15. NULOVÁ VETA

V tejto kapitole odvodíme tvrdenie, ktoré je zosilnením vety 21. Pochádza z roku 1951 a jeho autorom je americký matematik Ivan Niven.

Nech p je prvočíslo a $A \subset \mathbb{N}$. Označme

$$A_p = A \cap (\langle p \rangle \setminus \langle p^2 \rangle).$$

Teda A_p je množina tých prvkov množiny A, ktoré sú deliteľné p a nie sú deliteľné p^2.

Veta 24. Nech $\{p_1, p_2, ...\}$ je taká množina prvočísel, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

Potom pre každú množinu $A \subset \mathbb{N}$ platí: ak $d(A_{p_i}) = 0$ pre $i = 1, 2, ...$, potom $d(A) = 0$.

Dôkaz nájdeme v nasledujúcich úlohách. Veľký význam pri tomto dôkaze bude mať pojem nezávislosti, ktorý si teraz zadefinujeme.

Nech množina $A \subset \mathbb{N}$ má asymptotickú hustotu a $q \in \mathbb{N}$. Hovoríme, že množina A je *nezávislá* od q práve vtedy, keď

$$d(A \cap \langle q \rangle) = \frac{1}{q} d(A).$$

Úloha 352. Nech $A, B \subset \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{N}$ a A, B sú nezávislé od q. Potom:
a) Ak $A \cap B = \emptyset$, potom aj $A \cup B$ je nezávislá od q.
b) Ak $A \subset B$, potom aj $B \setminus A$ je nezávislá od q.
Dokážte.

Úloha 353. Ak $q \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{Z}, 0 \leq a < q$, potom pre $n \in \mathbb{N}$ platí $n \in a + \langle q \rangle \iff n \equiv a \pmod{q}$. Dokážte.

Úloha 354.
a) Ak $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ a $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_1, a_2 < q$ a $(q_1, q_2) = 1$, potom existuje také číslo b, že

$$a_1 + \langle q_1 \rangle \cap a_2 + \langle q_2 \rangle = b + \langle q_1 q_2 \rangle.$$

b) Ak $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, potom pre každé číslo a platí

$$a + \langle q_1 \rangle = \bigcup_{k=0}^{q_2 - 1} a + kq_1 + \langle q_1 q_2 \rangle.$$

Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 353 a vetu 8.)

Úloha 355. Nech $q, q_1, ...q_k \in \mathbb{N}$ a $(q, q_i) = 1$ pre $i = 1, ..., k$. Potom množina $a_1 + \langle q_1 \rangle \cup ... \cup a_k + \langle q_k \rangle$ je nezávislá od q. Dokážte.

(Návod: Použite úlohy 352 a 354. Postupujte matematickou indukciou vzhľadom na k.)

Úloha 356. Nech $p \neq q$ sú prvočísla. Potom množina $\mathbb{N}_p$ je nezávislá na každom z čísel $q^n, n = 1, 2, ...$

Budeme predpokladať, že platí označenie z vety 24. Označme

$$r_n = p_1 ... p_n, \;\; n = 1, 2, ... \,.$$

Úloha 357. Matematickou indukciou dokážte, že

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{N}_{p_i} = a_1^{(k)} + \langle r_k^2 \rangle \cup ... \cup a_{j(k)}^{(k)} + \langle r_k^2 \rangle,$$

kde $a_i^{(k)} \in \mathbb{N}$.

(Návod: Použite úlohu 354.)

Označme

$$M_k = \mathbb{N} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{N}_{p_i} \Big).$$

Úloha 358. Dokážte, že množina M_k je nezávislá od čísel p_n, p_n^2 pre $n > k$.

(Návod: Použite úlohy 357, 355 a 352 b).)

Úloha 359. Dokážte, že pre $k = 1, 2, ...$ platí

$$d(M_{k+1}) = \Big(1 - \frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+1}^2} \Big) d(M_k).$$

(Návod: Použite vzťah $M_{k+1} = M_k \setminus (M_k \cap \mathbb{N}_{k+1})$.)

Úloha 360. Dokážte, že pre $k = 1, 2, ...$ platí

$$d(M_k) = \prod_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} \Big).$$

(Návod: Použite úlohu 359.)

Teraz budeme dokazovať, že hustoty $d(M_k)$ sa blížia k 0. Nasledujúce úlohy budú mať technický význam, aby sme mohli použiť podmienku divergencie číselného radu $\sum \frac{1}{p_k}$.

Úloha 361. Dokážte, že pre $h \in [0, 1]$ platí

$$1 - h < e^{-h}.$$

(Návod: Vyšetrite priebeh funkcie $f(h) = e^{-h} + h - 1$.)

Úloha 362. Dokážte, že pre $k = 1, 2, ...$ platí

$$1 - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} < e^{-\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2}}.$$

Úloha 363. Dokážte, že pre $k = 1, 2, \dots$ platí

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\right) < e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^2}}.$$

Úloha 364. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^2} < \infty.$$

Úloha 365. Dokážte, že $\lim\limits_{k \to \infty} d(M_k) = 0$.

(Návod: Použite úlohy 363 a 364.)

Úloha 366. Dokážte, že pre každú množinu $A \subset \mathbb{N}$ platí

$$A \subset M_k \cup A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_k}$$

pre $k = 1, 2, \dots$.

Úloha 367. Dokážte vetu 24.

(Návod: Použite úlohy 306 a 366.)

S pôvodným dôkazom vety 24 sa čitateľ môže zoznámiť napríklad v [NIV] a [KOL]. Poznamenajme, že je to dôkaz, ktorý je technicky pomerne náročný. Jeho hlavná myšlienka spočíva v odhade veličiny $A(n)$ a v kombinatorických úvahách.

Nech D je množina dokonalých čísel. Označme D^0 množinu párnych dokonalých čísel a D^1 množinu nepárnych dokonalých čísel.

Úloha 368. Dokážte, že $d(D^0) = 0$.

(Návod: Použite vety 17 a 19.)

Úloha 369. Dokážte, že pre každé prvočíslo p platí $D_p^1 \subset \{pn^2; n = 1, 2, \dots\}$.

Úloha 370. Dokážte, že $d(D^1) = 0$.

(Návod: Použite úlohu 373 a vetu 24.)

Úloha 371. Dokážte, že $d(D) = 0$.