

Lineárne nerovnice s členom typu $ax+b$ v absolútnej hodnote

Riešenie nerovnic si opäť vysvetlíme na úlohách.

1. Riešme nerovnicu $|3x+7| \geq 4$.

Najskôr „odstránime z rovnice“ absolútnu hodnotu. Podľa definície absolútnej hodnoty sa absolútna hodnota kladného čísla rovná jemu samému a absolútna hodnota záporného čísla sa rovná „hodnote tohto čísla bez znamienka“. Teda musíme zistiť, kedy je $3x+7$ kladné a kedy záporné.

a) prípad, keď $3x+7 \geq 0$

Najprv upravíme podmienku $3x+7 \geq 0$.

$$3x+7 \geq 0$$

$$3x \geq -7$$

$$x \geq -\frac{7}{3}$$

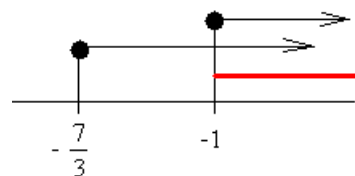
Pretože $3x+7 \geq 0$, bude $|3x+7| = 3x+7$, a teda riešime nerovnicu $3x+7 \geq 4$.

$$3x+7 \geq 4$$

$$3x \geq -3$$

$$x \geq -1$$

Výsledky oboch nerovnic si graficky znázorníme a určíme ich prienik. Prienikom je interval $\langle -1; \infty \rangle$.



b) prípad, keď $3x+7 < 0$

Najprv upravíme podmienku $3x+7 < 0$.

$$3x+7 < 0$$

$$3x < -7$$

$$x < -\frac{7}{3}$$

Pretože $3x + 7 < 0$, bude $|3x + 7| = -(3x + 7)$, a teda riešime nerovnicu $-(3x + 7) \geq 4$.

$$-(3x + 7) \geq 4$$

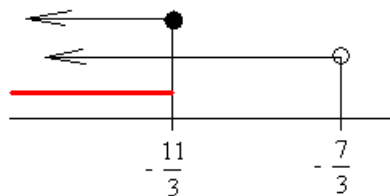
$$-3x - 7 \geq 4$$

$$-3x \geq 11$$

$$x \leq -\frac{11}{3}$$

Výsledky oboch nerovnic si graficky znázorníme a určíme ich prienik. Prienikom je interval

$$\left(-\infty; -\frac{11}{3}\right).$$



c) Záver: Riešením nerovnice je zjednotenie intervalov $K = \left(-\infty; -\frac{11}{3}\right) \cup \langle -1; \infty \rangle$.

2. Riešme nerovnicu $|7 - 4x| - 2x + 5 < 0$.

Najskôr „odstránime z rovnice“ absolútnu hodnotu. Podľa definície absolútnej hodnoty sa absolútna hodnota kladného čísla rovná jemu samému a absolútna hodnota záporného čísla sa rovná „hodnote tohto čísla bez znamienka“. Teda musíme zistiť, kedy je $7 - 4x$ kladné a kedy záporné.

a) prípad, keď $7 - 4x \geq 0$

Najprv upravíme podmienku $7 - 4x \geq 0$.

$$7 - 4x \geq 0$$

$$-4x \geq -7$$

$$x \leq \frac{7}{4}$$

Pretože $7 - 4x \geq 0$, bude $|7 - 4x| = 7 - 4x$, a teda riešime rovnicu $7 - 4x - 2x + 5 < 0$.

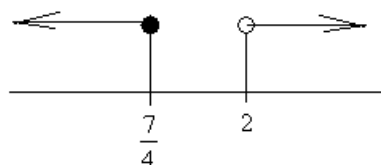
$$7 - 4x - 2x + 5 < 0$$

$$-6x + 12 < 0$$

$$-6x < -12$$

$$x > 2$$

Výsledky oboch nerovnic si graficky znázorníme a určíme ich prienik. Prienikom je prázdna množina.



b) prípad, keď $7 - 4x < 0$

Najprv upravíme podmienku $7 - 4x < 0$.

$$7 - 4x < 0$$

$$-4x < -7$$

$$x > \frac{7}{4}$$

Pretože $7 - 4x < 0$, bude $|7 - 4x| = -(7 - 4x)$, a teda riešime rovnicu $-(7 - 4x) - 2x + 5 < 0$.

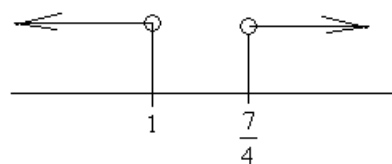
$$-(7 - 4x) - 2x + 5 < 0$$

$$-7 + 4x - 2x + 5 < 0$$

$$2x - 2 < 0$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$



Výsledky oboch nerovnic si graficky znázorníme
a určíme ich prienik. Prienikom je prázdna množina.

c) Záver: Nerovnica nemá žiadne riešenie, teda $K = \{ \}$.

Nerovnice typu $|x - a| \leq b$

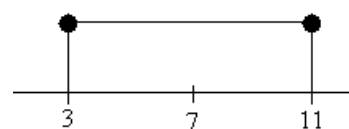
Nerovnica typu $|x - a| \leq b$ je špeciálnym typom nerovnice z predchádzajúcej podkapitoly, a preto by sme ju mohli riešiť rovnakým postupom ako v predchádzajúcej podkapitole. Ukážeme si však jednoduchšie riešenie využívajúce grafickú reprezentáciu.

Riešením nerovnice $|x - a| \leq b$ je množina všetkých reálnych čísel, ktorých vzdialenosť od čísla a je menšia alebo rovná číslu b .

Na nasledujúcich úlohách si vysvetlíme tento poznatok.

1. Riešme nerovnicu $|x - 7| \leq 4$.

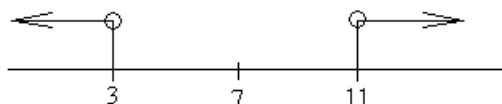
Podľa predchádzajúcej vety riešením nerovnice $|x - 7| \leq 4$ je množina všetkých reálnych čísel, ktorých vzdialenosť od čísla 7 je menšia alebo rovná 4. Situáciu si znázorníme graficky.



Vidíme, že riešením nerovnice $|x - 7| \leq 4$ je interval $K = \langle 3; 11 \rangle$.

2. Riešme nerovnicu $|x - 7| > 4$.

Analógiou riešenia predchádzajúcej úlohy dostaneme, že riešením nerovnice $|x - 7| > 4$ je množina všetkých reálnych čísel, ktorých vzdialenosť od čísla 7 je väčšia ako 4. Situáciu si znázorníme graficky.



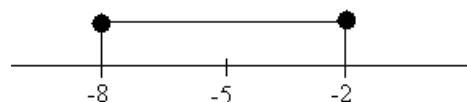
Vidíme, že riešením nerovnice $|x - 7| \leq 4$ je zjednotenie intervalov $K = (-\infty; 3) \cup (11; \infty)$.

3. Riešme nerovnicu $|x + 5| \leq 3$.

Na prvý pohľad to síce nie je nerovnica typu $|x - a| \leq b$, ale ľahko si ju na tento typ upravíme.

Stačí si uvedomiť, že $|x + 5| = |x - (-5)|$. Potom riešime

nerovnicu $|x - (-5)| \leq 3$. Jej riešením je množina všetkých reálnych čísel, ktorých vzdialenosť od čísla -5 je menšia alebo rovná 3. Situáciu si znázorníme graficky.



Vidíme, že riešením nerovnice $|x + 5| \leq 3$ je interval $K = \langle -8; -2 \rangle$.

4. Riešme nerovnicu $|x-5| < -3$.

Keďže absolútna hodnota nie je nikdy záporná, nemôže nikdy byť menšia ako -3 . Teda nerovnica nemá riešenie. Teda $K = \{ \}$.

5. Riešme nerovnicu $|x-5| \geq -3$.

Keďže absolútna hodnota nie je nikdy záporná, je vždy väčšia ako -3 . Teda riešením nerovnice je množina všetkých reálnych čísel. Teda $K = R$.

6. Riešme nerovnicu $|2x-8| < 3$.

Na prvý pohľad to síce nie je nerovnica typu $|x-a| \leq b$, ale ľahko si ju na tento typ upravíme.

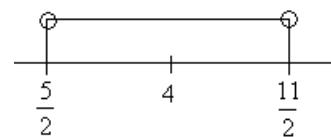
Postupujeme takto:

$$\begin{aligned} |2x-8| &< 3 \\ |2 \cdot (x-4)| &< 3 \\ |2| \cdot |x-4| &< 3 \\ 2 \cdot |x-4| &< 3 \\ |x-4| &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Všimnite si, že sme použili vzorec $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Riešením nerovnice $|x-4| < \frac{3}{2}$ je množina všetkých reálnych

čísel, ktorých vzdialenosť od čísla 4 je menšia alebo rovná $\frac{3}{2}$.



Situáciu si znázorníme graficky.

Vidíme, že riešením nerovnice $|x-4| < \frac{3}{2}$, a teda aj nerovnice $|2x-8| < 3$, je interval

$$K = \left(\frac{5}{2}; \frac{11}{2} \right).$$

7. Riešme nerovnicu $|8 - 4x| < 6$.

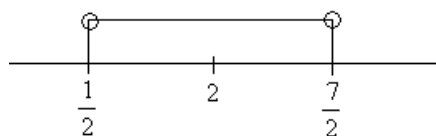
Na prvý pohľad to síce nie je nerovnica typu $|x - a| \leq b$, ale ľahko si ju na tento typ upravíme.

Postupujeme takto:

$$\begin{array}{ll} |8 - 4x| < 6 & 4 \cdot |x - 2| < 6 \\ |-4x + 8| < 6 & |x - 2| < \frac{6}{4} \\ |-4 \cdot (x - 2)| < 6 & |x - 2| < \frac{3}{2} \\ |-4| \cdot |x - 2| < 6 & |x - 2| < \frac{3}{2} \end{array}$$

Všimnite si, že sme opäť použili vzorec $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Riešením nerovnice $|x - 2| < \frac{3}{2}$ je množina všetkých reálnych čísel, ktorých vzdialenosť od čísla 2 je menšia alebo rovná $\frac{3}{2}$. Situáciu si znázorníme graficky.



Vidíme, že riešením nerovnice $|x - 2| < \frac{3}{2}$, a teda aj nerovnice $|8 - 4x| < 6$, je interval

$$K = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right).$$