

Prirodzené čísla

Doteraz sme sa vždy uspokojili s tým, že sme pod množinou prirodzených čísel rozumeli množinu $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$. Túto množinu sme chápali intuitívne a presne sme ju nedefinovali.

V nasledujúcich kapitolách si presne zadefinujeme množinu prirodzených čísel. Oboznámime sa s tromi prístupmi: kardinálne čísla, celé nezáporné čísla ako prvky Peanovej množiny a ordinálne čísla.

Keď si už zadefinujeme množinu prirodzených čísel jedným z vyššie uvedených postupov, ukážeme si, ako na takto vybudovanej množine definujeme operácie sčítania a násobenia. Taktiež si ukážeme, že pre takto definované operácie platí komutatívny, asociatívny a distributívny zákon. Napokon si ukážeme, ako definujeme usporiadanie kardinálnych čísel.

Kardinálne čísla

Pri definícii kardinálneho čísla budeme potrebovať pojmy bijektívne zobrazenie a relácie ekvivalencie. Preto si ich najskôr zopakujeme. Ak by sme potrebovali podrobnejšie zopakovanie pojmov, siahneme po vhodnej literatúre (napríklad po elektronickom kurze Binárne relácie). Začneme pojmi surjektívne, injektívne a bijektívne zobrazenie.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Potom množinu $f(A) = \{y \in B; \exists x \in A : y = f(x)\}$ nazývame obor hodnot zobrazenia f .

Ak je relácia f z množiny A do množiny B určená vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom množina $f(A)$ je množinou tých prvkov, ktoré sa vyskytujú v usporiadaných dvojiciach na druhých miestach.

Ak je relácia f z množiny A do množiny B určená vrcholovým grafom, potom množina $f(A)$ je množinou tých prvkov, do ktorých smeruje aspoň jedna šípka.

Poznamenajme, že pri zobrazeniach nekonečných množín nemožno určiť reláciu zobrazenia f z množiny A do množiny B ani vymenovaním usporiadaných dvojíc, ani vrcholovým grafom, ale iba charakteristickou vlastnosťou.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech $f(A) = B$. Potom zobrazenie f nazývame zobrazením množiny A na množinu B . Taktiež hovoríme, že zobrazenie f je surjektívne.

Ako zistíme, či je zobrazenie surjektívne? Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom sa všetky prvky množiny B musia aspoň raz vyskytnúť na druhom mieste v niektorej usporiadanej dvojici.

Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vrcholovým grafom, potom musí ku každému prvku množiny B smerovať aspoň jedna šípka.

Pre počet prvkov konečných množín A a B platí nasledujúce tvrdenie.

Nech f je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech množiny A, B majú konečný počet prvkov. Potom počet prvkov množiny A je väčší alebo rovný počtu prvkov množiny B .

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Potom zobrazenie f nazývame injektívne zobrazenie množiny A do množiny B . Taktiež hovoríme, že zobrazenie f je prosté.

Vysvetlime si znenie definície. Výraz $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ znamená, že pre každé dva rôzne prvky x_1, x_2 množiny A platí, že ich obrazy $f(x_1), f(x_2)$ sú tiež rôzne. Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom sa žiaden prvok množiny B nesmie nachádzať na druhom mieste v dvoch alebo viacerých usporiadaných dvojiciach. Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vrcholovým grafom, potom k žiadnemu prvku množiny B nesmie smerovať viac než jedna šípka.

Pre počet prvkov konečných množín A a B platí nasledujúce tvrdenie.

Nech f je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech množiny A, B majú konečný počet prvkov. Potom počet prvkov množiny A je menší alebo rovný počtu prvkov množiny B .

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Zobrazenie f nazývame bijektívne zobrazenie množiny A do množiny B , ak je injektívne a surjektívne.

Ako teda zistíme, či je zobrazenie f bijektívne? Predpokladajme, že zobrazenie f z množiny A do množiny B je určené vymenovaním usporiadaných dvojíc. Aby bolo injektívne, nesmie sa žiaden prvok množiny B nachádzať na druhom mieste v dvoch alebo viacerých usporiadaných dvojiciach. Aby bolo surjektívne, musí sa každý prvok množiny B nachádzať na druhom mieste aspoň v jednej usporiadanej dvojici. Ak má byť zobrazenie f bijektívne, musí byť aj injektívne, aj surjektívne. To znamená, že každý prvok množiny B sa musí nachádzať na druhom mieste práve v jednej usporiadanej dvojici.

Teraz predpokladajme, že zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vrcholovým grafom. Aby bolo injektívne, nesmie do žiadneho prvkov množiny B smerovať viac ako jedna šípka. Aby bolo surjektívne, musí do každého prvkov množiny B smerovať aspoň jedna šípka. Ak má byť zobrazenie f bijektívne, musí byť aj injektívne, aj surjektívne. To znamená, že do každého prvkov množiny B musí smerovať práve jedna šípka.

Pre počet prvkov konečných množín A a B platí nasledujúce tvrdenie.

Nech f je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech množiny A, B majú konečný počet prvkov. Potom počet prvkov množiny A je rovný počtu prvkov množiny B .

Úloha: Zostrojte bijektívne zobrazenie z množiny $A = \{a, b, c, d\}$ do množiny $B = \{w, x, y, z\}$.

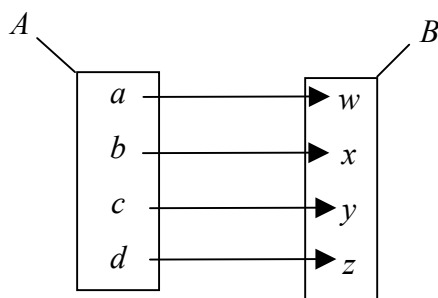
Riešenie:

Nech $f = \{[a, w], [b, x], [c, y], [d, z]\}$ alebo inými slovami

$$f(a) = w, f(b) = x, f(c) = y, f(d) = z.$$

Potom každý prvok množiny B je obsiahnutý na druhom mieste práve v jednej usporiadanej dvojici. Teda zobrazenie f je bijektívne zobrazenie z množiny $A = \{a, b, c, d\}$ do množiny $B = \{w, x, y, z\}$.

Graficky ho môžeme vyjadriť takto:



Teraz si stručne zopakujeme pojem relácie ekvivalencie.

Relácia R definovaná na množine M sa nazýva reláciou ekvivalencie vtedy a len vtedy, ak R je reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia.

Reláciu R definovanú v množine M nazývame:

reflexívnou, ak $\forall x \in M : [x, x] \in R$;

symetrickou, ak $\forall x, y \in M : [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$;

tranzitívnou, ak $\forall x, y, z \in M : [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R$.

Ak máme rozhodnúť, či daná relácia R na množine M je reláciou ekvivalencie, musíme najskôr zistiť, či je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Teraz si vysvetlíme, čo to znamená, ak sú dve množiny ekvivalentné.

Množiny A a B sú ekvivalentné, ak existuje bijektívne zobrazenie množiny A na množinu B . Zapisujeme: $A \sim B$.

Napríklad množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{w, x, y, z\}$ sú ekvivalentné, pretože zobrazenie $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{w, x, y, z\}$ dané vzťahmi $f(a) = w, f(b) = x, f(c) = y, f(d) = z$ je bijektívne zobrazenie z množiny $A = \{a, b, c, d\}$ do množiny $B = \{w, x, y, z\}$.

Ak existuje bijektívne zobrazenie z A do B , potom zrejme existuje aj bijektívne zobrazenie z B do A . Napríklad zobrazenie $g : \{w, x, y, z\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ dané vzťahmi $g(w) = a, g(x) = b, g(y) = c, g(z) = d$ je bijektívne zobrazenie z množiny $B = \{w, x, y, z\}$ do množiny $A = \{a, b, c, d\}$.

Pre počet prvkov konečných množín A a B platí nasledujúce tvrdenie.

Ak sú konečné množiny A a B ekvivalentné, potom majú rovnaký počet prvkov.

Úloha: Ukážte, že množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ sú ekvivalentné.

Riešenie:

Potrebuje nájsť bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

Je to napríklad zobrazenie $f: A \rightarrow B$ dané vzťahmi

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 8, f(5) = 10, f(6) = 12.$$

Toto zobrazenie je bijektívne zobrazenie z množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ do množiny $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, a preto sú množiny A a B ekvivalentné.

Úloha: Ukážte, že množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ sú ekvivalentné.

Riešenie:

Potrebuje nájsť bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

Je to napríklad zobrazenie $f: A \rightarrow B$ dané vzťahmi

$$f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(c) = \chi, f(d) = \delta.$$

Toto zobrazenie je bijektívne zobrazenie z množiny $A = \{a, b, c, d\}$ do množiny $B = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$, a preto sú množiny A a B ekvivalentné.

Teraz sa budeme podrobnejšie venovať relácii $\sim$.

Relácia $\sim$ definovaná na ľubovoľnom systéme množín M je reláciou ekvivalencie.

Už vieme, že na to, aby relácia $\sim$ bola reláciou ekvivalencie, musí byť reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Relácia $\sim$ je reflexívna, pretože každá množina A je ekvivalentná sama so sebou. Identické zobrazenie množiny A do množiny A je totiž bijektívne.

Relácia $\sim$ je symetrická, pretože ak je množina A ekvivalentná s množinou B , potom existuje bijektívne zobrazenie z A do B . Ku každému bijektívnemu zobrazeniu však existuje inverzné zobrazenie, ktoré je bijektívne zobrazenie z B do A . Preto aj množina B je ekvivalentná s množinou A .

Relácia $\sim$ je tranzitívna, pretože ak je množina A ekvivalentná s množinou B a množina B s množinou C , potom existuje bijektívne zobrazenie f z A do B a aj bijektívne zobrazenie g z B do C . Zložené zobrazenie $f \circ g$ je potom bijektívne zobrazenie z A do C a teda množina A je ekvivalentná s množinou C .

Keďže relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie na ľubovoľnom systéme M , určuje nám jeho rozklad na jednotlivé triedy. Do jednej takejto triedy budú patriť všetky jednoprvkové množiny systému M , do druhej triedy všetky dvojprvkové, do tretej triedy všetky trojprvkové atď.

Inými slovami, všetky jednoprvkové množiny sú ekvivalentné, všetky dvojprvkové množiny sú ekvivalentné, všetky trojprvkové množiny sú ekvivalentné, atď.

Pomocou relácie $\sim$ je definovaný aj pojem konečnej a nekonečnej množiny. My si ho uvedieme, ale podrobne sa ním zaoberať nebudeme.

Množina A je nekonečná, ak existuje vlastná podmnožina množiny A , ktorá je s množinou A ekvivalentná.

Množina, ktorá nie je nekonečná, sa nazýva konečná.

Definíciu nekonečnej množiny si vysvetlíme na príklade. Uvažujme ako množinu A množinu všetkých prirodzených čísel a ako množinu B množinu všetkých párnych prirodzených čísel. Zrejme B je vlastná podmnožina množiny A .

Definujme zobrazenie $f: A \rightarrow B$ tak, že $f(a) = 2a$.

Teda $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 8, \dots$

Zrejme f je injektívne aj surjektívne, lebo ak a, b sú dve rôzne prirodzené čísla, potom aj ich dvojnásobky sú rôzne a každé párne číslo $2k$ je obrazom prirodzeného čísla k . Teda f je bijektívne zobrazenie množiny A na jej vlastnú podmnožinu B , z čoho vyplýva, že množiny A a B sú ekvivalentné. Preto A je nekonečná množina.

Úloha: Ukážte, že množina všetkých celých čísel je nekonečná.

Riešenie:

Nech Z je množina všetkých celých čísel a $Z_3 = \{3k; k \in Z\}$. Zrejme Z_3 je vlastná podmnožina množiny Z .

Definujme zobrazenie $f: Z \rightarrow Z_3$ tak, že $f(z) = 3z$.

Teda $\dots, f(-3) = -9, f(-2) = -6, f(-1) = -3, f(0) = 0, f(1) = 3, f(2) = 6, f(3) = 9, \dots$

Zrejme f je injektívne aj surjektívne, lebo ak a, b sú dve rôzne celé čísla, potom aj ich trojnásobky sú rôzne a každé číslo tvaru $3k$ je obrazom celého čísla k . Teda f je bijektívne zobrazenie množiny Z na jej vlastnú podmnožinu Z_3 , z čoho vyplýva, že množiny Z a Z_3 sú ekvivalentné. Preto Z je nekonečná množina.

Pre konečné a nekonečné množiny možno dokázať množstvo viet. Tu si uvedieme niektoré z nich.

Množina, ktorá je ekvivalentná s konečnou množinou, je konečná.

Každá podmnožina konečnej množiny je konečná.

Zjednotenie dvoch konečných množín je konečná množina.

Karteziánsky súčin dvoch konečných množín je konečná množina.

Teraz prejdeme k definícii kardinálneho čísla. Ak máme nejaký systém množín, potom relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie. Ak si v tomto systéme množín vezmeme ľubovoľnú množinu A , potom môžeme nájsť všetky množiny systému, ktoré sú s množinou A ekvivalentné a teda patria s množinou A do jednej triedy rozkladu. Túto triedu rozkladu budeme nazývať kardinálne číslo množiny A a označovať $|A|$.

Nakoľko presné zavedenie pojmu kardinálne číslo výrazne presahuje rámec týchto učebných textov, uspokojíme sa s ich axiomatickým zavedením.

Ku každej množine A existuje práve jedna množina $|A|$, pričom pre každé dve množiny A, B platí:

1. $A \sim |A|$,

2. ak $A \sim B$, potom $|A| = |B|$.

Množinu $|A|$ nazývame kardinálne číslo (množiny A).

Teda:

$$|\{a\}| = |\{b\}| = |\{x\}| = |\{\alpha\}| = |\{\phi\}| = \dots$$

$$|\{a, b\}| = |\{x, y\}| = |\{1, 2\}| = |\{\alpha, \beta\}| = \dots$$

$$|\{a, b, c\}| = |\{x, y, z\}| = |\{1, 2, 3\}| = |\{\alpha, \beta, \chi\}| = \dots$$

Teraz si pomocou pojmu kardinálne číslo zadefinujeme množinu prirodzených čísel.

Kardinálne čísla konečných neprázdnych množín budeme nazývať prirodzenými číslami.

Teda číslom 1 označíme kardinálne číslo množiny $\{a\}$, číslom 2 označíme kardinálne číslo množiny $\{a, b\}$, číslom 3 označíme kardinálne číslo množiny $\{a, b, c\}$, číslom 4 označíme kardinálne číslo množiny $\{a, b, c, d\}$, číslom 5 označíme kardinálne číslo množiny $\{a, b, c, d, e\}$, číslom 6 označíme kardinálne číslo množiny $\{a, b, c, d, e, f\}$, atď.

Teraz si zadefinujeme operáciu sčítania dvoch kardinálnych čísel. Z tejto definície vychádza zavedenie operácie sčítania v pracovných listoch žiakov základných škôl.

Nech $a = |A|$ a $b = |B|$ sú kardinálne čísla dvoch disjunktných množín A a B . Potom $a + b = |A \cup B|$.

Teda súčtom dvoch kardinálnych čísel $a = |A|$ a $b = |B|$ je kardinálne číslo zjednotenia $A \cup B$. Všimnime si, že v definícii súčtu kardinálnych čísel vyžadujeme, aby množiny A a B nemali žiaden spoločný prvok.

Je možné dokázať, že výsledok súčtu kardinálnych čísel a a b nezávisí od výberu reprezentanta. To znamená, že ak by sme si miesto množiny A zvolili množinu C tak, že ich kardinálne čísla by sa rovnali a miesto množiny B množinu D tak, že ich kardinálne čísla by sa rovnali a množiny C a D by nemali spoločný prvok, potom by sa rovnali aj kardinálne čísla množín $A \cup B$ a $C \cup D$. Dôkaz je založený na použití bijektívnych zobrazení a definícii kardinálneho čísla.

Taktiež je možné dokázať, že vždy vieme vybrať takých reprezentantov A a B kardinálnych čísel a a b , že množiny A a B nemajú spoločné prvky.

Ako sme už spomenuli, pri konečných množinách sa kardinálne číslo rovná počtu prvkov množiny. Teda napríklad $2 = |\{a, b\}|$ a $3 = |\{x, y, z\}|$. Ako už iste vieme, $2 + 3 = 5$. Teda súčtom kardinálnych čísel 2 a 3 by malo byť kardinálne číslo 5 – prvkovej množiny. Ak použijeme definíciu súčtu kardinálnych čísel vidíme, že v tomto prípade tomu tak je, nakoľko $2 + 3 = |\{a, b\} \cup \{x, y, z\}| = |\{a, b, x, y, z\}| = 5$.

Teraz si ukážeme, že v predchádzajúcej definícii je veľmi podstatný predpoklad disjunktnosti množín A a B (teda to, že tieto množiny nemajú spoločné prvky).

Nech by to tak nebolo. Nech množina $A = \{a, b\}$ a množina $B = \{a, b, c\}$. Je zrejmé, že kardinálnymi číslami týchto množín sú 2 a 3, pretože množina A má dva prvky a množina B tri prvky. Čo je však zjednotením množín A a B ? Zrejme $A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$. Teda aj kardinálne číslo zjednotenia $A \cup B$ je 3. Potom by však muselo platiť, že $2 + 3 = 3$! Vidíme teda, že požiadavka, aby A a B nemali spoločné prvky, je v definícii súčtu kardinálnych čísel veľmi dôležitá.

Úloha:

Na konkrétnych množinách ilustrujte súčet kardinálnych čísel 4 a 7.

Riešenie:

Uvedomme si, že 4 je kardinálne číslo štvorprvkovej množiny a 7 je kardinálne číslo sedemprvkovej množiny. Naviac potrebujeme, aby tieto množiny boli disjunktné, teda aby nemali spoločné prvky.

Zvoľme si napríklad $4 = |\{a, b, c, d\}|$ a $7 = |\{t, u, v, w, x, y, z\}|$.

Potom $4 + 7 = |\{a, b, c, d\} \cup \{t, u, v, w, x, y, z\}| = |\{a, b, c, d, t, u, v, w, x, y, z\}| = 11$.

Úloha:

Na konkrétnych množinách ilustrujte súčet kardinálnych čísel 5 a 3.

Riešenie:

Uvedomme si, že 5 je kardinálne číslo päťprvkovej množiny a 3 je kardinálne číslo trojprvkovej množiny. Naviac potrebujeme, aby tieto množiny boli disjunktné, teda aby nemali spoločné prvky.

Zvoľme si napríklad $5 = |\{a, b, c, d, e\}|$ a $3 = |\{x, y, z\}|$.

Potom $5 + 3 = |\{a, b, c, d, e\} \cup \{x, y, z\}| = |\{a, b, c, d, e, x, y, z\}| = 8$.

Úloha:

Na konkrétnych množinách ilustrujte dôležitosť predpokladu $A \cap B = \emptyset$ v definícii súčtu kardinálnych čísel.

Riešenie:

Vynechajme tento predpoklad a vypočítajme napríklad $2 + 3$.

Nech $2 = |\{a, b\}|$ a $3 = |\{b, c, d\}|$.

Potom $2 + 3 = |\{a, b\} \cup \{b, c, d\}| = |\{a, b, c, d\}| = 4$!

Teraz si ukážeme, že pre takto definovaný súčet kardinálnych čísel platí komutatívny a asociatívny zákon.

Nech a, b sú kardinálne čísla. Potom $a + b = b + a$.

Dôkaz tohto tvrdenia je pomerne jednoduchý.

Nech a je kardinálne číslo množiny A a b je kardinálne číslo množiny B . Nech množiny A, B nemajú žiadne spoločné prvky.

Potom $a + b = |A \cup B| = |B \cup A| = b + a$. (využili sme poznatok, že operácia zjednotenia dvoch množín je komutatívna)

Nech a, b, c sú kardinálne čísla. Potom $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Aj dôkaz tohto tvrdenia je pomerne jednoduchý.

Nech a je kardinálne číslo množiny A , b je kardinálne číslo množiny B a c je kardinálne číslo množiny C . Nech žiadne dve z množín A, B, C nemajú žiaden spoločný prvok.

Potom $a + (b + c) = |A| + |B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| = (a + b) + c$.

(využili sme poznatok, že operácia zjednotenia dvoch množín je asociatívna)

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť komutatívneho zákona pre súčet kardinálnych čísel.

Riešenie:

Nech $2 = |\{a, b\}|$ a $3 = |\{x, y, z\}|$.

Potom $2 + 3 = |\{a, b\} \cup \{x, y, z\}| = |\{a, b, x, y, z\}|$ a

$3 + 2 = |\{x, y, z\} \cup \{a, b\}| = |\{x, y, z, a, b\}| = |\{a, b, x, y, z\}|$.

Teda $2 + 3 = 3 + 2$.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť asociatívneho zákona pre súčet kardinálnych čísel.

Riešenie:

Nech $2 = |\{a, b\}|$, $3 = |\{x, y, z\}|$, $4 = |\{o, p, q, r\}|$.

Potom:

$2 + (3 + 4) = |\{a, b\}| + |\{x, y, z\} \cup \{o, p, q, r\}| = |\{a, b\}| + |\{x, y, z, o, p, q, r\}| = |\{a, b, x, y, z, o, p, q, r\}|$

a

$(2 + 3) + 4 = |\{a, b\} \cup \{x, y, z\}| + |\{o, p, q, r\}| = |\{a, b, x, y, z\}| + |\{o, p, q, r\}| = |\{a, b, x, y, z, o, p, q, r\}|$

Teda $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$.

Teraz si zadefinujeme operáciu násobenia dvoch kardinálnych čísel.

Nech $a = |A|$ a $b = |B|$ sú kardinálne čísla množín A a B . Potom $a \cdot b = |A \times B|$.

Teda súčinom dvoch kardinálnych čísel $a = |A|$ a $b = |B|$ je kardinálne číslo karteziánskeho súčinu $A \times B$. Všimnime si, že v definícii súčinu kardinálnych čísel nevyžadujeme, aby množiny A a B boli disjunktné.

Je možné dokázať, že výsledok súčinu kardinálnych čísel a a b nezávisí od výberu reprezentanta. To znamená, že ak by sme si miesto množiny A zvolili množinu C tak, že ich kardinálne čísla by sa rovnali a miesto množiny B množinu D tak, že ich kardinálne čísla by sa rovnali, potom by sa rovnali aj kardinálne čísla množín $A \times B$ a $C \times D$. Dôkaz je založený na použití bijektívnych zobrazení a definícii kardinálneho čísla.

Ako sme už viackrát spomenuli, pri konečných množinách sa kardinálne číslo rovná počtu prvkov množiny. Teda napríklad $2 = |\{a, b\}|$ a $3 = |\{x, y, z\}|$. Ako už iste vieme, $2 \cdot 3 = 6$. Teda súčinom kardinálnych čísel 2 a 3 by malo byť kardinálne číslo 6 – prvkovej množiny. Ak použijeme definíciu súčinu kardinálnych čísel vidíme, že v tomto prípade tomu tak je, nakoľko $2 \cdot 3 = |\{a, b\} \times \{x, y, z\}| = |\{[a, x], [a, y], [a, z], [b, x], [b, y], [b, z]\}| = 6$.

Teraz si ukážeme, že v definícii súčinu nie je potrebný predpoklad disjunktnosti množín A a B (teda to, že tieto množiny nemajú spoločné prvky).

Nech množina $A = \{a, b\}$ a množina $B = \{a, b, c\}$. Je zrejmé, že kardinálnymi číslami týchto množín sú 2 a 3, pretože množina A má dva prvky a množina B tri prvky. Potom $2 \cdot 3 = |\{a, b\} \times \{a, b, c\}| = |\{[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c]\}| = 6$. Vidíme teda, že požiadavka, aby A a B nemali spoločné prvky, nie je v definícii súčinu kardinálnych čísel potrebná.

Úloha:

Na konkrétnych množinách ilustrujte súčin kardinálnych čísel 4 a 1.

Riešenie:

Uvedomme si, že 4 je kardinálne číslo štvorprvkovej množiny a 1 je kardinálne číslo jednoprvkovej množiny.

Zvoľme si napríklad $4 = |\{a, b, c, d\}|$ a $1 = |\{a\}|$.

Potom $4 \cdot 1 = |\{a, b, c, d\} \times \{a\}| = |\{[a, a], [b, a], [c, a], [d, a]\}| = 4$.

Úloha:

Na konkrétnych množinách ilustrujte súčin kardinálnych čísel 5 a 3.

Riešenie:

Uvedomme si, že 5 je kardinálne číslo päťprvkovej množiny a 3 je kardinálne číslo trojprvkovej množiny.

Zvoľme si napríklad $5 = |\{a, b, c, d, e\}|$ a $3 = |\{x, y, z\}|$.

Potom

$$5 \cdot 3 = |\{a, b, c, d, e\} \times \{x, y, z\}| = \left| \begin{array}{l} [a, x], [a, y], [a, z], [b, x], [b, y], [b, z], [c, x], [c, y], [c, z], \\ [d, x], [d, y], [d, z], [e, x], [e, y], [e, z] \end{array} \right| = 15.$$

Teraz si ukážeme, že pre takto definovaný súčet a súčin kardinálnych čísel platí komutatívny, asociatívny a distributívny zákon.

Nech a, b sú kardinálne čísla. Potom $a \cdot b = b \cdot a$.

Dôkaz tohto tvrdenia je pomerne jednoduchý.

Nech a je kardinálne číslo množiny A a b je kardinálne číslo množiny B .

Potom $a \cdot b = |A \times B| = |B \times A| = b \cdot a$.

Využili sme poznatok, že množiny $A \times B$ a $B \times A$ sú ekvivalentné („majú rovnaký počet prvkov“) a teda ich kardinálne čísla sa rovnajú.

Ekvivalencia množín $A \times B$ a $B \times A$ vyplýva z toho, že zobrazenie $f: A \times B \rightarrow B \times A$ určené predpisom $f([x, y]) = [y, x]$ je bijektívne.

Nech a, b, c sú kardinálne čísla. Potom $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Dôkaz tohto tvrdenia by sa zakladal na podobnom princípe, ako to bolo v prípade komutatívnosti súčinu kardinálnych čísel.

Nech a, b, c sú kardinálne čísla. Potom:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Dôkaz tohto tvrdenia by sa zakladal na podobnom princípe, ako to bolo v prípade komutatívnosti súčinu kardinálnych čísel.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť komutatívneho zákona pre súčin kardinálnych čísel.

Riešenie:

Nech $2 = |\{a, b\}|$ a $3 = |\{x, y, z\}|$.

Potom $2 \cdot 3 = |\{a, b\} \times \{x, y, z\}| = |\{[a, x], [a, y], [a, z], [b, x], [b, y], [b, z]\}| = 6$ a

$3 \cdot 2 = |\{x, y, z\} \times \{a, b\}| = |\{[x, a], [x, b], [y, a], [y, b], [z, a], [z, b]\}| = 6$. Teda $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť asociatívneho zákona pre súčin kardinálnych čísel.

Riešenie:

Nech $2 = |\{a, b\}|$, $3 = |\{a, b, c\}|$, $1 = |\{a\}|$.

Potom:

$$(2 \cdot 3) \cdot 1 = |\{a, b\} \times \{x, y, z\}| \cdot |\{a\}| = |\{[a, x], [a, y], [a, z], [b, x], [b, y], [b, z]\}| \cdot |\{a\}| =$$

$$|\{[a, x], [a, y], [a, z], [b, x], [b, y], [b, z]\} \times \{a\}| =$$

$$|\{[[a, x], a], [[a, y], a], [[a, z], a], [[b, x], a], [[b, y], a], [[b, z], a]\}| = 6$$

$$2 \cdot (3 \cdot 1) = |\{a, b\}| \cdot |\{x, y, z\} \times \{a\}| = |\{a, b\}| \cdot |\{[x, a], [y, a], [z, a]\}| =$$

$$|\{a, b\} \times \{[x, a], [y, a], [z, a]\}| =$$

$$|\{[a, [x, a]], [a, [y, a]], [a, [z, a]], [b, [x, a]], [b, [y, a]], [b, [z, a]]\}| = 6$$

Teda $(2 \cdot 3) \cdot 1 = 2 \cdot (3 \cdot 1)$.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť jedného z distributívnych zákonov pre súčet a súčin kardinálnych čísel.

Riešenie:

Nech $2 = |\{a, b\}|$, $3 = |\{x, y, z\}|$, $1 = |\{o\}|$.

Potom:

$$(2+3) \cdot 1 = |\{a, b\} \cup \{x, y, z\}| \cdot |\{o\}| = |\{a, b, x, y, z\}| \cdot |\{o\}| = |\{a, b, x, y, z\} \times \{o\}| = \\ |\{[a, o], [b, o], [x, o], [y, o], [z, o]\}| = 5$$

$$(2 \cdot 1) + (3 \cdot 1) = |\{a, b\} \times \{o\}| + |\{x, y, z\} \times \{o\}| = |\{[a, o], [b, o]\}| + |\{[x, o], [y, o], [z, o]\}| = \\ = |\{[a, o], [b, o]\} \cup \{[x, o], [y, o], [z, o]\}| = |\{[a, o], [b, o], [x, o], [y, o], [z, o]\}| = 5$$

Teda $(2+3) \cdot 1 = (2 \cdot 1) + (3 \cdot 1)$.

Teraz si ukážeme, ako možno definovať ostré a neostré usporiadanie kardinálnych čísel.

Nech a, b sú kardinálne čísla množín A a B . Kardinálne číslo a je menšie alebo sa rovná kardinálnemu číslu b , ak množina A je ekvivalentná s nejakou podmnožinou množiny B .

Voľne povedané, kardinálne číslo a množiny A je menšie alebo sa rovná kardinálnemu číslu b množiny B , ak v množine B vieme nájsť takú podmnožinu, ktorá má presne toľko prvkov ako množina A .

Vysvetlime si to na príklade. Už vieme, že $3 \leq 5$. Taktiež vieme, že $3 = |A| = |\{a, b, c\}|$ a $5 = |B| = |\{v, w, x, y, z\}|$.

Vezmime si podmnožinu $\{x, y, z\}$ množiny $\{v, w, x, y, z\}$. Zrejme zobrazenie $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{x, y, z\}$ dané vzťahmi $f(a) = x, f(b) = y, f(c) = z$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{a, b, c\}$ na množinu $\{x, y, z\}$ a teda tieto dve množiny sú ekvivalentné. Preto v súlade s definíciou platí $3 \leq 5$.

Nech a, b sú kardinálne čísla množín A a B . Kardinálne číslo a je menšie ako kardinálne číslo b , ak množina A je ekvivalentná s nejakou podmnožinou množiny B , ale nie je ekvivalentná s množinou B .

Voľne povedané, kardinálne číslo a množiny A je menšie ako kardinálne číslo b množiny B , ak v množine B vieme nájsť takú podmnožinu, ktorá má presne toľko prvkov ako množina A , ale množina B nemá presne toľko prvkov ako množina A .

Vysvetlime si to na príklade. Už vieme, že $3 < 5$. Taktiež vieme, že $3 = |A| = |\{a, b, c\}|$ a $5 = |B| = |\{v, w, x, y, z\}|$.

Vezmime si podmnožinu $\{x, y, z\}$ množiny $\{v, w, x, y, z\}$. Zrejme zobrazenie $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{x, y, z\}$ dané vzťahmi $f(a) = x, f(b) = y, f(c) = z$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{a, b, c\}$ na množinu $\{x, y, z\}$ a teda tieto dve množiny sú ekvivalentné.

Vieme, že neexistuje žiadne bijektívne zobrazenie z trojprvkovej do päťprvkovej množiny. Preto v súlade s definíciou platí $3 < 5$.

Úloha:

Určte, ktoré z kardinálnych čísel a, b je menšie, ak $a = |\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}|$ a $b = |\{s, t, u, v, w, x, y, z\}|$.

Riešenie:

Vezmime si podmnožinu $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ množiny $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. Zrejme zobrazenie $f: \{s, t, u, v, w, x, y, z\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dané vzťahmi $f(s) = a, f(t) = b, f(u) = c, f(v) = d, f(w) = e, f(x) = f, f(y) = g, f(z) = h$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{s, t, u, v, w, x, y, z\}$ na podmnožinu množiny $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$.

Preto $b \leq a$.

Nakoľko neexistuje bijektívne zobrazenie z množiny $\{s, t, u, v, w, x, y, z\}$ na množinu $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, platí $b < a$.

Teraz si uvedieme niekoľko vzťahov platiacich pre súčet, súčin a usporiadanie kardinálnych čísel. Mnohé už poznáme ako známe vlastnosti prirodzených čísel.

Nech a, b, c sú kardinálne čísla. Potom platí:

Ak $a < b$, potom $a + c \leq b + c$.

Ak $a < b$, potom $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Ak $a < b$, potom existuje také kardinálne číslo x , že $a + x = b$.

Ak $a + b = c$, potom $a \leq c, b \leq c$.

Uvedené tvrdenia nebudeme dokazovať, ale si ich ilustrujeme na nasledujúcich úlohách.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť tvrdenia „Ak a, b, c sú kardinálne čísla a $a < b$, potom $a + c \leq b + c$ “.

Riešenie:

Zvoľme si $a = |\{a, b, c\}|, b = |\{w, x, y, z\}|, c = |\{o, p\}|$.

Pretože zobrazenie $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{x, y, z\}$ dané vzťahmi $f(a) = x, f(b) = y, f(c) = z$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{a, b, c\}$ na vlastnú podmnožinu množiny $\{w, x, y, z\}$, je $a < b$.

Vypočítame súčty $a + c$ a $b + c$.

$a + c = |\{a, b, c\} \cup \{o, p\}| = |\{a, b, c, o, p\}|, b + c = |\{w, x, y, z\} \cup \{o, p\}| = |\{w, x, y, z, o, p\}|$

Pretože zobrazenie $g: \{a, b, c, o, p\} \rightarrow \{x, y, z, o, p\}$ dané vzťahmi $g(a) = x, g(b) = y, g(c) = z, g(o) = o, g(p) = p$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{a, b, c, o, p\}$ na podmnožinu množiny $\{w, x, y, z, o, p\}$, je $a + c \leq b + c$.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť tvrdenia „Ak a, b, c sú kardinálne čísla a $a < b$, potom $a \cdot c \leq b \cdot c$ “.

Riešenie:

Zvoľme si $a = |\{w, x\}|, b = |\{a, b, c\}|, c = |\{o, p\}|$.

Pretože zobrazenie $f: \{w, x\} \rightarrow \{a, b\}$ dané vzťahmi $f(w) = a, f(x) = b$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{w, x\}$ na vlastnú podmnožinu množiny $\{a, b, c\}$, je $a < b$.

Vypočítame súčiny $a \cdot c$ a $b \cdot c$.

$$a \cdot c = |\{w, x\} \times \{o, p\}| = |\{[w, o], [w, p], [x, o], [x, p]\}|$$

$$b \cdot c = |\{a, b, c\} \times \{o, p\}| = |\{[a, o], [a, p], [b, o], [b, p], [c, o], [c, p]\}|$$

Pretože zobrazenie $g: \{[w, o], [w, p], [x, o], [x, p]\} \rightarrow \{[a, o], [a, p], [b, o], [b, p]\}$ dané vzťahmi $g([w, o]) = [a, o], g([w, p]) = [a, p], g([x, o]) = [b, o], g([x, p]) = [b, p]$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{[w, o], [w, p], [x, o], [x, p]\}$ na podmnožinu množiny $\{[a, o], [a, p], [b, o], [b, p], [c, o], [c, p]\}$, je $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť tvrdenia „Ak a, b sú kardinálne čísla a $a < b$, potom existuje také kardinálne číslo x , že $a + x = b$ “.

Riešenie:

Zvoľme si $a = |\{i, j, k\}|, b = |\{p, q, r, s\}|$.

Zrejme a je kardinálne číslo trojprvkovej množiny a b je kardinálne číslo štvorprvkovej množiny. Preto si x zvolíme ako kardinálne číslo jednoprvkovej množiny. Nech teda $x = |\{o\}|$.

Vypočítame súčet $a + x$.

$$a + x = |\{i, j, k\} \cup \{o\}| = |\{i, j, k, o\}|$$

Pretože zobrazenie $f: \{i, j, k, o\} \rightarrow \{p, q, r, s\}$ dané vzťahmi $f(i) = p, f(j) = q, f(k) = r, f(o) = s$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{i, j, k, o\}$ na množinu $\{p, q, r, s\}$, sú tieto množiny ekvivalentné a teda ich kardinálne čísla sú rovnaké. Preto $a + x = b$.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte platnosť tvrdenia „Ak a, b, c sú kardinálne čísla a $a + b = c$, potom $a \leq c, b \leq c$ “.

Riešenie:

Z minulej úlohy vieme, že $|\{i, j, k\}| + |\{o\}| = |\{p, q, r, s\}|$.

Označme $a = |\{i, j, k\}|, b = |\{o\}|, c = |\{p, q, r, s\}|$.

Pretože zobrazenie $f: \{i, j, k\} \rightarrow \{p, q, r\}$ dané vzťahmi $f(i) = p, f(j) = q, f(k) = r$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{i, j, k\}$ na podmnožinu množiny $\{p, q, r, s\}$, je $a \leq c$.

Pretože zobrazenie $g: \{o\} \rightarrow \{s\}$ dané vzťahmi $g(o) = s$ je bijektívne zobrazenie množiny $\{o\}$ na podmnožinu množiny $\{p, q, r, s\}$, je $b \leq c$.

V závere ešte pripomeňme, že sme prirodzené čísla definovali ako kardinálne čísla konečných neprázdnych množín, a teda nie všetkých množín. Aritmetika kardinálnych čísel nekonečných množín sa značne odlišuje od aritmetiky kardinálnych čísel konečných množín, preto pri vyslovovaní všeobecných tvrdení o kardinálnych číslach musíme byť opatrní a automaticky neprenášať naše skúsenosti z prirodzených čísel na kardinálne. Napríklad tvrdenie „Ak $a < b$, potom $a + c < b + c$.“ pre ľubovoľné kardinálne čísla a, b, c neplatí, hoci pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b, c platí.

Celé nezáporné čísla ako prvky Peanovej množiny

V predchádzajúcej kapitole sme si pomocou kardinálnych čísel vybudovali množinu prirodzených čísel. Definovali sme na nej operácie sčítania a násobenia a reláciu usporiadania, ktoré mali vlastnosti, na ktoré sme pri sčítaní, násobení a usporiadaní prirodzených čísel zvyknutí.

Prirodzené čísla sa dajú vybudovať aj inými spôsobmi ako pomocou kardinálnych čísel. V nasledujúcej časti si ukážeme, ako možno vybudovať množinu prirodzených čísel rozšírenú o nulu pomocou prvkov Peanovej množiny. Tento postup je založený na známej vlastnosti, že každé prirodzené číslo má práve jedného nasledovníka. Taktiež si ukážeme, ako na takto vybudovanej množine definujeme operácie sčítania a násobenia a reláciu usporiadania.

Začneme príkladom.

Najskôr uvažujme prázdnu množinu. Označme ju $A_0 = \emptyset$. Neskôr nám bude reprezentovať číslo 0.

Teraz by sme chceli vybudovať jednoprvkovú množinu, ktorá by nám neskôr reprezentovala číslo 1. Urobíme to tak, že jej prvkom bude množina A_0 . Teda $A_1 = \{\emptyset\} = \{A_0\}$.

Teraz by sme chceli vybudovať dvojprvkovú množinu, ktorá by nám neskôr reprezentovala číslo 2. Urobíme to tak, že k prvkom množiny A_1 pridáme množinu A_1 . Teda $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{A_0, A_1\}$.

Teraz by sme chceli vybudovať trojprvkovú množinu, ktorá by nám neskôr reprezentovala číslo 3. Urobíme to tak, že k prvkom množiny A_2 pridáme množinu A_2 . Teda $A_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{A_0, A_1, A_2\}$.

Podobne vybudujeme štvorprvkovú množinu $A_4 = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, päťprvkovú množinu $A_5 = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$, šesťprvkovú množinu $A_6 = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, sedemprvkovú množinu $A_7 = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, atď.

Poznatok z predchádzajúceho príkladu si zhrnieme vo forme definície.

Množinu $X' = X \cup \{X\}$ nazývame nasledovníkom množiny X .

V predchádzajúcom príklade bola množina A_1 nasledovníkom množiny A_0 , množina A_2 bola nasledovníkom množiny A_1 , množina A_3 bola nasledovníkom množiny A_2 , množina A_4 bola nasledovníkom množiny A_3 , množina A_5 bola nasledovníkom množiny A_4 , atď.

Všimnime si, že:

1. každá množina X je prvkom jej nasledovníka X' , t.j. $X \in X'$,
2. každá množina X je podmnožinou jej nasledovníka X' , t.j. $X \subset X'$,
3. ak nejaká množina Y je prvkom nasledovníka množiny X , potom $Y = X$ alebo Y je prvkom X .

Podľa definície nasledovníka množiny platí:

$$A'_0 = \emptyset' = \{\emptyset\},$$

$$A'_1 = \{\emptyset\}' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$A'_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}' = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$

$$A'_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}' = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$$

Namiesto A_0 píšme 0, namiesto A_1 píšme 1, Namiesto A_2 píšme 2, atď.

Potom:

$$0 = \emptyset,$$

$$1 = 0' = \{0\},$$

$$2 = 1' = \{0, 1\},$$

$$3 = 2' = \{0, 1, 2\},$$

$$4 = 3' = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Voľne povedané, číslo 0 reprezentuje prázdna množina, číslo 1 reprezentuje množina s jedným prvkom, číslo 2 reprezentuje množina s dvoma prvkami, číslo 3 reprezentuje množina s tromi prvkami, číslo 4 reprezentuje množina so štyrmi prvkami atď.

Možno však takto pokračovať až do „nekonečna“? To nevieme dokázať ani vyvrátiť. Preto použijeme nasledujúcu axiomu.

Existuje taká množina A , ktorá obsahuje prvok 0 a s každým svojim prvkom X obsahuje aj jeho nasledovníka X' .

Množinu z tejto axiomy nazveme indukčnou. Teda:

Množina A sa nazýva indukčná, ak:

1. $\emptyset \in A$, t.j. $0 \in A$,
2. Ak $X \in A$, potom $X' \in A$.

Množinu celých nezáporných čísel vybudujeme pomocou nasledujúcej vety a definície. Z dôvodu náročnosti nebudeme uvádzať dôkaz vety.

Existuje indukčná množina N_0 taká, že pre každú indukčnú množinu A platí $N_0 \subset A$. Prvky tejto množiny N_0 nazývame nezáporné celé čísla.

Tým sme vybudovali množinu celých nezáporných čísel.

Charakteristické vlastnosti množiny všetkých celých nezáporných čísel môžeme zhrnúť do **piatich Peanových axiom**.

(P₁) $0 \in N_0$,
 (P₂) Ak $n \in N_0$, potom $n' \in N_0$.
 (P₃) Ak $n \in N_0$, potom $n' \neq 0$.
 (P₄) Ak $m, n \in N_0$ a $m' = n'$, potom $m = n$.
 (P₅) Ak $S \subset N_0, 0 \in S$ a ak z podmienky $n \in S$ vyplýva $n' \in S$, potom $S = N_0$.

Axioma P₁ nám hovorí, že nula patrí do množiny celých nezáporných čísel.

Axioma P₂ nám hovorí, že nasledovníkom ľubovoľného celého nezáporného čísla je opäť celé nezáporné číslo.

Axioma P₃ nám hovorí, že nula nie je nasledovníkom žiadneho celého nezáporného čísla.

Axioma P₄ nám hovorí, že ak sa dve celé nezáporné čísla rovnajú, potom sa rovnajú aj ich predchodcovia. Inak povedané, dve rôzne celé nezáporné čísla majú rôznych nasledovníkov.

Axioma P₅ nám hovorí, že ak nejaká množina S obsahuje nulu a pre všetky svoje prvky obsahuje aj ich nasledovníkov, potom S je množinou všetkých celých nezáporných čísel. Na tejto axiome je založený dôkaz matematickou indukciou.

Všetky Peanove axiomy majú dôležitý význam v budovaní celých nezáporných čísel a nemožno z nich žiadnu vynechať.

Ukážeme si, že napríklad zvyškové triedy modulo 5, s ktorými sme sa už stretli ako s poľom $(Z_5, \oplus, \odot)$, spĺňajú axiomy P₁, P₂, P₄, P₅, ale nespĺňajú axiomu P₃.

Nech 1 je nasledovníkom 0, 2 je nasledovníkom 1, 3 je nasledovníkom 2, 4 je nasledovníkom 3 a 0 je nasledovníkom 4.

Všimnime si, že potom množina $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ spĺňa axiomy P₁, P₂, P₄, P₅. Skutočne, táto množina obsahuje nulu a nasledovníkom ľubovoľného jej prvku je opäť jej prvok. Taktiež každé dva jej rôzne prvky majú rôznych nasledovníkov. Ak nejaká množina S obsahuje nulu a pre všetky svoje prvky obsahuje aj ich nasledovníkov, potom $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Množina $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ však nespĺňa axiomu P₃, nakoľko nula je nasledovníkom 4.

Vidíme teda, že axiomu P₃ má pri budovaní množiny celých nezáporných čísel veľký význam. Podobne by sme mohli poukázať aj na význam ostatných axiom.

Dôsledkom Peanových axiom sú aj nasledujúce tri tvrdenia.

Nech x a y sú celé nezáporné čísla. Potom:

1. Ak $x \neq y$, potom $x' \neq y'$.

2. $x \neq x'$.

3. Ak $x \neq 0$, potom existuje jediné celé nezáporné číslo z , že $z' = x$.

Prvé tvrdenie nám hovorí, že dve rôzne celé nezáporné čísla majú rôznych nasledovníkov.

Druhé tvrdenie nám hovorí, že žiadne celé nezáporné číslo nie je nasledovníkom samého seba.

Tretie tvrdenie nám hovorí, že každé celé nezáporné číslo rôzne od nuly má práve jedného predchodcu.

Keď už máme vybudovanú množinu celých nezáporných čísel, budeme na nej definovať operácie sčítania a násobenia a reláciu usporiadania. Začneme definíciou sčítania.

Nech x a y sú celé nezáporné čísla. Potom:

1. $x + 0 = x$,

2. $x + y' = (x + y)'$.

Pomocou tejto definície teraz vypočítame nasledujúce súčty:

$$3 + 0 = 3$$

$$3 + 1 = 3 + 0' = (3 + 0)' = 3' = 4$$

$$3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)' = 4' = 5$$

$$3 + 3 = 3 + 2' = (3 + 2)' = 5' = 6$$

$$3 + 4 = 3 + 3' = (3 + 3)' = 6' = 7$$

Vidíme, že takto definovaný súčet je v zhode s tým, na čo sme pri sčítaní celých nezáporných čísel už zvyknutí.

Úloha:

Pomocou definície súčtu celých nezáporných čísel vypočítajte $7+4$.

Riešenie:

$$7 + 0 = 7$$

$$7 + 1 = 7 + 0' = (7 + 0)' = 7' = 8$$

$$7 + 2 = 7 + 1' = (7 + 1)' = 8' = 9$$

$$7 + 3 = 7 + 2' = (7 + 2)' = 9' = 10$$

$$7 + 4 = 7 + 3' = (7 + 3)' = 10' = 11$$

alebo

$$\begin{aligned} 7 + 4 &= 7 + 3' = (7 + 3)' = (7 + 2')' = ((7 + 2)')' = ((7 + 1')')' = (((7 + 1)')')')' = (((7 + 0')')')')' = \\ &= (((((7 + 0)')')')')')')' = ((((((7)')')')')')')')' = ((((((8)')')')')')')')' = (((((((9)')')')')')')')' = (((((((10)')')')')')')')' = 11 \end{aligned}$$

Teraz si bez dôkazu uvedieme dôležité vlastnosti takto definovaného súčtu celých nezáporných čísel.

Nech x, y, z sú celé nezáporné čísla. Potom:

1. $x + 0 = x, 0 + x = x,$

2. $y' + x = (x + y)',$

3. $y' + x = y + x',$

4. $x + y = y + x,$

5. $x + (y + z) = (x + y) + z,$

6. Ak $x + z = y + z$, potom $x = y$.

Prvé tvrdenie nám vraví, že 0 je neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie celých nezáporných čísel. Štvrté a piate tvrdenie nám vravia, že pre sčítanie celých nezáporných čísel platí komutatívny a asociatívny zákon. Šieste tvrdenie sa nám podobá na zákon o krátení v grupe.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte, že nula je neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie celých nezáporných čísel.

Riešenie:

Ukážeme napríklad, že $3 + 0 = 3 = 0 + 3$.

$$3 + 0 = 3$$

a

$$0 + 3 = 0 + 2' = (0 + 2)' = (0 + 1')' = ((0 + 1)')' = ((0 + 0')')' = (((0 + 0)')')')' = ((0')')' = (1')' = 2' = 3$$

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte, že operácia sčítania je na množine celých nezáporných čísel komutatívna.

Riešenie:

Ukážeme napríklad, že $3 + 2 = 2 + 3$.

$$3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)' = (3 + 0')' = ((3 + 0)')' = (3')' = 4' = 5$$

a

$$2 + 3 = 2 + 2' = (2 + 2)' = (2 + 1')' = ((2 + 1)')' = ((2 + 0')')' = (((2 + 0)')')')' = ((2')')' = (3')' = 4' = 5$$

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte, že operácia sčítania je na množine celých nezáporných čísel asociatívna.

Riešenie:

Ukážeme napríklad, že $3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1$.

Najprv vypočítame výrazy v zátvorkách.

$$2 + 1 = 2 + 0' = (2 + 0)' = 2' = 3$$

$$3+2=3+1'=(3+1)'=(3+0')'=\left((3+0)'\right)'=\left((3)'\right)'=4'=5$$

Teraz vypočítame $3+(2+1)$ a $(3+2)+1$.

$$3+(2+1)=3+3=3+2'=(3+2)'=(3+1')'=\left((3+1)'\right)'=\left((3+0')'\right)'=\left(\left((3+0)'\right)'\right)'=\left(\left(3'\right)'\right)'=\left(4'\right)'=5'=6$$

$$(3+2)+1=5+1=5+0'=(5+0)'=5'=6$$

Teraz si zadefinujeme na množine celých nezáporných čísel operáciu násobenia. Opäť začneme definíciou.

Nech x a y sú celé nezáporné čísla. Potom:

1. $x \cdot 0 = 0$,
2. $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Pomocou tejto definície teraz vypočítame nasledujúce súčiny (už vieme, ako by sme vypočítali súčty):

$$3 \cdot 0 = 0$$

$$3 \cdot 1 = 3 \cdot 0' = 3 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$3 \cdot 3 = 3 \cdot 2' = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot 3' = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$$

Vidíme, že takto definovaný súčin je v zhode s tým, na čo sme pri násobení celých nezáporných čísel už zvyknutí.

Úloha:

Pomocou definície súčinu celých nezáporných čísel vypočítajte $7 \cdot 4$.

Riešenie:

$$7 \cdot 0 = 0$$

$$7 \cdot 1 = 7 \cdot 0' = 7 \cdot 0 + 7 = 0 + 7 = 7$$

$$7 \cdot 2 = 7 \cdot 1' = 7 \cdot 1 + 7 = 7 + 7 = 14$$

alebo

$$7 \cdot 4 = 7 \cdot 3' = 7 \cdot 3 + 7 = 7 \cdot 2' + 7 = 7 \cdot 2 + 7 + 7 = 7 \cdot 1' + 7 + 7 = 7 \cdot 1 + 7 + 7 + 7 =$$

$$7 \cdot 0' + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 0 + 7 + 7 + 7 + 7 = 0 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$$

Všimnime si, že násobenie je vlastne definované ako opakované sčítanie.

Teraz si bez dôkazu uvedieme dôležité vlastnosti takto definovaného súčtu a súčinu celých nezáporných čísel.

Nech x, y, z sú celé nezáporné čísla. Potom:

- | | |
|--|--|
| 1. $x \cdot 0 = 0, 0 \cdot x = 0, x \cdot 1 = x, 1 \cdot x = x,$ | 5. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$ |
| 2. $y' \cdot x = y \cdot x + x,$ | 6. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$ |
| 3. $x \cdot y = y \cdot x,$ | 7. Ak $x \cdot y = 0$, potom $x = 0$ alebo $y = 0$. |
| 4. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$ | 8. Ak $x \cdot z = y \cdot z$ a $z \neq 0$, potom $x = y$. |

Prvé tvrdenie nám vraví, že 0 je agresívny prvok vzhľadom na násobenie celých nezáporných čísel a 1 je neutrálny prvok vzhľadom na násobenie celých nezáporných čísel. Tretie a štvrté tvrdenie nám vravia, že pre násobenie celých nezáporných čísel platí komutatívny a asociatívny zákon. Piate a šieste tvrdenie sú distributívnymi zákonmi pre sčítanie a násobenie celých nezáporných čísel. Siedme tvrdenie nám vraví, že v množine celých nezáporných čísel nie sú netriviálne delitele nuly. Ôsme tvrdenie sa nám podobá na zákon o krátení v grupe.

Z uvedených vlastností vyplýva, že množina $(N_0, +, \cdot)$ tvorí polokruh.

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte, že nula je agresívny prvok vzhľadom na násobenie celých nezáporných čísel.

Riešenie:

Ukážeme napríklad, že $3 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 3$.

$$3 \cdot 0 = 0$$

a

$$0 \cdot 3 = 0 \cdot 2' = 0 \cdot 2 + 0 = 0 \cdot 1' + 0 = 0 \cdot 1 + 0 + 0 = 0 \cdot 0' + 0 + 0 = 0 \cdot 0 + 0 + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte, že jednotka je neutrálny prvok vzhľadom na násobenie celých nezáporných čísel.

Riešenie:

Ukážeme napríklad, že $3 \cdot 1 = 3 = 1 \cdot 3$.

$$3 \cdot 1 = 3 \cdot 0' = 3 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$$

a

$$1 \cdot 3 = 1 \cdot 2' = 1 \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 1' + 1 = 1 \cdot 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 0' + 1 + 1 = 1 \cdot 0 + 1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte, že operácia násobenia je na množine celých nezáporných čísel komutatívna.

Riešenie:

Ukážeme napríklad, že $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$.

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 \cdot 0' + 3 = 3 \cdot 0 + 3 + 3 = 0 + 3 + 3 = 3 + 3 = 6$$

a

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2' = 2 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 1' + 2 = 2 \cdot 1 + 2 + 2 = 2 \cdot 0' + 2 + 2 = 2 \cdot 0 + 2 + 2 + 2 = 0 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

Úloha:

Na konkrétnom príklade ilustrujte, že operácia násobenia je na množine celých nezáporných čísel asociatívna.

Riešenie:

Ukážeme napríklad, že $5 \cdot (3 \cdot 2) = (5 \cdot 3) \cdot 2$.

Najprv vypočítame výrazy v zátvorkách.

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 \cdot 0' + 3 = 3 \cdot 0 + 3 + 3 = 0 + 3 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$5 \cdot 3 = 5 \cdot 2' = 5 \cdot 2 + 5 = 5 \cdot 1' + 5 = 5 \cdot 1 + 5 + 5 = 5 \cdot 0' + 5 + 5 = 5 \cdot 0 + 5 + 5 + 5 = 0 + 5 + 5 + 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

Teraz vypočítame $5 \cdot (3 \cdot 2)$ a $(5 \cdot 3) \cdot 2$.

$$5 \cdot (3 \cdot 2) = 5 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

$$(5 \cdot 3) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 15 + 15 = 30$$

Napokon si na množine celých nezáporných čísel zadefinujeme reláciu usporiadania. Začneme definíciou.

Nech x a y sú celé nezáporné čísla. Potom:

1. $x \leq y$ vtedy a len vtedy, ak existuje celé nezáporné číslo t , pre ktoré $x + t = y$,
2. $x < y$ vtedy a len vtedy, keď $x \leq y$ a $x \neq y$.

Teraz ukážeme, že $3 < 5$.

Počítajme:

$$3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)' = (3 + 0')' = ((3 + 0)')' = (3')' = 4' = 5.$$

Vidíme, že existuje celé nezáporné číslo t (v tomto prípade číslo 2), že $3 + t = 5$. Teda podľa definície $3 \leq 5$.

Nakoľko $3 \neq 5$, platí aj $3 < 5$.

Úloha:

Pomocou definície relácie usporiadania celých nezáporných čísel ukážte, že $4 < 7$.

Riešenie:

Počítajme:

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= 4 + 2' = (4 + 2)' = (4 + 1')' = ((4 + 1)')' = ((4 + 0')')' = \left(((4 + 0)')' \right)' = \\ &= \left((4')' \right)' = (5')' = 6' = 7. \end{aligned}$$

Vidíme, že existuje celé nezáporné číslo t (v tomto prípade číslo 3), že $4 + t = 7$. Teda podľa definície $4 \leq 7$.

Nakoľko $4 \neq 7$, platí aj $4 < 7$.

Teraz si bez dôkazu uvedieme dôležité vlastnosti takto definovaného usporiadania, súčtu a súčinu celých nezáporných čísel.

Nech x, y, z sú celé nezáporné čísla. Potom:

- 1. Ak $x < y$, potom $x + z < y + z$.**
- 2. Ak $x < y$ a $z \neq 0$, potom $x \cdot z < y \cdot z$.**
- 3. $x < x'$,**
- 4. $x < y$ vtedy a len vtedy, keď $x' < y'$.**

Prvé tvrdenie nám vraví, že k oboj stranám nerovnosti možno pričítať to isté celé nezáporné číslo. (Uvedomme si, že pre odčítanie to tvrdiť nemožno, nakoľko ho nemáme definované.)

Druhé tvrdenie nám vraví, že obe strany nerovnosti možno vynásobiť tým istým nenulovým celým nezáporným číslom.

Tretie tvrdenie nám vraví, že každé celé nezáporné číslo je menšie ako jeho nasledovník.

Štvrté tvrdenie nám vraví, že ak x je menej ako y , potom je tento istý vzťah aj medzi ich nasledovníkmi.

Úloha:

Dokážte, že ak x, y, z sú celé nezáporné čísla a $x \leq y$, potom $x + z \leq y + z$.

Riešenie:

Ak x, y, z sú celé nezáporné čísla a $x \leq y$, potom existuje také celé nezáporné číslo t , že $x + t \leq y$.

Počítajme $y + z$.

$$y + z = (x + t) + z = x + (t + z) = x + (z + t) = (x + z) + t$$

Teda podľa definície usporiadania celých nezáporných čísel platí $x + z \leq y + z$.

Úloha:

Dokážte, že ak x, y, z sú celé nezáporné čísla, $x \leq y$ a $z \neq 0$, potom $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Riešenie:

Ak x, y, z sú celé nezáporné čísla, $x \leq y$ a $z \neq 0$, potom existuje také celé nezáporné číslo t , že $x + t \leq y$.

Počítajme $y \cdot z$.

$$y \cdot z = (x + t) \cdot z = x \cdot z + t \cdot z$$

Ak si uvedomíme, že aj $t \cdot z$ je celé nezáporné číslo, potom podľa definície usporiadania celých nezáporných čísel platí $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Úloha:

Dokážte, že ak x je celé nezáporné číslo, potom $x < x'$.

Riešenie:

Uvedomme si, že $x + 1 = x'$.

Pretože aj 1 je celé nezáporné číslo, podľa definície usporiadania celých nezáporných čísel platí $x \leq x'$. Pretože $x \neq x'$, platí $x < x'$.

Ordinálne čísla

V predchádzajúcich kapitolách sme si zaviedli prirodzené čísla pomocou kardinálnych čísel a pomocou prvkov Peanovej množiny. Taktiež sme definovali operácie sčítania a násobenia a reláciu usporiadania, ktoré mali vlastnosti, na ktoré sme pri sčítaní, násobení a usporiadaní prirodzených čísel zvyknutí.

V tejto časti sa zoznámime s pojmom ordinálnych čísel. Aj pre tie možno v teórii množín definovať sčítanie, násobenie a usporiadanie. Navyiac, tieto definície sú v mnohom podobné tým, ktoré sme si uviedli pre kardinálne čísla. Nakoľko presný postup by bol príliš zložitý a výrazne by presahoval rámec týchto učebných textov, uspokojíme sa s hlavnými myšlienkami spôsobu zavedenia ordinálnych čísel.

Najskôr sa potrebujeme oboznámiť s pojmami usporiadaná množina, dobre usporiadaná množina a podobné zobrazenie.

S reláciou usporiadania, usporiadanou množinou a dobre usporiadanou množinou sme sa počas štúdia už stretli. Pripomeňme si ich definície a stručne sa im venujme.

Relácia R definovaná v množine M sa nazýva relácia ostrého lineárneho usporiadania, ak je antireflexívna, antisymetrická, tranzitívna a súvislá.

Relácia R definovaná v množine M sa nazýva relácia ostrého čiastočného usporiadania, ak je antireflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Úloha:

Daná je množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a relácia $R = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [3, 2], [4, 2], [4, 3]\}$.

Rozhodnite, či R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania v množine M .

Riešenie :

Najskôr zostrojíme vrcholový graf danej relácie.

Potom určíme vlastnosti relácie R .

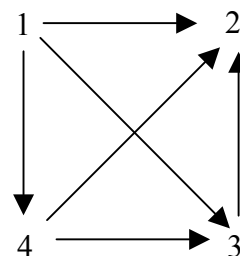
Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje obojsmerné šípky, relácia R je antisymetrická.

Pretože vo vrcholovom grafe relácie R „nemá zmysel prestupovať“, relácia R je tranzitívna.

Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje pri žiadnom vrchole slučku, relácia R je antireflexívna.

Pretože každé dva rôzne vrcholy sú spojené nejakou šípkou, relácia R je súvislá.

Pretože relácia R je antireflexívna, antisymetrická, tranzitívna a súvislá, je reláciou ostrého lineárneho usporiadania v množine M .



Prvky množiny M , na ktorej je definovaná relácia ostrého lineárneho usporiadania R , vieme vždy zoradiť do reťazca tak, že ak $[x, y] \in R$, potom x sa nachádza v reťazci naľavo od y . Zápis takéhoto reťazca z predchádzajúcej úlohy je $1 < 4 < 3 < 2$.

Teraz si uvedieme definíciu lineárne usporiadanej množiny.

Ak na množine M je definovaná relácia lineárneho usporiadania $<$, tak množinu M usporiadanú touto reláciou označujeme $(M, <)$ a nazývame lineárne usporiadaná množina.

Pod pojmom lineárne usporiadaná množina teda rozumieme dvojicu $M, <$, kde M je množina objektov a $<$ je relácia lineárneho usporiadania na tejto množine.

Teraz si uvedieme definíciu prvého a posledného prvku lineárne usporiadanej množiny.

Nech $(M, <)$ je lineárne usporiadaná množina.

Prvok $a \in M$ nazývame prvým prvkom v množine M vzhľadom na lineárne usporiadanie $<$, ak platí:

$\forall x \in M : x \neq a \Rightarrow a < x$ (čítame: pre každý prvok x množiny M platí, že ak x je rôzny od a , potom a predchádza x v usporiadaní $<$).

Prvok $b \in M$ nazývame posledným prvkom v množine M vzhľadom na lineárne usporiadanie $<$, ak platí:

$\forall x \in M : x \neq b \Rightarrow x < b$ (čítame: pre každý prvok x množiny M platí, že ak x je rôzny od b , potom x predchádza b v usporiadaní $<$).

Uvedomme si, že zápis $a < x$ znamená, že $[a, x] \in <$, ale $[x, a] \notin <$.

V predchádzajúcej úlohe platilo $1 < 4 < 3 < 2$. To znamená, že prvok 1 je prvým prvkom množiny M a prvok 2 je posledným prvkom množiny M .

Teraz prejdeme k definícii dobre usporiadanej množiny.

Lineárne usporiadaná množina $(M, <)$ sa nazýva dobre usporiadaná, ak každá neprázdna podmnožina množiny M má prvý prvok.

Napríklad množina prirodzených čísel N s obvyklým usporiadaním $<$ je dobre usporiadaná množina, lebo každá jej podmnožina má najmenší (prvý) prvok.

Avšak množina Z všetkých celých čísel s obvyklým usporiadaním $<$ nie je dobre usporiadaná množina, pretože napríklad jej podmnožina M , ktorá obsahuje všetky celé čísla menšie ako 5, nemá najmenší (prvý) prvok.

Venujme sa teraz pojmu podobné zobrazenie.

Nech $(A, <_A)$ a $(B, <_B)$ sú čiastočne usporiadané množiny. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva podobné zobrazenie, ak je bijektívne a ak pre každé x, y z množiny A platí:
 $x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y)$.

Čiastočne usporiadaná množina A je podobná čiastočne usporiadanej množine B (označujeme $A \cong B$), ak existuje podobné zobrazenie množiny A na množinu B .

Teda podobné zobrazenie musí byť bijektívne a zachovávať usporiadanie. Vysvetlíme si to na nasledujúcich úlohách

Úloha:

Daná je množina $A = \{1, 2, 3, 4\}$ s usporiadaním $1 <_A 2 <_A 3 <_A 4$ a množina $B = \{3, 6, 9, 12\}$ s usporiadaním $3 <_B 6 <_B 9 <_B 12$.

Ďalej je dané zobrazenie $f : A \rightarrow B$ nasledovne: $f(1) = 3, f(2) = 6, f(3) = 9, f(4) = 12$.

Určte, či f je podobné zobrazenie.

Riešenie:

Vidíme, že f je bijektívne zobrazenie, nakoľko dvom rôznym prvkom množiny A sú priradené dva rôzne prvky množiny B a každý prvok množiny B má svoj vzor.

Teraz overíme, že f zachováva usporiadanie.

$$1 <_A 2 \text{ a aj } f(1) <_B f(2) \qquad 1 <_A 3 \text{ a aj } f(1) <_B f(3)$$

$$1 <_A 4 \text{ a aj } f(1) <_B f(4) \qquad 2 <_A 3 \text{ a aj } f(2) <_B f(3)$$

$$2 <_A 4 \text{ a aj } f(2) <_B f(4) \qquad 3 <_A 4 \text{ a aj } f(3) <_B f(4)$$

Teda f je podobné zobrazenie.

Úloha:

Daná je množina $A = \{1, 2, 3, 4\}$ s usporiadaním $1 <_A 2 <_A 3 <_A 4$ a množina $B = \{3, 6, 9, 12\}$ s usporiadaním $3 <_B 6 <_B 9 <_B 12$.

Ďalej je dané zobrazenie $f: A \rightarrow B$ nasledovne: $f(1) = 9, f(2) = 6, f(3) = 12, f(4) = 3$.

Určte, či f je podobné zobrazenie.

Riešenie:

Vidíme, že f je bijektívne zobrazenie, nakoľko dvom rôznym prvkom množiny A sú priradené dva rôzne prvky množiny B a každý prvok množiny B má svoj vzor.

Avšak f nezachováva usporiadanie, pretože napríklad $1 <_A 2$, ale $f(1) >_B f(2)$.

Teda f nie je podobné zobrazenie.

Úloha:

Daná je množina $A = \{1, 2, 3, 4\}$ s usporiadaním $1 <_A 2 <_A 3 <_A 4$ a množina $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ s usporiadaním $3 <_B 6 <_B 9 <_B 12 <_B 15 <_B 18$.

Existuje nejaké podobné zobrazenie $f: A \rightarrow B$?

Riešenie:

Aby f bolo bijektívne, museli by množiny A a B mať rovnaký počet prvkov. Preto neexistuje žiadne bijektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$, a teda ani podobné.

Podobnosť množín bude mať mnohé vlastnosti, s ktorými sme sa už stretli pri ekvivalentnosti množín pri zavádzaní pojmu kardinálne číslo.

Tak, ako všetky množiny netvoria množinu, ani všetky dobre usporiadané množiny netvoria množinu. Avšak relácia podobnosti množín $\cong$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna medzi dobre usporiadanými množinami, a teda má podobné vlastnosti ako relácia ekvivalencie. Preto sa všetky dobre usporiadané množiny rozpadajú do tried ekvivalencie a každú z týchto tried možno charakterizovať jediným reprezentantom. Týchto reprezentantov budeme nazývať ordinálne čísla.

Pretože situácia je podobná ako pri kardinálnych číslach, budeme postupovať analogicky a existenciu ordinálnych čísel zaručíme axiomatically.

Ku každej dobre usporiadanej množine A existuje množina $\text{Ord}(A)$ dobre usporiadaná reláciou inklúzie $\subset$ s týmito vlastnosťami:

1. $A \cong \text{Ord}(A)$,

2. ak $(A, <_A)$ a $(B, <_B)$ sú dobre usporiadané množiny, tak $A \cong B$ platí vtedy a len vtedy, keď $\text{Ord}(A) = \text{Ord}(B)$.

Množina $\text{Ord}(A)$, kde A je dobre usporiadaná množina, sa nazýva ordinálne číslo množiny A .

Už sme si ukázali, že $f: A \rightarrow B$ určené nasledovne: $f(1) = 3, f(2) = 6, f(3) = 9, f(4) = 12$ je podobné zobrazenie množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ s usporiadaním $1 <_A 2 <_A 3 <_A 4$ na množinu $B = \{3, 6, 9, 12\}$ s usporiadaním $3 <_B 6 <_B 9 <_B 12$. Teda množiny A a B sú podobné a ich ordinálne čísla sa rovnajú.

Odčítanie a delenie v množine prirodzených čísel

V predchádzajúcich kapitolách sme si rôznymi spôsobmi zaviedli prirodzené čísla a definovali sme operácie sčítania a násobenia. Teraz sa budeme venovať odčítaniu a deleniu. Budeme pracovať s množinou celých nezáporných čísel, ktorú tvoria prirodzené čísla a nula. Najprv si zadefinujeme rozdiel dvoch nezáporných celých čísel.

Už vieme, že ak a a b sú dve celé nezáporné čísla a $a \leq b$, potom existuje jediné také nezáporné celé číslo x , že $a + x = b$. Toto číslo budeme nazývať rozdielom celých nezáporných čísel b a a .

Nech a, b sú celé nezáporné čísla, pre ktoré platí, že $a \leq b$. Potom celé nezáporné číslo x , pre ktoré platí $a + x = b$, nazývame rozdielom celých nezáporných čísel b a a .

Označujeme: $x = b - a$.

Číslo b sa nazýva menšenec, číslo a menšiteľ a číslo x rozdiel.

Všimnime si, že rozdiel dvoch celých nezáporných čísel nie je definovaný vždy, ale iba v prípade, keď menšenec nie je menší ako menšiteľ.

Úloha:

Vypočítajte podľa definície rozdielu dvoch celých nezáporných čísel a výpočet zdôvodnite.

- a) $5 - 3$
- b) $8 - 4$
- c) $9 - 9$
- d) $11 - 14$

Riešenie:

a) $5 - 3 = 2$, lebo $3 + 2 = 5$

b) $8 - 4 = 4$, lebo $4 + 4 = 8$

c) $9 - 9 = 0$, lebo $9 + 0 = 9$

d) Rozdiel $11 - 14$ nie je definovaný, lebo menšenec je menší ako menšiteľ.

Pre takto definovaný rozdiel dvoch celých nezáporných čísel platia vzťahy, z ktorých mnohé bežne používame. Uvedieme si niektoré z nich bez dôkazu.

Nech a, b, c sú celé nezáporné čísla. Potom:

- 1. ak $a \leq b$, potom $(b - a) + a = b$,**
- 2. $(a + b) - b = a$,**
- 3. ak $(b + c) \leq a$, potom $a - (b + c) = (a - b) - c$,**
- 4. ak $c \leq b$ a $b - c \leq a$, potom $a - (b - c) = (a + c) - b$,**
- 5. $b - (b - a) = a$.**

Úloha:

Dokážte, že ak a, b sú celé nezáporné čísla a $a \leq b$, potom $(b - a) + a = b$.

Riešenie:

Ak $a \leq b$, potom existuje také celé nezáporné číslo c , že $a + c = b$. Zrejme podľa definície rozdielu celých nezáporných čísel $c = b - a$.

Teda $(b - a) + a = c + a = a + c = b$.

Úloha:

Dokážte, že ak a, b sú celé nezáporné čísla, potom $(a + b) - b = a$.

Riešenie:

Nakoľko pre ľubovoľné celé nezáporné čísla a, b platí $b \leq a + b$, rozdiel $(a + b) - b$ je definovaný.

$(a + b) - b = a$ platí podľa definície rozdielu celých nezáporných čísel práve vtedy, keď $b + a = a + b$. Z vlastností súčtu celých nezáporných čísel vyplýva, že uvedená rovnosť platí.

Teraz prejdeme k operácii delenia. Už dávno vieme, že pri delení dvoch prirodzených čísel pracujeme s pojmami podiel a zvyšok. Navyše, podiel a zvyšok sú pri delení určené jednoznačne.

Teraz prejdime k definícii. Najprv si bez dôkazu uvedieme nasledujúce tvrdenie.

Nech a, b sú celé nezáporné čísla. Nech $b \neq 0$. Potom existuje jediná dvojica celých nezáporných čísel q a r tak, že $a = b \cdot q + r$, pričom $0 \leq r < b$.

Vďaka tomuto tvrdeniu môžeme zadefinovať podiel dvoch celých nezáporných čísel.

Nech a, b, q, r sú celé nezáporné čísla, pre ktoré platí $b \neq 0$, $a = b \cdot q + r$ a $0 \leq r < b$. Potom číslo a nazývame delenec, číslo b deliteľ, číslo q neúplný podiel pri delení čísla a číslom b a číslo r zvyšok pri delení čísla a číslom b . Ak $r = 0$, potom číslo q nazývame podiel pri delení čísla a číslom b a píšeme $q = a : b$.

Definíciu si opäť vysvetlíme na príklade.

Vieme, že $43 = 8 \cdot 5 + 3$. Číslo 43 nazývame delenec, číslo 8 deliteľ, číslo 5 neúplný podiel pri delení čísla 43 číslom 8 a číslo 3 zvyšok pri delení čísla 43 číslom 8.

Podobne vieme, že $45 = 9 \cdot 5 + 0$. Číslo 45 nazývame delenec, číslo 9 deliteľ a číslo 5 podiel pri delení čísla 45 číslom 9. Zapisujeme: $45 : 9 = 5$.

Pre takto definovaný podiel dvoch celých nezáporných čísel platia vzťahy, z ktorých mnohé bežne používame. Dva z nich si uvedieme a v nasledujúcich úlohách aj dokážeme.

Nech a, b sú celé nezáporné čísla. Potom:

1. ak existuje podiel $a : b$, potom $(a : b) \cdot b = a$,

2. $(a \cdot b) : b = a$.

Úloha:

Dokážte, že ak a, b sú celé nezáporné čísla a ak existuje podiel $a : b$, potom $(a : b) \cdot b = a$.

Riešenie:

Ak existuje podiel $a : b$, potom existuje také celé nezáporné číslo q , pre ktoré $a = b \cdot q + 0$ a $q = a : b$.

Potom $(a : b) \cdot b = q \cdot b = b \cdot q = b \cdot q + 0 = a$.

Úloha:

Dokážte, že ak a, b sú celé nezáporné čísla, potom $(a \cdot b) : b = a$.

Riešenie:

Z vlastností násobenia a sčítania celých nezáporných čísel vieme, že $a \cdot b = b \cdot a + 0$.

Ak použijeme definíciu delenia celých nezáporných čísel, $a \cdot b$ je delenec, b je deliteľ a a je podiel, čo zapisujeme $(a \cdot b) : b = a$.