

Ktoré čísla nie sú racionálne?

Zatiaľ sme si uviedli iba zopár príkladov na reálne čísla, ktoré nie sú racionálne. **Takéto čísla budeme nazývať iracionálne.** V skutočnosti ich je však nekonečne veľa, dokonca „viac“ ako racionálnych čísel. Teraz nájdeme nekonečne veľa príkladov na čísla, ktoré sú iracionálne. Tvrdenia však dokazovať nebudeme.

Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré nie je druhou mocninou iného prirodzeného čísla. Potom číslo $\sqrt{n}$ nie je racionálne.

Táto veta nám hovorí, že čísla $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \dots$ nie sú racionálne.

Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré nie je tretou mocninou iného prirodzeného čísla. Potom číslo $\sqrt[3]{n}$ nie je racionálne.

Táto veta nám hovorí, že čísla $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}, \dots$ nie sú racionálne.

S číslami, ktoré nie sú racionálne, sa stretávame aj pri riešení kvadratických rovníc. Vyriešme tri z nich.

$$x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 37$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 8$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{8}}{2} = 3 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{8}}{2} = 3 - \sqrt{2}$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

Ani jedno riešenie týchto troch rovníc nie je racionálne. V množine racionálnych čísel teda rovnice riešenie nemajú, ale v množine reálnych čísel má každá z nich dve riešenia.

Nech z je ľubovoľné celé číslo a r je číslo, ktoré nie je racionálne. Potom ani číslo $z + r$ nie je racionálne.

Táto veta nám hovorí, že čísla $3 + \sqrt{2}, -7 + \sqrt{11}, 33 + \sqrt{21}, -13 + \sqrt{34}, 7 + \sqrt{7}, \dots$ nie sú racionálne.

Nech z je ľubovoľné nenulové celé číslo a r je číslo, ktoré nie je racionálne. Potom ani číslo $z \cdot r$ nie je racionálne.

Táto veta nám hovorí, že čísla $3 \cdot \sqrt{2}, -7 \cdot \sqrt{11}, 33 \cdot \sqrt{21}, -13 \cdot \sqrt{34}, 7 \cdot \sqrt{7}, \dots$ nie sú racionálne.

Nech r je číslo, ktoré nie je racionálne. Potom ani číslo $\frac{1}{r}$ nie je racionálne.

Táto veta nám hovorí, že čísla $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{3+\sqrt{7}}, \dots$ nie sú racionálne.

Cieľom predchádzajúcich viet nebolo podať kompletný zoznam čísel, ktoré nie sú racionálne, ale poukázať na skutočnosť, že ich je skutočne veľa. Počas štúdia na strednej škole sme sa stretli aj s ďalšími príkladmi čísel, ktoré neboli racionálne, ale veľmi často ich používame napríklad v technickej praxi. Sú to napríklad čísla $e, \cos 20^\circ, \sin 40^\circ, \tan 35^\circ, \cotg 75^\circ, \dots$.

Vidíme teda, že bez rozšírenia množiny racionálnych čísel na reálne čísla by bola matematika „chudobná“ a nedokázala by opísať mnohé hodnoty a veličiny, s ktorými sa v bežnom živote stretávame.