

Deliteľnosť a znaky deliteľnosti

Medzi základné pojmy v aritmetike celých čísel patrí aj pojem deliteľnosť. Najprv si povieme, čo znamená, že celé číslo a delí celé číslo b a ako to zapisujeme.

Nech a a b sú celé čísla. Číslo a delí číslo b , ak existuje také celé číslo c , že $b = a \cdot c$.

Napríklad číslo 3 delí číslo 15, lebo existuje také celé číslo c (v tomto prípade číslo 5), že $3 \cdot c = 3 \cdot 5 = 15$.

Podobne:

- číslo 12 delí číslo 72, lebo $12 \cdot 6 = 72$,
- číslo 7 delí číslo 84, lebo $7 \cdot 12 = 84$,
- číslo 5 delí číslo 20, lebo $5 \cdot 4 = 20$,
- číslo 4 delí číslo 5, lebo $4 \cdot 5 = 20$,
- číslo 12 delí číslo -72 , lebo $12 \cdot (-6) = -72$,
- číslo -12 delí číslo 72, lebo $(-12) \cdot (-6) = 72$,
- číslo -12 delí číslo -72 , lebo $(-12) \cdot 6 = -72$,
- číslo -5 delí číslo 15, lebo $(-5) \cdot (-3) = 15$.

Ak celé číslo a delí celé číslo b , potom hovoríme, že číslo a je deliteľom čísla b a že číslo b je deliteľné číslom a .

Teda číslo 5 je deliteľom čísla 15 a číslo 15 je deliteľné číslom 5.

Ak celé číslo a delí celé číslo b , potom to označujeme $a | b$.

Teda $5 | 15, 8 | 48, 2 | 6, -5 | 15, -5 | -15, 5 | -15$.

Teraz preskúmame, ktoré čísla sú deliteľné číslom 1.

Celé číslo 1 delí celé číslo b , ak existuje celé číslo c , že $1 \cdot c = b$. Ak zvolíme $c = b$, dostaneme pravdivú rovnosť $1 \cdot b = b$ pre všetky celé čísla b . Teda:

Číslo 1 je deliteľom každého celého čísla b .

Podobne je to aj s číslom -1 .

Celé číslo -1 delí celé číslo b , ak existuje celé číslo c , že $(-1) \cdot c = b$.

Ak zvolíme $c = -b$, dostaneme pravdivú rovnosť $(-1) \cdot (-b) = b$ pre všetky celé čísla b . Teda:

Číslo -1 je deliteľom každého celého čísla b .

Ako je to s číslom 0?

Celé číslo 0 delí celé číslo b , ak existuje celé číslo c , že $0 \cdot c = b$. Avšak $0 \cdot c = 0$. Teda číslo 0 delí iba samé seba.

Avšak, celé číslo a delí číslo 0, ak existuje celé číslo c , že $a \cdot c = 0$. Ak zvolíme $c = 0$, dostaneme pravdivú rovnosť $a \cdot 0 = 0$ pre všetky celé čísla a . Teda:

Každé celé číslo je deliteľom čísla 0.

Venujme sa teraz vlastnostiam relácie deliteľnosti na množine celých čísel.

**Relácia deliteľnosti na množine celých čísel je reflexívna.
To znamená, že každé celé číslo delí samé seba.**

Dôkaz tohto tvrdenia je veľmi jednoduchý.

Ak a je ľubovoľné celé číslo, potom $a \cdot 1 = a$. Teda číslo a delí samé seba.

**Relácia deliteľnosti na množine celých čísel je antisymetrická.
To znamená, že ak a a b sú rôzne celé čísla a a delí b , potom b nedelí a .**

Aj dôkaz tohto tvrdenia je veľmi jednoduchý. Uvedieme si ho pre kladné celé čísla.

Ak a a b sú rôzne kladné celé čísla a a delí b , potom existuje také kladné celé číslo c , že $a \cdot c = b$. Z tejto rovnosti vyplýva, že $a > b$.

Ak by aj b delilo a , potom by existovalo také kladné celé číslo d , že $b \cdot d = a$. Z tejto rovnosti by vyplývalo, že $b > a$, čo je v spore s predpokladom, že $a > b$. Teda číslo b nedelí číslo a .

**Relácia deliteľnosti na množine celých čísel je tranzitívna.
To znamená, že ak a delí b a b delí c , potom a delí c .**

Aj dôkaz tohto tvrdenia je veľmi jednoduchý.

Ak a delí b , potom existuje také kladné celé číslo k , že $a \cdot k = b$.

Ak b delí c , potom existuje také kladné celé číslo l , že $b \cdot l = c$.

Potom $a \cdot k \cdot l = b \cdot l = c$. Pretože $k \cdot l$ je tiež celé číslo, platí, že a delí c .

Z predchádzajúcich troch tvrdení vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Relácia deliteľnosti na množine celých čísel je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

Teraz si uvedieme niekoľko jednoduchých vlastností deliteľnosti.

Nech a, b, c, d, e sú ľubovoľné celé čísla. Potom:

1. Ak $a \mid b$, potom $a \mid d \cdot b$.

2. Ak $a \mid b$ a $a \mid c$, potom $a \mid b + c$.

3. Ak $a \mid b$ a $a \mid c$, potom $a \mid d \cdot b + e \cdot c$.

Dôkaz tvrdenia 1 je veľmi jednoduchý.

Ak a delí b , potom existuje také kladné celé číslo k , že $a \cdot k = b$.

Potom $a \cdot k \cdot d = b \cdot d = d \cdot b$. Pretože $k \cdot d$ je tiež celé číslo, platí, že a delí $d \cdot b$.

Aj dôkaz tvrdenia 2 je veľmi jednoduchý.

Ak a delí b , potom existuje také kladné celé číslo k , že $a \cdot k = b$.

Ak a delí c , potom existuje také kladné celé číslo l , že $a \cdot l = c$.

Potom $a \cdot (k + l) = a \cdot k + a \cdot l = b + c$. Pretože $k + l$ je tiež celé číslo, platí, že a delí $b + c$.

Tvrdenie 3 priamo vyplýva z prvých dvoch tvrdení.

Už pri definícii operácie delenia so zvyškom v množine celých nezáporných čísel sme si uviedli analogické tvrdenie, ako je to nasledujúce.

Nech a, b sú celé čísla. Nech $b > 0$. Potom existuje jediná dvojica celých čísel q a r tak, že $a = b \cdot q + r$, pričom $0 \leq r < b$.

Použitie tohto tvrdenia je nasledovné:

Deľme číslo 34 číslom 5. Zrejme $34 = 5 \cdot 6 + 4$. Teda neúplný podiel čísel 34 a 5 je 6 a zvyšok je 4.

Teraz deľme číslo -34 číslom 5. Zrejme $-34 = 5 \cdot (-7) + 1$. Teda neúplný podiel čísel -34 a 5 je -7 a zvyšok je 1.

Napokon deľme číslo -13 číslom 3. Zrejme $-13 = 3 \cdot (-5) + 2$. Teda neúplný podiel čísel -13 a 3 je -5 a zvyšok je 2.

Teraz sa budeme venovať vybraným kritériám deliteľnosti.

Najprv skúmame, kedy je prirodzené číslo deliteľné dvoma. Napíšme si najmenšie prirodzené čísla deliteľné dvoma: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.

Všimnime si ich posledné cifry. Vidíme, že na mieste jednotiek sa striedajú iba číslice 0, 2, 4, 6, 8.

Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné dvoma, ak jeho posledná číslica c_0 je 0, 2, 4, 6 alebo 8.

Teda:

- číslo 234 543 346 436 je deliteľné dvoma, lebo jeho posledná číslica je 6,
- číslo 347 573 752 485 nie je deliteľné dvoma, lebo jeho posledná číslica je 5.

Teraz skúmame, kedy je prirodzené číslo deliteľné piatimi. Napíšme si najmenšie prirodzené čísla deliteľné piatimi: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75.

Všimnime si ich posledné cifry. Vidíme, že na mieste jednotiek sa striedajú iba číslice 0 a 5.

Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné piatimi, ak jeho posledná číslica c_0 je 0 alebo 5.

Teda:

- číslo 234 543 346 435 je deliteľné piatimi, lebo jeho posledná číslica je 5,
- číslo 347 573 752 487 nie je deliteľné piatimi, lebo jeho posledná číslica je 7.

Podobné tvrdenie platí aj pre deliteľnosť desiatimi.

Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné desiatimi, ak jeho posledná číslica c_0 je 0.

Teda:

- číslo 234 543 346 430 je deliteľné desiatimi, lebo jeho posledná číslica je 0,
- číslo 347 573 752 487 nie je deliteľné desiatimi, lebo jeho posledná číslica je 7.

Teda kritériá deliteľnosti dvoma, piatimi a desiatimi sa viažu na poslednú číslicu. Podobné kritériá máme pre deliteľnosť štyrmi, dvadsiatimi piatimi, päťdesiatimi a stomi. Tieto sa viažu na posledné dve číslice, teda na posledné dvojčísle.

Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné štyrmi, ak jeho posledné dvojčísle c_1c_0 je deliteľné štyrmi. Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné dvadsiatimi piatimi, ak jeho posledné dvojčísle c_1c_0 je 00, 25, 50 alebo 75. Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné päťdesiatimi, ak jeho posledné dvojčísle c_1c_0 je 00 alebo 50. Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné stomi, ak jeho posledné dvojčísle c_1c_0 je 00.

Teda:

- číslo 234 543 346 472 je deliteľné štyrmi, lebo jeho posledné dvojčísle 72 je deliteľné štyrmi,
- číslo 234 543 346 474 nie je deliteľné štyrmi, lebo jeho posledné dvojčísle 74 nie je deliteľné štyrmi,
- číslo 234 543 346 475 je deliteľné dvadsiatimi piatimi, lebo jeho posledné dvojčísle 75 je deliteľné dvadsiatimi piatimi,
- číslo 234 543 346 474 nie je deliteľné dvadsiatimi piatimi, lebo jeho posledné dvojčísle 74 nie je deliteľné dvadsiatimi piatimi,
- číslo 234 543 346 450 je deliteľné päťdesiatimi, lebo jeho posledné dvojčísle 50 je deliteľné päťdesiatimi,
- číslo 234 543 346 474 nie je deliteľné päťdesiatimi, lebo jeho posledné dvojčísle 74 nie je deliteľné päťdesiatimi,
- číslo 234 543 346 400 je deliteľné stomi, lebo jeho posledné dvojčísle je 00,
- číslo 234 543 346 474 nie je deliteľné stomi, lebo jeho posledné dvojčísle nie je 00.

Analogické kritériá máme aj pre posledné trojčísle. Uvedieme si iba jedno.

Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné ôsmimi, ak jeho posledné trojčísle $c_2c_1c_0$ je deliteľné ôsmimi.

Teda:

- číslo 234 543 346 472 je deliteľné ôsmimi, lebo jeho posledné trojčísle 472 je deliteľné ôsmimi, ($472 : 8 = 59$)
- číslo 234 543 346 474 nie je deliteľné ôsmimi, lebo jeho posledné trojčísle 474 nie je deliteľné ôsmimi. ($474 : 8 = 59$ zv. 2)

Ďalšia skupina kritérií sa viaže na ciferný súčet. Uvedieme si dve z nich.

Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ **s ciframi** $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ **je deliteľné tromi, ak jeho ciferný súčet** $c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \dots + c_2 + c_1 + c_0$ **je deliteľný tromi.**

Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ **s ciframi** $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ **je deliteľné deviatimi, ak jeho ciferný súčet** $c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \dots + c_2 + c_1 + c_0$ **je deliteľný deviatimi.**

Teda:

- číslo 234 543 346 482 je deliteľné tromi, lebo jeho ciferný súčet $2+3+4+5+4+3+3+4+6+4+8+2=48$ je deliteľný tromi,
- číslo 233 543 346 482 nie je deliteľné tromi, lebo jeho ciferný súčet $2+3+3+5+4+3+3+4+6+4+8+2=47$ nie je deliteľný tromi,
- číslo 234 543 346 482 nie je deliteľné deviatimi, lebo jeho ciferný súčet $2+3+4+5+4+3+3+4+6+4+8+2=48$ nie je deliteľný tromi,
- číslo 231 543 346 482 je deliteľné deviatimi, lebo jeho ciferný súčet $2+3+1+5+4+3+3+4+6+4+8+2=45$ je deliteľný deviatimi.

Napokon si uvedieme kritériá pre deliteľnosť šiestimi, dvanástimi a pätnástimi.

Prirodzené číslo je deliteľné šiestimi, ak je deliteľné dvoma aj tromi.
Prirodzené číslo je deliteľné dvanástimi, ak je deliteľné tromi aj štyrmi.
Prirodzené číslo je deliteľné pätnástimi, ak je deliteľné tromi aj piatimi.

Kritériá deliteľnosti si teraz ukážeme na úlohách.

Úloha:

Ktorými z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 je deliteľné číslo 123 456 789?

Riešenie:

Pretože posledná číslica je 9, číslo 123 456 789 nie je deliteľné dvoma, piatimi ani desiatimi. Teda nemôže byť deliteľné ani šiestimi.

Pretože posledné dvojčísle je 89 a to nie je deliteľné štyrmi, číslo 123 456 789 nie je deliteľné štyrmi.

Pretože posledné trojčísle je 789 a to nie je deliteľné ôsmimi, číslo 123 456 789 nie je deliteľné ôsmimi.

(To, že číslo 123 456 789 nie je deliteľné štyrmi a ôsmimi sme mohli zdôvodniť aj tým, že nie je deliteľné dvoma.)

Teraz určíme ciferný súčet čísla 123 456 789.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

Keďže ciferný súčet je deliteľný tromi, číslo 123 456 789 je deliteľné tromi.

Keďže ciferný súčet je deliteľný deviatimi, číslo 123 456 789 je deliteľné deviatimi.

Z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 je číslo 123 456 789 deliteľné iba číslami 3 a 9.

Úloha:

Ktorými z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 je deliteľné číslo 56 763 992?

Riešenie:

Pretože posledná číslica je 2, číslo 56 763 992 je deliteľné dvoma a nie je deliteľné ani piatimi, ani desiatimi.

Pretože posledné dvojčíslenie je 92 a to je deliteľné štyrmi, číslo 56 763 992 je deliteľné štyrmi.

Pretože posledné trojčíslenie je 992 a to je deliteľné ôsmimi, číslo 56 763 992 je deliteľné ôsmimi.

Teraz určíme ciferný súčet čísla 56 763 992.

$$5+6+7+6+3+9+9+2=47$$

Keďže ciferný súčet nie je deliteľný tromi, číslo 56 763 992 nie je deliteľné tromi. Teda nemôže byť deliteľné ani šiestimi.

Keďže ciferný súčet nie je deliteľný deviatimi, číslo 56 763 992 nie je deliteľné deviatimi.

Z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 je číslo 56 763 992 deliteľné iba číslami 2, 4 a 8.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ukážte, že ak je číslo deliteľné dvoma a štyrmi, potom nemusí byť deliteľné ôsmimi.

Riešenie:

Vezmime si napríklad číslo 36.

Toto číslo je deliteľné dvoma aj štyrmi, ale nie je deliteľné ôsmimi.

Úloha:

Zdôvodnite kritérium deliteľnosti dvoma, ktoré znie:

„Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné dvoma, ak jeho posledná číslica je deliteľná dvoma.“

Riešenie:

$$\begin{aligned} a &= c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 = \\ &= c_n \cdot 10 \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 10 \cdot 10^{n-2} + c_{n-2} \cdot 10 \cdot 10^{n-3} + \dots + c_2 \cdot 10 \cdot 10 + c_1 \cdot 10 + c_0 = \\ &= 2 \cdot (c_n \cdot 5 \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 5 \cdot 10^{n-2} + c_{n-2} \cdot 5 \cdot 10^{n-3} + \dots + c_2 \cdot 5 \cdot 10 + c_1 \cdot 5) + c_0 \end{aligned}$$

Ak označíme $k = c_n \cdot 5 \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 5 \cdot 10^{n-2} + c_{n-2} \cdot 5 \cdot 10^{n-3} + \dots + c_2 \cdot 5 \cdot 10 + c_1 \cdot 5$,

potom $a = 2 \cdot k + c_0$. Pretože prvý sčítanec je deliteľný číslom dva, o deliteľnosti súčtu číslom 2 rozhoduje iba druhý sčítanec, ktorým je c_0 , teda posledná cifra čísla a . Ak c_0 je deliteľná dvoma, potom aj číslo a je deliteľné dvoma. Ak c_0 nie je deliteľná dvoma, potom ani číslo a nie je deliteľné dvoma.

Úloha:

Zdôvodnite kritérium deliteľnosti piatimi, ktoré znie:

„Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné piatimi, ak jeho posledná číslica je 0 alebo 5.“

Riešenie:

$$\begin{aligned} a &= c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 = \\ &= c_n \cdot 10 \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 10 \cdot 10^{n-2} + c_{n-2} \cdot 10 \cdot 10^{n-3} + \dots + c_2 \cdot 10 \cdot 10 + c_1 \cdot 10 + c_0 = \\ &= 5 \cdot (c_n \cdot 2 \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 2 \cdot 10^{n-2} + c_{n-2} \cdot 2 \cdot 10^{n-3} + \dots + c_2 \cdot 2 \cdot 10 + c_1 \cdot 2) + c_0 \end{aligned}$$

Ak označíme $k = c_n \cdot 2 \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 2 \cdot 10^{n-2} + c_{n-2} \cdot 2 \cdot 10^{n-3} + \dots + c_2 \cdot 2 \cdot 10 + c_1 \cdot 2$,

potom $a = 5 \cdot k + c_0$. Pretože prvý sčítanec je deliteľný číslom päť, o deliteľnosti súčtu číslom päť rozhoduje iba druhý sčítanec, ktorým je c_0 , teda posledná cifra čísla a . Ak c_0 je deliteľná piatimi, teda ak je to 0 alebo 5, potom aj číslo a je deliteľné piatimi. Ak c_0 nie je deliteľná piatimi, teda ak to nie je 0 alebo 5, potom ani číslo a nie je deliteľné piatimi.

Úloha:

Zdôvodnite kritérium deliteľnosti tromi, ktoré znie:

„Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné tromi, ak jeho ciferný súčet $c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \dots + c_2 + c_1 + c_0$ je deliteľný tromi.“ na šesťcifernom čísle.

Riešenie:

Ak a je šesťciferné číslo, potom má tvar

$$a = c_5 \cdot 10^5 + c_4 \cdot 10^4 + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned} a &= c_5 \cdot 100000 + c_4 \cdot 10000 + c_3 \cdot 1000 + c_2 \cdot 100 + c_1 \cdot 10 + c_0 \cdot 1 = \\ &= c_5 \cdot (99999 + 1) + c_4 \cdot (9999 + 1) + c_3 \cdot (999 + 1) + c_2 \cdot (99 + 1) + c_1 \cdot (9 + 1) + c_0 \cdot 1 = \\ &= c_5 \cdot 99999 + c_5 + c_4 \cdot 9999 + c_4 + c_3 \cdot 999 + c_3 + c_2 \cdot 99 + c_2 + c_1 \cdot 9 + c_1 + c_0 = \\ &= c_5 \cdot 99999 + c_4 \cdot 9999 + c_3 \cdot 999 + c_2 \cdot 99 + c_1 \cdot 9 + c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = \\ &= 3 \cdot (c_5 \cdot 33333 + c_4 \cdot 3333 + c_3 \cdot 333 + c_2 \cdot 33 + c_1 \cdot 3) + (c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \end{aligned}$$

Ak označíme $k = c_5 \cdot 33333 + c_4 \cdot 3333 + c_3 \cdot 333 + c_2 \cdot 33 + c_1 \cdot 3$,

potom $a = 3 \cdot k + CS$, kde $CS = (c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ je ciferný súčet čísla a . Pretože prvý sčítanec je deliteľný číslom tri, o deliteľnosti súčtu číslom tri rozhoduje iba druhý sčítanec, ktorým je CS , teda ciferný súčet čísla a . Ak CS je deliteľný tromi, potom aj číslo a je deliteľné tromi. Ak CS nie je deliteľný tromi, potom ani číslo a nie je deliteľné tromi.

Úloha:

Zdôvodnite kritérium deliteľnosti deviatimi, ktoré znie:

„Prirodzené číslo $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ s ciframi $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1, c_0$ je deliteľné deviatimi, ak jeho ciferný súčet $c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \dots + c_2 + c_1 + c_0$ je deliteľný deviatimi.“ na šesťcifernom čísle.

Riešenie:

Ak a je šesťciferné číslo, potom má tvar

$$a = c_5 \cdot 10^5 + c_4 \cdot 10^4 + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned}
a &= c_5 \cdot 100000 + c_4 \cdot 10000 + c_3 \cdot 1000 + c_2 \cdot 100 + c_1 \cdot 10 + c_0 \cdot 1 = \\
&= c_5 \cdot (99999 + 1) + c_4 \cdot (9999 + 1) + c_3 \cdot (999 + 1) + c_2 \cdot (99 + 1) + c_1 \cdot (9 + 1) + c_0 \cdot 1 = \\
&= c_5 \cdot 99999 + c_5 + c_4 \cdot 9999 + c_4 + c_3 \cdot 999 + c_3 + c_2 \cdot 99 + c_2 + c_1 \cdot 9 + c_1 + c_0 = \\
&= c_5 \cdot 99999 + c_4 \cdot 9999 + c_3 \cdot 999 + c_2 \cdot 99 + c_1 \cdot 9 + c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = \\
&= 9 \cdot (c_5 \cdot 11111 + c_4 \cdot 1111 + c_3 \cdot 111 + c_2 \cdot 11 + c_1 \cdot 1) + (c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0)
\end{aligned}$$

Ak označíme $k = c_5 \cdot 11111 + c_4 \cdot 1111 + c_3 \cdot 111 + c_2 \cdot 11 + c_1 \cdot 1$,

potom $a = 9 \cdot k + \text{CS}$, kde $\text{CS} = (c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ je ciferný súčet čísla a . Pretože prvý sčítanec je deliteľný číslom deväť, o deliteľnosti súčtu číslom deväť rozhoduje iba druhý sčítanec, ktorým je CS, teda ciferný súčet čísla a . Ak CS je deliteľný deviatimi, potom aj číslo a je deliteľné deviatimi. Ak CS nie je deliteľný deviatimi, potom ani číslo a nie je deliteľné deviatimi.

Teraz sa oboznámime s pojmom dokonalé číslo.

Prirodzené číslo n je dokonalé, ak sa rovná polovici súčtu svojich deliteľov.

V prvej stovke sú dve dokonalé čísla, a to 6 a 28.

Číslo 6 má delitele 1, 2, 3, 6. Ich súčet je 12.

Číslo 28 má delitele 1, 2, 4, 7, 14, 28. Ich súčet je 56.

Ďalšie dokonalé čísla sú 496, 8128, 33550336.

Doteraz nie je známe žiadne nepárne dokonalé číslo.

Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok

Začneme tým, že si presne zadefinujeme pojem najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku.

Spoločným deliteľom celých čísel a, b budeme nazývať také číslo, ktoré delí obe tieto čísla. Teda:

Celé číslo d je spoločným deliteľom celých čísel a, b , ak $d \mid a$ a $d \mid b$.

Vezmime si čísla 36 a 60.

Číslo 36 má tieto kladné delitele: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Číslo 60 má tieto kladné delitele: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Spoločnými deliteľmi čísel 36 a 60 sú: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Vidíme, že najväčším spoločným násobkom čísel 36 a 60 je číslo 12.

Všimnime si, že všetky ostatné spoločné delitele delia číslo 12, ktoré je najväčším spoločným deliteľom.

Kladné celé číslo D je najväčším spoločným deliteľom celých čísel a, b , ak:

1. $D \mid a$ a $D \mid b$,

2. Ak d je také kladné celé číslo, pre ktoré $d \mid a$ a $d \mid b$, potom $d \mid D$.

Vlastnosť 1. nám zaručuje, že D je spoločný deliteľ čísel a, b .

Vlastnosť 2. nám zaručuje, že D je najväčší spomedzi všetkých spoločných deliteľov.

Teraz sa budeme venovať najmenšiemu spoločnému násobku.

Spoločným násobkom celých čísel a, b budeme nazývať také číslo, ktoré je násobkom obidvoch z nich. Teda:

Celé číslo n je spoločným násobkom celých čísel a, b , ak $a \mid n$ a $b \mid n$.

Vezmime si čísla 36 a 60.

Číslo 36 má tieto kladné násobky: 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396, 432, 468, 504, 540, 576, 612, 648, 684, 720, 756, ...

Číslo 60 má tieto kladné delitele: 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720, 780, ...

Spoločnými deliteľmi čísel 36 a 60 sú: 180, 360, 540, 720, ...

Vidíme, že najmenším kladným spoločným násobkom čísel 36 a 60 je číslo 180.

Všimnime si, že všetky ostatné spoločné násobky sú násobkom čísla 180, ktoré je najmenším spoločným násobkom.

Kladné celé číslo N je najmenším spoločným násobkom celých čísel a, b , ak:

1. $a \mid N$ a $b \mid N$,

2. Ak n je také kladné celé číslo, pre ktoré $a \mid n$ a $b \mid n$, potom $N \mid n$.

Vlastnosť 1. nám zaručuje, že N je spoločný násobok čísel a, b .

Vlastnosť 2. nám zaručuje, že N je najmenší spomedzi všetkých kladných spoločných násobkov.

Najväčší spoločný deliteľ čísel a, b označujeme (a, b) .

Najmenší spoločný násobok čísel a, b označujeme $[a, b]$.

Vzťah medzi súčinom čísel a, b , ich najväčším spoločným deliteľom a najmenším spoločným násobkom určuje nasledujúce tvrdenie.

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$$

Úloha:

Nájdite najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel 72 a 108.

Overte, či $(72, 108) \cdot [72, 108] = 72 \cdot 108$.

Riešenie:

Delitele čísla 72 sú: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Delitele čísla 108 sú: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108.

Najväčší spoločný deliteľ je $(72, 108) = 36$.

Násobky čísla 72 sú: 72, 144, 216, 288, 360,

Násobky čísla 108 sú: 108, 216, 324, 432, 540, ...

Najmenší spoločný násobok je $[72, 108] = 216$.

Vzťah $(72, 108) \cdot [72, 108] = 72 \cdot 108$ platí,

nakoľko $(72, 108) \cdot [72, 108] = 36 \cdot 216 = 7776 = 72 \cdot 108$

Úloha:

Nájdite najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel 30 a 75.

Overte, či $(30, 75) \cdot [30, 75] = 30 \cdot 75$.

Riešenie:

Delitele čísla 30 sú: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Delitele čísla 75 sú: 1, 3, 5, 15, 25, 75.

Najväčší spoločný deliteľ je $(30, 75) = 15$.

Násobky čísla 30 sú: 30, 60, 90, 120, 150,

Násobky čísla 75 sú: 75, 150, 225, 300, 375, ...

Najmenší spoločný násobok je $[30, 75] = 150$.

Vzťah $(30, 75) \cdot [30, 75] = 30 \cdot 75$ platí,

nakoľko $(30, 75) \cdot [30, 75] = 15 \cdot 150 = 2250 = 30 \cdot 75$.

S najväčším spoločným deliteľom súvisí aj pojem súdeliteľných čísel.

Čísla a a b nazývame nesúdeliteľné, ak $(a, b) = 1$.

Inak ich nazývame súdeliteľné.

Napríklad čísla 5 a 7 sú nesúdeliteľné, nakoľko ich najväčším spoločným deliteľom je číslo 1.

Taktiež čísla 5 a 19 sú nesúdeliteľné, nakoľko ich najväčším spoločným deliteľom je číslo 1.

Čísla 15 a 25 sú súdeliteľné, lebo ich najväčším spoločným deliteľom je číslo 5.

Taktiež čísla 12 a 20 sú súdeliteľné, lebo ich najväčším spoločným deliteľom je číslo 4.

Euklidov algoritmus na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa

Jednou z efektívnych metód na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel je Euklidov algoritmus. Je založený na nasledujúcom poznatku.

Nech prirodzené číslo d je deliteľom prirodzených čísel a a b , $a > b$. Potom d je aj deliteľom čísla $a - b$.

Nech prirodzené číslo d je deliteľom prirodzených čísel a a b , $a > b$. Potom d je aj deliteľom čísla c , ktoré je zvyškom po delení čísla b číslom a .

O platnosti tohto poznatku sa poľahky presvedčíme.

Ak d je deliteľom a , potom existuje také prirodzené číslo k , že $a = d \cdot k$.

Podobne, ak d je deliteľom b , potom existuje také prirodzené číslo l , že $b = d \cdot l$.

Potom $a - b = d \cdot k - d \cdot l = d \cdot (k - l)$, a teda d je deliteľom čísla $a - b$.

Ak $a - b$ je menšie ako b , potom je zvyškom po delení čísla a číslom b , a teda d je deliteľom čísla c . Ak $a - b$ nie je menšie ako b , potom podľa prvej časti tvrdenia d je aj deliteľom čísla $a - 2b$. Takto by sme mohli pokračovať, až kým dostaneme, že d je deliteľom čísla c .

Vysvetlime si predchádzajúce zdôvodnenie na konkrétnom príklade.

Zvoľme si $a = 52$ a $b = 12$.

Vieme, že číslo $d = 4$ je deliteľom čísel 52 aj 12.

Podľa prvej časti tvrdenia je d aj deliteľom čísla $52 - 12 = 40$.

Keďže $40 > 12$ a číslo $d = 4$ je deliteľom čísel 40 aj 12, podľa prvej časti tvrdenia je d aj deliteľom čísla $40 - 12 = 28$.

Keďže $28 > 12$ a číslo $d = 4$ je deliteľom čísel 28 aj 12, podľa prvej časti tvrdenia je d aj deliteľom čísla $28 - 12 = 16$.

Keďže $16 > 12$ a číslo $d = 4$ je deliteľom čísel 16 aj 12, podľa prvej časti tvrdenia je d aj deliteľom čísla $16 - 12 = 4$.

Keďže $4 < 12$, číslo $c = 4$ je zvyškom po delení čísla 52 číslom 12. Podľa druhej časti tvrdenia číslo d je aj deliteľom čísla c .

Zvyšok po delení väčšieho čísla menším číslom teda môžeme určiť napríklad tak, že postupne odčítavame menšie číslo od väčšieho, až kým nedostaneme menší rozdiel ako je menšiteľ.

Úloha:

Postupným odčítaním určte zvyšok po delení čísla 4 567 číslom 754.

Riešenie:

$$4\,567 - 754 = 3\,813$$

$$3\,813 - 754 = 3\,059$$

$$3\,059 - 754 = 2\,305$$

$$2\,305 - 754 = 1\,551$$

$$1\,551 - 754 = 797$$

$$797 - 754 = 43$$

Zvyšok po delení čísla 4 567 číslom 754 je 43.

Teraz prejdeme k Euklidovmu algoritmu.

Najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b , $a > b$ určíme takto:

1. Väčšie z čísel a a b nahradíme zvyškom po delení väčšieho čísla menším.

2. Ak menšie z čísel je nula, najväčším spoločným deliteľom je väčšie z čísel. Inak pokračujeme bodom 1.

Postup si vysvetlíme na príklade. Chceme nájsť najväčšieho spoločného deliteľa čísel 4 567 a 754.

Pretože $4\,567 > 754$, číslo 4 567 nahradíme zvyškom po delení čísla 4 567 číslom 754, teda číslom 43.

Pretože $754 > 43$, číslo 754 nahradíme zvyškom po delení čísla 754 číslom 43, teda číslom 23.

Pretože $43 > 23$, číslo 43 nahradíme zvyškom po delení čísla 43 číslom 23, teda číslom 20.

Pretože $23 > 20$, číslo 23 nahradíme zvyškom po delení čísla 23 číslom 20, teda číslom 3.

Pretože $20 > 3$, číslo 20 nahradíme zvyškom po delení čísla 20 číslom 3, teda číslom 2.

Pretože $3 > 2$, číslo 3 nahradíme zvyškom po delení čísla 3 číslom 2, teda číslom 1.

Pretože $2 > 1$, číslo 2 nahradíme zvyškom po delení čísla 2 číslom 1, teda číslom 0.

Zostali nám čísla 1 a 0. Pretože menšie z nich je nula, väčšie z nich je najväčším spoločným deliteľom čísel 4 567 a 754. Zároveň je aj najväčším spoločným deliteľom čísel 754 a 43, čísel 43 a 23, čísel 23 a 20, čísel 20 a 3, čísel 3 a 2 a čísel 2 a 1.

Teda: $(4\ 567, 754) = (754, 43) = (43, 23) = (23, 20) = (20, 3) = (3, 2) = (2, 1) = 1$.

Úloha:

Euklidovým algoritmom určte najväčší spoločný deliteľ čísel 120 a 15.

Riešenie:

Pretože $120 > 15$, číslo 120 nahradíme zvyškom po delení čísla 120 číslom 15, teda číslom 0. (pretože $120:15=8$, zvyšok 0)

Zostali nám čísla 8 a 0. Pretože menšie z nich je nula, väčšie z nich je najväčším spoločným deliteľom čísel 120 a 15.

Teda: $(120, 15) = 8$.

Úloha:

Euklidovým algoritmom určte najväčší spoločný deliteľ čísel 124 a 8.

Riešenie:

Pretože $124 > 8$, číslo 124 nahradíme zvyškom po delení čísla 124 číslom 8, teda číslom 4. (pretože $124:8=15$, zvyšok 4)

Pretože $8 > 4$, číslo 8 nahradíme zvyškom po delení čísla 8 číslom 4, teda číslom 0. (pretože $8:4=2$, zvyšok 0)

Zostali nám čísla 4 a 0. Pretože menšie z nich je nula, väčšie z nich je najväčším spoločným deliteľom čísel 124 a 8.

Teda: $(124, 8) = (8, 4) = 4$.

Úloha:

Euklidovým algoritmom určte najväčší spoločný deliteľ čísel 52 a 12.

Riešenie:

Pretože $52 > 12$, číslo 52 nahradíme zvyškom po delení čísla 52 číslom 12, teda číslom 4. (pretože $52:12=4$, zvyšok 4)

Pretože $12 > 4$, číslo 12 nahradíme zvyškom po delení čísla 12 číslom 4, teda číslom 0. (pretože $12:4=3$, zvyšok 0)

Zostali nám čísla 4 a 0. Pretože menšie z nich je nula, väčšie z nich je najväčším spoločným deliteľom čísel 52 a 12.

Teda: $(52, 12) = (12, 4) = 4$.

Úloha:

Euklidovým algoritmom určte najväčší spoločný deliteľ čísel 54 a 14.

Riešenie:

Pretože $54 > 14$, číslo 54 nahradíme zvyškom po delení čísla 54 číslom 14, teda číslom 12. (pretože $54:14=3$, zvyšok 12)

Pretože $14 > 12$, číslo 14 nahradíme zvyškom po delení čísla 14 číslom 12, teda číslom 2. (pretože $14:12=1$, zvyšok 2)

Pretože $12 > 2$, číslo 12 nahradíme zvyškom po delení čísla 12 číslom 2, teda číslom 0. (pretože $12:2=6$, zvyšok 0)

Zostali nám čísla 2 a 0. Pretože menšie z nich je nula, väčšie z nich je najväčším spoločným deliteľom čísel 54 a 14.

Teda: $(54, 14) = (14, 12) = (12, 2) = 2$.

Prvočísla

Vytvorme si tabuľku všetkých deliteľov prirodzených čísel od 1 do 20.

Číslo	Delitele	Číslo	Delitele
1	1	11	1, 11
2	1, 2	12	1, 2, 3, 4, 6, 12
3	1, 3	13	1, 13
4	1, 2, 4	14	1, 2, 7, 14
5	1, 5	15	1, 3, 5, 15
6	1, 2, 3, 6	16	1, 2, 4, 8, 16
7	1, 7	17	1, 17
8	1, 2, 4, 8	18	1, 2, 3, 6, 9, 18
9	1, 3, 9	19	1, 19
10	1, 2, 5, 10	20	1, 2, 4, 5, 10, 20

Všimnime si, že jedného deliteľa má iba číslo 1. Ostatné čísla majú aspoň dva delitele: 1 a samého seba. Čísla, ktoré budú mať iba tieto dva delitele, nazývame prvočísla.

Prirodzené číslo $n > 1$ nazveme prvočíslo, ak má v množine prirodzených čísel práve dva rôzne delitele (jednotku a samého seba).

Prirodzené číslo $n > 1$, ktoré nie je prvočíslo, nazývame zložené číslo.

Medzi číslami 1 – 20 sú teda čísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19 prvočísla. Čísla 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 sú zložené čísla.

Ako zistíme, či je dané prirodzené číslo prvočíslo? Jeden z vhodných postupov je založený na nasledujúcej vete.

Ak prirodzené číslo $n > 1$ je zložené číslo, potom má aspoň jedného deliteľa, ktorý je väčší ako 1 a menší alebo rovný $\sqrt{n}$.

Teda ak chceme zistiť, či dané prirodzené číslo je prvočíslo, postupne ho delíme číslami 2, 3, 4, ..., $\sqrt{n}$. Ak nájdeme deliteľa, prirodzené číslo n je zložené číslo. Inak je n prvočíslo.

Úloha:

Zistite, či číslo 293 je prvočíslo.

Riešenie:

Pomocou kalkulačky zistíme, že $\sqrt{293} \doteq 17,11$.

Postupne budeme deliť číslo 293 číslami 2, 3, 4, 5, ..., 17.

Číslo 293 nie je deliteľné dvoma, lebo nekončí číslicou 0, 2, 4, 6, 8.

Nemôže byť teda deliteľné ani číslami 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.

Číslo 293 nie je deliteľné tromi, lebo jeho ciferný súčet je $2 + 9 + 3 = 14$ a to nie je deliteľné tromi. Nemôže byť teda deliteľné ani číslami 6, 9, 12, 15.

Číslo 293 nie je deliteľné piatimi, lebo nekončí číslicou 0, 5.

Nemôže byť teda deliteľné ani číslami 5, 10, 15.

Číslo 293 nie je deliteľné 7.

Číslo 293 nie je deliteľné 11.
 Číslo 293 nie je deliteľné 13.
 Číslo 293 nie je deliteľné 17.

Pretože číslo 293 nie je deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 4, 5, ..., 17, je číslo 293 prvočíslo.
 Ako možno nájsť všetky prvočísla menšie ako dané číslo? Návod nám dáva tzv. Eratostenovo sito. Vysvetlíme si jeho konštrukciu pre nájdenie všetkých prvočísel menších ako 200.

Najprv si všetky čísla 2 – 200 zapíšeme do tabuľky.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Teraz si označíme číslo 2 a vyškrtneme všetky jeho násobky.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Teraz si označíme číslo 3 a vyškrtneme všetky jeho násobky.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Teraz si označíme číslo 5 a vyškrtneme všechny jeho násobky.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Teraz si označíme číslo 7 a vyškrtneme všechny jeho násobky.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Teraz si označíme číslo 11 a vyškrtneme všechny jeho násobky.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Teraz si označíme číslo 13 a vyškrtneme všechny jeho násobky.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Pretože $\sqrt{293} \doteq 14,14$, násobky čísla 17 už sú vyškrtnuté všetky.

Všetky označené čísla spolu so všetkými nepreškrtnutými číslami sú prvočísla.

Zoznam prvočísel do 200: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Všimnime si, že v prvej stovke prirodzených čísel je 25 prvočísel a v druhej stovke 21.

Hoci ich podiel bude postupne klesať, vždy nájdeme ďalšie a ďalšie prvočíslo.

O počte prvočísel vraví nasledujúce tvrdenie.

Prvočísel je nekonečne veľa.

Dôsledkom tejto vety je nasledovné tvrdenie.

Ak si zvolíme ľubovoľne veľké prirodzené číslo n , potom existuje také prvočíslo p , ktoré je od neho väčšie.

O počte párných a nepárných prvočísel vraví nasledujúce tvrdenie.

**Nepárných prvočísel je nekonečne veľa.
Párne prvočíslo je iba jedno. Je to číslo 2.**

Teraz sa ešte budeme venovať pojmu prvočíselné dvojčatá. Sú to také prvočísla, ktorých rozdiel je 2. Medzi číslami 2 – 200 sú to teda:

3 a 5, 5 a 7, 11 a 13, 17 a 19, 29 a 31, 41 a 43, 59 a 61, 71 a 73, 101 a 103, 107 a 109, 137 a 139, 149 a 151, 179 a 181, 191 a 193, 197 a 199.

Doteraz nie je známe, či je prvočíselných dvojčiat konečne alebo nekonečne veľa.

Skúmaniu prvočísel sa venuje v matematike veľké úsilie. Možno je to spôsobené aj tým, že existuje množstvo nevyriešených problémov týkajúcich sa prvočísel a tieto problémy sú často veľmi zaujímavé. Veľmi prestížna je napríklad súťaž o nájdenie najväčšieho známeho prvočísla, ktorá vlastne nebude mať nikdy koniec. O popularite prvočísel svedčí aj množstvo materiálov na Internete. Uvedieme si niekoľko zo zaujímavostí o prvočíslach.

1. Napriek tomu, že prvočísel je nekonečne veľa, v postupnosti všetkých prvočísel existujú ľubovoľne veľké medzery. Pre každé prirodzené číslo n existuje postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorá má n členov a neobsahuje žiadne prvočíslo.

2. Až doteraz neexistuje žiaden explicitný vzorec, pomocou ktorého možno vyjadriť všetky prvočísla.

3. Ak si zvolíme ľubovoľné prirodzené číslo n väčšie ako 1, potom existuje také prvočíslo p , ktoré je väčšie ako n a menšie ako $2n$.

4. Keďže prvočísel je nekonečne veľa, matematikov zaujímalo, ako možno odhadnúť počet prvočísel menších ako n . Ak si ich počet označíme $P(n)$, potom existujú konštanty d a h

také, že $d \cdot \frac{n}{\log n} \leq P(n) \leq h \cdot \frac{n}{\log n}$. Voľne povedané, funkcia $P(n)$ „rastie rovnako rýchlo“

ako funkcia $\frac{n}{\log n}$.

Rozklad prirodzeného čísla na súčin prvočísel

Každé prirodzené číslo $n > 1$ možno vyjadriť v tvare $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ sú prirodzené čísla.

Naviac, toto vyjadrenie je jednoznačné až na poradie prvočísel $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$.

Rozklad čísla n na súčin $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ nazývame kanonický rozklad čísla n .

Uvedené tvrdenie si precvičíme na úlohách.

Úloha:

Nájdite kanonický rozklad čísla 46 481 400.

Riešenie:

$$\begin{aligned} 46481400 &= 2 \cdot 23240700 = 2 \cdot 2 \cdot 11620350 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5810175 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1936725 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 645575 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 129115 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 25823 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3689 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 527 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 31 \end{aligned}$$

Úloha:

Nájdite kanonický rozklad čísla 101 140 445.

Riešenie:

$$\begin{aligned} 101140445 &= 5 \cdot 20228089 = 5 \cdot 7 \cdot 2889727 = 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 93217 = \\ &= 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 31 \cdot 3007 = 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 31 \cdot 31 \cdot 97 = 5 \cdot 7 \cdot 31^3 \cdot 97 \end{aligned}$$

Úloha:

Nájdite kanonický rozklad čísla 997 997.

Riešenie:

$$997997 = 7 \cdot 142571 = 7 \cdot 11 \cdot 12961 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 997$$

Číslo 997 je prvočíslo, nakoľko $\sqrt{997} \doteq 31,57$ a číslo 997 nie je deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 4, ..., 31.

Rozklad prirodzeného čísla na súčin prvočísel možno vhodne využiť aj pri hľadaní najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku. Postup vyplýva z nasledujúceho tvrdenia a my si ho vysvetlíme najmä na úlohách.

Nech m a n sú prirodzené čísla väčšie ako 1 s kanonickými rozkladmi v tvare $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, kde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ sú prirodzené čísla alebo nuly.

Označme $\chi_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ a $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$.

Potom $(m, n) = p_1^{\chi_1} \cdot p_2^{\chi_2} \cdot p_3^{\chi_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\chi_k}$ a $[m, n] = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot p_3^{\delta_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k}$.

Keď teda hľadáme najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok dvoch čísel, urobíme ich kanonické rozklady a upravíme ich tak, aby oba rozklady mali rovnaké prvočísla.

Potom v rozklade najväčšieho spoločného deliteľa sú tie isté prvočísla, ale s menšími exponentmi a v rozklade najmenšieho spoločného násobku sú tie isté prvočísla, ale s väčšími exponentmi.

Úloha:

Nájdite najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel 12 740 a 418 275.

Riešenie:

Najprv urobíme kanonický rozklad oboch čísel.

$$12740 = 2 \cdot 6370 = 2 \cdot 2 \cdot 3185 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 637 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$$

$$418275 = 3 \cdot 139425 = 3 \cdot 3 \cdot 46475 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9295 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1859 =$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 169 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13^2$$

Teraz upravíme kanonické rozklady tak, aby oba rozklady mali rovnaké prvočísla.

$$12740 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^0 \cdot 13^1$$

$$418275 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13^2 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \cdot 13^2$$

V rozklade najväčšieho spoločného deliteľa sú tie isté prvočísla, ale s menšími exponentmi a v rozklade najmenšieho spoločného násobku sú tie isté prvočísla, ale s väčšími exponentmi.

$$(12740, 418275) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^1 = 65$$

$$[12740, 418275] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 = 81981900$$

Úloha:

Nájdite najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel 5 120 a 18 225.

Riešenie:

Najprv urobíme kanonický rozklad oboch čísel.

$$5120 = 2^{10} \cdot 5$$

$$18225 = 3^6 \cdot 5^2$$

Teraz upravíme kanonické rozklady tak, aby oba rozklady mali rovnaké prvočísla.

$$5120 = 2^{10} \cdot 5 = 2^{10} \cdot 3^0 \cdot 5^1$$

$$18225 = 3^6 \cdot 5^2 = 2^0 \cdot 3^6 \cdot 5^2$$

V rozklade najväčšieho spoločného deliteľa sú tie isté prvočísla, ale s menšími exponentmi a v rozklade najmenšieho spoločného násobku sú tie isté prvočísla, ale s väčšími exponentmi.

$$(5120, 18225) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 5$$

$$[5120, 18225] = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 = 18662400$$

Úloha:

Nájdite najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17$ a $b = 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23$.

Riešenie:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^0 \cdot 23^0$$

$$3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^1 \cdot 23^1$$

$$(a, b) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$$

$$[a, b] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 23^1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

Rozklad čísla na súčin prvočísel má význam aj pri určovaní počtu kladných deliteľov. Hovorí nám o tom nasledujúca veta.

Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1 s kanonickým rozkladom v tvare $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Potom n má $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$ rôznych kladných deliteľov. Každý z nich má rozklad v tvare $n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, kde $\alpha_1 \geq \beta_1, \alpha_2 \geq \beta_2, \alpha_3 \geq \beta_3, \dots, \alpha_k \geq \beta_k$.

Tvrdenie si vysvetlíme na nasledujúcom príklade.

Číslo 12 má kanonický rozklad v tvare $12 = 2^2 \cdot 3^1$.

Počet jeho deliteľov je teda $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$.

Všetky delitele majú tvar $2^a \cdot 3^b$, kde $a \leq 2, b \leq 1$.

Sú to $1 = 2^0 \cdot 3^0, 2 = 2^1 \cdot 3^0, 4 = 2^2 \cdot 3^0, 3 = 2^0 \cdot 3^1, 6 = 2^1 \cdot 3^1, 12 = 2^2 \cdot 3^1$.

Úloha:

Nájdite kanonický rozklad čísla 60. Pomocou neho určte počet kladných deliteľov čísla 60 a vypíšte ich vrátane ich kanonických rozkladov.

Riešenie:

Číslo 60 má kanonický rozklad v tvare $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Počet jeho deliteľov je teda $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$.

Všetky delitele majú tvar $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, kde $a \leq 2, b \leq 1, c \leq 1$.

Sú to $1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0, 2 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0, 4 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0, 3 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0, 6 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0, 12 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0,$

$5 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1, 10 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1, 20 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1, 15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.