5. PYTAGOROVSKÉ TROJUHOLNÍKY

Uvažujme pravouhlý trojuholník so stranami, ktoré majú celočíselnú dĺžku. Nech x, y sú odvesny tohto trojuholníka a z je prepona tohto trojuholníka. Z Pytagorovej vety vyplýva, že platí vzťah

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{9}$$

Vidíme, že ak chceme nájsť všetky Pytagorovské trojuholníky, stačí nájsť všetky riešenia diofantickej rovnice (9) s neznámymi x, y, z. Trojicu celých kladných čísel $\{x, y, z\}$ budeme nazývať *pytagorovským trojuholníkom*, ak spĺňa rovnicu (9). Takto sme geometrickú predstavu transformovali do jazyka čísel a odteraz pri riešení tohto problému budeme pracovať iba s číslami.

Úloha 67. Ak $\{x, y, z\}$ je pytagorovský trojuholník, potom aspoň jedno z čísel x, y je párne. Dokážte.
(Návod: Použite úlohu 66.)

Najskôr dokážeme, že existuje nekonečne veľa pytagorovských trojuholníkov.

Úloha 68. Dokážte, že trojica $\{3n, 4n, 5n\}$ pre $n = 1, 2, \dots$ je vždy pytagorovským trojuholníkom.

Teraz budeme hľadať všetky pytagorovské trojuholníky.

Trojicu $\{x, y, z\}$ budeme nazývať *primitívnym pytagorovským trojuholníkom*, ak je pytagorovským trojuholníkom a ak $(x, y, z) = 1$.

Úloha 69. Dokážte, že pytagorovský trojuholník $\{x, y, z\}$ je primitívny pytagorovský trojuholník práve vtedy, keď $(x, y) = 1$ alebo $(x, z) = 1$ alebo $(y, z) = 1$.

Teraz si ukážeme jedno jednoduché pomocné tvrdenie.

Úloha 70. Nech x, y, z sú prirodzené čísla. Potom

$$\left(\tfrac{x}{(x,y,z)}, \tfrac{y}{(x,y,z)}, \tfrac{z}{(x,y,z)}\right) = 1.$$

(Návod: Použite úlohu 16.)

Úlohu si najskôr zredukujeme na hľadanie primitívnych pytagorovských trojuholníkov. Ich vlastnosti sú obsahom nasledujúcej úlohy.

Úloha 71.
a) Ak $\{x, y, z\}$ je primitívny pytagorovský trojuholník, potom práve jedno z čísel x, y je párne.

b) Ak $\{x, y, z\}$ je pytagorovský trojuholník a $a \in \mathbb{N}$, potom aj $\{ax, ay, az\}$ je pytagorovský trojuholník.
c) Každý pytagorovský trojuholník môžeme vyjadriť v tvare $\{ax, ay, az\}$, kde $\{x, y, z\}$ je primitívny pytagorovský trojuholník.
(Návod: Na dôkaz časti a) použite úlohu 66.)

Nech x je párne. Rovnicu (9) si môžeme transformovať na tvar

$$(z - x)(z + x) = y^2. \tag{10}$$

Teraz je vhodné pripomenúť si úlohu 37. Aby sme ju mohli použiť, musíme dokázať nasledujúcu úlohu.

Úloha 72. Ak $\{x, y, z\}$ je primitívny pytagorovský trojuholník, potom

$$(z - x, z + x) = 1.$$

Dokážte.
(Návod: Čísla $z - x, z + x$ sú podľa úlohy 71 nepárne a ich deliteľ delí aj ich súčet a rozdiel.)

Úloha 73. Nech $\{x, y, z\}$ je primitívny pytagorovský trojuholník. Potom existujú také prirodzené čísla u_1, v_1, že platí

$$x = \tfrac{u_1^2 - v_1^2}{2},\ y = u_1 v_1,\ z = \tfrac{u_1^2 + v_1^2}{2}.$$

Úloha 74. Nech u_1, v_1 sú čísla z úlohy 73. Dokážte, že $2 | u_1 - v_1$.

Úloha 75. Nech $\{x, y, z\}$ je primitívny pytagorovský trojuholník a nech $2|x$. Potom existujú prirodzené čísla u, v také, že platí

$$x = 2uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + v^2.$$

(Návod: Použite $u_1 - v_1 = 2v, u_1 + v_1 = 2u$, pretože podľa úlohy 74 sú to párne čísla.)

Úloha 76. Nech $\{x, y, z\}$ je primitívny pytagorovský trojuholník a pre prirodzené čísla u, v platí

$$x = 2uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + v^2.$$

Potom $(u, v) = 1$. Dokážte.

Úloha 77. Dokážte, že každý pytagorovský trojuholník $\{x, y, z\}$ môžeme vyjadriť v tvare

$$x = 2auv,\ y = a(u^2 - v^2),\ z = a(u^2 + v^2),$$

kde $a, u, v \in \mathbb{N}$ a $(u, v) = 1$.
(Návod: Použite úlohu 76 a úlohu 70.)

Cvičenie. Riešte diofantickú rovnicu

$$x^2 + y^2 = 2^z.$$

— — — — — — — — — — — —

V minulosti sa vyskytol problém, ako riešiť diofantickú rovnicu

$$x^n + y^n = z^n$$

pre $n > 2$. Pre niektoré n, napríklad pre $n = 3$, bolo už dávno dokázané, že táto rovnica nemá netriviálne riešenie, teda také, že $x > 0, y > 0, z > 0$. Problém neexistencie riešenia tejto rovnice pre $n > 2$ je známy pod názvom Fermatova hypotéza. Táto hypotéza bola pomenovaná podľa francúzskeho matematika Pierre Fermata, ktorý ju uviedol ako prvý. Viac ako 300 rokov nebola táto hypotéza ani dokázaná, ani vyvrátená. Až v roku 1995 ju definitívne dokázal anglický matematik John Wiles.