P. J. ŠAFÁRIK UNIVERSITY
FACULTY OF SCIENCE
INSTITUTE OF MATHEMATICS
Jesenná 5, 040 01 Košice, Slovakia

J. Krajčiová and J. Pócsová

Galtonova doska na hodine matematiky, kvalitatívne určenie veľkosti pravdepodobnosti udalostí

IM Preprint, series A, No. 10/2009
June 2009

Galtonova doska na hodine matematiky, kvalitatívne určenie veľkosti pravdepodobnosti udalostí

Jana Krajčiová, Jana Pócsová

Abstrakt

Hlavným cieľom tohto článku je poukázať na spôsob vyučovania pravdepodobnosti s využitím štatistických údajov t.j. venujeme sa kvalitatívnemu ohodnoteniu veľkosti pravdepodobnosti udalostí.

Pripravili sme dva námety na vyučovacie hodiny, ktoré sme nazvali podľa pomôcok použitých pri ich realizácií, boli nimi Galtonova doska a mince. Jednotlivé námety sú rozšírené o naše postrehy z ich realizácie so žiakmi kvarty osemročného gymnázia (žiaci vo veku 13–14 rokov) v Košiciach na Alejovej 1.

1 Úvod

Jedným zo základných cieľov vyučovania matematiky je popri rozvoji geometrického a aritmetického myslenia aj rozvoj stochastického myslenia. Pod pojmom stochastika sa rozumie kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika (v širšom slova zmysle sem patrí aj popisná štatistika) [1]. Cieľom tohto článku je poukázať na iný spôsob vyučovania pravdepodobnosti s využitím štatistických údajov na základných školách. Ako nástroj na dosiahnutie tohto cieľa použijeme Galtonovu dosku, respektíve mince (keďže Galtonova doska nie je bežne dostupná učebná pomôcka na základných školách).

V tomto článku popíšeme dve vyučovacie hodiny z tematického celku Pravdepodobnosti, ktoré boli realizované v kvarte osemročného gymnázia (žiaci vo veku 13–14 rokov) v Košiciach na Alejovej 1. Pri prvej sme použili Galtonovu dosku a pri druhej mince. Medzi jednotlivými hodinami bol značný časový odstup (takmer 6 mesiacov).

V závere porovnáme obe vyučovacie hodiny a uvedieme výhody aj nevýhody oboch použitých nástrojov.

Galtonova doska je „losovací nástroj“, ktorý sa skladá z krabičky rozdelenej na 8 očíslovaných priehradok a veka, ktoré je do nej zaklopené. Na veku sú umiestnené kolíky valcového tvaru. Pokiaľ do horného otvoru hodíme guľku, začne padať dolu. Guľka pri páde postupne naráža na kolíky, ktoré ju náhodne vychyľujú buď vpravo, alebo vľavo. Pád guľky po Galtonovej doske predstavuje náhodný pokus [3].

V tomto článku používame pojmy v nasledujúcich významoch:

- **Kvalitatívne ohodnotenie pravdepodobnosti** sú úsudky typu:
  - „udalosť A je málo pravdepodobná“,
  - „udalosť B je veľmi pravdepodobná“,
  - „udalosť A je menej pravdepodobná ako udalosť B“ ([2], s. 251).
- „**Náhodný pokus** je experiment, jav, pokus, o ktorého priebehu a výsledku rozhoduje náhoda, pričom množina výsledkov pokusu je konečná alebo spočítateľná a pre každý výsledok možno kvantitatívne ohodnotiť pravdepodobnosť, s akou sa pokus týmto výsledkom skončí (náhodný pokus označujeme podľa [1] gréckym písmenom δ)“ ([1], s. 13).
- Dva **pravdepodobnostné priestory** (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2) sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijekcia g z množiny Ω_1 na množinu Ω_2 taká, že pre každé $\omega \in \Omega_1$ platí $p_2(g(\omega)) = p_1(\omega)$ ([3] s. 53).

2 Popis a analýza vyučovacích hodín

2.1 Prvá alternatíva vyučovacej hodiny: Stávkovanie a Galtonova doska

Ciele vyučovacej hodiny:

1. Žiak má vedieť kvalitatívne ohodnotiť pravdepodobnosti ôsmich udalostí, ktoré môžu nastať po páde guľky po Galtonovej doske; t. j. má vedieť posúdiť, ktorá z týchto udalostí je viac a ktorá menej pravdepodobná.

2. Žiak má objaviť symetriu v rozložení pravdepodobností vyššie spomínaných udalostí.

3. Žiak má rozumieť zdôvodneniu, prečo sú niektoré udalosti po páde guľky po Galtonovej doske viac, iné zas menej pravdepodobné.

Pomôcky: Galtonova doska, guľôčky, tipovacie tikety, tabuľka pripravená na tabuli

Priebeh vyučovacej hodiny:

1. fáza: **Oboznámenie žiakov s Galtonovou doskou**
Predpokladáme, že už samotné objavenie sa Galtonovej dosky na hodine matematiky vzbudí u žiakov zvedavosť, čo to je, na čo slúži.
Niektorý zo žiakov spustí po Galtonovej doske zopár guľôčok, pričom sa ukáže, že každá z guľôčok môže skončiť v jednej z ôsmich priehradiek očíslovaných číslami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

2. fáza: **Tipovacia súťaž**
Všetko je pripravené na vyhlásenie tipovacej súťaže:

- Na tabuli je nakreslená tabuľka (Tab. 1), do ktorej sa budú zaznamenávať tipy všetkých žiakov spolu s padnutým číslom.

tip/kolo	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

Tabuľka 1: Tabuľka na tabuli

- Jeden zo žiakov rozdá každému tipovací tiket (Tab. 2).

kolo	možné výsledky								body
1.	0	1	2	3	4	5	6	7	
2.	0	1	2	3	4	5	6	7	
3.	0	1	2	3	4	5	6	7	
4.	0	1	2	3	4	5	6	7	
5.	0	1	2	3	4	5	6	7	
6.	0	1	2	3	4	5	6	7	
7.	0	1	2	3	4	5	6	7	
8.	0	1	2	3	4	5	6	7	
9.	0	1	2	3	4	5	6	7	
10.	0	1	2	3	4	5	6	7	

Tabuľka 2: Tipovací tiket

Súťaž prebieha napríklad v desiatich kolách. Kolo začína tým, že každý zo žiakov tipne na číslo priehradky, v ktorej guľôčka skončí. Svoj tip zaznamená do tipovacieho tiketu 2 (krížikom cez príslušné číslo v danom kole). Následne učiteľ zistí, koľko žiakov si tiplo číslo 0, koľko číslo 1, ..., koľko číslo 7. Tieto počty zapíše do príslušného stĺpca tabuľky 1.

Nič už nebráni v pustení guľôčky po Galtonovej doske. Tí žiaci, ktorí si tipli správne, zapíšu si do zodpovedajúceho riadku tipovacieho tiketu 1 bod, ostatní 0 bodov. Po miernom upokojení emóciami nabitej tipovacej atmosféry v triede môže nasledovať ďalšie kolo.

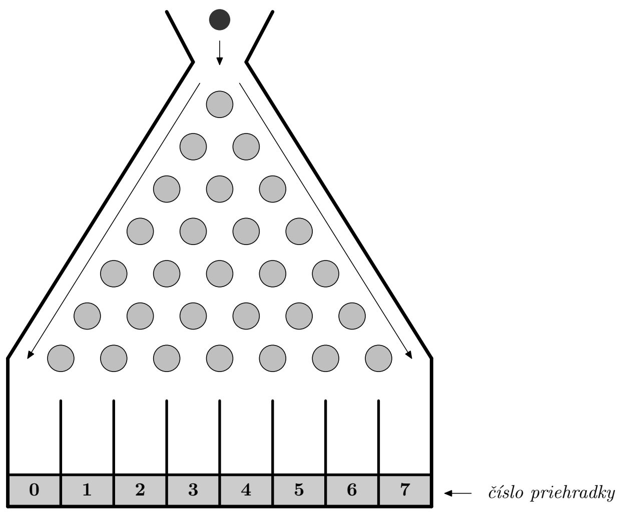
Po uskutočnení niekoľkých pokusov žiaci odpovedajú na nasledujúce otázky:

- Na ktoré číslo ste stavili?
- Prečo ste stavili práve na toto číslo?
- Ak by ste mali znova tipovať, aké by boli vaše tipy?
- Ak by ste nemohli tipovať na číslo 3 ani na číslo 4, na aké čísla by ste stavili?
- Aké čísla by ste už určite netipovali?

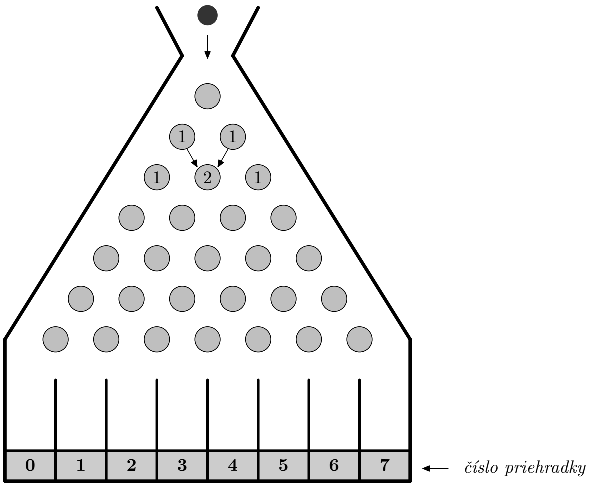
Ak zatiaľ nepreberali tematický celok Pravdepodobnosť (ako to bolo v našom prípade), zaujíma nás, ako budú argumentovať. Predpokladáme, že žiaci pri svojich odpovediach použijú pojmy ako šanca či pravdepodobnosť.

Po desiatom kole žiaci spočítajú svoje body a vyhodnotí sa celá tipovacia súťaž.

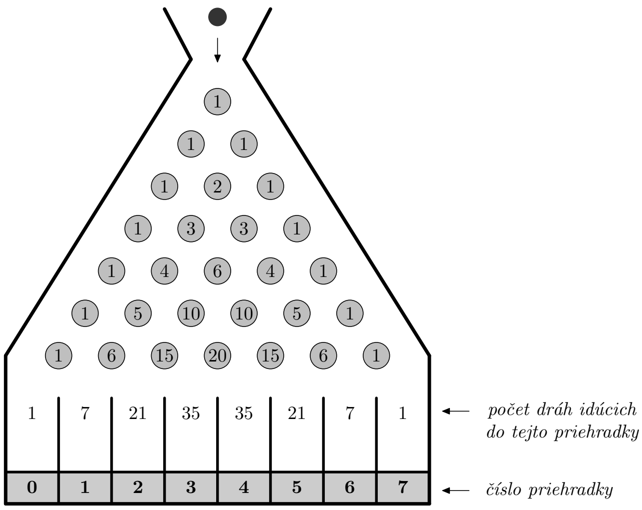
<u>3. fáza</u>: **Zdôvodnenie – diskusia k priebehu súťaže**
Po ukončení tipovacej súťaže sa pokúsime zdôvodniť, *prečo* čísla 3 a 4 padajú najčastejšie a naopak čísla 0 a 7 najmenej často. Ako vysvetlenie použijeme počet ciest, ktoré vedú k priehradkám s číslami 0 až 7. Na tabuľu nakreslíme model Galtonovej dosky. Systém, ako sú na nej rozložené kolíky, priamo kopíruje Pascalov trojuholník. Ak sa s ním žiaci stretli, o to ľahšie cesty spočítajú. Žiaci veľmi ľahko nahliadnu, že do každej z krajných priehradok s číslami 0 a 7 vedie iba jedna cesta.



Nepredpokladáme žiaden problém s zakreslením a následným spočítaním všetkých ciest, ktoré vedú do priehradok s číslami 1 a 6. Spočítanie ciest do zvyšných priehradok by už mohlo byť pre žiakov náročnejšie. Preto zvolíme iný prístup: k jednotlivým kolíkom Galtonovej dosky dopisujeme čísla, ktoré predstavujú počet ciest vedúcich k týmto kolíkom. Toto číslo dostaneme ako súčet počtu ciest vedúcich k dvom vyššie sa nachádzajúcim kolíkom. (Ak sa má totiž guľôčka odraziť od tohto kolíka, musela sa tesne predtým odraziť od jedného z dvoch vyššie sa nachádzajúcich kolíkov.)



Takýmto spôsobom spočítame všetky cesty vedúce do jednotlivých priehradok 0 až 7.



Postrehy z vyučovania (Analýza tipovacej súťaže)

Ad 1. fáza: Žiaci veľmi pozitívne reagovali na Galtonovu dosku. Emócie v triede boli veľmi veľké, žiakov použitý nástroj zaujal.

Ad 2. fáza: Pokúsime sa postupne zodpovedať na nasledujúce otázky:

- **Menili sa čísla, ktoré najčastejšie žiaci tipovali počas tipovacej súťaže?**
  Predpokladali sme, že na začiatku bude rôznorodá škála tipovaných čísel, ktoré sa bude postupne meniť na najčastejšie tipované čísla 3 a 4. Žiaci nás však milo prekvapili. Ešte pred samotným uskutočnením prvého pokusu niektorí z nich tipovali, že guľka skonči v jednej z priehradok označených číslom 3 alebo 4. Takže tieto dve čísla boli dominantné v tipovaní hneď od začiatku súťaže. V priebehu realizácie pokusov žiaci spontánne vykrikovali svoje postrehy. Uvedieme niekoľko skutočných odpovedí žiakov na prvé tri vyššie uvedené otázky:

  - **Na ktoré číslo ste stavili?**

    „Na trojku a na štvoku.“

  - **Prečo ste stavili práve na toto číslo?**

    „Lebo tieto čísla sú v strede.“

  - **Ak by ste mali znova tipovať, aké by boli vaše tipy?**

    „Na trojku a na štvorku.“

    „Ale tipoval by som aj na iné čísla, lebo to je náhoda, ako to dopadne. Môže padnúť aj jednotka.“

- **Objavili žiaci symetriu v rozložení pravdepodobností udalostí, ktoré môžu nastať po páde guľky po Galtonovej doske?**
  Áno, objavili ju. Nabáda k tomu už samotná konštrukcia Galtonovej dosky, ktorá je symetrická. Uvedieme jednu z odpovedí žiakov na otázku:

  - **Ak by ste nemohli tipovať na číslo 3 ani na číslo 4, na aké čísla by ste stavili?**

    „Na dvojku alebo na päťku. Je to jedno.“

- **Na aké čísla žiaci netipovali, resp. tipovali veľmi málo?**
  Jednoznačne na okrajové čísla 0 a 7. Na našu vyššie uvedenú položenú otázku zaznela aj nasledovná odpoveď:

  - **Na aké čísla by ste určite už netipovali?**

> „Na nulu a na sedmičku. Ale môže sa stať, že padnú, ale je to malá šanca.“
>
> „Teraz si tipnem na nulu, lebo tá ešte nepadla. Ale tá predsa tiež musí niekedy padnúť.“

Posledná odpoveď žiaka ukazuje, že dotyčný žiak nemá vžitú predstavu, že výsledok náhodného pokusu *nezávisí* od výsledkov predchádzajúcich náhodných pokusov.

Ad 3. fáza: Mnohí žiaci hneď na začiatku zdôvodňovania postrehli súvislosť medzi Galtonovou doskou a Pascalovým trojuholníkom. (O ňom sa učili v rámci tematického celku Kombinatorika v nižších ročníkoch.) Spontánne sme spolu počítali počet ciest, ktoré vedú k jednotlivým priehradkam spôsobom, ktorý je vyššie popísaný. Samotný fakt, že najviac ciest vedie k priehradkám číslo 3 a 4, považovali žiaci za dostatočné zdôvodnenie toho, prečo na tieto čísla tipovali najčastejšie. (Niekoľko žiakov by dokázalo vypočítať aj pravdepodobnosť jednotlivých udalostí.)

2.2 Druhá alternatíva vyučovacej hodiny: Stávkovanie a mince

Ciele vyučovacej hodiny

1. Žiak má vedieť kvalitatívne ohodnotiť pravdepodobnosti ôsmich udalostí, ktoré môžu nastať po sedemnásobnom hode jednou mincou (resp. hode siedmimi mincami); t. j. má vedieť posúdiť, ktorá z týchto udalostí je viac a ktorá menej pravdepodobná.

Pomôcky: sedem rovnakých mincí (napríklad v hodnote 1 euro), tipovacie tikety, tabuľka pripravená na tabuli

Priebeh vyučovacej hodiny:

1. fáza: **Oboznámenie žiakov s pravidlami súťaže**

Na začiatku hodiny si so žiakmi ozrejmíme, čo budeme rozumieť pod pojmom líce a čo pod pojmom rub. Táto časť vyučovacej hodiny je zameraná na to, aby si žiaci zvolili, čo budú pri sedemnásobnom hode mincou sledovať (líce alebo rub). Vyhodíme jednu mincu a opýtame sa žiakov, či je väčšia šanca, že padne rub alebo líce.

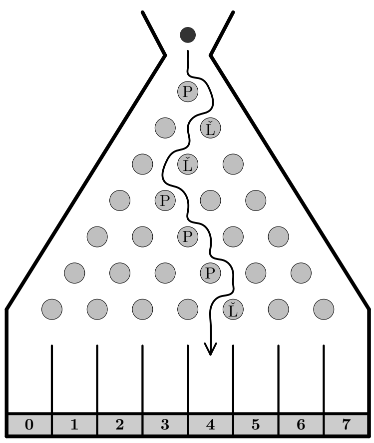
2. fáza: **Tipovacia súťaž**

Všetko je pripravené na to, aby mohla tipovacia súťaž začať. Žiaci si tipnú, koľkokrát padne líce a tento svoj tip zaznamenajú do tipovacieho tiketu (2). Hodíme 7-krát mincou a počet padnutých líc budeme zaznamenávať do tabuľky na tabuľu (1) analogicky, ako sme to robili pri použití Galtonovej dosky. Priebeh tejto fázy je veľmi podobný priebehu, ktorý je popísaný v prvej alternatíve vyučovacej hodiny, kde používame Galtonovu dosku (zhodujú sa použité pracovné materiály, položené otázky a celkový priebeh vyučovacej hodiny). S tým rozdielom, že najprv budeme hádzať 7-krát jednou mincou, neskôr raz siedmimi mincami. Po troch pokusoch sedemnásobného hodu jednou mincou sa žiakov opýtame, či by sa tento zdĺhavý proces nedal nejako urýchliť. Predpokladáme, že navrhnú nahradiť sedemnásobný hod jednou mincou jedným hodom siedmimi mincami. Možno to žiaci navrhnú aj bez nášho priameho vyzvania. Uvedomujeme si, že predstava nezávislosti udalostí sa formuje zdĺhavejšie.

3. fáza: **Zdôvodnenie – diskusia k priebehu súťaže**

Myslíme si, že vysvetlenie kvalitatívneho porovnania udalostí pri hode siedmimi mincami je pre žiakov v tomto veku náročné. Preto ho navrhujeme vynechať. Avšak pre čitateľa sa pokúsime o korektné zdôvodnenie vhodnosti zámeny Galtonovej dosky za mince.

Ako sme spomínali v úvode, „ideálna“ Galtonova doska je zostrojená tak, že pravdepodobnosť vychýlenia guličky doprava alebo doľava je na každom kolíku rovnaká, t. j. je rovná 1/2. Kedže trajektória guľky je jednoznačne určená odrazmi od kolíkov, môžeme každej trajektórii priradiť postupnosť čísel 0 a 1, ktorá ju „kóduje“. Napríklad trajektórii zachytenej na obrázku odpovedá postupnosť $(1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$, kde odrazu doprava odpovedá číslo 1 a odrazu doľava číslo 0.



Takýmto spôsobom sme získali bijekciu medzi množinou všetkých možných trajektórií pohybu guľky po Galtonovej doske (označme ju Ω_1) a množinou všetkých postupností 0 a 1 dĺžky 7 (označme ju Ω_2). Preto počet všetkých možných trajektórií pohybu guľky po Galtonovej doske sa rovná počtu všetkých možných postupností dĺžky 7 čísel 0 a 1. Takýchto postupností je 2^7. Preto pravdepodobnosť vygenerovania ľubovoľnej takejto sedmice je $\frac{1}{2^7}$. Keďže predpokladáme, že k dispozícii máme „ideálnu“ Galtonovu dosku, je pravdepodobnosť pohybu guľky po každej trajektórií rovnaká a je rovná 1/(počet všetkých trajektórii) $= 1/2^7$. Preto môžeme hovoriť o izomorfizme medzi pravdepodobnostným priestorom, v ktorom množinu Ω_1 tvoria trajektórie pohybu guličky po Galtonovej doske, na jednej strane a priestorom, v ktorom množinu Ω_2 tvoria postupnosti núl a jednotiek dĺžky 7 na strane druhej. Je dobré si uvedomiť, že na to, aby sa guľôčka dostala do priehradky s číslom k ($k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$), je potrebných práve k odrazov doprava. Teda pravdepodobnosť, že gulička sa dostane do k. priehradky je rovná pravdepodobnosti, že v postupnosti núl a jednotiek dĺžky 7 bude práve k jednotiek. Táto pravdepodobnosť sa rovná

$$\frac{\binom{7}{k}}{2^7}.$$

Izomorfizmus je možné nájsť aj medzi pravdepodobnostným priestorom, v ktorom množinu Ω_2 tvoria postupnosti núl a jednotiek dĺžky 7 na jednej strane a pravdepodobnostným priestorom, v ktorom množinu Ω_3 tvoria výsledky hodu siedmimi mincami (resp. sedemnásobného hodu jednou mincou) na strane druhej.

Keďže relácia „byť izomorfný “ je tranzitívna, dostávame, že izomorfnými sú aj pravdepodobnostný priestor, v ktorom množinu Ω_1 tvorie trajektórie pohybu guličky po Galtonovej doske, a pravdepodobnostný priestor, v ktorom množinu Ω_3 tvoria výsledky hodu siedmimi mincami.

Postrehy z vyučovania (Analýza tipovacej súťaže)

Ad 1. fáza: V nasledujúcich riadkoch uvádzame prepis rozhovoru medzi učiteľom a žiakmi v úvode hodiny.

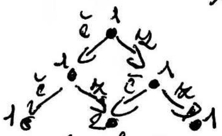
U: Aký výsledok môžeme dostať pri hode jednou mincou?
Ž: Rub alebo líce.
U: Je väčšia šanca, že padne rub, alebo že padne líce?
Ž: Je to jedno.
U: Zvoľme teda, že nás bude zaujímať, koľkokrát padlo líce. Sedemkrát hodím jednoeurovou mincou. Aké výsledky môžem dostať?
Ž: 0, 1, . . . , 7 líc.
U: Predtým, ako začneme hádzať, si každý staví na výsledok 7-násobného hodu mincou zakrúžkovaním jedného z čísel na tipovacom tikete.

Ad 2. fáza: Najprv žiaci hádzali jednou mincou 7-krát. Po troch opakovaniach nasledovala otázka: „Ako by sa dal tento proces urýchliť?“.
Tak ako sme očakávali, žiaci odpovedali: „Hodom 7 rovnakých mincí.“. Žiaci pohotovo reagovali na otázky. Keďže odpovede žiakov boli veľmi podobné ako v prípade použitia Galtonovej dosky, na tomto mieste ich už neuvádzame. Zaujímavosťou je fakt, že ani raz nepadli všetky líca ani všetky ruby. Teda nikdy „nepadli“ okrajové čísla 0 a 7.

Ad 3. fáza: Žiaci pri argumentácii rýchlo postrehli súvislosť s Galtonovou doskou. Jeden z nich uvádzame vo vernej podobe:

Hody mincami pripomínajú Galtonovu dosku. Najprv hodíme mincu a to je pustenie guličky. Gulička pôjde (po páde na klinček) buď do prava, alebo do ľava a to je ako keby padol znak, alebo číslo:
číslo → cesta do ľava
znak → cesta do prava

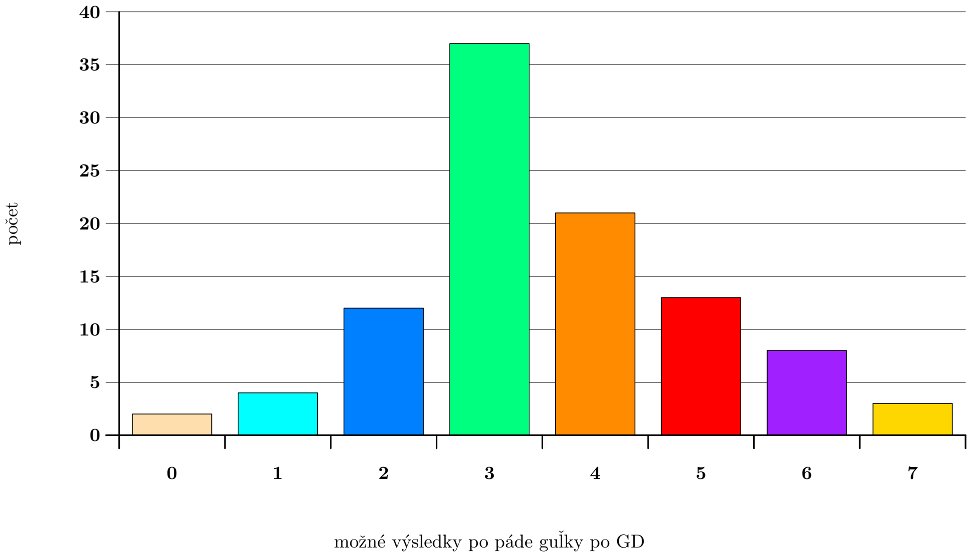
tieto klinčeky musia byť rovnaké, lebo keď si to premietneme ako mince, tak keď najprv padne č a potom z, tak máme 1× č a 1× z. Ak nám padne najprv z a potom č, tak máme 1× č a 1× z čo je to isté. Ak budeme pokračovať ďalej a budeme si každý klinček označovať číslom, ktoré zodpovedá počtu ~~možností~~ ako môžu padnúť (~~poradí~~ podľa poradia padaní) tak nám vznikne pascalov trojuholník

 a tak ~~ďalej~~ keby sme pokračovali doplníme celý Pascalov trojuholník

3 Záver

Ak porovnáme obe odučené hodiny, Galtonova doska vyhráva nad mincami. A to hlavne tým, že rozloženie kolíkov na jej veku cielene prípomína Pascalov trojuholník. Tak je zdôvodňovanie, prečo najčastejšie padajú čísla 3 a 4, oveľa názornejšie ako pri použití mincí. Na druhej strane výhodou použitia mincí je ich dostupnosť.

Žiakov Galtonova doska zaujala, preto sme sa rozhodli použiť ju aj na ďalšej hodine ako generátor 100 údajov, ktoré sme následne spracovávali. Každý žiak mohol hodiť niekoľko guliek po Galtonovej doske. Po hodení 100 guliek vo veku Galtonovej dosky vzniká útvar podobný histogramu, tak sme aj my spracovávali údaje pomocou histogramu a následne pomocou kruhového diagramu. Na ukážku ponúkame naše spracovanie:



Pomocou týchto údajov žiaci dospeli aj k záveru, že Galtonova doska nie je dobre vyvážená. Oveľa častejšie totiž padlo číslo 3 ako číslo 4. Na zistenie toho, či je Galtonova doska správne vyvážená, navrhli použiť vodováhu.

Vyvrcholením tejto činnosti bola diskusia o Gaussovej krivke, pomocou ktorej môžeme popísať mnohé závislosti z bežného života (napr. závislosť počtu ľudí v populácii od výšky ich IQ).

Nedá nám ešte nedodať, že my sme Galtonovu dosku použili pri práci so žiakmi, ktorí už poznali Pascalov trojuholník. Myslíme si, že by bolo veľmi dobre použiť ju ešte skôr, a to ako propedeutiku pre pochopenie Pascalovho trojuholníka.

Literatúra

[1] Płocki, A: *Dydaktyka stochastyky rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako nowy element kształcenia matematycznego*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, 2005, ISBN: 83-89416-79-4.

[2] Płocki, A: *Pravdepodobnosť okolo nás stochastika v úlohách a problémoch okolo nás*, Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2004, ISBN: 80–89039–51–0.

[3] Płocki, A: *Pravdepodobnosť okolo nás stochastika v úlohách a problémoch okolo nás*, Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2007, ISBN: 97880–8084–260-4.

Adresy autoriek

Jana Krajčiová
Gymnázium Košice, Alejová 1
krajciovci@netkosice.sk

Jana Pócsová
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
jana.pocsova@upjs.sk

Recent IM Preprints, series A

2005

1/2005 Cechlárová K. and Vaľová V.: *The stable multiple activities problem*
2/2005 Lihová J.: *On convexities of lattices*
3/2005 Horňák M. and Woźniak M.: *General neighbour-distinguishing index of a graph*
4/2005 Mojsej I. and Ohriska J.: *On solutions of third order nonlinear differential equations*
5/2005 Cechlárová K., Fleiner T. and Manlove D.: *The kidney exchange game*
6/2005 Fabrici I., Jendroľ S. and Madaras T., ed.: *Workshop Graph Embeddings and Maps on Surfaces 2005*
7/2005 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2005*

2006

1/2006 Semanišinová I. and Trenkler M.: *Discovering the magic of magic squares*
2/2006 Jendroľ S.: *NOTE – Rainbowness of cubic polyhedral graphs*
3/2006 Horňák M. and Woźniak M.: *On arbitrarily vertex decomposable trees*
4/2006 Cechlárová K. and Lacko V.: *The kidney exchange problem: How hard is it to find a donor ?*
5/2006 Horňák M. and Kocková Z.: *On planar graphs arbitrarily decomposable into closed trails*
6/2006 Biró P. and Cechlárová K.: *Inapproximability of the kidney exchange problem*
7/2006 Rudašová J. and Soták R.: *Vertex-distinguishing proper edge colourings of some regular graphs*
8/2006 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2006*
9/2006 Borbeľová V. and Cechlárová K.: *Pareto optimality in the kidney exchange game*
10/2006 Harminc V. and Molnár P.: *Some experiences with the diversity in word problems*
11/2006 Horňák M. and Zlámalová J.: *Another step towards proving a conjecture by Plummer and Toft*
12/2006 Hančová M.: *Natural estimation of variances in a general finite discrete spectrum linear regression model*

2007

1/2007 Haluška J. and Hutník O.: *On product measures in complete bornological locally convex spaces*
2/2007 Cichacz S. and Horňák M.: *Decomposition of bipartite graphs into closed trails*
3/2007 Hajduková J.: *Condorcet winner configurations in the facility location problem*
4/2007 Kovárová I. and Mihalčová J.: *Vplyv riešenia jednej difúznej úlohy a následný rozbor na riešenie druhej difúznej úlohy o 12-tich kockách*
5/2007 Kovárová I. and Mihalčová J.: *Prieskum tvorivosti v žiackych riešeniach vágne formulovanej úlohy*
6/2007 Haluška J. and Hutník O.: *On Dobrakov net submeasures*
7/2007 Jendroľ S., Miškuf J., Soták R. and Škrabuláková E.: *Rainbow faces in edge colored plane graphs*

8/2007 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2007*

9/2007 Cechlárová K.: *On coalitional resource games with shared resources*

2008

1/2008 Miškuf J., Škrekovski R. and Tancer M.: *Backbone colorings of graphs with bounded degree*

2/2008 Miškuf J., Škrekovski R. and Tancer M.: *Backbone colorings and generalized Mycielski's graphs*

3/2008 Mojsej I.: *On the existence of nonoscillatory solutions of third order nonlinear differential equations*

4/2008 Cechlárová K. and Fleiner T.: *On the house allocation markets with duplicate houses*

5/2008 Hutník O.: *On Toeplitz-type operators related to wavelets*

6/2008 Cechlárová K.: *On the complexity of the Shapley-Scarf economy with several types of goods*

7/2008 Zlámalová J.: *A note on cyclic chromatic number*

8/2008 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2008*

9/2008 Czap J. and Jendroľ S.: *Colouring vertices of plane graphs under restrictions given by faces*

2009

1/2009 Zlámalová J.: *On cyclic chromatic number of plane graphs*

2/2009 Havet F., Jendroľ S., Soták R. and Škrabuľáková E.: *Facial non-repetitive edge-colouring of plane graphs*

3/2009 Czap J., Jendroľ S., Kardoš F. and Miškuf J.: *Looseness of plane graphs*

4/2009 Hutník O.: *On vector-valued Dobrakov submeasures*

5/2009 Haluška J., Hutník O.: *On domination and bornological product measures*

6/2009 Kolková M., Pócsová J.: *Metóda Monte Carlo na hodine matematiky*

7/2009 Borbeľová V., Cechlárová K.: *Rotations in the stable b-matching problem*

8/2009 Mojsej I., Tartaľová A.: *On bounded nonoscillatory solutions of third-order nonlinear differential equations*

9/2009 Jendroľ S., Škrabuľáková E.: *Facial non-repetitive edge-colouring of semiregular polyhedra*

Preprints can be found in: http://umv.science.upjs.sk/preprints