

4. DIOFANTICKÉ ROVNICE VYŠŠÍCH STUPŇOV

Ako sme už uviedli v tretej kapitole, pod pojmom diofantická rovnica rozumieme takú rovnicu, ktorej neznáme hľadáme v množine celých čísel.

Úloha 59. Riešte diofantickú rovnicu

$$(2x + 3y)(x + 2y) = 1.$$

(Návod: Ak x, y sú celé čísla, potom $2x + 3y = \pm 1$, $x + 2y = \pm 1$, aby ich súčin bol 1.)

Úloha 60. Dokážte, že diofantická rovnica

$$(2x + 3y)(6x + 9y) = 1$$

nemá riešenie.

Úloha 61. Nech a, b, c, d, e sú celé čísla. Nech $|ac - bd| = 1$. Potom diofantická rovnica

$$(ax + by)(cx + dy) = e$$

má vždy riešenie.

Úloha 62. Nech kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má korene x_1, x_2 . Dokážte, že

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a(x - x_1y)(x - x_2y).$$

(Návod: Uvažujte, že $ax^2 + bxy + cy^2 = y^2(a(\frac{x}{y})^2 + b(\frac{x}{y}) + c)$.)

Úloha 63. Riešte diofantickú rovnicu

$$6x^2 - 5xy + y^2 = 21.$$

(Návod: Rozložte polynóm $6x^2 - 5xy + y^2$ na dva činitele a uveďte si, že musia byť deliteľmi čísla 21.)

Úloha 64. Riešte diofantickú rovnicu

$$2x + 2y = xy.$$

Úloha 65. Dokážte, že neexistujú celé čísla x, y také, že

$$x^2 - y^2 = 2.$$

Úloha 66. Dokážte, že neexistujú celé čísla x, y také, že

$$x^2 = 4y + 2$$

alebo

$$x^2 = 4y + 3.$$

(Návod: Uvedomte si, čo sa stane, ak 2 delí x a ak 2 nedelí x .)

Úloha 66 nám hovorí, že druhá mocnina celého čísla je buď deliteľná číslom 4, alebo po delení číslom 4 dáva zvyšok 1. Tento poznatok využijeme v nasledujúcej časti.

Špeciálnym prípadom diofantických rovníc druhého stupňa sú rovnice tvaru

$$x^2 - Ay^2 = 1. \quad (*)$$

Ak $A = m^2, m \in \mathbb{Z}$, rovnica $(*)$ sa dá riešiť predchádzajúcim spôsobom pomocou rozkladu. Ak $A \neq m^2$ pre každé $m \in \mathbb{Z}$, tak rovnicu $(*)$ nazývame Pellova rovnica. Dá sa dokázať, že táto rovnica má nekonečne veľa riešení. Jej riešenia sú dané vzťahom $x + \sqrt{my} = (x_0 + \sqrt{my_0})^n, n = 1, 2, \dots$, kde $x_0 + \sqrt{my_0}$ je najmenšie číslo, pre ktoré $x_0^2 - my_0^2 = 1, x_0 > 0, y_0 > 0$. Takéto riešenie sa nazýva **fundamentálne**. Je dokázané, že vždy existuje.