

1 Matice a ich vlastnosti

1.1 Sústavy lineárnych rovníc a matice

Pojem sústavy a jej riešenie

Príklad 1.1 V množine reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$2x + 3y - z + 2t = 13$$

$$2x + 5y + z + t = 8$$

$$3x + y + 3z + t = 1$$

Riešenie:

Zo strednej školy vieme, že riešením takejto sústavy je štvorica reálnych čísel, ktorá je riešením každej rovnice sústavy. Pre danú sústavu je to napríklad $x = 1, y = 1, z = -2, t = 3$.

Presvedčte sa o tom dosadením do každej rovnice sústavy.

Taktiež zo strednej školy vieme, že na sústave rovníc môžeme bez zmeny riešenia vykonávať nasledujúce úpravy:

1. vzájomná výmena ľubovoľných rovníc
2. vynásobenie ľubovoľnej rovnice nenulovým číslom (čitateľ si premyslí prečo iba nenulovým)
3. pripočítanie ľubovoľného násobku jednej rovnice k inej rovnici

Predchádzajúce úpravy sústavy sa nazývajú „ekvivalentné úpravy“.

Celý postup úprav si ukážeme na príklade. Ekvivalentné úpravy pre konkrétnu rovnicu sú v každom kroku vyznačené pri tejto rovnici polotučným písmom. Napríklad: **/II-2*I** znamená, že od druhej rovnice odpočítame dvojnásobok prvej rovnice.

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$2x + 3y - z + 2t = 13 \text{ /II-2*I}$$

$$2x + 5y + z + t = 8 \text{ /III-2*I}$$

$$3x + y + 3z + t = 1 \text{ /IV-3*I}$$

Po uskutočnení naznačených ekvivalentných úprav dostaneme sústavu v ktorej sa neznáma „x“ nachádza iba v prvej rovnici:

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$7y - 9z = 25 \cdot \frac{1}{7}$$

$$9y - 7z - t = 20$$

$$7y - 9z - 2t = 19$$

Ďalšie úpravy sú analogické a nebudeme ich komentovať.

$$x - 2y + 4z + t = -6$$

$$y - \frac{9}{7}z = \frac{25}{7}$$

$$9y - 7z - t = 20 \text{ /III-9*II}$$

$$7y - 9z - 2t = 19 \text{ /IV-7*II}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & 2y & + & 4z & + & t & = & -6 \\ & & y & - & \frac{9}{7}z & & & = & \frac{25}{7} \\ & & & & \frac{32}{7}z & - & t & = & -\frac{85}{7} \\ & & & & & & -2t & = & -6 \quad / \cdot \frac{-1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & 2y & + & 4z & + & t & = & -6 \\ & & y & - & \frac{9}{7}z & & & = & \frac{25}{7} \\ & & & & \frac{32}{7}z & - & t & = & -\frac{85}{7} \\ & & & & & & t & = & 3 \end{array}$$

Posledná sústava má už taký tvar, v ktorom poznáme neznámu $t=3$. Po dosadení $t=3$ do tretej rovnice dostaneme rovnicu o jednej neznámej z , ktorú vieme vyriešiť. Ak takto získané hodnoty dosadíme do druhej rovnice vypočítame y a podobne x . Dostaneme teda hľadané riešenie sústavy $x = 1, y = 1, z = -2, t = 3$.

Pozorný čitateľ si iste všimol, že v predchádzajúcom postupe sa menili iba koeficienty pri neznámych a nie samotné neznáme. To znamená, že stačí pracovať iba s koeficientami. K danej sústave môžeme priradiť obdĺžnikovú tabuľku pozostávajúcu z koeficientov sústavy, ktorú budeme nazývať „rozšírenou maticou sústavy“ a ďalej budeme robiť analogické operácie na riadkoch matice, ako sme predtým robili na rovniciach sústavy. Rozšírená matica sústavy z predchádzajúceho príkladu má tvar (znak $\sim$ znamená, že matice sú ekvivalentné):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /II - 2 * I \\ /III - 2 * I \\ /IV - 3 * I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 9 & -7 & -1 & 20 \\ 0 & 7 & -9 & -2 & 19 \end{pmatrix} / \cdot \frac{1}{7}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} & 0 & \frac{25}{7} \\ 0 & 9 & -7 & -1 & 20 \\ 0 & 7 & -9 & -2 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ /III - 9 * II \\ /IV - 7 * II \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} & 0 & \frac{25}{7} \\ 0 & 0 & \frac{32}{7} & -1 & -\frac{85}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} / \cdot \frac{-1}{2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} & 0 & \frac{25}{7} \\ 0 & 0 & \frac{32}{7} & -1 & -\frac{85}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

K poslednej matici stačí napísať príslušnú sústavu

$$\begin{aligned}x - 2y + 4z + t &= -6 \\y - \frac{9}{7}z &= \frac{25}{7} \\\frac{32}{7}z - t &= -\frac{85}{7} \\t &= 3\end{aligned}$$

a túto následne riešiť. Pozorný čitateľ si iste všimol, že maticu sme upravovali na istý „trojuholníkový tvar“. Tento pojem neskôr upresníme.

Elementárne ekvivalentné úpravy na sústavách

Elementárnymi riadkovými úpravami na sústave rovníc nazývame nasledujúce tri úkony:

- (i) vzájomná výmena dvoch ľubovoľných rovníc,
- (ii) násobenie ľubovoľnej rovnice nenulovým číslom,
- (iii) pričítanie ľubovoľného násobku niektorej rovnice k inej rovnici.

Poznámky:

1. Elementárne riadkové úpravy nemenia riešenie sústavy.
2. Overte túto skutočnosť na príklade 1.
3. Elementárne riadkové úpravy sústavy menia iba koeficienty pri neznámych.
4. Ku každej sústave vieme priradiť tabuľku jej koeficientov (maticu) .

Z predchádzajúcich úvah je zrejmé, že má zmysel študovať matematické štruktúry, ktoré nazývame matice. Preto sa maticiam a ich vlastnostiam budeme venovať v celej tejto kapitole podrobnejšie.

1.2 Matice

V úvode tejto kapitoly sa zoznámime s pojmom *matice*.

Matice je obdĺžniková schéma pozostávajúca z m riadkov a n stĺpcov. Jej prvkami sú reálne čísla. Príkladmi matíc sú:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, (2 \quad 1 \quad 0), \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Prvá matice pozostáva z 2 riadkov a 3 stĺpcov. Hovoríme, že táto matice je typu 2×3 .

Podobne, druhá matice pozostáva z 3 riadkov a 3 stĺpcov. Hovoríme, že táto matice je typu 3×3 . Tretia matice je typu 1×3 , štvrtá 2×1 a piata 2×2 .

Matice budeme označovať veľkými písmenami. Označme prvú maticu písmenom A . Teda

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Prvok, ktorý sa nachádza v prvom riadku a prvom stĺpci, označíme potom}$$

$a_{1,1}$. V tomto prípade $a_{1,1}=4$. Podobne prvok, ktorý sa nachádza v prvom riadku a druhom stĺpci, označíme $a_{1,2}$. V tomto prípade $a_{1,2}=-1$. Zrejme $a_{1,3}=2$, $a_{2,1}=0$, $a_{2,2}=1$, $a_{2,3}=1$.

1.3 Druhy matíc, rovnosť matíc

V tejto časti uvedieme niektoré známe druhy matíc.

Ak počet riadkov matice A sa rovná počtu jej stĺpcov ($=n$), potom ju nazývame **štvorcovou maticou (stupňa n)**.

Napríklad matica $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ je štvorcovou maticou stupňa 2 a matica $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ je

štvorcovou maticou stupňa 3.

Matica $C = (4)$ je štvorcovou maticou stupňa 1.

Štvorcovú maticu, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i \neq j$, nazývame **diagonálnou**.

Matice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sú diagonálne, zatiaľ čo matica

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ nie je diagonálna, pretože prvok $c_{1,3} = 2$, teda $c_{1,3} \neq 0$.

Ak v diagonálnej matici je pre všetky i prvok a_{ii} rovný 1, nazývame ju **jednotkovou maticou** a označujeme I_n (ak je stupňa n).

Matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotkovou maticou stupňa 2, matica $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotkovou

maticou stupňa 3 a matica $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotkovou maticou stupňa 4.

Matica, ktorej všetky prvky sú 0, sa nazýva **nulovou maticou**; nulovú maticu typu $m \times n$ označujeme $0_{m,n}$.

Dve matice A typu $(m \times n)$ a B typu $(r \times s)$ sa rovnajú, ak $m = r$, $n = s$ (teda sú toho istého typu) a pre $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Transponovanou maticou k matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nazývame takú maticu $B = (b_{ij})$ typu $n \times m$, pre ktorú platí $b_{ij} = a_{ji}$.

Transponovanou maticou k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je matica $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4 Operácie na maticiach

Nech A je matica. **Maticu A násobíme číslom c** tak, že týmto číslom vynásobíme všetky prvky matice A .

Teda ak matica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, potom $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & -3 \\ 9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

Súčet matíc

Súčtom dvoch matíc A typu $(m \times n)$, B typu $(m \times n)$ nazývame maticu C typu $(m \times n)$ s prvkami $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (t.j. ktorej každý prvok sa rovná súčtu príslušných prvkov matíc A a B). Súčet matíc A a B označujeme **$A + B$** .

Ak matica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ a matica $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, potom ich súčet

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 1+(-1) & 0+3 & -1+(-1) \\ 3+3 & (-2)+2 & 0+(-3) & 0+1 \\ 0+5 & 1+(-1) & 2+1 & -2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti operácií s maticami nám opisuje nasledujúca veta:

Veta 1.1: Ak A, B, C sú matice a c, d sú čísla, potom platí:

$$1 \cdot A = A$$

$$cA = Ac$$

$$c(dA) = (cd)A$$

$$(c + d)A = cA + dA$$

$$c(A + B) = cA + cB$$

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A_{mn} + 0_{mn} = 0_{mn} + A_{mn} = A_{mn}$$

$$A_{mn} + (-1)A_{mn} = 0_{mn},$$

Súčin matíc

Poznamenajme hneď na začiatku, že súčin dvoch matíc je trochu komplikovanejšie definovaný. Aj keď sa môže niekomu zdať nepochopiteľné, prečo je to takto definované, má to svoje vážne dôvody, ktoré si vysvetlíme neskôr.

Majme dané dve matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

(A je typu $m \times n$, B typu $n \times r$, teda počet stĺpcov matice A sa rovná počtu riadkov matice B). **Súčinom matíc A a B nazývame maticu $C=A \cdot B$ typu $m \times r$**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix},$$

pričom platí:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (\text{pre } i=1, \dots, m, j=1, \dots, r).$$

Poznámka:

Súčin matíc AB má zmysel len vtedy, ak sa počet stĺpcov matice A rovná počtu riadkov matice B (inak by sme „prvky riadku“ matice A nemohli násobiť „prislúchajúcimi prvkami stĺpca“ matice B).

Násobenie matíc si vysvetlíme na príklade.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Pretože matica A je typu 2×3 a matica B je typu 3×3 , výsledná matica $C=AB$ bude typu 2×3 .

Prvok na pozícii 1,1 určíme tak, že vynásobíme 1. riadok matice A 1. stĺpcom matice B .

$$\text{Teda } c_{1,1} = (2 \ 2 \ -1) \cdot (1 \ -1 \ 0) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 0.$$

Prvok na pozícii 1,2 určíme tak, že vynásobíme 1. riadok matice A 2. stĺpcom matice B .

$$\text{Teda } c_{1,2} = (2 \ 2 \ -1) \cdot (2 \ -1 \ 1) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 1.$$

Prvok na pozícii 1,3 určíme tak, že vynásobíme 1. riadok matice A 3. stĺpcom matice B .

$$\text{Teda } c_{1,3} = (2 \ 2 \ -1) \cdot (0 \ 7 \ -3) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-3) = 17.$$

Prvok na pozícii 2,1 určíme tak, že vynásobíme 2. riadok matice A 1. stĺpcom matice B .

$$\text{Teda } c_{2,1} = (-3 \ 0 \ 2) \cdot (1 \ -1 \ 0) = (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -3.$$

Prvok na pozícii 2,2 určíme tak, že vynásobíme 2. riadok matice A 2. stĺpcom matice B .

$$\text{Teda } c_{2,2} = (-3 \ 0 \ 2) \cdot (2 \ -1 \ 1) = (-3) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -4.$$

Prvok na pozícii 2,3 určíme tak, že vynásobíme 2. riadok matice A 3. stĺpcom matice B .

$$\text{Teda } c_{2,3} = (-3 \ 0 \ 2) \cdot (0 \ 7 \ -3) = (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot (-3) = -6.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 17 \\ -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc nie je komutatívne, t.j. $AB \neq BA$.

Túto skutočnosť si ukážeme na príklade.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Veta 1.2. Nech A, B, C sú matice. Potom platí:

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Teda násobenie matíc je distributívne vzhľadom na sčítanie. (Poznamenajme, že matice musia byť vhodného typu, aby operácie boli definované.)

Veta 1.3. Nech A, B, C sú matice. Potom platí:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Teda násobenie matíc je asociatívne. (Poznamenajme opäť, že matice musia byť vhodného typu, aby operácia násobenia bola definovaná.)

Veta 1.4. Pre ľubovoľnú štvorcovú maticu stupňa n platí: $I_n A = A I_n = A$.

Teda jednotkou operácie násobenia pre štvorcové matice je matica I_n pre vhodné n .

Poznamenajme, že ak A je obdĺžniková matica, tak existuje iba ľavá jednotková matica a pravá jednotková matica, ktoré sú rôzneho typu.

1.5 Elementárne riadkové operácie

V tejto podkapitole sa zoznámime s tromi typmi elementárnych riadkových operácií: vzájomná výmena dvoch riadkov matice, násobenie niektorého riadka matice nenulovým číslom a pričítanie násobku istého riadka matice k inému riadku matice. Tieto operácie majú veľký význam pri riešení mnohých úloh, ako sa o tom presvedčíme v nasledujúcich (pod)kapitolách.

Ak matica B vznikne z matice A použitím jednej alebo viacerých elementárnych riadkových operácií hovoríme, že matice A a B sú ekvivalentné (označujeme $A \sim B$).

V ďalšej časti budeme pre elementárne riadkové operácie používať skratku ERO.

Vzájomná výmena dvoch riadkov matice

Pri vzájomnej výmene dvoch riadkov matice navzájom vymeníme dva celé riadky matice.

Napríklad matica $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ vznikla z matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ vzájomnou výmenou

prvého a tretieho riadku.

Hovoríme, že matica B je ekvivalentná s maticou A , čo zapisujeme $B \sim A$, resp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Násobenie niektorého riadka matice nenulovým číslom

Pri násobení niektorého riadka matice nenulovým číslom vynásobíme celý riadok matice nenulovou konštantou.

Napríklad matica $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ vznikla z matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ vynásobením jej

prvého riadku číslom 3.

Opäť hovoríme, že matica B je ekvivalentná s maticou A .

Pričítanie násobku istého riadka matice k inému riadku matice

Pričítanie násobku istého riadka matice k inému riadku matice je zvyčajne najnáročnejšou elementárnou riadkovou operáciou.

Matica $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ vznikla z matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ pričítaním 1-násobku 2. riadku

k prvému riadku.

Matica $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ vznikla z matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ pričítaním 3-násobku 1. riadku

k druhému riadku.

Matica $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ vznikla z matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ pričítaním (-3)-násobku 1.

riadku k tretiemu riadku.

Aby sa nám násobky riadkov pričítali ľahšie, je výhodné si vyznačiť násobok riadku ako

medzivýsledok. Ak chceme napríklad v matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ pričítať 2-násobok 2. riadku

k tretiemu riadku, vypočítame si najprv dvojnásobky 2. riadku a poznačíme si ich ako indexy do tretieho riadku. Potom tieto indexy sčítame s prvkami tretieho riadku.

$$\text{Teda: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0_{-2} & 2_4 & -3_{-8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -2 & 6 & -11 \end{pmatrix}$$

1.6 Zisťovanie hodnosti matice

Hodnosť matice nebudeme definovať, nakoľko presná definícia hodnosti matice presahuje rámec týchto skrípt. Ukážeme iba postup, ako určíme hodnosť konkrétnej matice.

Pri určovaní hodnosti matice používame elementárne riadkové úpravy dovtedy, kým maticu neupravíme na tzv. trojuholníkový tvar. Je to taký tvar matice, pri ktorom:

1. Ak a_{ij} a a_{kl} sú dva vedúce prvky riadkov (vedúci prvok riadku je prvý nenulový prvok riadku) a $i < k$, potom $j < l$. (t.j. „vedúce prvky sú usporiadané v riadkoch sprava doľava“)
2. Pod vedúcimi prvkami riadkov sa nachádzajú iba nulové prvky.

Príkladmi trojuholníkových matíc sú:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice potom určíme tak, že spočítame počet nenulových riadkov trojuholníkovej matice.

Teda hodnosť matice A je 3, čo zapisujeme $h(A)=3$.

Podobne, $h(B)=2$, $h(C)=3$, $h(D)=3$.

V mnohých úlohách potrebujeme upraviť maticu na **redukovanú trojuholníkovú maticu**. Je to taká trojuholníková matica, ktorej všetky vedúce prvky sú jednotky a nad aj pod nimi sú samé nuly.

Príkladmi redukovaných trojuholníkových matíc sú:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7 Regulárne matice, inverzná matica

Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva **regulárna**, ak má **hodnosť n** ; ináč sa nazýva **singulárna**.

Nech matice A a B sú stupňa n . Ak platí $AB = BA = I_n$, hovoríme, že A je **inverzná matica k B** a **B je inverzná matica k A** .

Veta 1.5. K **regulárnej** matici A existuje jediná inverzná matica A^{-1} (tiež regulárna) s vlastnosťou $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Výpočet inverznej matice

Na výpočet inverznej matice môžeme použiť nasledujúci algoritmus (zdôvodnenie algoritmu presahuje rámec týchto textov).

Algoritmus:

1. K matici A typu $n \times n$ zostrojíme novú maticu $B = (A \mid I_n)$
2. Použitím ERO upravíme maticu B na maticu $B' = (I_n \mid C)$
3. $A^{-1} = C$

Poznámka:

V bode 1 zostrojíme k danej matici A pomocnú maticu B tak, že maticu A rozšírime o vhodnú jednotkovú maticu.

V bode 2 upravujeme maticu B pomocou ERO na redukovanú trojuholníkovú maticu B' .

Bod 2 dokážeme urobiť iba v prípade, že A je regulárna.

Postup si vysvetlíme na príklade určenia inverznej matice k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

1. K matici A typu $n \times n$ zostrojíme novú maticu $B = (A \mid I_n)$: $B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

2. Použitím ERO upravíme maticu B na maticu $B' = (I_n \mid C)$.

K 2. riadku pričítame (-2) -násobok 1. riadku a k 3. riadku pričítame (-3) -násobok 1. riadku:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2_{-2} & 2_{-4} & -1_{-2} & 0_{-2} & 1_0 & 0_0 \\ 3_{-3} & 1_{-6} & -5_{-3} & 0_{-3} & 0_0 & 1_0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. riadok vynásobíme číslom $-\frac{1}{2}$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$

K 1. riadku pričítame (-2) -násobok 2. riadku a k 3. riadku pričítame 5-násobok 2. riadku:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1_0 & 2_{-2} & 1_{-3} & 1_{-2} & 0_1 & 0_0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0_0 & -5_5 & -8_{\frac{15}{2}} & -3_5 & 0_{\frac{-5}{2}} & 1_0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-5}{2} & 1 \end{array} \right)$$

3. riadok vynásobíme číslom -2 : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-5}{2} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \end{array} \right)$

K 1. riadku pričítame 2-násobok 3. riadku a k 2. riadku pričítame $\left(-\frac{3}{2}\right)$ -násobok 3. riadku:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1_0 & 0_0 & -2_2 & -1_{-8} & 1_{10} & 0_{-4} \\ 0_0 & 1_0 & \frac{3}{2}_{\frac{-3}{2}} & 1_6 & \frac{-1}{2}_{\frac{-15}{2}} & 0_3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

$$3. A^{-1}=C$$

$$\text{Teda inverzná matica k matici } A \text{ je } A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 11 & -4 \\ 7 & -8 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

O správnosti výpočtu sa presvedčíme skúškou správnosti. To znamená, že vynásobíme maticu A maticou A^{-1} .

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 11 & -4 \\ 7 & -8 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-9) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) & 1 \cdot 11 + 2 \cdot (-8) + 1 \cdot 5 & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-9) + 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot 11 + 2 \cdot (-8) + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-9) + 1 \cdot 7 + (-5) \cdot (-4) & 3 \cdot 11 + 1 \cdot (-8) + (-5) \cdot 5 & 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8 Úlohy

Upravte na redukovanú trojuholníkovú maticu a určte hodnotu matice.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 13 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 14 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -10 & -14 & -6 \\ 0 & 0 & 10 & 14 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-13}{5} & \frac{-16}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnota matice je 3.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 13 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 10 & 8 & -8 \\ 0 & -12 & 20 & 16 & -16 \\ 0 & -3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice je 3.

3. Napíšte algoritmus na vynásobenie k -tého riadku matice nenulovou konštantou r .

Riešenie:

$$\begin{aligned} x_{k,1} &= r \cdot x_{k,1} \\ x_{k,2} &= r \cdot x_{k,2} \\ &\vdots \\ x_{k,n} &= r \cdot x_{k,n} \end{aligned}$$

for $i := 1$ to n do $x[k, i] := r * x[k, i];$

4. Napíšte algoritmus na prírčítanie k -tého riadku matice k r -tému riadku.

Riešenie:

$$\begin{aligned} x_{r,1} &= x_{r,1} + x_{k,1} \\ x_{r,2} &= x_{r,2} + x_{k,2} \\ &\vdots \\ x_{r,n} &= x_{r,n} + x_{k,n} \end{aligned}$$

for $i := 1$ to n do $x[r, i] := x[r, i] + x[k, i];$

5. Napíšte algoritmus na prírčítanie d -násobku k -tého riadku matice k r -tému riadku.

Riešenie:

$$\begin{aligned} x_{r,1} &= x_{r,1} + x_{k,1} \cdot d \\ x_{r,2} &= x_{r,2} + x_{k,2} \cdot d \\ &\vdots \\ x_{r,n} &= x_{r,n} + x_{k,n} \cdot d \end{aligned}$$

for $i := 1$ to n do $x[r, i] := x[r, i] + x[k, i] * d;$

6. Napíšte algoritmus na výmenu k -tého a r -tého riadku matice.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \text{vymeň } x_{r,1} \text{ a } x_{k,1} & \quad C = x_{r,1} ; x_{r,1} = x_{k,1} ; x_{k,1} = C \\ \text{vymeň } x_{r,2} \text{ a } x_{k,2} & \quad C = x_{r,2} ; x_{r,2} = x_{k,2} ; x_{k,2} = C \\ & \quad \vdots \\ \text{vymeň } x_{r,n} \text{ a } x_{k,n} & \quad C = x_{r,n} ; x_{r,n} = x_{k,n} ; x_{k,n} = C \end{aligned}$$

```

for i := 1 to n do
  begin
    c := x[r, i];
    x[r, i] := x[k, i];
    x[k, i] := c;
  end;

```

7. Napíšte „hrubý“ algoritmus, ktorým vyrobíte jednotku na pozícii $a_{1,1}$.

Riešenie:

ak $a_{1,1} \neq 0$, nájdi riadok, ktorý má na 1. pozícii nenulový prvok

a vymeň ho s prvým riadkom

vynásob 1. riadok číslom $\frac{1}{a_{1,1}}$

8. Napíšte „hrubý“ algoritmus, ktorým vyrobíte jednotku na pozícii $a_{k,k}$.

Riešenie:

ak $a_{k,k} \neq 0$, nájdi medzi $k+1$. riadkom až posledným riadkom taký riadok,

ktorý má na k -tej pozícii nenulový prvok a vymeň ho s k -tým riadkom

vynásob k -tý riadok číslom $\frac{1}{a_{k,k}}$

9. Napíšte „hrubý“ algoritmus, ktorým vyrobíte nulu na pozícii $a_{k,i}$, kde $i > k$ pri postupnej úprave matice na redukovaný trojuholníkový tvar.

Riešenie:

pričítaj ku k -tému riadku $-a_{k,i}$ -násobok i -tého riadku

10. Napíšte „hrubý“ algoritmus úpravy matice $A_{m,n}$ na redukovanú trojuholníkovú maticu.

Riešenie:

```

for r:=1 to m do
  begin
    vyrob jednotku na pozícii  $a_{r,r}$ 
    for s:=1 to n do
      if  $s \neq r$  then vyrob nulu na pozícii  $a_{s,r}$ 
    end;
  end;

```

Vypočítajte inverznú maticu k danej matici, ak existuje.

11.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & | & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & | & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pretože maticu nemožno upraviť na redukovanú trojuholníkovú maticu (posledný riadok je v prvej časti nulový), inverzná matica k danej matici neexistuje.

$$14. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & | & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & | & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & | & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & | & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & | & \frac{-3}{2} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & | & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{57}{2} & 8 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{19}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{57}{2} & 8 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 7 & -2 & -1 & 0 \\ \frac{19}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

Inverzná matica neexistuje, nakoľko inverzné matice existujú iba ku štvorcovým maticiam.

$$16. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

K tretiemu riadku pričítame (-1)-násobok 1. riadku a (-1)-násobok 2. riadku.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Pretože maticu nemožno upraviť na redukovanú trojuholníkovú maticu (tretí riadok je v prvej časti nulový), inverzná matica k danej matici neexistuje.

Vypočítajte:

$$17. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$17. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ 1 & -19 & 5 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -7 & -11 & -10 \\ -4 & -11 & -8 \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}$$

21. Za akých podmienok možno sčítavať dve matice?

Riešenie:

Sčítavať môžeme iba matice toho istého typu, a to tak, že sčítame zodpovedajúce si prvky týchto matic.

22. Za akých podmienok možno násobiť dve matice?

Riešenie:

Aby sme mohli 2 matice vynásobiť, musí mať prvá matica toľko stĺpcov, koľko má druhá matica riadkov.

23. Napíšte algoritmus na sčítanie dvoch matic $A_{m,n} + B_{m,n}$.

Riešenie:

$$C_{11} = A_{11} + B_{11}$$

$$C_{12} = A_{12} + B_{12}$$

⋮

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

```
for i:=1 to m do
  for j:=1 to n do
    c[i,j] := a[i,j]+b[i,j];
```

24. Napíšte algoritmus na násobenie dvoch matíc $A_{m,n} \cdot B_{n,k}$.

$$C_{23} = A_{21} B_{13} + A_{22} B_{23} + A_{23} B_{33} + \dots + A_{2n} B_{n3}$$

$$C_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + A_{i3} B_{3j} + \dots + A_{in} B_{nj}$$

```

for i:=1 to m do
  for j:=1 to k do
    begin
      c[i,j]:=0;
      for p:=1 to n do c[i,j]:= c[i,j]+ a[i,p]*b[p,j];
    end;
  end;
end;

```