

7. Relácia ekvivalencie a rozklad množiny

V tejto časti sa budeme venovať špeciálnemu typu binárnych relácií na množine M - reláciám ekvivalencie a ich súvisu s rozkladom množiny M .

Relácia ekvivalencie na množine M

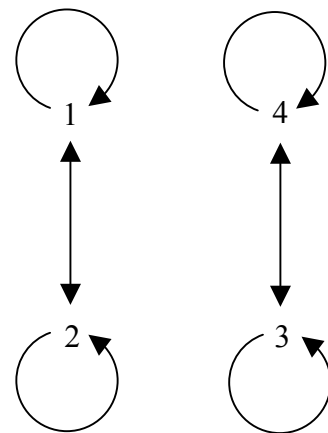
Relácia R definovaná na množine M sa nazýva reláciou ekvivalencie vtedy a len vtedy, ak R je reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia.

Pripomeňme si, že reláciu R definovanú v množine M nazývame:

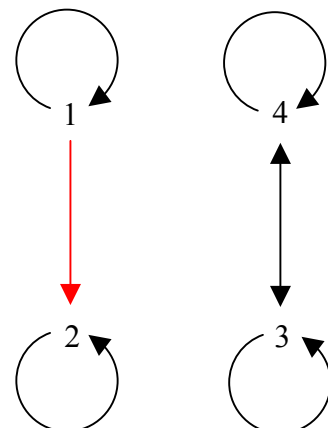
- reflexívnou, ak $\forall x \in M : [x, x] \in R$,
- symetrickou, ak $\forall x, y \in M : [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$,
- tranzitívnou, ak $\forall x, y, z \in M : [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R$.

Ak máme rozhodnúť, či daná relácia R na množine M je reláciou ekvivalencie, musíme najskôr zistiť, či je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Postup si vysvetlíme na príkladoch.

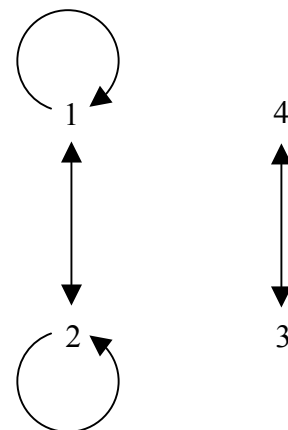
Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [3, 3], [3, 4], [4, 3], [4, 4]\}$. Vrcholový graf relácie R je na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R obsahuje pri každom vrchole slučku, relácia R je reflexívna. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje jednosmerné šípky, relácia R je symetrická. Pretože vo vrcholovom grafe relácie R nemá zmysel prestupovať, relácia R je tranzitívna. Relácia R je reláciou ekvivalencie na množine M , pretože je reflexívna, symetrická a tranzitívna.



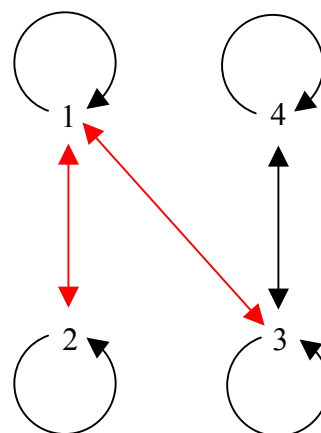
Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 2], [3, 3], [3, 4], [4, 3], [4, 4]\}$. Vrcholový graf relácie R je na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R obsahuje jednosmernú šípku (z 1 do 2), relácia R nie je symetrická. Relácia R nie je reláciou ekvivalencie na množine M , pretože nie je symetrická.



Nech množina $M = \{1,2,3,4\}$ a relácia $R = \{[1,1], [1,2], [2,1], [2,2], [3,4], [4,3]\}$. Vrcholový graf relácie R je na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje pri každom vrchole slučku (napr. pri vrchole 3), relácia R nie je reflexívna. Relácia R nie je reláciou ekvivalencie na množine M , pretože nie je reflexívna.



Nech množina $M = \{1,2,3,4\}$ a relácia $R = \{[1,1], [1,2], [2,1], [2,2], [1,3], [3,1], [3,3], [3,4], [4,3], [4,4]\}$. Vrcholový graf relácie R je na obrázku. Vrcholový graf relácie R obsahuje šípku z 2 do 1 a aj šípku z 1 do 3, ale neobsahuje šípku z 2 do 3. Vo vrcholovom grafe relácie R má zmysel prestupovať (napr. keď cestujeme z 2 do 3), preto relácia R nie je tranzitívna. Relácia R nie je reláciou ekvivalencie na množine M , pretože nie je tranzitívna.



Zhrňme si, čo platí pre vrcholový graf relácie ekvivalencie:

1. Vrcholový graf relácie ekvivalencie obsahuje pri každom vrchole slučku.
2. Vrcholový graf relácie ekvivalencie neobsahuje jednosmerné šípky.
3. Vo vrcholovom grafe relácie ekvivalencie nemá zmysel prestupovať.

Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že:

Inverzná relácia k reflexívnej relácii je opäť reflexívna.

Inverzná relácia k symetrickej relácii je opäť symetrická.

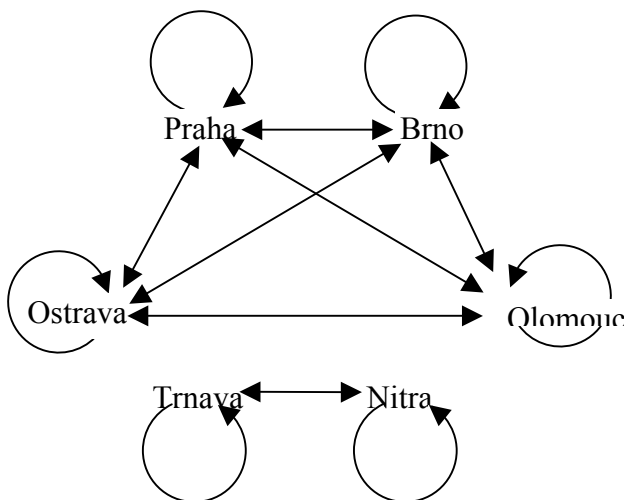
Inverzná relácia k tranzitívnej relácii je opäť tranzitívna.

Z týchto troch poznatkov teda vyplýva nasledujúci záver:

Inverzná relácia k relácii ekvivalencie na množine M je opäť reláciou ekvivalencie na množine M .

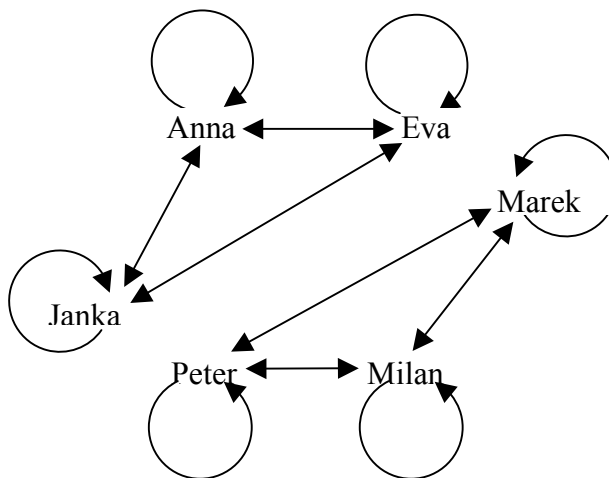
Nech množina $M = \{Praha, Brno, Ostrava, Olomouc, Trnava, Nitra\}$ a relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ sú v tom istom štáte}\}$. Vrcholový graf relácie R je na obrázku.

Pretože vrcholový graf relácie R obsahuje pri každom vrchole slučku, relácia R je reflexívna. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje jednosmerné šípky, relácia R je symetrická. Pretože vo vrcholovom grafe relácie R nemá zmysel prestupovať, relácia R je tranzitívna. Relácia R je reláciou ekvivalencie na množine M , pretože je reflexívna, symetrická a tranzitívna.



Nech množina $M = \{Anna, Marek, Janka, Eva, Peter, Milan\}$ a relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ majú rovnaké pohlavie}\}$. Vrcholový graf relácie R je na obrázku.

Pretože vrcholový graf relácie R obsahuje pri každom vrchole slučku, relácia R je reflexívna. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje jednosmerné šípky, relácia R je symetrická. Pretože vo vrcholovom grafe relácie R nemá zmysel prestupovať, relácia R je tranzitívna. Relácia R je reláciou ekvivalencie na množine M , pretože je reflexívna, symetrická a tranzitívna.



Rozklad množiny M

Hovoríme, že systém podmnožín $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ množiny M vytvára rozklad množiny M práve vtedy, ak má nasledujúce vlastnosti:

1. $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} : M_i \neq \{ \}$,
2. $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_n \cup \dots$,
3. $\forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} : i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \{ \}$.

Množiny $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ nazývame triedy rozkladu množiny M .

Teraz si túto definíciu vysvetlíme podrobnejšie. Predpokladajme, že je daná neprázdna množina M . Rozkladom množiny M je teda systém konečného alebo nekonečného počtu podmnožín $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ množiny M , ktorý má tieto špeciálne vlastnosti:

Vlastnosť 1 znie: $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}: M_i \neq \{ \}$

To znamená, že žiadna z množín $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ nie je prázdna.

Vlastnosť 2 znie: $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_n \cup \dots$

To znamená, že každý prvok množiny M sa nachádza v niektorej z množín $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$. Inými slovami, zjednotením množín $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ je množina M .

Vlastnosť 3 znie: $\forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}: i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \{ \}$

To znamená, že žiadne dve rôzne množiny M_i, M_j nemajú spoločné prvky. Inými slovami, žiadne prvky množiny M sa nenachádzajú v dvoch rôznych množinách M_i, M_j .

Rozklad množiny M má teda tieto vlastnosti:

- 1. Rozklad množiny M je množina, ktorej prvkami sú podmnožiny množiny M . Tieto podmnožiny nazývame triedy rozkladu.**
- 2. Každý prvok množiny M sa nachádza práve v jednej triede rozkladu.**

Pojem rozkladu množiny si teraz vysvetlíme na príkladoch.

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a jej podmnožiny $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_2 = \{5, 10\}$, $M_3 = \{6, 7, 8, 9\}$. Zistíme, či systém $\{M_1, M_2, M_3\} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 10\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$ je rozkladom množiny M . Vidíme, že ani jedna z množín M_1, M_2, M_3 nie je prázdna. Prvá podmienka je teda splnená. Zjednotením množín M_1, M_2, M_3 je množina $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 10\} \cup \{6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, teda množina M . Druhá podmienka je teda tiež splnená. Žiadne dve z množín M_1, M_2, M_3 nemajú spoločný prvok. Aj tretia podmienka je splnená. Systém $\{M_1, M_2, M_3\} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 10\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$ je rozkladom množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Nech množina $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ a jej podmnožiny $M_1 = \{1,2,4\}$, $M_2 = \{4,5\}$, $M_3 = \{3,6\}$. Zistíme, či systém $\{M_1, M_2, M_3\} = \{\{1,2,4\}, \{4,5\}, \{3,6\}\}$ je rozkladom množiny M . Vidíme, že ani jedna z množín M_1, M_2, M_3 nie je prázdna. Prvá podmienka je teda splnená. Zjednotením množín M_1, M_2, M_3 je množina $\{1,2,4\} \cup \{4,5\} \cup \{3,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$, teda množina M . Druhá podmienka je teda tiež splnená. Množiny $M_1 = \{1,2,4\}$ a $M_2 = \{4,5\}$ majú spoločný prvok, to znamená, že $M_1 \cap M_2 = \{4\}$. Tretia podmienka splnená nie je. Systém $\{M_1, M_2, M_3\} = \{\{1,2,4\}, \{4,5\}, \{3,6\}\}$ nie je rozkladom množiny $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ (pretože nebola splnená tretia podmienka definície rozkladu množiny).

Nech množina $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ a jej podmnožiny $M_1 = \{1,2\}$, $M_2 = \{5\}$, $M_3 = \{6\}$, $M_4 = \{3,7\}$. Zistíme, či systém $\{M_1, M_2, M_3, M_4\} = \{\{1,2\}, \{5\}, \{6\}, \{3,7\}\}$ je rozkladom množiny M . Vidíme, že ani jedna z množín M_1, M_2, M_3, M_4 nie je prázdna. Prvá podmienka je teda splnená. Zjednotením množín M_1, M_2, M_3, M_4 je množina $\{1,2\} \cup \{5\} \cup \{6\} \cup \{3,7\} = \{1,2,3,5,6,7\}$. Toto zjednotenie neobsahuje prvok 4. Druhá podmienka preto nie je splnená. Pretože nie je splnená druhá podmienka, platnosť tretej už ani netreba zisťovať. Systém $\{M_1, M_2, M_3, M_4\} = \{\{1,2\}, \{5\}, \{6\}, \{3,7\}\}$ nie je rozkladom množiny $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ (pretože nebola splnená druhá podmienka definície rozkladu množiny).

Teraz sa budeme venovať rozkladom množín s malým počtom prvkov.

Nech množina $M = \{1,2\}$. Pretože množina M má dva prvky, rozklad môže obsahovať buď jednu dvojprvkovú množinu, alebo dve jednoprvkové. Možné rozklady teda sú: $\{\{1,2\}\}$ a $\{\{1\}, \{2\}\}$.

Nech množina $M = \{a,b,c\}$. Pretože množina M má tri prvky, rozklad môže obsahovať:

- jednu trojprvkovú množinu,
- jednu dvojprvkovú a jednu jednoprvkovú množinu,
- tri jednoprvkové množiny.

Možné rozklady teda sú: $\{\{a,b,c\}\}$, $\{\{a,b\}, \{c\}\}$, $\{\{a,c\}, \{b\}\}$, $\{\{b,c\}, \{a\}\}$ a $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

Nech množina $M = \{1,2,3,4\}$. Pretože množina M má štyri prvky, rozklad môže obsahovať:

- jednu štvorprvkovú množinu: $\{\{1,2,3,4\}\}$,
- jednu trojprvkovú a jednu jednoprvkovú množinu:
 $\{\{1,2,3\}, \{4\}\}, \{\{1,2,4\}, \{3\}\}, \{\{1,3,4\}, \{2\}\}, \{\{2,3,4\}, \{1\}\}$,
- dve dvojprvkové množiny: $\{\{1,2\}, \{3,4\}\}, \{\{1,3\}, \{2,4\}\}, \{\{1,4\}, \{2,3\}\}$,
- jednu dvojprvkovú a dve jednoprvkové množiny: $\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}\},$
 $\{\{1,4\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{2,3\}, \{1\}, \{4\}\}, \{\{2,4\}, \{1\}, \{3\}\}, \{\{3,4\}, \{1\}, \{2\}\}$,
- štyri jednoprvkové množiny: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

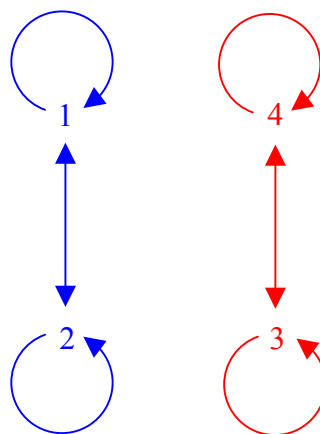
Relácia ekvivalencie a rozklad množiny

Na predchádzajúcich stranách sme sa stretli s tromi vrcholovými grafmi relácií ekvivalencie.

Vrcholový graf relácie $R = \{[1,1], [1,2], [2,1], [2,2], [3,3], [3,4], [4,3], [4,4]\}$ v množine $M = \{1,2,3,4\}$ možno rozdeliť na dve časti (modrú a červenú). Pritom platí:

1. Každý vrchol má práve jednu farbu.
2. Každé dva vrcholy s rovnakou farbou sú spojené obojsmernou šípkou.
3. Žiadne dva vrcholy s rôznymi farbami nie sú spojené šípkou.

Množinu $M = \{1,2,3,4\}$ sme týmto spôsobom rozložili na dve podmnožiny $M_1 = \{1,2\}$ a $M_2 = \{3,4\}$. Získali sme tak nasledujúci rozklad množiny M : $\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$.



Aj vrcholový graf relácie

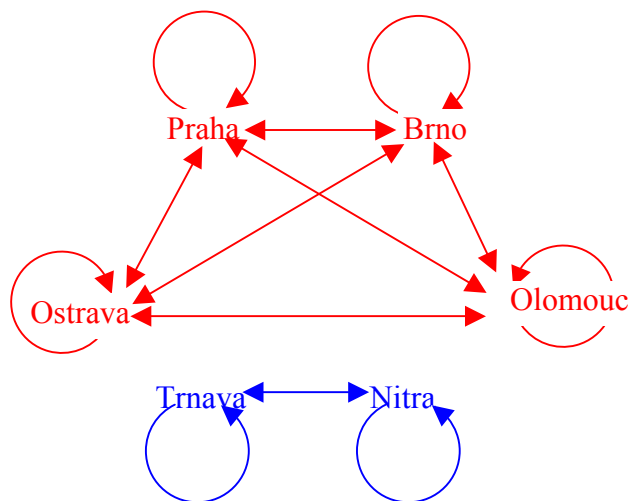
$$R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ sú v tom istom štáte}\}$$

v množine

$M = \{\text{Praha, Brno, Ostrava, Olomouc, Trnava, Nitra}\}$
 možno rozdeliť na dve časti (modrú a červenú).

Pritom opäť platí:

1. Každý vrchol má práve jednu farbu.
2. Každé dva vrcholy s rovnakou farbou sú spojené obojsmernou šípkou.
3. Žiadne dva vrcholy s rôznymi farbami nie sú spojené šípkou.



Množinu M sme týmto spôsobom rozložili na dve podmnožiny $M_1 = \{\text{Praha, Brno, Ostrava, Olomouc}\}$ a $M_2 = \{\text{Trnava, Nitra}\}$. Získali sme tak nasledujúci rozklad množiny M : $\{\{\text{Praha, Brno, Ostrava, Olomouc}\}, \{\text{Trnava, Nitra}\}\}$.

Podobne aj vrcholový graf relácie $R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ majú rovnaké pohlavie}\}$ v množine $M = \{\text{Anna, Marek, Janka, Eva, Peter, Milan}\}$ možno rozdeliť na dve časti (modrú a červenú). Pritom opäť platí:

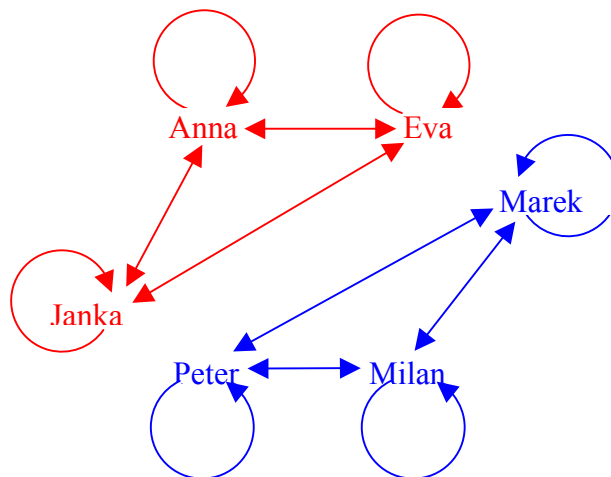
1. Každý vrchol má práve jednu farbu.
2. Každé dva vrcholy s rovnakou farbou sú spojené obojsmernou šípkou.
3. Žiadne dva vrcholy s rôznymi farbami nie sú spojené šípkou.

Množinu M sme týmto spôsobom rozložili na dve podmnožiny

$$M_1 = \{\text{Marek, Peter, Milan}\}$$

a

$M_2 = \{\text{Anna, Janka, Eva}\}$. Získali sme tak nasledujúci rozklad množiny M : $\{\{\text{Marek, Peter, Milan}\}, \{\text{Anna, Janka, Eva}\}\}$.



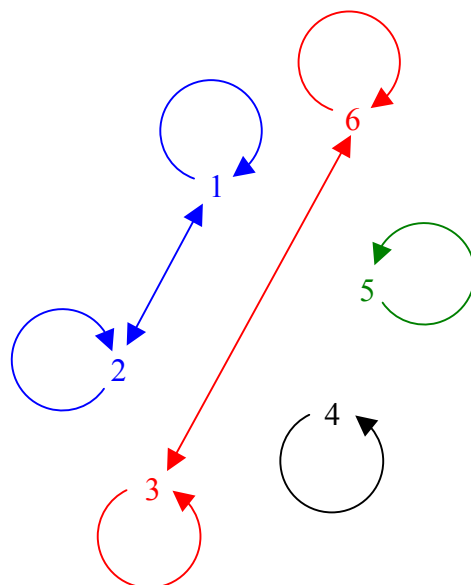
Na predchádzajúcich troch príkladoch sme si mohli všimnúť jednu dôležitú vlastnosť vrcholového grafu relácie ekvivalencie, a to fakt, že ho možno zafarbiť tak, že platí:

1. Každý vrchol má práve jednu farbu.
2. Každé dva vrcholy s rovnakou farbou sú spojené obojsmernou šípkou.
3. Žiadne dva vrcholy s rôznymi farbami nie sú spojené šípkou.

Ak potom vytvoríme množiny $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ tak, že do každej z nich dáme vrcholy s tou istou farbou, získame rozklad množiny M .

V nasledujúcich príkladoch využijeme tieto vlastnosti vrcholového grafu relácie ekvivalencie na určenie zodpovedajúceho rozkladu množiny.

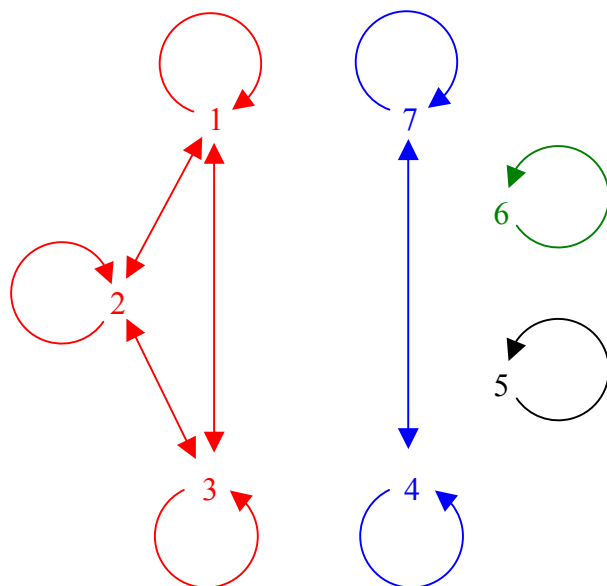
Nech množina $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ a relácia ekvivalencie $R = \{[1,1], [1,2], [2,1], [2,2], [3,3], [3,6], [4,4], [5,5], [6,3], [6,6]\}$ na množine M . Vrcholový graf relácie R so zafarbenými vrcholmi vidíme na obrázku. Rozklad množiny M , ktorý je určený reláciou ekvivalencie R je $\{\{1,2\}, \{3,6\}, \{4\}, \{5\}\}$.



Nech množina $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ a relácia ekvivalencie

$$R = \{[1,1], [1,2], [1,3], [2,1], [2,2], [2,3], [3,1], [3,2], [3,3], [4,4], [4,7], [5,5], [6,6], [7,4], [7,7]\}.$$

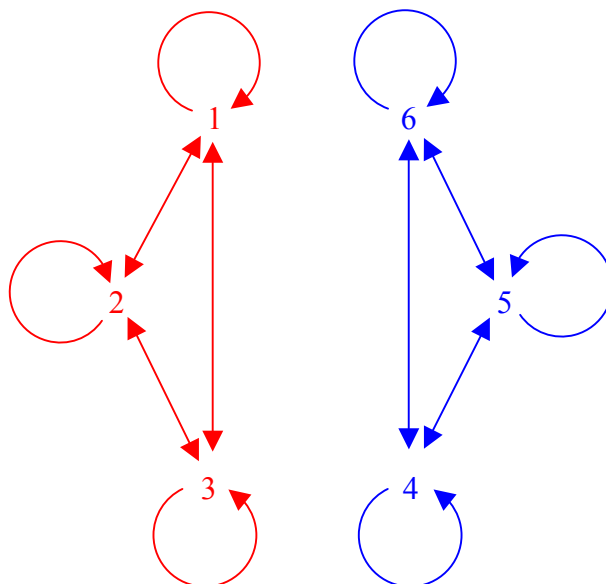
Vrcholový graf relácie R so zafarbenými vrcholmi vidíme na obrázku. Rozklad množiny M , ktorý je určený reláciou ekvivalencie R je $\{\{1,2,3\}, \{4,7\}, \{6\}, \{5\}\}$.



Teraz budeme postupovať opačne. Predpokladajme, že je daná množina M a triedy jej rozkladu $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$. Najskôr nakreslíme vrcholový graf tak, že všetky vrcholy tej istej triedy zafarbíme tou istou farbou. Potom dokreslíme slučky a každé dva vrcholy s rovnakou farbou spojíme obojsmernou šípkou. Vrcholy s rôznymi farbami nespojíme. Dostaneme tak vrcholový graf nejakej relácie na množine M . Ako ukážeme na nasledujúcich príkladoch, takto určená relácia bude reláciou ekvivalencie na množine M .

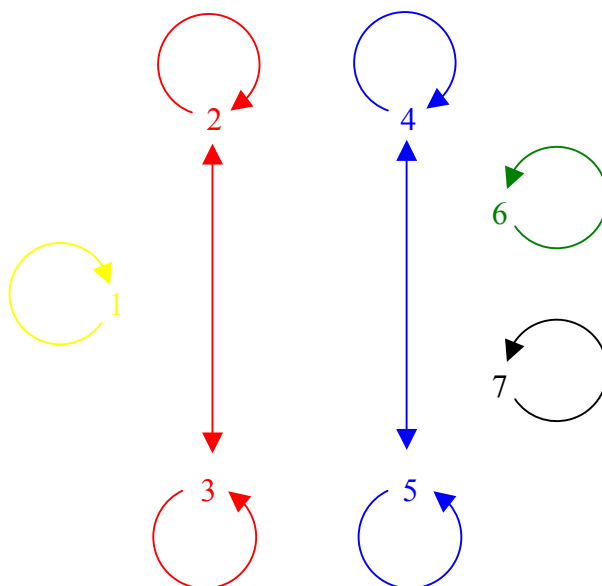
Nech množina $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ a jej rozklad $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$. Určíme zodpovedajúcu reláciu ekvivalencie R na množine M . Najskôr zafarbíme vrcholy tak, že vrcholy v tej istej množine budú mať tú istú farbu. Potom dokreslíme slučky a vrcholy s rovnakou farbou pospájame obojsmernými šípkami. Relácia ekvivalencie určená rozkladom $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$ je

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [1,1], [1,2], [1,3], [2,1], [2,2], [2,3], [3,1], [3,2], [3,3], \\ [4,4], [4,5], [4,6], [5,4], [5,5], [5,6], [6,4], [6,5], [6,6] \end{array} \right\}.$$



Nech množina $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ a jej rozklad $\{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6\}, \{7\}\}$. Určíme zodpovedajúcu reláciu ekvivalencie R na množine M . Najskôr zafarbíme vrcholy tak, že vrcholy v tej istej množine budú mať tú istú farbu. Potom dokreslíme slučky a vrcholy s rovnakou farbou pospájame obojsmernými šípkami. Relácia ekvivalencie určená rozkladom $\{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6\}, \{7\}\}$ je

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [1,1], [2,2], [2,3], [3,2], [3,3], \\ [4,4], [4,5], [5,4], [5,5], [6,6], [7,7] \end{array} \right\}.$$



Na záver kapitoly si zhrnieme poznatky o vzťahu relácie ekvivalencie R na množine M a rozkladu množiny M .

Každá relácia ekvivalencie R definovaná na množine M určuje rozklad množiny M .

Nech R je relácia ekvivalencie na množine M .

Pre každý prvok $m \in M$ utvorme množinu $M_m = \{n \in M : [m, n] \in R\}$.

Takto utvorené množiny potom určujú rozklad množiny M .

Každý rozklad množiny M definuje na množine M reláciu ekvivalencie.

Nech je daný rozklad $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ množiny M .

Definujme binárnu reláciu R na množine M :

$$R = \{[x, y] \in M \times M : m, n \text{ patria do tej istej triedy rozkladu}\}.$$

Potom R je relácia ekvivalencie na množine M .

Test č. 9

V nasledujúcom teste je 30 úloh z oblasti relácie ekvivalencie a rozkladu množiny.

Na nich si prakticky precvičíme:

- určovanie, či daná relácia je reláciou ekvivalencie,
- pojem rozkladu množiny,
- vzťah medzi reláciou ekvivalencie a rozkladom množiny.

Test č. 9 nájdeme aj v elektronickej verzii v súbore 9.exe.

1. Nech R je binárna relácia v množine M . Označte vlastnosti, ktoré musí mať relácia R , aby bola reláciou ekvivalencie.

- a) reflexívna
- b) antireflexívna
- c) symetrická
- d) antisymetrická
- e) tranzitívna
- f) súvislá

2. Daná je relácia R v množine M , $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]\}$.

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
- b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
- c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
- d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.

3. Daná je relácia R v množine M ,

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [4, 4]\}.$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
- b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
- c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
- d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.

4. Daná je relácia R v množine M , $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [3, 4], [4, 3], [4, 4]\}$.

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
- b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
- c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
- d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.

5. Daná je relácia R v množine M ,

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2], [2, 3], [3, 3], [4, 4]\}.$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
- b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
- c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
- d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.

6. Daná je relácia R v množine M ,

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3]\}.$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
- b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
- c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
- d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.

7. Daná je relácia R v množine M ,

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [3, 1], [3, 3], [4, 4]\}.$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
- b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
- c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
- d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.

8. Vyberte tú reláciu v množine prirodzených čísel, ktorá je reláciou ekvivalencie.

- a) rovnosť, teda $\{[x, y] \in N \times N : x = y\}$
- b) deliteľnosť, teda $\{[x, y] \in N \times N : x \text{ delí } y\}$
- c) ostrá nerovnosť, teda $\{[x, y] \in N \times N : x < y\}$
- d) neostrá nerovnosť, teda $\{[x, y] \in N \times N : x \leq y\}$

9. Daná je relácia R v množine všetkých ľudí M .

$$R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ majú rovnaké pohlavie}\}$$

Rozhodnite, či R je reláciou ekvivalencie.

- a) R je reláciou ekvivalencie.
- b) R nie je reláciou ekvivalencie.

10. Daná je relácia R v množine všetkých ľudí M .

$$R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ sú manželia}\}$$

Rozhodnite, či R je reláciou ekvivalencie.

- a) R je reláciou ekvivalencie.
- b) R nie je reláciou ekvivalencie.

11. Daná je relácia R v množine všetkých ľudí M .

$$R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ sa narodili v tom istom roku}\}$$

Rozhodnite, či R je reláciou ekvivalencie.

- a) R je reláciou ekvivalencie.

b) R nie je reláciou ekvivalencie.

12. Daná je relácia R v množine všetkých riek M .

$$R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ sa vlievajú do toho istého oceánu}\}$$

Rozhodnite, či R je reláciou ekvivalencie.

a) R je reláciou ekvivalencie.

b) R nie je reláciou ekvivalencie.

13. Daná je relácia R v množine všetkých ľudí M .

$$R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ sa vlieva do } y\}$$

Rozhodnite, či R je reláciou ekvivalencie.

a) R je reláciou ekvivalencie.

b) R nie je reláciou ekvivalencie.

14. Daná je relácia R v množine všetkých áut M .

$$R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ a } y \text{ majú rovnakú značku}\}$$

Rozhodnite, či R je reláciou ekvivalencie.

a) R je reláciou ekvivalencie.

b) R nie je reláciou ekvivalencie.

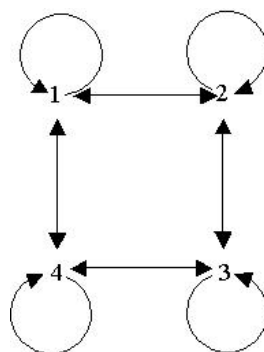
15. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Vyberte správne tvrdenie.

a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.

b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.

c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.

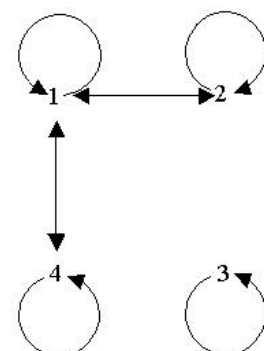
d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.



16. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Vyberte správne tvrdenie.

a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.

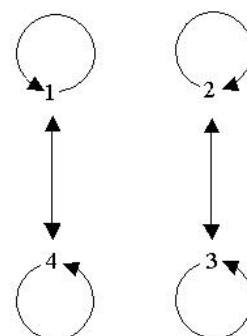
b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.



- c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
 d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.

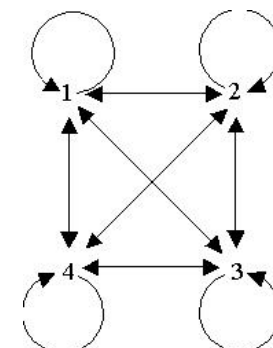
17. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
 b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
 c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
 d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.



18. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ekvivalencie.
 b) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je reflexívna.
 c) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je symetrická.
 d) Relácia R nie je reláciou ekvivalencie, pretože nie je tranzitívna.



19. Vyberte množiny, ktoré tvoria rozklad množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- a) $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$
 b) $\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}$
 c) $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$
 d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

20. Vyberte množiny, ktoré tvoria rozklad množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- a) $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}$
 b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7, 8\}$
 c) $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8\}$
 d) $\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{5, 6, 7, 8\}$

21. Vyberte množiny, ktoré tvoria rozklad množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- a) $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}$
- b) $\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}$
- c) $\{1, 2, 9\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8\}$
- d) $\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}, \{6, 7, 8, 9\}$

22. Vyberte množiny, ktoré tvoria rozklad množiny prirodzených čísel.

- a) množina čísel deliteľných tromi, množina čísel, ktoré po delení tromi dávajú zvyšok 1
- b) $\{1\}$, množina prvočísel, množina zložených čísel
- c) množina prvočísel, množina zložených čísel
- d) množina párných čísel, množina nepárnych čísel

23. Vyberte množiny, ktoré tvoria rozklad množiny celých čísel.

- a) množina čísel deliteľných tromi, množina čísel, ktoré po delení tromi dávajú zvyšok 1, množina čísel, ktoré po delení tromi dávajú zvyšok 2
- b) množina kladných čísel, množina záporných čísel
- c) množina druhých mocnín prirodzených čísel, množina tretích mocnín prirodzených čísel
- d) $\{0\}$, množina kladných čísel, množina záporných čísel

24. Koľko rôznych rozkladov má množina $M = \{1, 2, 3\}$?

25. Prirad'te k relácii ekvivalencie na množine $M = \{1, 2, 3\}$ zodpovedajúci rozklad množiny M .

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $\left\{ \begin{array}{l} [1,1], [1,2], [1,3], [2,1], [2,2], \\ [2,3], [3,1], [3,2], [3,3] \end{array} \right\}$ | 1. $\{\{1,2\}, \{3\}\}$ |
| b) $\{[1,1], [1,2], [2,1], [2,2], [3,3]\}$ | 2. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ |
| c) $\{[1,1], [2,2], [2,3], [3,2], [3,3]\}$ | 3. $\{\{1,2,3\}\}$ |
| d) $\{[1,1], [2,2], [3,3]\}$ | 4. $\{\{1\}, \{2,3\}\}$ |

26. Priradiťte k relácii ekvivalencie na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ zodpovedajúci rozklad množiny M .

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) $\{[1,1], [2,2], [3,3], [4,4]\}$ | 1. $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$ |
| b) $\{[1,1], [2,2], [2,3], [3,2], [3,3], [4,4]\}$ | 2. $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ |
| c) $\left\{ \begin{array}{l} [1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [2,1], [2,2], \\ [2,3], [2,4], [3,1], [3,2], [3,3], [3,4], \\ [4,1], [4,2], [4,3], [4,4] \end{array} \right\}$ | 3. $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ |
| d) $\left\{ \begin{array}{l} [1,1], [1,2], [2,1], [2,2], \\ [3,3], [3,4], [4,3], [4,4] \end{array} \right\}$ | 4. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ |

27. Priradiťte k rozkladu množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ počet usporiadaných dvojíc, ktoré obsahuje príslušná relácia ekvivalencie na množine M .

- | | |
|--|-------|
| a) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ | 1. 9 |
| b) $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ | 2. 5 |
| c) $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ | 3. 13 |
| d) $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ | 4. 7 |

28. Daný je rozklad $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$ množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Označte tie usporiadané dvojice, ktoré obsahuje príslušná relácia ekvivalencie určená týmto rozkladom.

- a) $[1, 3]$
- b) $[1, 1]$
- c) $[1, 5]$
- d) $[1, 7]$

29. Daný je rozklad množiny prirodzených čísel na párne čísla a nepárne čísla. Označte tie usporiadané dvojice, ktoré obsahuje príslušná relácia ekvivalencie určená týmto rozkladom.

- a) $[3, 1]$
- b) $[3, 2]$
- c) $[3, 3]$
- d) $[3, 4]$

30. Daný je rozklad množiny celých čísel na kladné čísla, záporné čísla a nulu. Označte tie usporiadané dvojice, ktoré obsahuje príslušná relácia ekvivalencie určená týmto rozkladom.

- a) [3,1]
- b) [3,2]
- c) [3,0]
- d) [3,-1]

Test č. 9 – správne riešenia

1. ace	7. d	13. b	19. acd	25. a3,b1,c4,d2
2. a	8. a	14. a	20. bc	26. a4,b3,c1,d2
3. a	9. a	15. d	21. ac	27. a2,b4,c1,d3
4. a	10. b	16. d	22. bd	28. ab
5. c	11. a	17. a	23. ad	29. ac
6. b	12. a	18. a	24. 5	30. ab