

12. DOKONALÉ ČÍSLA

V tejto časti sa budeme zaoberať problematikou, ktorá pochádza už z obdobia gréckej mystiky čísel. Prirodzené číslo nazývame *dokonalé* práve vtedy, ak je súčtom svojich vlastných deliteľov.

Úloha 260. Dokážte, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je dokonalé práve vtedy, ak $\sigma(n) = 2n$.

Číslo $n \in \mathbb{N}$ nazývame *deficitné* práve vtedy, keď $\sigma(n) < 2n$. Číslo $n \in \mathbb{N}$ nazývame *abundantné* práve vtedy, keď $\sigma(n) > 2n$.

Úloha 261. Dokážte, že každé prvočíslo je deficitné.

Úloha 262. Dokážte, že každé prirodzené číslo tvaru $p^n, n = 1, 2, \dots$, kde p je prvočíslo, je deficitné.

Úloha 263. Dokážte, že každé prirodzené číslo tvaru $2^k \cdot 3, k = 2, 3, \dots$ je abundantné.

Vidíme, že existuje nekonečne veľa deficitných a nekonečne veľa abundantných prirodzených čísel. To, či existuje aj nekonečne veľa dokonalých čísel, nevieme dodnes. Dodajme, že dodnes nepoznáme ani jedno nepárne dokonalé číslo. Uvedieme nutnú podmienku pre to, aby nepárne číslo bolo dokonalé.

Veta 16. Ak n je nepárne dokonalé číslo, potom sa dá vyjadriť v tvare

$$n = p^{4k+1} \cdot N^2,$$

kde p je prvočíslo tvaru $4l + 1, N \in \mathbb{N}$ a $(p, N) = 1$.

Dôkaz tejto vety je elementárny a preto ho uvedieme v nasledujúcich úlohách.

Úloha 264. Ak n je nepárne dokonalé číslo, potom $2|\sigma(n)$ a $4 \nmid \sigma(n)$. Dokážte.

Úloha 265. Ak n je nepárne dokonalé číslo a $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ je jeho kanonický rozklad, potom práve jedno z čísel

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}, \dots, \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

je párne a ani jedno číslo nie je deliteľné 4. Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 89 a úlohu 264.)

Úloha 266. Ak p je nepárne číslo a číslo

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

je nepárne, potom $2|\alpha$. Dokážte.

(Návod: Použite rovnosť $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} = 1 + p + \dots + p^\alpha$.)

Úloha 267. Ak p je nepárne číslo a číslo

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

je párne, potom $\alpha = 2l + 1$. Dokážte.

Úloha 268. Ak p je nepárne číslo a

$$4 \nmid \frac{p^{2l+2}-1}{p-1},$$

potom $2|l$ a $p = 4r + 1$. Dokážte.

(Návod: Použite úpravu $\frac{p^{2l+2}-1}{p-1} = \frac{p^{2(l+1)}-1}{p-1} = \frac{p^{2(l+1)}-1}{p^2-1} \cdot \frac{(p^2)-1}{p-1} = (p+1)(1+p^2+\dots+(p^2)^l)$.)

Úloha 269. Dokážte vetu 16.

(Návod: Použite úlohy 264 až 268.)

Čitateľ si iste poľahky overí, že párnymi dokonalými číslami sú napríklad čísla 6, 12. V prípade párných dokonalých čísel je situácia o čosi jasnejšia. Existuje ich charakterizácia pomocou nasledujúcej vety.

Veta 17. Prirodzené číslo n je párne dokonalé číslo práve vtedy, keď

$$n = 2^{s-1}(2^s - 1), \tag{20}$$

kde $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ a $(2^s - 1)$ je prvočíslo.

Dodajme ešte, že prirodzené čísla, ktoré majú tvar $2^s - 1$, nazývame *Mersenove čísla*. Veta 17 však problematiku párných dokonalých čísel nerieši, pretože nevieme, či existuje nekonečne veľa Mersenových čísel, ktoré sú prvočíslami.

Dôkaz vety 17 nájdeme v nasledujúcich úlohách.

Úloha 270. Dokážte, že každé číslo tvaru (20) je dokonalé číslo.

(Návod: Použite úlohu 89.)

Úloha 271. Ak n je párne dokonalé číslo, potom

$$n = 2^{s-1}m,$$

kde $s > 1$, $m > 1$, $2 \nmid m$. Dokážte.

(Návod: Použite úlohu 262.)

Úloha 272. Ak $n = 2^{s-1}m$ je párne dokonalé číslo a $2 \nmid m$, potom $2^s - 1 \mid m$. Dokážte.

(Návod: Použite rovnosť $\sigma(n) = 2n$.)

Úloha 273. Ak pre $s > 1$ platí $\sigma(d(2^s - 1)) = d2^s$, potom $d = 1$. Dokážte.

(Návod: Ak $d > 1$ a $d \neq 2^s - 1$, potom číslo $d(2^s - 1)$ má aspoň tieto rôzne delitele: $1, d, 2^s - 1, d(2^s - 1)$. Podobne môžeme postupovať v prípade, keď $d = 2^s - 1$.)

Úloha 274. Ak $n = 2^{s-1}m$ je párne dokonalé číslo a $2 \nmid m$, potom $\sigma(2^s - 1) = 2^s$. Dokážte.

(Návod: Použite úlohy 272, 273.)

Úloha 275. Ak pre $m \in \mathbb{N}$ platí $\sigma(m) = m + 1$, potom m je prvočíslo. Dokážte.

Úloha 276. Dokážte vetu 17.

Teraz si uvedieme ešte jednu charakterizáciu dokonalých čísel, ktorá je síce triviálna, ale zaujímavá. Použijeme pritom nasledujúcu úlohu.

Úloha 278. Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak $d_1, \dots, d_s$ sú všetky delitele čísla n , potom aj $\frac{n}{d_1}, \dots, \frac{n}{d_s}$ sú všetky delitele čísla n . Dokážte.

Úloha 279. Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak $d_1, \dots, d_k$ sú všetky delitele čísla n rôzne od 1, potom n je dokonalé číslo práve vtedy, keď

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{d_j} = 1.$$

Dokážte.

Prirodzené číslo n nazývame *úplné* práve vtedy, keď sa rovná súčinnu všetkých svojich vlastných deliteľov. Úplné čísla sa niekedy nazývajú aj *dokonalé čísla 2. druhu*.

Úloha 280. Dokážte, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je úplné práve vtedy, keď

$$\prod_{d \mid n} d = n^2.$$

Na rozdiel od dokonalých čísel, úplné čísla vieme jednoducho charakterizovať. Túto charakteristiku nájdeme v nasledujúcej vete.

Veta 18. Prirodzené číslo $n > 1$ je úplné práve vtedy, keď $n = p^3$, kde p je prvočíslo alebo $n = p_1 p_2$, kde p_1, p_2 sú dve rôzne prvočísla.

Úloha 281. Nech p, p_1, p_2 sú prvočísla a $p_1 \neq p_2$. Dokážte, že p^3 a $p_1 p_2$ sú úplné čísla.

Pripomeňme si, že symbolom $\tau(n)$ označujeme počet deliteľov čísla n .

Úloha 282. Nech $n \in \mathbb{N}$ je úplné číslo a $n > 1$. Potom $\tau(n) = 4$. Dokážte.

(Návod: Použite úlohy 278 a 280.)

Poznamenajme, že pre $n = 1$ tvrdenie v úlohe 282 neplatí.

Úloha 283. Nech $n \in \mathbb{N}$ je úplné číslo a $n > 1$. Nech $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ je jeho kanonický rozklad. Potom $k \leq 2$. Dokážte.

(Návod: Použite úlohy 83, 282 a $\alpha_i + 1 \geq 2$.)

Úloha 284. Dokážte vetu 18.

Dve prirodzené čísla a, b nazývame *spriatelené*, ak sa súčet vlastných deliteľov čísla a rovná číslu b a súčet vlastných deliteľov čísla b sa rovná číslu a .

Úloha 285. Čísla a, b sú spriatelené práve vtedy, keď $\sigma(a) = a + b = \sigma(b)$. Dokážte.

Dodnes nevieme, či existuje nekonečne veľa dvojíc spriatelených čísel. V 9. storočí nášho letopočtu objavil arabský matematik Thabit ben Karrah vzorec na hľadanie dvojíc spriatelených čísel. Nájdeme ho v nasledujúcej úlohe.

Úloha 286. Ak $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ sú prvočísla, potom $2^n p q$, $2^n r$ sú spriatelené čísla. Dokážte.