 1) - (-0 + (-1)) = 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

$$4. \int_1^e (x \cdot \ln x) dx$$

Riešenie: (pre výpočet neurčitého integrálu pozri úlohu 6 z kapitoly 9)

$$\begin{aligned} \int_1^e (x \cdot \ln x) dx &= \left[\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \left(\frac{e^2 \cdot \ln e}{2} - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1^2 \cdot \ln 1}{2} - \frac{1^2}{4} \right) = \\ &= \left(\frac{e^2 \cdot 1}{2} - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1 \cdot 0}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 \cdot 1}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

5. $\int_0^{\pi} \sin(3x+2)dx$

Riešenie: (pre výpočet neurčitého integrálu pozri úlohu 9 z kapitoly 9)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(3x+2)dx &= \left[\frac{-\cos(3x+2)}{3} \right]_0^{\pi} = \left(\frac{-\cos(3\pi+2)}{3} \right) - \left(\frac{-\cos(3 \cdot 0 + 2)}{3} \right) = \\ &= \frac{-\cos(\pi+2)}{3} + \frac{\cos 2}{3} = \frac{\cos 2 - \cos(\pi+2)}{3} = \frac{2 \cos 2}{3} \end{aligned}$$

6. $\int_5^7 \ln(x-4)dx$

Riešenie: (pre výpočet neurčitého integrálu pozri úlohu 10 z kapitoly 9)

$$\begin{aligned} \int_5^7 \ln(x-4)dx &= \left[(x-4)\ln(x-4) - x + 4 \right]_5^7 = \\ &= ((7-4)\ln(7-4) - 7 + 4) - ((5-4)\ln(5-4) - 5 + 4) = \\ &= (3\ln 3 - 3) - (\ln 1 - 1) = 3\ln 3 - 3 - (0 - 1) = 3\ln 3 - 3 - (-1) = 3\ln 3 - 2 \end{aligned}$$

7. $\int_1^2 \sqrt{2x+3}dx$

Riešenie: (pre výpočet neurčitého integrálu pozri úlohu 11 z kapitoly 9)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{2x+3}dx &= \left[\frac{(2x+3) \cdot \sqrt{2x+3}}{3} \right]_1^2 = \left(\frac{(2 \cdot 2 + 3) \cdot \sqrt{2 \cdot 2 + 3}}{3} \right) - \left(\frac{(2 \cdot 1 + 3) \cdot \sqrt{2 \cdot 1 + 3}}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{7 \cdot \sqrt{7}}{3} \right) - \left(\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{3} \right) = \frac{7 \cdot \sqrt{7} - 5 \cdot \sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

8. Vypočítajte obsah plochy ohraničenej súradnicovými osami a grafom funkcie $y = 2x - 3$.

Riešenie:

a) vypočítame priesečníky grafu so súradnicovými osami

$$x = 0 \dots y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$y = 0 \dots 0 = 2 \cdot x - 3 \dots x = \frac{3}{2}$$

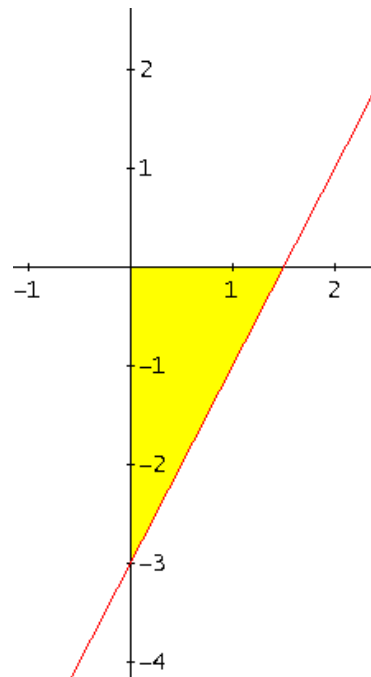
priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami sú

$$[0; -3] \text{ a } \left[\frac{3}{2}; 0 \right]$$

b) pretože celá plocha leží pod osou x a na osi x jej

zodpovedá interval $\left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle$, jej obsah vypočítame ako

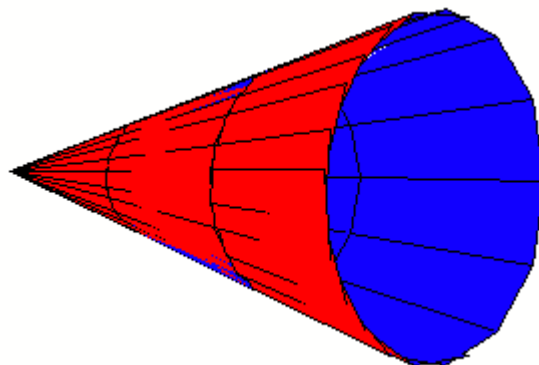
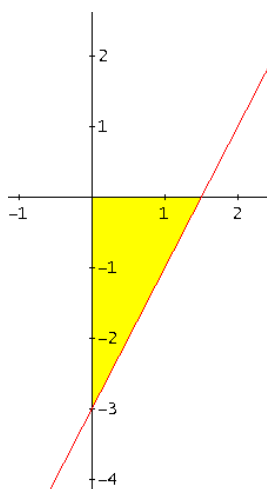
$$\int_0^{\frac{3}{2}} (2x - 3)dx, \text{ pričom znamienko „ignorujeme“}$$



$$\int_0^{\frac{3}{2}} (2x-3) dx = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^{\frac{3}{2}} = \left[x^2 - 3x \right]_0^{\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right) \right] - (0^2 - 3 \cdot 0) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$$

Obsah plochy ohraničenej súradnicovými osami a grafom funkcie $y = 2x - 3$ je $\frac{9}{4}$.

9. Vypočítajte objem útvaru, ktorý vznikne rotáciou plochy ohraničenej súradnicovými osami a grafom funkcie $y = 2x - 3$ okolo osi x . O aký útvar sa jedná?



Riešenie:

a) vypočítame priesečníky grafu so súradnicovými osami

$$x = 0 \dots y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$y = 0 \dots 0 = 2 \cdot x - 3 \dots x = \frac{3}{2}$$

priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami sú $[0; -3]$ a $\left[\frac{3}{2}; 0\right]$

b) pretože celá plocha leží pod osou x a na osi x jej zodpovedá interval $\left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle$, objem

útvaru, ktorý vznikne jej rotáciou okolo osi x , vypočítame ako $\pi \int_0^{\frac{3}{2}} (2x-3)^2 dx$

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\frac{3}{2}} (2x-3)^2 dx &= \pi \int_0^{\frac{3}{2}} (4x^2 - 12x + 9) dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - 6x^2 + 9x \right]_0^{\frac{3}{2}} = \\ &= \pi \left[\frac{4 \left(\frac{3}{2} \right)^3}{3} - 6 \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 9 \left(\frac{3}{2} \right) \right] - \left(\frac{4 \cdot 0^3}{3} - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 \right) = \pi \left[\frac{9}{2} - \frac{27}{2} + \frac{27}{2} \right] = \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

Objem útvaru, ktorý vznikne rotáciou plochy ohraničenej súradnicovými osami a grafom funkcie $y = 2x - 3$ okolo osi x , je $\frac{9\pi}{2}$.

Jedná sa o kužeľ s polomerom podstavy 3 a výškou $\frac{3}{2}$. Jeho objem sme mohli určiť aj

$$\text{takto: } V = \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{3}{2}}{3} = \pi \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

10. Vypočítajte obsah plochy ohraničenej súradnicovou osou x , priamkou $x=4$ a grafom funkcie $y = \sqrt{x}$.

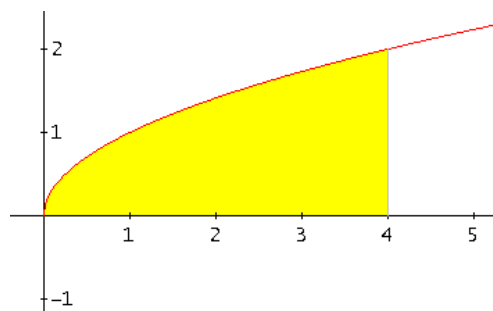
Riešenie:

a) priesečník grafu funkcie so súradnicovými osami je bod $[0;0]$

b) pretože celá plocha leží nad osou x a na osi x jej zodpovedá interval $\langle 0;4 \rangle$

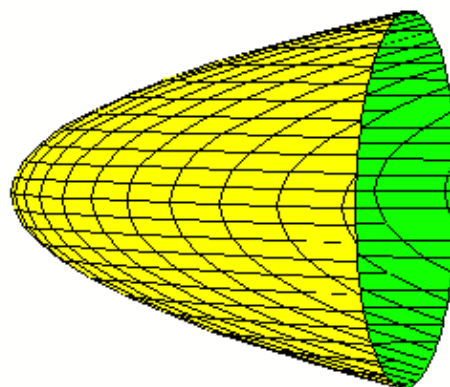
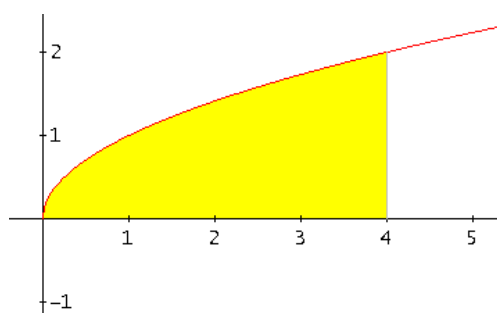
jej obsah vypočítame ako $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} \right]_0^4 = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}}{3} \right) - \left(\frac{2 \cdot 0 \cdot \sqrt{0}}{3} \right) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$$



Obsah plochy ohraničenej súradnicovou osou x , priamkou $x=4$ a grafom funkcie $y = \sqrt{x}$ je $\frac{16}{3}$.

11. Vypočítajte objem útvaru, ktorý vznikne rotáciou plochy ohraničenej súradnicovou osou x , priamkou $x=4$ a grafom funkcie $y = \sqrt{x}$ okolo osi x . O aký útvar sa jedná?



Riešenie:

a) priesečník grafu funkcie so súradnicovými osami je bod $[0;0]$

b) pretože celá plocha leží nad osou x a na osi x jej zodpovedá interval $\langle 0;4 \rangle$, objem útvaru,

ktorý vznikne jej rotáciou okolo osi x , vypočítame ako $\pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx$

$$\pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 8\pi$$

Objem útvaru, ktorý vznikne rotáciou plochy ohraničenej súradnicovou osou x , priamkou $x=4$ a grafom funkcie $y = \sqrt{x}$ okolo osi x , je 8π .

Jedná sa o rotačný paraboloid.

12. Vypočítajte obsah plochy ohraničenej súradnicovou osou x a grafom funkcie $y = \sin x$ pre $x \in \langle 0; \pi \rangle$.

Riešenie:

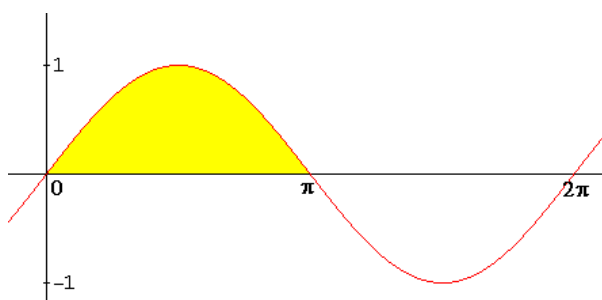
a) priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami sú $[0; 0]$ a $[\pi; 0]$

b) pretože celá plocha leží nad osou x a na osi x jej zodpovedá interval $\langle 0; \pi \rangle$, jej

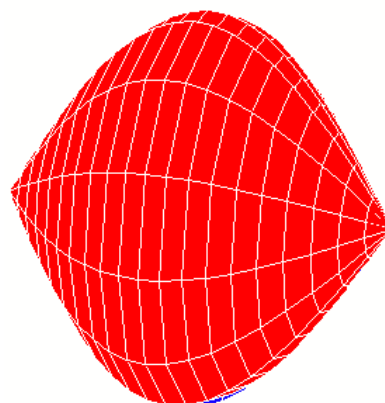
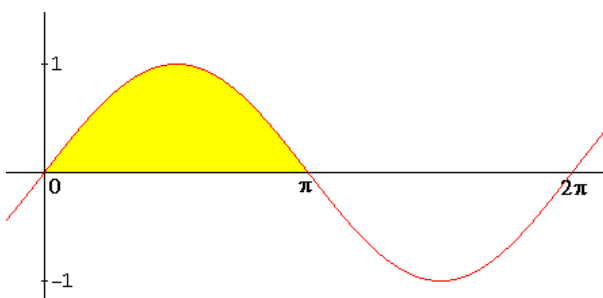
obsah vypočítame ako $\int_0^\pi \sin x dx$

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = (-(-1)) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Obsah plochy ohraničenej súradnicovou osou x a grafom funkcie $y = \sin x$ pre $x \in \langle 0; \pi \rangle$ je 2.



13. Vypočítajte objem útvaru, ktorý vznikne rotáciou plochy ohraničenej súradnicovou osou x a grafom funkcie $y = \sin x$ okolo osi x . O aký útvar sa jedná?



Riešenie:

a) priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami sú $[0; 0]$ a $[\pi; 0]$

b) pretože celá plocha leží nad osou x a na osi x jej zodpovedá interval $\langle 0; \pi \rangle$, objem

útvary, ktorý vznikne jej rotáciou okolo osi x , vypočítame ako $\pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx$

Najprv vypočítame $\int (\sin x)^2 dx$.

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 dx &= \int \sin x \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin x \quad v' = \sin x \\ u' = \cos x \quad v = -\cos x \end{array} \right] = \sin x (-\cos x) - \int -\cos^2 x dx = \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx \\ \int (\sin x)^2 dx &= -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx \\ 2 \cdot \int (\sin x)^2 dx &= x - \sin x \cdot \cos x \\ \int (\sin x)^2 dx &= \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} \\ \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx &= \pi \left[\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} \right]_0^{\pi} = \pi \left[\left(\frac{\pi - \sin \pi \cdot \cos \pi}{2} \right) - \left(\frac{0 - \sin 0 \cdot \cos 0}{2} \right) \right] = \\ &= \pi \left[\left(\frac{\pi - 0}{2} \right) - \left(\frac{0 - 0}{2} \right) \right] = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Objem útvaru, ktorý vznikne rotáciou plochy ohraničenej súradnicovou osou x a grafom funkcie $y = \sin x$ okolo osi x , je $\frac{\pi^2}{2}$.

Jedná sa o teleso podobné na rotačný elipsoid.

14. Vypočítajte obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií $y = x^2 - 4x - 4$ a $y = 5 + 2x - x^2$.

Riešenie:

a) vypočítame priesečníky grafov funkcií

$$y = x^2 - 4x - 4 \text{ a } y = 5 + 2x - x^2$$

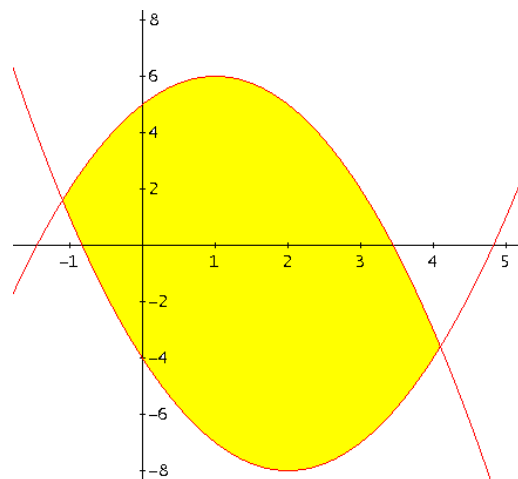
$$x^2 - 4x - 4 = 5 + 2x - x^2$$

$$2x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 108$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm 6\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$



b) pretože na intervale $\left\langle \frac{3-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ je graf funkcie $y = 5 + 2x - x^2$ nad grafom funkcie

$y = x^2 - 4x - 4$, obsah plochy medzi grafmi vypočítame ako

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{3-3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{3}}{2}} \left[(5+2x-x^2) - (x^2-4x-4) \right] dx \\
& \int_{\frac{3-3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{3}}{2}} \left[(5+2x-x^2) - (x^2-4x-4) \right] dx = \int_{\frac{3-3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{3}}{2}} (9+6x-2x^2) dx = \left[9x+3x^2-\frac{2x^3}{3} \right]_{\frac{3-3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{3}}{2}} = \\
& = \left[9\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{2\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} \right] - \left[9\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{2\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} \right] = \\
& = \left[\frac{27+27\sqrt{3}}{2} + \frac{108+54\sqrt{3}}{4} - \frac{270+162\sqrt{3}}{12} \right] - \left[\frac{27-27\sqrt{3}}{2} + \frac{108-54\sqrt{3}}{4} - \frac{270-162\sqrt{3}}{12} \right] = \\
& = \left[\frac{162+162\sqrt{3}+324+162\sqrt{3}-270-162\sqrt{3}}{12} \right] - \left[\frac{162-162\sqrt{3}+324-162\sqrt{3}-270+162\sqrt{3}}{12} \right] = \\
& = \left[\frac{216+162\sqrt{3}}{12} \right] - \left[\frac{216-162\sqrt{3}}{12} \right] = \frac{324\sqrt{3}}{12} = 27\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií $y = x^2 - 4x - 4$ a $y = 5 + 2x - x^2$ je $27\sqrt{3}$.