

18. LINEÁRNE REKURENTNÉ POSTUPNOSTI

Postupnosť celých čísel $\{x_n\}$ budeme nazývať *lineárne rekurentná postupnosť*, ak existujú také celé čísla A, B , že platí

$$x_{n+2} = Ax_{n+1} + Bx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Presnejšie by sme túto postupnosť mali nazývať *lineárna rekurentná postupnosť 2. stupňa*. Avšak nakoľko iné lineárne rekurentné postupnosti študovať nebudeme, budeme používať jednoduchší názov. Najprv sa budeme zaoberať otázkou, ako môžeme vyjadriť n -tý člen tejto postupnosti v takzvanom explicitnom tvare, teda v závislosti iba od n . V tejto súvislosti poznamenajme, že slovo rekurentný vyjadruje spôsob spätného vytvárania.

Úloha 396. Nech A, B sú celé čísla a nech postupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ vyhovujú rovnici (24). Ak $x_0 = y_0$ a $x_1 = y_1$, potom $x_n = y_n$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$. Dokážte.

Úloha 397. Nech A, B sú celé čísla a nech postupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ vyhovujú rovnici (24). Ak pre $n = 0, 1, 2, \dots$ označíme

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n,$$

kde α, β sú reálne čísla, potom aj takto vytvorená postupnosť $\{z_n\}$ vyhovuje rovnici (24). Dokážte.

Explicitný vzorec pre lineárnu rekurentnú postupnosť budeme hľadať tak, že sa budeme snažiť pomocou úloh 396 a 397 nakombinovať prvé dva členy z vhodných geometrických postupností.

Úloha 398. Ak geometrická postupnosť $\{aq^n\}$ vyhovuje rovnici (24), potom q je koreňom kvadratickej rovnice

$$\lambda^2 - A\lambda - B = 0. \quad (25)$$

Dokážte.

Rovnicu (25) nazývame *charakteristickou rovnicou* lineárnej rekurentnej postupnosti $\{x_n\}$. Ako neskôr uvidíme, má pre túto postupnosť obrovský význam.

Úloha 399. Ak q_1, q_2 sú korene rovnice (25), potom pre reálne čísla α, β postupnosť $\{z_n\}$, kde

$$z_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

vyhovuje rovnici (24). Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 397.)

Úloha 400. Ak q_1, q_2 sú korene rovnice (25) a α, β sú také reálne čísla, pre ktoré platí

$$\begin{aligned}x_0 &= \alpha + \beta, \\x_1 &= \alpha q_1 + \beta q_2,\end{aligned}$$

potom pre $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$x_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$

Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 396.)

Úloha 401. Ak $q_1 \neq q_2$ sú korene rovnice (25), potom vždy existujú reálne čísla α, β také, že

$$\begin{aligned}x_0 &= \alpha + \beta, \\x_1 &= \alpha q_1 + \beta q_2.\end{aligned}$$

Dokážte.

Teraz si ukážeme použitie tejto metódy na vyjadrenie takzvanej Fibonacciho postupnosti čísel. Postupnosť $\{a_n\}$, v ktorej $a_0 = 0, a_1 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, nazývame Fibonacciho postupnosťou a číslo a_n nazývame n -tým Fibonacciho číslom. Tieto čísla sú takto pomenované po svojom objaviteľovi, ktorým bol Leonardo Fibonacci.

Úloha 402. Dokážte, že pre $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(Návod: Použite postup z úloh 396 až 400.)

Leonardo Fibonacci bol pravdepodobne prvým človekom, ktorý sa zaoberal rekurentnými postupnosťami. Na vyššie spomínanú postupnosť prišiel tak, že počítal počet králikov po n -tú generáciu. Podobne ako množstvo iných vecí v matematike, aj Fibonacciho čísla majú dnes veľké možnosti využitia, o ktorých autor ani netušil. Existuje aj medzinárodná Fibonacciho spoločnosť, ktorú tvoria matematici a nadšenci pre matematiku a ktorá vydáva časopis Fibonacci Quarterly Journal.

Úloha 403. Definujme postupnosť $\{x_n\}$ tak, že $x_0 = 2, x_1 = 2$ a $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$. Dokážte, že $x_n = (1+i)^n + (1-i)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Úloha 404. Nech $\{x_n\}$ je postupnosť z úlohy 403. Dokážte, že pre $n = 0, 1, 2, \dots$ platí

$$x_n = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2 \binom{n}{2l} (-1)^l.$$

(Návod: Upravte tvar z úlohy 403 pomocou binomickej vety.)

Všimnime si, akú úlohu zohral symbol $i = \sqrt{-1}$ v úlohách 403 a 404. Členmi postupnosti $\{x_n\}$ sú celé čísla. V jej vyjadrení v úlohe 403 však vystupujú komplexné čísla. Vhodnou úpravou v úlohe 404 sa nám ich podarilo zbaviť. Bez použitia čísla i by však objav vzorca z úlohy 404 bol omnoho náročnejší.

Úloha 405. Riešte úlohu podobnú úlohe 404 pre Fibonacciho čísla.

Úloha 401 nám dáva definitívne riešenie problému explicitného vyjadrenia n -tého člena postupnosti vyhovujúcej rovnici (24) iba v prípade, ak jej charakteristická rovnica má jednoduché korene. Prípad, keď charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň, ešte musíme doriešiť.

Úloha 406. Nech rovnica (25) má dvojnásobný koreň q . Potom

$$A^2 + 4B = 0, \quad q = \frac{A}{2}.$$

Dokážte.

Úloha 407. Nech rovnica (25) má dvojnásobný koreň q . Potom postupnosť $\{z_n\}$, kde

$$z_n = nq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

vyhovuje rovnici (24). Dokážte.

(Návod: Použite $z_{n+2} = (n+2)q^{n+2} = (n+2)q^n(Aq+B)$ a úlohu 406.)

Úloha 408. Nech rovnica (25) má dvojnásobný koreň q a postupnosť $\{x_n\}$ vyhovuje rovnici (24). Potom existujú také reálne čísla α, β , že

$$x_n = (\alpha + \beta n)q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dokážte.

(Návod: Použite úlohy 407, 396 a 397.)