3. LINEÁRNE DIOFANTICKÉ ROVNICE

Rovnicu tvaru

$$ax + by = c \tag{8}$$

kde a, b sú známe celé čísla a x, y sú neznáme, ktoré majú nadobúdať celočíselné hodnoty, nazývame *lineárnou diofantickou rovnicou s dvoma neznámymi.*

Rovnice, v ktorých neznáme hľadáme v množine celých čísel, nazývame diofantické podľa antického matematika Diofanta, ktorý žil v šiestom storočí pred našim letopočtom. Už skutočnosť, že sa v tej dobe riešili takéto problémy, poukazuje na stupeň dôležitosti, aký pripisoval antický svet číslam.

Je jednoduché dokázať, že ak $a, b \neq 0$ a ak nepredpokladáme, že x, y sú celé čísla, potom má rovnica (8) nekonečne veľa riešení. Graficky ich možno znázorniť ako priamku. Riešiť lineárnu diofantickú rovnicu teda znamená nájsť tzv. *mrežové body*, teda body s celočíselnými súradnicami, na tejto priamke. V tomto prípade je situácia komplikovanejšia.

Úloha 50. Nech $d = (a, b)$. Ak rovnica (8) má celočíselné riešenie, potom $d|c$. Dokážte.

Úloha 51. Nech $d = (a, b)$. Ak $d|c$, potom rovnica (8) má celočíselné riešenie.

(Návod: Použite vetu 2.)

Teraz stojíme pred problémom, ako môžeme nájsť všetky celočíselné riešenia rovnice (8). Ak $(a, b) = 1$, potom podľa tvrdenia v úlohe 51 má vždy rovnica (8) celočíselné riešenie. Podľa úlohy 39 vidíme, že rovnicu (8) môžeme v prípade, že $d|c$, previesť na tento prípad.

V tomto prípade označujeme $\{x, y\}$ usporiadanú dvojicu, lebo symboly $[x, y]$ a (x, y) už majú iný význam.

Úloha 52. Nech $\{x_0, y_0\}$, $\{x_1, y_1\}$ sú riešenia rovnice (8). Označme $x' = x_0 - x_1$, $y' = y_0 - y_1$. Dokážte, že dvojica $\{x', y'\}$ je riešením rovnice

$$ax + by = c.$$

Úloha 53. Nech $\{x, y\}$ je riešením rovnice $ax + by = 0$, kde $(a, b) = 1$. Potom existuje také celé číslo t, že

$$x = bt \quad , \quad y = -at. \tag{9}$$

Úloha 54. Dokážte, že každá dvojica $\{x, y\}$ určená vzťahom (9) je riešením rovnice $ax + by = 0$.

Úloha 55. Nech $\{x_0, y_0\}$ je jedným z riešení rovnice
$$ax + by = c,$$
kde $(a, b) = 1$. Potom všetky riešenia tejto rovnice môžeme vyjadriť v tvare
$$x = x_0 + bt,$$
$$y = y_0 - at,$$
pričom $t \in \mathbb{Z}$. Dokážte.

Úloha 56. Nech $d = (a, b)$ a $d|c$. Nech $\{x_0, y_0\}$ je riešením rovnice (8). Potom všetky riešenia rovnice (8) sú určené vzťahmi
$$x = x_0 + \tfrac{b}{d}t,$$
$$y = y_0 - \tfrac{a}{d}t,$$
pričom $t \in \mathbb{Z}$.

Zostáva už iba otázka, ako nájsť aspoň jedno riešenie rovnice (8). Odpoveď nájdeme v úlohách 21, 22 a 23.

Úloha 57. Nech $d|c$ a $am + bn = d$. Potom čísla $x_0 = m \cdot \frac{c}{d}$, $y_0 = n \cdot \frac{c}{d}$ sú riešením rovnice
$$ax + by = c.$$
Dokážte.

Vidíme, že ak $d|c$, potom jedno riešenie rovnice (8) môžeme nájsť pomocou Euklidovho algoritmu. Môžeme však postupovať aj skusmo podľa nasledujúcej úlohy.

Úloha 58. Ak rovnica (8) má riešenie, potom má aspoň jedno riešenie $\{x_0, y_0\}$ také, že $0 \leq x_0 < b$. Dokážte.
(Návod: Nech $\{x, y\}$ je riešením rovnice (8). Potom x môžeme vyjadriť v tvare $x = bq + x_0$, kde $0 \leq x_0 < b$. Dokážte, že k tomuto x_0 existuje y_0 s požadovanou vlastnosťou.)

Ukázali sme, že otázka riešenia lineárnych diofantických rovníc je úplne vyriešená. Komplikovanejší je prípad riešenia diofantických rovníc vyšších stupňov.