

2. RACIONÁLNE A IRACIONÁLNE ČÍSLA

Reálne číslo α nazývame *racionálne*, ak ho možno vyjadriť v tvare zlomku

$$\alpha = \frac{p}{q} \quad (6)$$

kde p je celé číslo a q je prirodzené číslo. Nie je náročné uvedomiť si, že postupným krátením výrazu (6) môžeme dosiahnuť, aby $(p, q) = 1$.

Úloha 39. Nech $d = (p, q)$. Potom $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}) = 1$. Dokážte.

(Návod: Použite napríklad úlohu 31 alebo vetu 2 a úlohu 17.)

Teraz už vieme, ako vo výraze (6) môžeme dosiahnuť, aby $(p, q) = 1$. Ak $(p, q) = 1$, potom výraz (6) nazývame kanonickým tvarom racionálneho čísla α . Na základe tvrdenia v úlohe 30 je tento tvar jednoznačne určený.

Poznáme veľmi mnoho racionálnych čísel. Bolo však obdobie, kedy si matematici mysleli, že všetky čísla sú racionálne. Z omylu ich vyviedla Pytagorova veta a dĺžka uhlopriečky štvorca so stranou dĺžky 1, ktorej dĺžka je $\sqrt{2}$.

Úloha 40. Dokážte, že neexistujú celé čísla p, q také, že

$$2p^2 = q^2.$$

(Návod: Použite úlohu 37.)

Čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame *iracionálne čísla*.

Úloha 41. Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Teraz nájdeme celú nekonečnú množinu iracionálnych čísel.

Úloha 42. Nech p je prvočíslo. Dokážte, že $\sqrt{p}$ je iracionálne číslo.

Otázka racionality mnohých čísel zostáva nevyriešená ešte aj dnes. Existuje však množstvo spôsobov, ako určiť, či dané číslo je iracionálne. Jeden zo spôsobov nám ukazuje nasledujúca veta.

Veta 5. Nech $a_n, \dots, a_0$ sú celé čísla. Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ je racionálne číslo v kanonickom tvare. Ak α je koreňom rovnice

$$a_n x^n + \dots + a_0 = 0,$$

potom $q|a_n$ a $p|a_0$.

Dôkaz. Vieme, že $(p, q) = 1$. Z predpokladu, že $\frac{p}{q}$ je koreňom danej rovnice, dostávame

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0. \quad (7)$$

Úloha 43. Dokážte, že rovnosť (7) je ekvivalentná s rovnosťou

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

(Návod: Vynásobte vzťah (7) číslom q^n .)

Úloha 44. Dokážte, že $q|a_n$ a $p|a_0$.

(Návod: Z poslednej rovnosti vyjadrite $a_n p^n$ a použite úlohu 21.)

Teda ak máme nejaké reálne číslo, ktoré je koreňom algebraickej rovnice, môžeme niekedy pomocou vety 5 dokázať jeho iracionálnosť.

Úloha 45. Pomocou vety 5 nájdite racionálne korene rovnice

$$x^3 + 1029x^2 + 2055x + 2 = 0.$$

Úloha 46. Dokážte, že $\cos 20^\circ$ je iracionálne číslo.

(Návod: Použite vzťah $\cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi$ a $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Ukážte, že $\cos 20^\circ$ je koreňom rovnice $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Uvažujte, ako vyzerajú racionálne korene tejto rovnice.)

Úloha 47. Ak $a_{n-1}, \dots, a_0$ sú celé čísla, potom všetky racionálne korene rovnice

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

sú celočíselné.

Úloha 48. Pomocou úlohy 47 dokážte, že ak p je prvočíslo a $n > 1$, potom $\sqrt[n]{p}$ je iracionálne číslo.

Úloha 49. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku pre celé čísla B, C, aby rovnica

$$x^5 + Bx^3 + Cx + 1 = 0$$

mala racionálne korene.

Iným spôsobom sa dá dokázať, že Eulerove číslo

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je iracionálne.

Použijeme vyjadrenie pomocou nekonečného radu. Nech by platilo $e = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Potom určite $eb! \in \mathbb{N}$. Ale

$$ab! = \sum_{n=0}^b \frac{b!}{n!} + \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!}.$$

Prvý sčítanec je prirodzené číslo. Označme druhý sčítanec s . Potom aj $s \in \mathbb{N}$. Z druhej strany $\frac{b!}{(b+k)!} < \frac{1}{(b+1)^k}$, $k = 2, 3, \dots$. Preto

$$s < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b} \leq 1.$$

Určite $s > 0$ a dostávame spor.