

Ako zavádzame v matematike reálne čísla

Ako sme už spomenuli, spôsoby zavedenia reálnych čísel v matematike sú pomerne teoreticky náročné a presahujú rámec týchto učebných textov. Preto si ich iba načrtujeme.

Veľmi známu teóriu reálnych čísel vybudoval nemecký matematik G. Cantor. Je založená na pojme fundamentálnej postupnosti, ktorý presahuje rámec týchto učebných textov. Na množine fundamentálnych postupností racionálnych čísel sa definuje relácia ekvivalencie, ktorá určuje rozklad tejto množiny. Triedy rozkladu potom reprezentujú reálne čísla. Teda pojem reálneho čísla sa v Cantorovej teórii buduje pomocou pojmu racionálneho čísla.

Ďalšiu veľmi známu teóriu reálnych čísel vybudoval nemecký matematik Julius Wilhelm Richard Dedekind. Je založená na špeciálnych množinách racionálnych čísel, ktoré sú nám bližšie ako fundamentálne postupnosti, a preto si o nej povieme trochu viac.

Veľmi dôležitým pojmom v Dedekindovej teórii je rez množiny racionálnych čísel. Je to taká podmnožina množiny racionálnych čísel, ktorá:

1. nie je prázdna,
2. neobsahuje všetky racionálne čísla,
3. ak obsahuje racionálne číslo p , potom obsahuje aj všetky racionálne čísla menšie ako p ,
4. nemá najväčší prvok, teda ku každému racionálnemu číslu q , ktoré obsahuje, vieme v nej nájsť iné racionálne číslo r , ktoré je väčšie ako q .

Každý rez množiny racionálnych čísel predstavuje potom reálne číslo. Napríklad reálne číslo $\sqrt{2}$ predstavuje množina tých racionálnych čísel, ktorých druhá mocnina je menšia ako 2, reálne číslo $\sqrt{3}$ predstavuje množina tých racionálnych čísel, ktorých druhá mocnina je menšia ako 3, reálne číslo $\frac{13}{7}$ predstavuje množina tých racionálnych čísel, ktoré sú menšie ako $\frac{13}{7}$, reálne číslo π predstavuje množina tých racionálnych čísel, ktoré sú menšie ako π .

Na množine všetkých rezov racionálnych čísel definujeme operácie sčítania a násobenia a reláciu usporiadania.

Tak Cantor, ako aj Dedekind, vybudovali pojem reálneho čísla pomocou racionálneho čísla. V matematike však existujú aj iné teórie. Napríklad ruský matematik A. M. Kolmogorov vybudoval pojem kladného reálneho čísla priamo pomocou pojmu celého

nezáporného čísla. Ako kladné reálne číslo tu chápe špeciálnu funkciu z množiny prirodzených čísel do množiny celých nezáporných čísel, teda postupnosť celých nezáporných čísel, ktorá má isté špeciálne vlastnosti.

Nech už vybudujeme množinu reálnych čísel akokoľvek a nech na nej rôznymi spôsobmi zadefinujeme operácie sčítania a násobenia a reláciu usporiadania, vždy budú platiť nasledujúce tvrdenia.

Axiomy súčtu:

Ku každým dvom reálnym číslam a, b existuje práve jedno reálne číslo c , ktoré je ich súčtom. Pritom pre všetky reálne čísla x, y, z platí:

1. $x + y = y + x$,
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3. $x + 0 = x$,
4. **Pre každé reálne číslo x existuje také reálne číslo $-x$, že $x + (-x) = 0$.**

Úvod nám hovorí, že sčítanie je binárna operácia na množine reálnych čísel. Prvá vlastnosť nám hovorí, že sčítanie je na množine reálnych čísel komutatívne. Druhá vlastnosť nám hovorí, že sčítanie je na množine reálnych čísel asociatívne. Tretia vlastnosť nám hovorí, že nula je neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie na množine reálnych čísel. Štvrtá vlastnosť nám hovorí, že každé reálne číslo má na množine reálnych čísel inverzný prvok vzhľadom na sčítanie.

Axiomy súčinu:

Ku každým dvom reálnym číslam a, b existuje práve jedno reálne číslo c , ktoré je ich súčinom. Pritom pre všetky reálne čísla x, y, z platí:

1. $x \cdot y = y \cdot x$,
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
3. $x \cdot 1 = x$ **pre každé $x \neq 0$,**
4. **Pre každé reálne číslo $x \neq 0$ existuje také reálne číslo x^{-1} , že $x \cdot x^{-1} = 1$,**
5. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Úvod nám hovorí, že násobenie je binárna operácia na množine reálnych čísel. Prvá vlastnosť nám hovorí, že násobenie je na množine reálnych čísel komutatívne. Druhá vlastnosť nám hovorí, že násobenie je na množine reálnych čísel asociatívne. Tretia vlastnosť

nám hovorí, že jednotka je neutrálny prvok vzhľadom na násobenie na množine nenulových reálnych čísel. Štvrtá vlastnosť nám hovorí, že každé nenulové reálne číslo má na množine reálnych čísel inverzný prvok vzhľadom na násobenie. Piata vlastnosť nám hovorí, že násobenie je na množine reálnych čísel distributívne vzhľadom na sčítanie.

Axiomy usporiadania:

Na množine reálnych čísel je definovaná relácia usporiadania $<$. Pritom pre všetky reálne čísla x, y, z :

1. platí práve jeden z výrokov $x < y, y < x, x = y$,

2. ak $x < y$ a $y < z$, potom $x < z$,

3. ak $x < y$, potom $x + z < y + z$,

4. ak $x > 0$ a $y > 0$, potom $x \cdot y > 0$.

5. Pre žiadne reálne číslo a neplatí $a < a$.

Prvá vlastnosť nám hovorí, že z dvoch rôznych reálnych čísel je vždy jedno menšie ako druhé. Druhá vlastnosť nám hovorí, že usporiadanie je na množine reálnych čísel tranzitívne. Tretia vlastnosť nám vyjadruje, že k oboj stranám nerovnice môžeme pričítať ľubovoľné reálne číslo. Štvrtá vlastnosť nám hovorí, že súčinom kladných reálnych čísel je vždy kladné reálne číslo. Piata vlastnosť nám hovorí, že žiadne reálne číslo nie je menšie ako ono samé.

Archimedova axioma:

Nech x, y sú ľubovoľné kladné reálne čísla. Potom existuje také prirodzené číslo n , že $n \cdot a > b$.

Táto vlastnosť nám hovorí, že ak si vezmeme dve ľubovoľné kladné reálne čísla, prvé hocako malé a druhé hocako veľké, potom vždy vieme vynásobiť to menšie číslo takým prirodzeným číslom, že ich súčin presiahne aj to veľké reálne číslo.