14. ČEBYŠEVOVE NEROVNOSTI

Nech P je množina všetkých prvočísel. V tejto časti odvodíme nerovnosti pre veličinu $P(n)$. Tieto nerovnosti sa nazývajú podľa svojho autora *Čebyševove nerovnosti.* Nájdeme ich v nasledujúcom tvrdení.

– – – – – – – – – – – –

P. L. Čebyšev bol ruský matematik, ktorý žil v druhej polovici minulého storočia. Zaoberal sa teóriou pravdepodobnosti. Využíval aparát teórie funkcií komplexnej premennej a pomocou neho dokázal nerovnosti, ktoré charakterizujú rozloženie prvočísel podľa veľkosti. Poznamenajme, že základné problémy teórie prirodzených čísel spočívajú v slabej koherencii medzi multiplikatívnou a aditívnou štruktúrou. Z tohto dôvodu sú výsledky o prvočíslach pomerne zložité.

– – – – – – – – – – – –

Veta 22. Existujú také kladné konštanty c_1, c_2, že

$$c_1 \tfrac{n}{\log n} \leq P(n) \leq c_2 \tfrac{n}{\log n}$$

pre $n = 2, 3, \ldots.$

Dôkaz tejto vety je pomerne dlhý a použijeme pri ňom pomocné tvrdenie uvedené v leme 2. Symbolmi

$$\sum_{p\ldots}, \prod_{p\ldots}$$

budeme označovať súčet a súčin prvočísel s danými vlastnosťami. Napríklad platí, že:

$$P(n) = \sum_{p \leq n} 1.$$

Lema 2. Pre prirodzené číslo n platí

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n .$$

Úloha 313. Dokážte, že lema 2 platí pre $n = 2$.

Úloha 314. Pre $k \geq 1$ platí

$$\binom{2k+1}{k+1} \leq 4^k.$$

(Návod: Upravte $\binom{2k+1}{k+1} = \frac{(2\cdot\ldots\cdot 2k)(3\cdot\ldots\cdot(2k+1))}{k!(2k+1)!} < \frac{(2\cdot\ldots\cdot 2k)(4\cdot\ldots\cdot(2k+2))}{k!(2k+1)!}$.)

Úloha 315. Ak p je prvočíslo a $k+1 < p \leq 2k+1$, potom $p | \binom{2k+1}{k+1}$. Dokážte.

Úloha 316. Dokážte, že pre $k \geq 2$ platí

$$\prod_{k+1<p\leq 2k+1} p \,\Big|\, \binom{2k+1}{k+1}.$$

(Návod: Použite úlohu 315 a dôsledok vety 3.)

Úloha 317. Dokážte, že pre $k \geq 2$ platí
$$\prod_{k+1<p\leq 2k+1} p < 4^k.$$

(Návod: Použite úlohy 314 a 316.)

Úloha 318. Matematickou indukciou dokážte lemu 2.

(Návod: Použite $\prod\limits_{p\leq 2k+1} p = \prod\limits_{p\leq k+1} p \cdot \prod\limits_{k+1<p\leq 2k+1} p$ a úlohu 317.)

Teraz pomocou lemy 2 dokážeme horný odhad pre funkciu $P(n)$.

Úloha 319. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí
$$\sum_{p\leq n} \log p \leq n \log 4.$$

(Návod: Zlogaritmujte nerovnosť v leme 2.)

Úloha 320. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí
$$\sum_{n^{\frac{1}{2}}<p\leq n} \log p \leq n \log 4.$$

Úloha 321. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí
$$\Big(P(n) - P(n^{\frac{1}{2}})\Big) \cdot \log n^{\frac{1}{2}} \leq n \log 4.$$

Úloha 322. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí
$$\tfrac{1}{2}P(n) \log n \leq n \log 4 + \tfrac{1}{2}n^{\frac{1}{2}} \log n.$$

(Návod: Použite $n^{\frac{1}{2}} > P(n^{\frac{1}{2}})$ a upravte nerovnosť v úlohe 321.)

Úloha 323. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí
$$P(n) \leq (2\log 4)\tfrac{n}{\log n} + n^{\frac{1}{2}}.$$

Úloha 324. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí
$$n^{\frac{1}{2}} < \tfrac{n}{\log n}.$$

Úloha 325. Dokážte, že existuje konštanta $c_2 > 0$ taká, že pre $n \geq 2$ platí
$$P(n) \leq c_2 \tfrac{n}{\log n}.$$

(Návod: Použite úlohy 323 a 324.)

Teda horný odhad pre $P(n)$ je dokázaný. Teraz dokážeme dolný odhad pre $P(n)$.

Úloha 326. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n}.$$

Úloha 327. Dokážte, že pre $n \geq 2$ platí

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{\beta(p)},$$

kde

$$\beta(p) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]} \left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Úloha 328. Dokážte že pre každé reálne číslo x platí $[2x] - 2[x] \in \{0, 1\}$.

(Návod: Použite $x = [x] + \{x\}$.)

Úloha 329. Nech $n \geq 2$ a nech $p \leq 2n$ je prvočíslo. Nech

$$\beta(p) = deg_p \binom{2n}{n}.$$

Dokážte, že

$$\beta(p) \leq \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right].$$

(Návod: Použite úlohy 327 a 328.)

Úloha 330. Nech pre $n \in \mathbb{N}$ a prvočíslo $p \leq 2n$ má $\beta(p)$ rovnaký význam ako v úlohe 329. Dokážte, že

$$\sum_{p \leq 2n} \beta(p) \log p \geq 2n \log 2 - log 2n.$$

(Návod: Použite úlohu 326.)

Úloha 331. Dokážte, že

$$\sum_{p \leq 2n} \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \log p \geq 2n \log 2 - log 2n.$$

(Návod: Použite úlohy 330 a 329.)

Úloha 332. Dokážte, že

$$P(2n) \log 2n \geq 2n \log 2 - log 2n.$$

Úloha 333. Dokážte, že

$$P(2n) \geq \tfrac{2n}{\log 2n} \log 2 - 1.$$

Úloha 334. Dokážte, že pre $n \geq 4$ platí

$$\tfrac{2n}{\log 2n} \log 2 \geq \tfrac{8}{3}.$$

Úloha 335. Dokážte, že existuje kladná konštanta c taká, že

$$P(2n) \geq c \tfrac{2n}{\log 2n}\ , n = 2, 3, ...$$

Úloha 336. Dokážte, že existuje kladná konštanta c_1 taká, že

$$P(n) \geq c_1 \tfrac{n}{\log n}\ , n = 2, 3, ...$$

(Návod: Použite úlohu 335 a to, že $P(n) \geq P(2[\frac{n}{2}])$.)

Tým sme vetu 22 dokázali.

− − − − − − − − − − − −

Ako sme už uviedli vyššie, prvý dôkaz bol urobený pomocou teórie funkcií komplexnej premennej. Teraz má čitateľ možnosť zoznámiť sa s elementárnym dôkazom. Hoci analytický dôkaz využíva pomerne zložitý aparát, je veľmi prirodzený. Ako vidíme, elementárny dôkaz je založený na množstve umelých trikov. Jeho autorom je maďarský matematik Pal Erdös.

Niektorí vedci označujú Erdösa ako Eulera 20. storočia. Narodil sa na Slovensku v Žiline, študoval v Budapešti a pretože bol žid, musel koncom 30. rokov odísť do Londýna. Je autorom množstva podobných tvrdení. Zaoberal sa taktiež kombinatorikou a teóriou grafov.

− − − − − − − − − − − −

Nech $P = \{2 = p_1 < p_2 < ...\}$ je množina všetkých prvočísel. Podľa výsledkov uvedených v predchádzajúcej kapitole je zrejmé, že p_n rastie podstatne rýchlejšie ako n. Vyjadruje to aj rovnosť (22). Vetu 22 teraz použijeme na odhad veľkosti $n-$tého prvočísla.

Veta 23. Nech $P = \{2 = p_1 < p_2 < ...\}$ je množina všetkých prvočísel. Potom existujú kladné konštanty a_1, a_2 také, že

$$a_1 n \log n \leq p_n \leq a_2 n \log n \quad n = 2, 3, ...$$

Úloha 337. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $P(p_n) = n$.

Úloha 338. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_1 \tfrac{p_n}{\log p_n} \leq n \leq c_2 \tfrac{p_n}{\log p_n},$$

kde $c_1, c_2 > 0$.

(Návod: Použite úlohu 337 a vetu 22.)

V nasledujúcich úlohách budeme predpokladať, že platí označenie z úlohy 338 a z vety 23.

Úloha 339. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n > n$.

(Návod: Použite $p_{n+1} \geq p_n + 1$, čo vyplýva z toho, že postupnosť $\{p_n\}$ je rastúca.)

Úloha 340. Dokážte, že platí

$$p_n \geq \tfrac{1}{c_2} n \log n.$$

(Návod: Použite úlohy 338 a 339.)

Úloha 341. Dokážte, že platí

$$p_n \leq \tfrac{1}{c_1} n \log p_n.$$

Úloha 342. Dokážte, že platí

$$p_n \leq \tfrac{1}{c_1} n p_n{}^{\frac{1}{2}},\ n = 2, 3, ...$$

(Návod: Použite úlohy 341 a 324.)

Úloha 343. Dokážte, že platí:
a) $p_n \leq \frac{1}{c_1^2} n^2,\ n = 2, 3, ...$
b) $\log p_n \leq 2logn - K,\ n = 2, 3, ...$ pre nejaké reálne číslo K.

(Návod: Na dôkaz časti a) použite úlohu 342.)

Úloha 344. Dokážte, že platí

$$p_n \leq \tfrac{2}{c_1} n \log n - \tfrac{K}{c_1} n,\ n = 2, 3, ...$$

(Návod: Použite úlohy 341 a 342 b).)

Úloha 345. Ak C je konštanta, potom existuje konštanta $B > 0$ taká, že pre $n = 2, 3, ...$ platí

$$|C| < B \log n.$$

Úloha 346. Dokážte vetu 23.

(Návod: Použite úlohy 340, 344, 345.)

Pomocou vety 23 ľahko dokážeme nasledujúcu úlohu.

Úloha 347. Ak P je množina prvočísel, potom

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p} = \infty.$$

Úloha 348. Nech $M = \{p^\alpha; p \in P, \alpha \in \mathbb{N}\}$. Dokážte, že $d(M) = 0$.

Množina M je množinou tých prirodzených čísel, ktoré majú iba jeden prvočíselný faktor. Označme pre $n \in \mathbb{N}$ symbolom $\omega(n)$ počet prvočíselných faktorov čísla n a

$$M_k = \{n \in \mathbb{N}; \omega(n) = k\}.$$

Ďalej označme pre $S \subset \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}$

$$a \cdot S = \{as; s \in S\}.$$

Úloha 349. Nech $S \subset \mathbb{N}$ a S má asymptotickú hustotu. Potom pre $a \in \mathbb{N}$ platí $d(a \cdot S) = \frac{1}{a} d(S)$. Dokážte.

Úloha 350. Dokážte pre $k = 2, 3, ...$ a prvočíslo p, že

$$M_k \cap \langle p \rangle \subset p \cdot M_{k-1}.$$

Úloha 351. Dokážte, že $d(M_k) = 0$ pre $k = 1, 2, ...$

(Návod: Postupujte matematickou indukciou s pomocou vety 19 a úlohy 350.)

– – – – – – – – – – – –

Pomocou úlohy 351 sa dá dokázať, že asymptotická hustota množiny $A = \{\varphi(n); n \in \mathbb{N}\}$ *sa rovná 0. Rozdeľme si* $\mathbb{N} = M_k \bigcup (\mathbb{N} - M_k)$ *a položme* $A_k = \{\varphi(n); n \in M_k\}$ *a* $B_k = \{\varphi(n); n \in \mathbb{N} - M_k\}$. *Ak* $n \in \mathbb{N} - M_k$, *tak* n *má aspoň* $k+1$ *prvočísel v kanonickom rozklade a teda* $2^k|\varphi(n)$. *Preto* $B_k \subseteq \langle 2^k \rangle$. *Ak* $n \in M_k$, *tak* $\frac{\varphi(n)}{n} \geq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{k}) = c_k$, *teda* $\varphi(n) \geq c_k \cdot n$. *V takomto prípade ak* $\varphi(n) \leq x$, *tak* $n \leq \frac{x}{c_k}$, *preto* $A_k(x) \leq M_k(\frac{x}{c_k})$ *a teda* $d(A_k) = 0$. *Preto* $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} \leq \frac{1}{2^k}$ *pre* $k = 1, 2, ...$, *čo znamená* $\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = 0$.