17. PRVOČÍSELNÁ VETA

Prvočíselná veta hovorí o raste veličiny $P(N)$ pre $N \in \mathbb{N}$.

Prvočíselná veta. Nech P je množina všetkých prvočísel. Potom

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P(N)\log N}{N} = 1.$$

− − − − − − − − − − − −

Prvočíselnú vetu sa pokúšalo dokázať množstvo matematikov. Podarilo sa to naraz dvom, nezávisle od seba. Boli to J. Hadamard a C. De La Valle Poussin približne v roku 1896. Pripomeňme, že pôvodný dôkaz bol veľmi neelementárny a obsahoval náročný aparát funkcií komplexnej premennej.

Elementárny dôkaz prvočíselnej vety bol po prvý raz publikovaný v roku 1949. Jeho autormi boli opäť dvaja od seba nezávisle pracujúci matematici A. Selberg a P. Erdös.

− − − − − − − − − − − −

V tejto publikácii dôkaz neuvedieme. Ukážeme však, že prvočíselná veta je ekvivalentná s iným tvrdením, ktoré pojem prvočísla nepoužíva.

Veta 26. Prvočíselná veta je ekvivalentná s rovnosťou:

$$\lim_{N\to\infty} [1, ..., N]^{\frac{1}{N}} = e. \tag{23}$$

Dôkaz nájdeme v nasledujúcich úlohách.

Úloha 382. Dokážte, že pre prvočíslo p platí

$$deg_p[1, ..., N] = \left[\frac{\log N}{\log p}\right]$$

pre $N = 1, 2, ...$

Úloha 383. Dokážte, že rovnosť (23) je ekvivalentná s rovnosťou

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{p\leq N} \left[\frac{\log N}{\log p}\right] \cdot \log p = 1.$$

(Návod: Použite úlohu 382.)

Úloha 384. Dokážte, že pre $N = 1, 2, ...$ platí

$$\frac{1}{N} \sum_{p\leq N} \left[\frac{\log N}{\log p}\right] \cdot \log p \leq \frac{P(N)\log N}{N}.$$

Úloha 385. Dokážte, že pre $s < 1$ platí

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P(N^s)\log N}{N} = 0.$$

(Návod: Použite vetu 22.)

Úloha 386. Dokážte, že pre $s < 1$ a $N \in \mathbb{N}$ platí
$$\tfrac{1}{N} \sum_{p \le N} \left[\tfrac{\log N}{\log p}\right] \cdot \log p > \tfrac{1}{N} \sum_{N^s < p \le N} \log p.$$

Úloha 387. Dokážte, že pre $s < 1$ a $N \in \mathbb{N}$ platí
$$\tfrac{1}{N} \sum_{p \le N} \left[\tfrac{\log N}{\log p}\right] \cdot \log p > s\tfrac{\log N}{N}(P(N) - P(N^s)).$$

Úloha 388. Dokážte, že existuje kladná konštanta c taká, že pre $s < 1$ a $N \in \mathbb{N}$ platí
$$0 \le \tfrac{P(N)\log N}{N} - \tfrac{1}{N} \sum_{p \le N} \left[\tfrac{\log N}{\log p}\right] \cdot \log p \le (1-s)c + s\tfrac{P(N^s)\log N}{N}.$$

(Návod: Použite úlohy 387, 384 a vetu 22.)

Úloha 389. Dokážte, že
$$\lim_{N\to\infty} \left(\tfrac{P(N)\log N}{N} - \tfrac{1}{N} \sum_{p \le N} \left[\tfrac{\log N}{\log p}\right] \cdot \log p\right) = 0.$$

(Návod: Použite úlohy 385, 388 a uvažujte, že $s \to 1^-$.)

Úloha 390. Dokážte vetu 26.

(Návod: Použite úlohu 389.)

Ukážeme si ešte jeden tvar prvočíselnej vety.

Úloha 391. Dokážte, že pre $N = 1, 2, ...$ platí
$$\frac{\sum\limits_{p \le N} \log p}{P(N)\log N} \le 1.$$

Úloha 392. Dokážte, že pre $s < 1$ a $N = 1, 2, ...$ platí
$$\sum_{p \le N} \log p > s \log N (P(N) - P(N^s)).$$

Úloha 393. Dokážte, že pre $s < 1$
$$\lim_{N\to\infty} \tfrac{P(N^s)}{P(N)} = 0.$$

(Návod: Použite vetu 22.)

Úloha 394. Dokážte, že

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{p\leq N} \log p}{P(N)\log N} = 1.$$

(Návod: Použite úlohy 391, 392 a 393.)

Úloha 395. Dokážte, že prvočíselná veta je ekvivalentná s rovnosťou

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{p\leq N} \log p}{N} = 1.$$