

SLOVO NA ÚVOD

Jedným z hlavných cieľov štúdia na univerzite je naučiť študentov samostatne myslieť v rôznych odboroch. Cieľom predkladaného textu je jednoduchým spôsobom sprístupniť čitateľovi základné pojmy z elementárnej teórie čísel. Taktiež je našim zámerom, aby sa pojmy a ich vlastnosti nedostali k čitateľovi iba v sprostredkovanej podobe, ale aby ich mal možnosť spoznať sám, aby spoznal ich štruktúru a možnosti využitia. Preto sme väčšinu dôkazov iba naznačili a ich dokončenie ponechávame práve na čitateľa. Úlohy sme sa snažili zvoliť tak, aby čitateľ bol schopný po ich vyriešení samostatne uskutočniť dôkazy tvrdení. Takmer za každou úlohou je nejaký návod, ako pokračovať pri jej riešení. Samozrejme, že nie je bezpodmienečne nutné sa ním riadiť.

V matematike je často problematické motivovať študentov, presvedčiť ich, čo majú poznávať a prečo majú študovať jeden či druhý objekt. Existuje totiž veľké množstvo iných matematických objektov, ktoré sú tiež veľmi zaujímavé, od konkrétnych až po veľmi abstraktné. Nie je možné tvrdiť, že ten či onen je jednoduchší. Základnou štruktúrou v matematike sú prirodzené čísla. Preto by mal každý matematik poznať ich základné vlastnosti. Platí to najmä pre učiteľov matematiky, ktorí počas celého svojho života pracujú s ich historickými základmi. Tento učebný text by chcel byť istým jednoduchým pohľadom na ich časť.

Prvá časť učebných textov sa venuje základným faktom o množine prirodzených a celých čísel. Pripomínáme si tu relácie deliteľnosti, usporiadania podľa veľkosti a ich základné vlastnosti. Taktiež sú tu definované funkcie celá časť a zlomková časť. Uvedené poznatky v ďalších kapitolách využívame pri riešení diofantických rovníc a pri štúdiu racionality a iracionality reálnych čísel. Taktiež tu spomíname pytagorovské trojuholníky.

Potom nasleduje časť o aritmetických funkciách. Definujeme aritmetické funkcie τ, φ, μ a uvádzame pojem multiplikatívnej aritmetickej funkcie. S multiplikatívnou aritmetickou funkciou σ súvisí pojem dokonalého čísla, ktorý bol známy už v časoch starogréckych matematikov. Taktiež definujeme dirichletovu konvolúciu týchto funkcií a dokazujeme Möbiovu inverznú formulu, ktorá nám umožňuje najstť explicitný vzorec pre Eulerovu funkciu φ .

V časti kongruencie definujeme lineárnu a kvadratickú kongruenciu, uvádzame Malú Fermatovu vetu, Eulerovu vetu a čínsku zvyškovú vetu, pomocou ktorej uskutočňujeme prirodzenejší dôkaz pre explicitný vzorec čínskej zvyškovej vety. V závere tejto časti nájdeme čitateľ Wilsonovu vetu.

V časti venovanej prvočíslam dokážeme, že prvočísel je nekonečne veľa. Uvádzame tu dva špeciálne prípady Dirichletovej vety, ktorá hovorí o prvočíslach v aritmetických postupnostiach. Čitateľ tu nájde aj výsledok hovoriaci o tom, aké dlhé prvočíselné úseky sa môžu vyskytovať v aritmetických postupnostiach.

V ďalšej časti uvádzame Lagrangeovu vetu, ktorá nám vraví, že daná kongruencia nemá viac riešení ako je jej stupeň. Taktiež ukazujeme jej využitie pri dôkaze Wilsonovej vety. Poznamenajme, že Lagrangeovu vetu potom využívame najmä v kapitole Gaussov kvadratický zákon reciprocity.

Základným výsledkom o rozdelení prvočísel v postupnosti prirodzených čísel je prvočíselná veta. V časti venovanej tejto vete neuvádzame jej dôkaz, nakoľko je príliš zložitý. Uvádzame však tvrdenie, ktoré je s danou vetou ekvivalentné a ktoré pojem prvočísla vôbec neobsahuje.

Veľkosť, respektíve bohatosť množiny prirodzených čísel môžeme charakterizovať jej asymptotickou hustotou. V tomto učebnom texte uvádzame jej základné vlastnosti a taktiež zaujímavé kritérium o tom, kedy má množina nulovú asymptotickú hustotu. Nájdeme ho v kapitole nulová veta.

Výsledky, ktoré sa týkajú veľkosti počtu prvočísel nepresahujúcich dané číslo, nájdeme v kapitole Čebyševove nerovnosti.

Predstavu o rozložení prvočísel na číselnej osi nám dáva Bertrandov postulát. Jeho dôkaz je v časti nazvanej dôkaz Bertrandovho postulátu.

Kapitola lineárne rekurentné postupnosti sa zaoberá hľadaním ich explicitných vzorcov.

V časti algebraické štruktúry uvádzame základné vlastnosti grúp a telies a tieto pojmy potom využívame pri štúdiu vlastností čísel.

Záverečné kapitoly sú venované problematike spojenej s vyjadrením čísel v tvare súčtu mocnín a mocninovým rozvojom reálnych čísel. Dokazujeme tu známu súvislosť racionality a typu mocninového rozvoja.

Celý učebný text nevyžaduje takmer žiadne vstupné vedomosti z matematiky mimo rozsahu strednej školy, iba v časti Čebyševove nerovnosti pri dôkaze Bertrandovho postulátu vyžaduje elementárne poznatky o logaritmických funkciách.

Na záver poznamenajme, že teória čísel je spolu s geometriou najstaršou disciplínou matematiky. Jej poznatky siahajú až do antického grécka. Stručne môžeme jej históriu charakterizovať menami Euklides, Pytagoras, Euler, Gauss, Lagrange, Čebyšev, Vinogradov, Erdős a mnoho ďalších.

Predkladaný učebný text vznikol z prekladu skrípt [P-S] do slovenčiny, ktorý je doplnený o niektoré časti. Na rozdiel od českého originálu sú tvrdenia v doplnených častiach dokazované. Tieto pasáže sú písané kurzívou. Rovnako sú pridané aj niektoré príklady ktoré sú na rozdiel od pôvodného textu označované ako cvičenia a nie ako úlohy.

Na záver by sme chceli poďakovať recenzentom, RNDr. Stanislavovi Jakubcovi, DrSc. a doc. RNDr. Karolovi Nemogovi, CSc. z Matematického ústavu SAV, ktorí starostlivo prečítali celý učebný text a svojimi kritickými pripomienkami nepochybne prispeli k jeho skvalitneniu.