16. DÔKAZ BERTRANDOVHO POSTULÁTU

S Bertrandovým postulátom sme sa už stretli v kapitole o prvočíslach. Toto tvrdenie tiež dáva istú predstavu o rozložení prvočísel na číselnej osi. Prvý dôkaz Bertrandovho postulátu podal aj P.L. Čebyšev.

V nasledujúcich úlohách ukážeme elementárny dôkaz, ktorého autorom je Pal Erdös.

Veta 25. Nech $n \in \mathbb{N}$ **a** $n > 1$**. Potom existuje prvočíslo** p**, pre ktoré platí** $n < p < 2n$.

Na dôkaz použijeme vlastnosti už predtým použitého kombinačného čísla $\binom{2n}{n}$, konkrétne jeho vyjadrenia v tvare kanonického rozkladu

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{\beta(p)},$$

kde $\beta(p) = deg_p \binom{2n}{n}$.

Označme

$$T_1 = \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{\beta(p)}$$
$$T_2 = \prod_{\sqrt{2n} < p \leq n} p^{\beta(p)}$$
$$T_3 = \prod_{n < p \leq 2n} p^{\beta(p)}.$$

Je zrejmé, že veličiny T_1, T_2, T_3 závisia od n. Nebudeme to preto špeciálne označovať.

Úloha 372. Dokážte, že Bertrandov postulát platí pre n, ak $T_3 > 1$.

Úloha 373. Dokážte, že

$$T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 > \tfrac{2^{2n}}{2n}.$$

(Návod: Použite úlohu 326.)

Úloha 374. Dokážte, že

$$T_1 < (2n)^{P(\sqrt{2n})} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}.$$

(Návod: Použite úlohu 329.)

Úloha 375. Ak $\frac{2}{3}n < p \leq n$, potom $deg_p \binom{2n}{n} = 0$. Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 327.)

Úloha 376. Ak $(2n)^{\frac{1}{2}} < p \leq \frac{2}{3}n$, potom $deg_p \binom{2n}{n} \leq 1$. Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 327.)

Úloha 377. Dokážte, že

$$T_2 = \prod_{(2n)^{\frac{1}{2}} < p \leq \frac{2}{3}n} p^{\beta(p)} \cdot \prod_{\frac{2}{3}n < p \leq n} p^{\beta(p)} \leq 4^{\frac{2}{3}n}.$$

(Návod: Použite úlohy 375, 376 a lemu 2.)

Úloha 378. Dokážte, že

$$T_3 > 2^{\frac{2}{3}n}(2n)^{-\sqrt{2n}} = \left(\frac{2^{\sqrt{2n}}}{(2n)^3}\right)^{\frac{\sqrt{2n}}{3}}.$$

(Návod: Použite úlohy 373, 374 a 377.)

Úloha 379. Dokážte, že pre $z > 2^6$ platí

$$2^z > z^6.$$

(Návod: Vyšetrite priebeh funkcie $f(z) = z \log 6 - 6 \log z$.)

Úloha 380. Dokážte, že pre $n \geq 2^{11}$ platí

$$T_3 > 1.$$

(Návod: Dosaďte do úlohy 378 vzťah $z = (2n)^{\frac{1}{2}}$ a použite úlohu 379.)

Úloha 381. Nájdite prvočísla po $2^{11} = 2048$ a preverte Bertrandov postulát skusmo.