

23. MOCNINOVÉ ROZVOJE REÁLNÝCH ČÍSEL

V záverečnej kapitole týchto učebných textov sa budeme venovať rozvoju reálneho čísla do tvaru mocninového radu, teda takzvaným g -adickým rozvojom. Ich špeciálnym prípadom sú dekadické rozvoje, v ktorých $g = 10$. Dokážeme existenciu tohto rozvoja pre každé reálne číslo a pomocou výsledkov zo siedmej kapitoly si ukážeme kritériá racionality a iracionality. Budeme sa zaoberať iba kladnými reálnymi číslami.

Každé reálne číslo môžeme vyjadriť v tvare

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}. \quad (38)$$

Preto najskôr vyriešime prípad prirodzených čísel a potom čísel patriacich do intervalu $[0, 1)$. Dokážeme nasledujúce tvrdenie.

Veta 31. Nech $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Potom každé prirodzené číslo a môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare

$$a = c_n g^n + \dots + c_1 g + c_0, \quad (39)$$

kde $0 \leq c_i < g, i = 0, \dots, n$.

Rozvoj (39) nazývame g -adickým rozvojom čísla a . Najprv matematickou indukciou dokážeme jeho existenciu.

Úloha 540. Dokážte, že každé číslo $a \in [0, g)$ sa dá vyjadriť v tvare (39).

Úloha 541. Ak $a \in [g^{n-1}, g^n)$, potom

$$a = a'g + r$$

kde $a' \in [g^{n-2}, g^{n-1}), 0 \leq r < g$.

Úloha 542. Dokážte matematickou indukciou vzhľadom na n , kde $a \in [g^{n-1}, g^n)$ existenciu vyjadrenia (39) pomocou úloh 540 a 541.

Ešte je potrebné dokázať jednoznačnosť koeficientov c_i vo vzťahu (39).

Úloha 543. Nech a má tvar (39). Dokážte, že

$$a \bmod g^j = c_{j-1}g^{j-1} + \dots + c_0$$

pre $j = 0, \dots, n$.

Úloha 544. Nech a má tvar (39). Dokážte, že

$$c_j = \left[\frac{a}{g^j} \right] \pmod{g}$$

pre $j = 0, \dots, n$.

Pretože zvyšok je určený jednoznačne, úloha 544 nám zaručuje jednoznačnosť rozvoja (39). Tento rozvoj označujeme aj $a = (c_n \dots c_0)_g$.

Úloha 545. Dokážte, že vo vyjadrení (39) platí

$$c_n + \dots + c_0 \equiv a \pmod{g-1}.$$

Úloha 546. Pomocou úlohy 545 dokážte, že pre $d|g-1$ platí

$$d|a \iff d|c_n + \dots + c_0.$$

Vidíme, že úloha 546 je zovšeobecnením známych kritérií deliteľnosti číslami 3 a 9 pomocou dekadického rozvoja. Podobne zovšeobecníme aj kritérium deliteľnosti 11.

Úloha 547. Nech $a = (c_n \dots c_0)_g$. Potom

$$(c_0 + c_2 + \dots) - (c_1 + c_3 + \dots) \equiv a \pmod{g+1}.$$

Dokážte.

Úloha 548. Pomocou úlohy 547 dokážte, že pre $d|g+1$ platí

$$d|a \iff d|(c_0 + c_2 + \dots) - (c_1 + c_3 + \dots).$$

Teraz si ukážeme ešte jedno triviálne kritérium, ktoré je analógiou kritérií deliteľnosti 2 a 5.

Úloha 549. Dokážte, že pre $d|g$ platí

$$d|a \iff d|c_0,$$

ak $a = (c_n \dots c_0)_g$.

Teraz prejdeme k otázke rozvoja čísla $\alpha \in [0, 1)$.

Veta 32. Nech $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pre každé $\alpha \in [0, 1)$ existujú také jednoznačne určené prirodzené čísla $c_i, i = 1, 2, \dots$, že $0 \leq c_i < g$, pre nekonečne veľa i platí $0 \leq c_i < g-1$ a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{g^i}. \quad (40)$$

Podmienka $0 \leq c_i < g - 1$ je pre nekonečne veľa i nutná, aby sme zachovali jednoznačnosť vyjadrenia. To môžeme vidieť na príklade $1 = 0,999999\dots$. Východiskom pri dôkaze bude nasledujúca úloha.

Úloha 550. Dokážte, že číslo $\alpha \in [0, 1)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$\alpha = \frac{c}{g} + \frac{\alpha'}{g}, \quad 0 \leq c < g, \alpha' \in [0, 1).$$

(Návod: Zvoľte si $c = [\alpha g]$, $\alpha' = \{\alpha g\}$.)

Úloha 551. Pomocou úlohy 550 dokážte matematickou indukciou, že existuje taká postupnosť čísel $\{c_n\}$, že $0 \leq c_n < g$ a

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{g^i} + \frac{\alpha'_n}{g^n}$$

kde $\alpha'_n \in [0, 1)$ pre $n = 1, 2, \dots$

Úloha 552. Dokážte, že

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{g^i}.$$

Úloha 553. Dokážte, že

$$\sum_{i=j}^{\infty} \frac{g-1}{g^i} = \frac{1}{g^{j-1}}.$$

Úloha 554. Nech $c_{j-1} \neq g - 1$ a $c_n = g - 1$ pre $n \geq j$. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{g^i} = \sum_{i=1}^{j-2} \frac{c_i}{g^i} + \frac{c_{j-1}+1}{g^{j-1}}.$$

Tým sme dokázali existenčnú časť tvrdenia. Teraz budeme dokazovať jednoznačnosť. Budeme používať podmienku, že $0 \leq c_i < g - 1$ pre nekonečne veľa i .

Úloha 555. Nech α má vyjadrenie (40). Dokážte, že

$$\{g^{n-1}\alpha\} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{c_i}{g^{i-n+1}}.$$

Úloha 556 Dokážte, že

$$c_n = [g\{g^{n-1}\alpha\}], \quad n = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Úlohou 556 sme dokázali jednoznačnosť rozvoja (40). Naviac, získali sme explicitný vzorec pre výpočet čísel c_n . Tento vzorec budeme používať na charakterizáciu racionálnosti a iracionálnosti čísla α pomocou jeho g -adického rozvoja.

Uvedomme si, že v prípade dekadického rozvoja nám úlohy 555 a 556 pripomínajú dobre známy fakt, že ak číslo vynásobíme mocninou desiatky, jeho dekadický zápis je rovnaký, iba sa v ňom zmení poloha desatinnej čiarky.

Rozvoj (40) nazývame *periodický*, ak existujú také prirodzené čísla m, j , že pre všetky $n > m$ platí $c_n = c_{n+j}$. Úsek $\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{g^i}$ nazývame *predperiódou*.

Veta 33. Číslo α s rozvojom (40) je racionálne práve vtedy, ak jeho rozvoj (40) je periodický.

Úloha 557. Dokážte, že ak je rozvoj (40) periodický, potom α je racionálne číslo.

Úloha 558. Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ má rozvoj (40). Dokážte, že

$$c_n = \left[\frac{g}{q} (g^n p \bmod q) \right].$$

Úloha 559.

- a) Dokážte, že existujú také prirodzené čísla m, j , že $g^m p \equiv g^{m+j} p \pmod{q}$.
- b) Dokážte, že pre všetky $n \geq m$ platí $g^n p \equiv g^{n+j} p \pmod{q}$.

Úloha 560. Dokážte vetu 33.

Rozvoj (40) nazývame *rýdzo periodický*, ak $c_n = c_{n+j}$ pre všetky $n = 1, 2, \dots$, teda ak nemá predperiódu.

Úloha 561. Číslo $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ má rýdzo periodický rozvoj (40) práve vtedy, keď $(q, g) = 1$. Dokážte.

(Návod: Použite úlohy 558, 559 a 109).

Rozvoj (40) nazývame *konečný*, ak existuje také prirodzené číslo m , že $c_n = 0$ pre všetky $n > m$.

Úloha 562. Číslo $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ má konečný rozvoj (40) práve vtedy, keď $q|g^n$ pre nejaké n . Dokážte.

(Návod: Použite úlohy 521 a 7.)

— — — — —

Komplexné číslo α sa nazýva **algebraické**, ak existuje polynom $f(x)$ s celočíselnými koeficientami, $\deg(f(x)) \geq 1$ taký, že $f(\alpha) = 0$.

Algebraické číslo α sa nazýva **algebraické číslo stupňa n** , kde $n \in \mathbb{N}$, ak existuje polynom $f(x)$ s celočíselnými koeficientami stupňa n taký, že $f(\alpha) = 0$ a pre každý polynom s celočíselnými koeficientami $g(x)$, ktorý nie je konštantný a jeho stupeň je menší ako n platí $g(\alpha) \neq 0$. Napríklad $\sqrt{2}$ je algebraické číslo stupňa 2. Číslo, ktoré nie je algebraické, sa nazýva **transcendentné**.

Z hľadiska teórie množín je transcendentných čísel naprostá väčšina, kým algebraické čísla tvoria zanedbateľné výnimky. Iná otázka je nájsť transcendentné číslo. To je niečo ťažšie. Jeden zo spôsobov, ako to urobiť, nám dáva nasledujúci výsledok.

Veta 34. Nech α je reálne algebraické číslo stupňa $n, n \geq 2$. Potom existuje taká konštanta $c > 0$, že pre každé $p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1$ platí

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^n}.$$

Dôkaz. Nech $f(x)$ je polynom s celočíselnými koeficientami stupňa n taký, že $f(\alpha) = 0$. Nech $p, q \in \mathbb{Z}, q > 1$. Podľa vety o strednej hodnote platí

$$f(\frac{p}{q}) - f(\alpha) = f'(\xi)(\frac{p}{q} - \alpha),$$

kde ξ sa nachádza medzi α a $\frac{p}{q}$. Ale $f(\alpha) = 0$ a teda z $f(\frac{p}{q}) - f(\alpha) = f'(\xi)(\frac{p}{q} - \alpha)$ dostávame

$$|f(\frac{p}{q})| = |f'(\xi)| \cdot |\alpha - \frac{p}{q}|.$$

Číslo α nie je koreňom žiadneho polynomu s celočíselnými koeficientami stupňa menšieho ako n a teda $f(\frac{p}{q}) \neq 0$ (prečo?). Hodnotu $f(\frac{p}{q})$ môžeme teda vyjadriť v tvare $\frac{A}{q^n}, A \in \mathbb{Z}, A \neq 0$. Preto $|f(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^n}$. Z $|f(\frac{p}{q})| = |f'(\xi)| \cdot |\alpha - \frac{p}{q}|$ dostávame

$$|f'(\xi)| \cdot |\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^n}.$$

Položme $M = \max\{|f(s)|; s \in \langle \alpha - 1, \alpha + 1 \rangle\}$. Potom pre $\frac{p}{q} \in \langle \alpha - 1, \alpha + 1 \rangle$ platí

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{q^n}$$

a pre $\frac{p}{q} \notin \langle \alpha - 1, \alpha + 1 \rangle$ platí

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq 1 \geq \frac{1}{q^n}.$$

Teda ak $c = \min\{\frac{1}{M}, 1\}$ dostávame vetu 34. □

Dokázaný výsledok teraz použijeme na konštrukciu transcendentného čísla. Položme

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Predpokladajme, že α je algebrické číslo stupňa n . Určite $n > 1$. Potom podľa vety 34 existuje $c > 0$, že

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^n}, p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1.$$

Označme $\frac{p_K}{q_K} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{10^{k!}}$. Potom môžeme predpokladať, že $q_K = 10^{K!}$ a teda

$$|\alpha - \frac{p_K}{q_K}| \geq \frac{c}{10^{n \cdot K!}}.$$

Z druhej strany

$$\alpha - \frac{p_K}{q_K} = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leq \frac{2}{10^{(K+1)!}}$$

a teda

$$\frac{c}{10^{n \cdot K!}} \leq \frac{2}{10^{(K+1)!}}.$$

Po úprave dostaneme

$$c \leq \frac{2 \cdot 10^{n \cdot K!}}{10^{(K+1)!}}$$

a pre $K \rightarrow \infty$ dostávame $c = 0$, čo je spor.

Cvičenie. Dokážte, že algebrické číslo stupňa 1 je racionálne.