13. ASYMPTOTICKÁ HUSTOTA

Predstavme si, že "náhodne" vyberáme prirodzené čísla. Pre niekoho môže mať iný význam s akou pravdepodobnosťou budeme vyberať čísla s nejakou vlastnosťou, alebo, inými slovami, s akou pravdepodobnosťou budú tieto čísla prvkami vopred danej množiny. Samozrejme veľmi záleží od spôsobu "náhodného" výberu. Ak hádžeme kockou, tak s pravdepodobnosťou 1 budeme vyberať čísla z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. S pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ budeme vyberať čísla párne, ale s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$ budeme vyberať číslo deliteľné štyrmi. Je to preto, že v množine $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je iba jedno číslo deliteľné 4. To už ale odporuje tomu, že vieme, že každé štvrté číslo je deliteľné štyrmi a teda spomínaná pravdepodobnosť by mala byť $\frac{1}{4}$. Ľahko vidíme, že táto vada je spôsobená ohraničenosťou výberu. S podobnými problémami sa stretneme pri každom ohraničenom výbere. Teda "náhodný výber" prirodzených čísel musí byť neohraničený. Môžeme otázku trochu zmeniť: Hypoteticky si predstavme, že sa pohybujeme po číselnej osi od bodu 1 doprava. Pýtame sa, ako často budeme stretávať čísla, ktoré padnú do danej množiny. Ešte inak povedané: ak sme došli po číslo n, aká časť čísel, ktoré sme prešli, padne do uvažovanej množiny. Tu začneme naše úvahy formalizovať. Nech symbol $\mathbb{N}$ označuje množinu prirodzených čísel. Pre $A \subseteq \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ bude množina reálnych čísel) symbolom $A(x)$ označme počet prvkov A, ktoré neprevyšujú x. Pravdepodobnosť, že náhodné číslo z množiny $\{1, 2, ..., n\}$ patrí do množiny A je potom daná podielom $\frac{A(n)}{n}$. Hodnotu

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}, \tag{21}$$

ak existuje, budeme nazývať *asymptotickou hustotou* množiny A. Existujú množiny, ktoré asymptotickú hustotu nemajú. Vždy, keď napíšeme výraz $d(A)$, budeme tým zároveň vyjadrovať, že asymptotická hustota množiny A existuje, teda že limita vo vzťahu (21) existuje.

Najskôr dokážeme niektoré jednoduché vlastnosti asymptotickej hustoty.

Úloha 287. Nech $A, B \subset \mathbb{N}$ a $A \cap B = \emptyset$. Ak existuje asymptotická hustota $d(A)$ a $d(B)$, potom

$$d(A \cup B) = d(A) + d(B).$$

Dokážte.

(Návod: Uvedomte si, že $(A \cup B)(n) = A(n) + B(n)$ pre $n = 1, 2, ...$)

Úloha 288. Nech $A \subset \mathbb{N}$. Ak existuje asymptotická hustota $d(A)$, potom

$$d(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - d(A).$$

Dokážte.

Označme symbolom

$$a + \langle m \rangle = \{a + k \cdot m; \quad k = 0, 1, \dots\}.$$

Úloha 289. Dokážte, že pre $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$ platí

$$d(a + \langle m \rangle) = \tfrac{1}{m}.$$

Úloha 290. Nech $A_i \subset \mathbb{N}, i = 1, ..., k$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$. Ak existuje asymptotická hustota $d(A_i)$, $i = 1, ..., k$, potom

$$d(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} d(A_i).$$

Dokážte.

Úloha 291. Označme pre $q \in \mathbb{N}$ symbolom $\mathbb{N}^q$ množinu všetkých prirodzených čísel, ktoré sú nesúdeliteľné s q. Dokážte, že $d(\mathbb{N}^q) = \frac{\varphi(q)}{q}$.

(Návod: Použite úlohy 289, 290 a to, že $\mathbb{N}^q = \bigcup\limits_{a<q,(a,q)=1} (a + \langle q \rangle)$.)

Nasledujúca veta nám ukáže, ako môžeme vypočítať asymptotickú hustotu nekonečnej množiny, ak poznáme vzorec pre výpočet jej členov.

Veta 19. Nech $S \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina a

$$S = \{a_1 < a_2 < ... < a_n < ...\}.$$

Potom S má asymptotickú hustotu práve vtedy, keď existuje limita

$$h = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{a_n}.$$

V tomto prípade platí, že $h = d(S)$.

Ďalej budeme predpokladať, že platí označenie z vety 19.

Úloha 292. Ak $d(S) = h$, potom $h = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{a_n}$. Dokážte.

(Návod: Uvedomte si, že $S(a_n) = n$ a dosaďte tento vzťah do definície asymptotickej hustoty.)

Týmto sme dokázali, že podmienka z vety 19 je nutná. V nasledujúcich úlohách dokážeme, že je aj postačujúca.

Úloha 293. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ existuje $k(n)$ také, že $a_{k(n)} \leq n < a_{k(n)+1}$ a $\lim\limits_{n \to \infty} k(n) = \infty$.

Úloha 294. Nech $k(n)$ má rovnaký význam ako v úlohe 293. Dokážte, že pre $n = 1, 2, ...$ platí

$$\frac{k(n)}{a_{k(n)+1}} \leq \frac{S(n)}{n} \leq \frac{k(n)}{a_{k(n)}}.$$

Úloha 295. Dokážte vetu 19.

Vetu 19 teraz môžeme použiť na dôkaz rôznych vlastností asymptotickej hustoty.

Úloha 296. Nech $S \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina a $S = \{a_1 < a_2 < ... < a_n < ...\}$. Ak $d(S) > 0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Dokážte.

Úloha 297. Nech $S \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina a $S = \{a_1 < a_2 < ... < a_n < ...\}$. Ak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

potom $d(S) = 0$. Dokážte.

Úloha 298. Vypočítajte pomocou vety 19 asymptotickú hustotu množiny $\{n^2; n = 1, 2, ...\}$ a na tomto príklade ukážte, že podmienka z úlohy 296 nie je postačujúca na to, aby $d(S) > 0$.

Úloha 299. Nech $\alpha > 1$. Vypočítajte pomocou vety 19 asymptotickú hustotu množiny $\{[n\alpha]; n = 1, 2, ...\}$.

Úloha 300. Nech $S \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina a $S = \{a_1 < a_2 < ... < a_n < ...\}$. Ak

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = \alpha,$$

potom $d(S) = \frac{1}{\alpha}$. Dokážte

Úloha 301. Nech $A, B \subset \mathbb{N}$ sú nekonečné množiny, ktoré majú asymptotickú hustotu a $A = \{a_1 < a_2 < ... < a_n < ...\}$. Uvažujme množinu $A_B = \{a_b; b \in B\}$. Dokážte, že $d(A_B) = d(A)d(B)$.

Úloha 302. Nech $A \subset \mathbb{N}$ je množina, ktorá má asymptotickú hustotu. Dokážte, že pre každé číslo $\beta \in [0, d(A)]$ existuje množina $B \subset A$ taká, že $d(B) = \beta$.

(Návod: Použite úlohy 301, 299 a to, že ak $0 < \beta < d(A)$, potom $\alpha = \frac{d(A)}{\beta} > 1$.)

Vlastnosť dokázaná v úlohe 302 sa nazýva *Darbouxova vlastnosť* asymptotickej hustoty.

Veta 20. Nech $A \subset \mathbb{N}$. Ak

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} < \infty,$$

potom $d(A) = 0$.

Dôkaz nájdeme v nasledujúcich úlohách. Bude založený na vete 19.

Úloha 303. Nech $A \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina a $A = \{a_1 < a_2 < ... < a_n < ...\}$. Ak $\sum\limits_{a \in A} \frac{1}{a} < \infty$, potom

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Dokážte.

Úloha 304. Nech $A \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina a $A = \{a_1 < a_2 < ... < a_n < ...\}$. Dokážte, že pre každé $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$ platí

$$\frac{n-k}{a_n} \leq \frac{1}{a_k} + ... + \frac{1}{a_n} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{a_j}.$$

Dokážte.

Úloha 305. Dokážte vetu 20.

(Návod: Použite vetu 19 a úlohy 303 a 304.)

Pripomeňme si, že sme už zaviedli označenie $a + \langle m \rangle$. Podotknime, že namiesto $0 + \langle m \rangle$ budeme písať iba $\langle m \rangle$. Toto označenie bude užitočné v nasledujúcej vete.

Veta 21. Nech $A \subset \mathbb{N}$ a $P_1 = \{p_1, p_2, ...\}$ je taká množina prvočísel, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty.$$

Ak $d(A \cap \langle p_i \rangle) = 0$ **pre** $i = 1, 2, ...$**, potom** $d(A) = 0$.

Dôkaz opäť nájdeme v nasledujúcich úlohách.

Úloha 306. Nech $A \subset \mathbb{N}$ a $M_k \subset \mathbb{N}$ pre $k = 1, 2, \dots$. Ak $A \subset M_k$, $k = 1, 2, \dots$ a

$$\lim_{n \to \infty} d(M_k) = 0,$$

potom $d(A) = 0$. Dokážte.

Úloha 307. Nech $A, B \subset \mathbb{N}$ a $d(B) = 0$. Ak existuje $d(A)$, potom $d(A \cup B) = d(A)$. Dokážte.

Úloha 308. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$1 - \tfrac{1}{n} \leq 2^{-\frac{1}{n}}.$$

(Návod: Umocnite obe strany na n-tú a upravte. Využite vzťah $n^n = (n-1+1)^n$.)

Úloha 309. Dokážte, že pre prirodzené čísla $n_1, ..., n_k$ platí

$$\prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \leq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j}}.$$

Úloha 310. Nech $P_1 = \{p_1, p_2, ...\}$ je množina prvočísel z vety 21. Položme $q_k = p_1 ... p_k$. Nech pre $q \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{N}^q$ množina z úlohy 291. Dokážte, že $\lim\limits_{k \to \infty} d(\mathbb{N}^{q_k}) = 0$.

(Návod: Použite úlohy 309, 291 a 105.)

Úloha 311. Nech $A \subset \mathbb{N}$. Nech P_1, $\mathbb{N}^q$ majú rovnaký význam ako v úlohe 310. Dokážte, že

$$A \subset \mathbb{N}^{q_k} \cup A \cap \langle p_1 \rangle \cup \dots \cup A \cap \langle p_k \rangle$$

pre $k = 1, 2, \dots$.

Teraz už môžete pomocou úloh 311, 310, 306 a 307 dokázať vetu 21.

Nech P označuje množinu všetkých prvočísel.

Úloha 312. Dokážte, že $d(P) = 0$.

(Návod: Zatiaľ nevieme, či $\sum\limits_{p \in P} p^{-1} = \infty$, teda či môžeme použiť vetu 21. Ak by to neplatilo, použili by sme vetu 20.)

Poznamenajme, že z úlohy 310 vyplýva, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = 0 \tag{22}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{P(n)}{n} = 0$$

ak $P = \{p_1 < p_2 < ...\}$.

$- - - - - - - - - - - -$

Matematickou indukciou sa dá dokázať, že

$$d(\bigcup_{i=1}^{n} d_i + \langle m_i \rangle) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{m_i}),$$

ak $m_1, m_2, ..., m_n$ sú navzájom nesúdeliteľné prirodzené čísla. V monografii [NAR] *je dokázaný nasledujúci výsledok.*

Nech $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť navzájom nesúdeliteľných prirodzených čísel. Potom

$$d(\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle m_n \rangle) = 1 - \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{m_n}).$$

Pomocou tohto výsledku sa dá napríklad vypočítať asymptotická hustota množiny tzv. bezkvadratických čísel, teda prirodzených čísel, ktoré majú tvar $p_1p_2...p_k$, kde $p_1, p_2, ..., p_k$ sú rôzne prvočísla. Označme túto množinu Q_2. Potom platí $Q_2 = \mathbb{N} - \bigcup_p \langle p^2 \rangle$ a teda $d(Q_2) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^2})$. Dá sa dokázať, že $\prod_p (1 - \frac{1}{p^2}) = \frac{6}{\pi^2}$. Teda $d(Q_2) = \frac{6}{\pi^2}$. Zaujímavé na tom je to, že by sa zdalo, že prvky množiny sú veľmi "zriedka" rozložené, lebo ide vlastne o extrémny prípad kanonického rozkladu $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$. Do množiny Q_2 patria len tie čísla, pre ktoré $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, ..., \alpha_k = 1$. Pritom je ich viac ako polovica.

Ďalší zaujímavý výsledok o asymptotickej hustote pochádza z roku 1976: Nech $A, B \subset \mathbb{N}$ sú také množiny, že každé prirodzené číslo n sa dá vyjadriť jediným spôsobom v tvare $n = ab$, kde $a \in A, b \in B$.Potom množiny A, B majú asymptotickú hustotu a platí

$$d(A) = \Big(\sum_{b\in B} \frac{1}{b}\Big)^{-1},$$

(kde $\infty^{-1} = 0$). Dôkaz tohoto tvrdenia môže čitateľ nájsť v [DAB], [SAF], [ESV].