6. ARITMETICKÉ FUNKCIE

Funkcie definované na množine $\mathbb{N}$ budeme nazývať *aritmetické funkcie.* V tejto kapitole sa zoznámime s niektorými jednoduchými aritmetickými funkciami a ich vlastnosťami. Ak f je aritmetická funkcia, potom jej hodnotu v čísle n budeme označovať symbolom $f(n)$. V prípade, že existuje pre danú aritmetickú funkciu dohodnuté označenie, budeme ju označovať malým gréckym písmenom, napr. τ, φ a jej hodnotu budeme označovať $\tau(n), \varphi(n)$.

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom symbolom $\tau(n)$ budeme označovať počet prirodzených čísel, ktoré sú deliteľmi čísla n. Symbolicky to budeme zapisovať

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \tag{11}$$

kde sumu realizujeme cez všetky delitele d čísla n. Našou snahou bude vyjadriť hodnotu $\tau(n)$ pomocou kanonického rozkladu čísla n. Neskôr si ukážeme viacero aritmetických funkcií, ktorých hodnoty vieme takýmto spôsobom vyjadriť.

Úloha 78. Nech $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Potom $d|n$ práve vtedy, keď

$$d = p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k},$$

kde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pre $i = 1, ..., k$.

Úloha 79. Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$. Potom každý deliteľ čísla $m \cdot n$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $d = d_1 d_2$, kde $d_1|m$ a $d_2|n$. Naviac, ak $d_1|m$ a $d_2|n$, potom $d_1 d_2|m \cdot n$.

Úloha 80. Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$. Potom

$$\tau(m \cdot n) = \tau(m) \cdot \tau(n).$$

Úloha 81. Nech p je prvočíslo a $\alpha \in \mathbb{N}$. Dokážte, že

$$\tau(p^\alpha) = \alpha + 1.$$

Úloha 82. Nech $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ a $(m_i, m_j) = 1$ pre $i \neq j$. Potom

$$\tau(m_1...m_k) = \tau(m_1)...\tau(m_k).$$

Dokážte.

Úloha 83. Nech $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Potom

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)...(\alpha_k + 1).$$

Dokážte.

Aritmetickú funkciu f budeme nazývať *multiplikatívna*, ak pre každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$(m, n) = 1 \Rightarrow f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n).$$

Úloha 84. Nech $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ a $(m_i, m_j) = 1$ pre $i \neq j$. Potom pre multiplikatívnu aritmetickú funkciu f platí

$$f(m_1 ... m_k) = f(m_1) ... f(m_k).$$

Dokážte.

Ak f, g sú dve aritmetické funkcie, potom aritmetickú funkciu h určenú vzťahom

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$$

pre $n \in \mathbb{N}$ nazývame *dirichletovou konvolúciou* funkcií f, g a označujeme ju symbolom

$$h = f * g.$$

Cvičenie 1. Dokážte, že $\tau = E * E$, kde $E(n) = 1$ pre $n = 1, 2, ...$

Cvičenie 2. Nech f, g sú ohraničené aritmetické funkcie. Dokážte, že pre $s > 1$ platí

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

kde $h = f * g$.

Úloha 85. Ak f, g sú dve aritmetické funkcie, potom

$$f * g = g * f.$$

Dokážte.

Úloha 86. Nech f, g sú dve multiplikatívne aritmetické funkcie. Ak $n \in \mathbb{N}$ a p je také prvočíslo, pre ktoré platí, že $(p, n) = 1$, potom pre každé $\alpha \in \mathbb{N}$ platí

$$(f * g)(np^{\alpha}) = (f * g)(n)(f * g)(p^{\alpha}).$$

Dokážte.

Úloha 87. Ak f, g sú dve multiplikatívne aritmetické funkcie, potom aj $f * g$ je multiplikatívna aritmetická funkcia. Dokážte.

(Návod: Postupujte matematickou indukciou pomocou úlohy 86.)

Ak n je prirodzené číslo, potom symbolom $\sigma(n)$ budeme označovať súčet jeho deliteľov. Zapisujeme to nasledovne:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Úloha 88. Dokážte, že σ je multiplikatívna aritmetická funkcia.

(Návod: Uvedomte si, že $\sigma = E * i$, kde $E(n) = 1$, $n = 1, 2, ...$ a $i(n) = n$, $n = 1, 2, ...$, E. Taktiež i sú multiplikatívne aritmetické funkcie. Použite úlohu 87.)

Úloha 89. Nech $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Potom

$$\sigma(n) = \tfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot ... \cdot \tfrac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 88 a úlohu 84. Vypočítajte $\sigma(p^\alpha)$ pre prvočíslo p.)

Nech pre $n \in \mathbb{N}$ symbol $\sigma_s(n)$ označuje súčet s-tých mocnín deliteľov čísla n.

Úloha 90. Dokážte, že σ_s je multiplikatívna aritmetická funkcia.

Úloha 91. Nech $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Potom pre $s \neq 0$

$$\sigma_s(n) = \tfrac{p_1^{s(\alpha_1+1)}-1}{p_1^s-1} \cdot ... \cdot \tfrac{p_k^{s(\alpha_k+1)}-1}{p_k^s-1}.$$

Dokážte.

Úloha 92. Nech f je multiplikatívna aritmetická funkcia. Potom

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{\alpha_i} f(p_i^r),$$

kde $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 87 a skutočnosť, že funkcia $E(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$ je multiplikatívna.)

Teraz sa budeme zaoberať tvrdením, ktoré je známe pod názvom *Möbiova inverzná formula.* Pomocou nej môžeme vypočítať hodnoty aritmetických funkcií, ak poznáme hodnoty iných aritmetických funkcií. Používa takzvanú *Möbiovu funkciu,* ktorú označujeme μ a definujeme ju nasledovne.

Nech

$$\mu(1) = 1.$$

Ak $p_1, ..., p_k$ sú rôzne prvočísla, potom

$$\mu(p_1...p_k) = (-1)^k$$
a ak existuje $a > 1$, $a \in \mathbb{N}$ také, že $a^2|n$, potom
$$\mu(n) = 0.$$

Úloha 93. Dokážte, že μ je multiplikatívna funkcia.

Teraz definujme funkciu I nasledovne.
$$I(n) = 1, \text{ ak } n = 1,$$
$$I(n) = 0, \text{ ak } n > 1.$$

Úloha 94. Dokážte, že I je multiplikatívna funkcia.

Ďalej budeme definovať funkciu
$$E(n) = 1, \quad n = 1, 2, ...$$
Teda E je aritmetická funkcia rovná 1.

Úloha 95. Dokážte, že
$$I * g = g = g * I$$
pre každú aritmetickú funkciu g.

Úloha 96. Dokážte, že
$$\mu * E = I.$$

(Návod: Použite úlohu 92.)

Cvičenie 3. Dokážte, že pre $s > 1$ platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \Big)^{-1}.$$

Cvičenie 4. Dokážte, že pre $s > 1$ platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Big(\prod_{p} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\Big)^{-1}.$$

Úloha 97. Dokážte, že
$$(h_1 * h_2) * h_3 = h_1 * (h_2 * h_3)$$
pre ľubovoľné aritmetické funkcie h_1, h_2, h_3.

Veta 6. Nech g, h sú aritmetické funkcie. Potom

$$h(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

práve vtedy, keď

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) h(\frac{n}{d}).$$

Úloha 98. Dokážte vetu 6.

(Návod: Stačí si uvedomiť, že prvá rovnosť znamená, že $h = E * g$, druhá, že $g = \mu * h$ a použiť úlohy 95, 96 a 97.)

Veta 6 je už spomínaná Möbiova inverzná formula. Jej použitie si ukážeme na výpočte explicitného vzorca pre tzv. Eulerovu funkciu.

Ak A je konečná množina, potom symbolom $|A|$ označujeme počet prvkov množiny A. Formálne to môžeme vyjadriť $|A| = \sum_{a \in A} 1$. Ako sumačný index tu vystupujú prvky množiny A a sčitujeme jednotky.

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom symbolom $\varphi(n)$ označujeme počet prirodzených čísel menších alebo rovných n, ktoré sú s číslom n nesúdeliteľné. Takto definovanú aritmetickú funkciu φ nazývame *Eulerova funkcia*. Poznamenajme, že v teórii čísel má veľmi dôležitú úlohu. Môžeme ju teda vyjadriť vzťahom

$$\varphi(n) = |\{k \leq n : (n,k) = 1\}|$$

alebo inak zapísané

$$\varphi(n) = \sum_{k \leq n, (n,k)=1} 1$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$.

V nasledujúcom texte uvidíme, že táto množina má obrovský význam.

Úloha 99. Nech $n, d \in \mathbb{N}$ a $d|n$. Potom pre každé prirodzené číslo k platí

$$(k,n) = d \Longleftrightarrow k = k'd \quad \text{, kde } (k', \tfrac{n}{d}) = 1.$$

Dokážte.

(Návod: Použite vetu 2 a úlohy 16 a 30.)

Úloha 100. Nech $n, d \in \mathbb{N}$ a $d|n$. Označme $M_d = \{k \leq n : (n,k) = d\}$. Dokážte, že $|M_d| = \varphi(\frac{n}{d})$.

Úloha 101. Nech pre $n, d \in \mathbb{N}$ a $d|n$, M_d má rovnaký význam ako v úlohe 100. Dokážte, že:

a) $M_{d_1} \cap M_{d_2} = \emptyset$ pre $d_1 \neq d_2$,

b) $\bigcup\limits_{d|n} M_d = \{1, 2, \dots, n\}$.

Úloha 102. Nech $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že

$$\sum_{d|n} \varphi\Big(\frac{n}{d}\Big) = n.$$

Úloha 103. Nech $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Úloha 104. Nech $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že

$$n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \varphi(n).$$

(Návod: Použite Möbiovu inverznú formulu, teda vetu 6 a jednu z úloh 102 alebo 103.)

Úloha 105. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Potom

$$\varphi(n) = n\Big(1 - \tfrac{1}{p_1}\Big) ... \Big(1 - \tfrac{1}{p_k}\Big).$$

Dokážte.

Návod: Použite multiplikatívnosť aritmetickej funkcie

$$h(n) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Iný dôkaz tohto vzorca je založený na tom, že použitím takzvanej čínskej zvyškovej vety dokážeme multiplikatívnosť Eulerovej funkcie a vypočítame jej hodnoty v mocninách prvočísel. Tento dôkaz nájdeme v nasledujúcej kapitole.

— — — — — — — — — — — —

Spomínané aritmetické funkcie sa správajú dosť nepravidelne, čo súvisí s rozložením prvočísel, resp. s kanonickým rozkladom. Elementárne sa však dajú odvodiť niektoré limitné rovnosti.

Veta A.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\,logN} \sum_{n\leq N} \tau(n) = 1.$$

Dôkaz. Pre $N = 1, 2, ...$ *platí*

$$\sum_{n\leq N} \tau(n) = \sum_{n\leq N} \sum_{d|N} 1 = \sum_{d\leq N, k\cdot d\leq N} 1.$$

Poslednú rovnosť sme dostali tak, že sme n *vyjadrili v tvare* $k \cdot d$. *Teda dostávame*

$$\sum_{n\leq N} \tau(n) = \sum_{d\leq N} \sum_{k\leq \frac{N}{d}} 1 = \sum_{d\leq N} [\frac{N}{d}].$$

Keď uvážime, že $[\frac{N}{d}] = \frac{N}{d} - \{\frac{N}{d}\}$ *a* $0 \leq \{\frac{N}{d}\} \leq 1$, *dostávame nakoniec z poslednej rovnosti*

$$\sum_{n\leq N} \tau(n) = N \cdot \sum_{d\leq N} \frac{1}{d} + E_N,$$

kde $|E_N| \leq N$. *Preto pre* $N = 2, 3, ...$

$$\frac{1}{N \cdot logN} = \frac{\sum\limits_{d\leq N} \frac{1}{d}}{logN} + \frac{E_N}{N \cdot logN}.$$

Posledný sčítanec konverguje k nule. Stačí dokázať, že

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{d\leq N} \frac{1}{d}}{logN} = 1. \tag{$*$}$$

Z monotónnosti funkcie $\frac{1}{x}$ *na* $\langle 1; \infty)$ *dostávame*

$$\frac{1}{d+1} \leq \int_d^{d+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{d}$$

a teda

$$\tfrac{1}{d+1} \leq log(d+1) - logd \leq \tfrac{1}{d}.$$

Po sčítaní dostávame

$$\sum_{d=1}^{N-1} \frac{1}{d+1} \leq logN - log2 \leq \sum_{d=1}^{N-1} \frac{1}{d}.$$

Z týchto nerovností už vyplýva $(*)$.

Pomocou takzvanej Eulerovej sumačnej formuly sa dá odvodiť aj presnejší odhad pre

$$\sum_{d\le N}\frac{1}{d}$$

ako $(*)$.

Predmetom záujmu je aj Eulerova funkcia $\varphi(n)$. *Dokážeme limitnú formulu pre aritmetické priemery postupnosti* $\frac{\varphi(n)}{n}$.

Veta B.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{6}{\pi^2}.$$

Na dôkaz použijeme cvičenie 4. Pomocou Fourierovej analýzy je dokázané, že

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

a teda podľa cvičenia 4 dostávame

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{6}{\pi^2}.$$

Dôkaz.

Podľa úlohy 104 dostávame pre $N=1,2,...$

$$\sum_{n\le N}\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{n\le N}\sum_{d|N}\frac{\mu(d)}{d}. \tag{$**$}$$

Podobne ako v dôkaze vety A potom platí

$$\sum_{n\le N}\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{k\cdot d\le N}\frac{M(d)}{d}=\sum_{d\le N}\sum_{k\le\frac{N}{d}}\frac{\mu(d)}{d}=$$

$$=\sum_{d\le N}\left[\frac{N}{d}\right]\frac{\mu(d)}{d}=N\cdot\sum_{d\le N}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d\le N}\left\{\frac{N}{d}\right\}\frac{\mu(d)}{d}.$$

Určite platí

$$\Big| \sum_{d \le N} \left\{ \frac{N}{d} \right\} \frac{\mu(d)}{d} \Big| \le \sum_{d \le N} \frac{1}{d}$$

a preto podľa $(*)$ *dostávame*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{d \le N} \left\{ \frac{N}{d} \right\} \frac{\mu(d)}{d} = 0.$$

Z toho podľa $(**)$ *dostávame vetu B.*

Cvičenie. *Dokážte*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}.$$