

BINÁRNE

RELÁCIE

1. Karteziánsky súčin dvoch množín

Karteziánskym súčinom množín A, B rozumieme množinu

$$A \times B = \{[x, y] : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Karteziánskym súčinom množín A, B je teda množina všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Inými slovami, je to množina všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvá zložka je z prvej množiny (teda z množiny A) a druhá zložka z druhej množiny (teda z množiny B).

Pojem karteziánskeho súčinu si vysvetlíme na dvoch príkladoch.

Ak $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{a, b, c\}$, potom karteziánsky súčin množín $A \times B$ obsahuje všetky usporiadané dvojice, ktorých prvá zložka je z množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a druhá zložka

z množiny $B = \{a, b, c\}$. Preto: $A \times B = \left\{ [1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c], [3, a], [3, b], [3, c], [4, a], [4, b], [4, c] \right\}$.

Podobne, karteziánsky súčin $B \times A$ obsahuje všetky usporiadané dvojice, ktorých prvá zložka je z množiny $B = \{a, b, c\}$ a druhá zložka z množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Preto:

$$B \times A = \left\{ [a, 1], [a, 2], [a, 3], [a, 4], [b, 1], [b, 2], [b, 3], [b, 4], [c, 1], [c, 2], [c, 3], [c, 4] \right\}.$$

Všimnite si, že karteziánsky súčin $A \times B$ je rôzny od karteziánskeho súčinu $B \times A$.

Ak $C = \{\alpha, \beta, \chi\}$ a $D = \{\Delta, \square, \bigcirc\}$, potom karteziánsky súčin $C \times D$ obsahuje všetky usporiadané dvojice, ktorých prvá zložka je z množiny $C = \{\alpha, \beta, \chi\}$ a druhá zložka z množiny $D = \{\Delta, \square, \bigcirc\}$. Podobne, karteziánsky súčin $D \times C$ obsahuje všetky usporiadané dvojice, ktorých prvá zložka je z množiny $D = \{\Delta, \square, \bigcirc\}$ a druhá zložka z množiny $C = \{\alpha, \beta, \chi\}$.

$$\text{Preto: } C \times D = \left\{ [\alpha, \Delta], [\alpha, \square], [\alpha, \bigcirc], [\beta, \Delta], [\beta, \square], [\beta, \bigcirc], [\chi, \Delta], [\chi, \square], [\chi, \bigcirc] \right\} \text{ a } D \times C = \left\{ [\Delta, \alpha], [\square, \alpha], [\bigcirc, \alpha], [\Delta, \beta], [\square, \beta], [\bigcirc, \beta], [\Delta, \chi], [\square, \chi], [\bigcirc, \chi] \right\}.$$

V predchádzajúcich príkladoch obsahovala množina A štyri prvky a množina B tri prvky. Karteziánske súčiny $A \times B$ aj $B \times A$ obsahovali 12 prvkov (12 usporiadaných dvojíc). Množina C a aj množina D obsahovali tri prvky. Karteziánske súčiny $C \times D$ aj $D \times C$ obsahovali 9 prvkov (9 usporiadaných dvojíc).

Teraz si tieto poznatky zovšeobecníme. Označme počet prvkov množiny A znakom a a počet prvkov množiny B znakom b . Karteziánsky súčin $A \times B$ obsahuje všetky usporiadané dvojice, ktorých prvú zložku vyberáme z a prvkov a druhú z b prvkov. Spolu teda možno vytvoriť $a \cdot b$ usporiadaných dvojíc. Rovnaký vzťah platí i pre počet prvkov karteziánskeho súčinu $B \times A$.

Teraz uvidíme niekoľko poznámok o karteziánskom súčine a o usporiadaných dvojiciach.

1. Karteziánsky súčin $A \times A$ označujeme aj A^2 .
2. Pri usporiadaných dvojiciach záleží na poradí, v akom sú prvky uvedené. To znamená, že usporiadaná dvojica $[1,2]$ je rôzna od usporiadanej dvojice $[2,1]$. Toto je jeden z rozdielov oproti množinám. Pre množiny totiž platí, že $\{1,2\} = \{2,1\}$.
3. Pojmy usporiadaná dvojica a karteziánsky súčin dvoch množín môžeme zovšeobecniť. Napríklad $A \times B \times C = \{[x,y,z] : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$ je karteziánsky súčin troch množín A, B, C a $[x,y,z]$ nazývame usporiadanou trojicou.

Ak $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\alpha\}$, potom karteziánsky súčin $A \times B \times C$ obsahuje všetky usporiadané trojice, ktorých prvá zložka je z množiny $A = \{1,2,3\}$, druhá z množiny

$$B = \{a,b\} \text{ a tretia z množiny } C = \{\alpha\}. \text{ Preto: } A \times B \times C = \left\{ \begin{array}{l} [1,a,\alpha], [2,a,\alpha], [3,a,\alpha], \\ [1,b,\alpha], [2,b,\alpha], [3,b,\alpha] \end{array} \right\}.$$

Podobne, karteziánsky súčin $B \times C \times A$ obsahuje všetky usporiadané trojice, ktorých prvá zložka je z množiny $B = \{a,b\}$, druhá z množiny $C = \{\alpha\}$ a tretia z množiny $A = \{1,2,3\}$.

$$\text{Preto: } B \times C \times A = \left\{ \begin{array}{l} [a,\alpha,1], [a,\alpha,2], [a,\alpha,3], \\ [b,\alpha,1], [b,\alpha,2], [b,\alpha,3] \end{array} \right\}.$$

Všimnime si, že počet prvkov oboch karteziánskych súčinov je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

2. Binárna relácia v množine

Binárna relácia R v množine M je akákoľvek podmnožina karteziánskeho súčinu $M \times M$.

Ako už vieme z predchádzajúcej kapitoly, karteziánsky súčin $M \times M$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvá aj druhá zložka je z množiny M . Binárna relácia na množine M je teda množina, ktorá obsahuje niekoľko (aj nula) usporiadaných dvojíc, ktorých prvá aj druhá zložka je z množiny M .

Definíciu binárnej relácie si vysvetlíme na príkladoch.

Daná je množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Už vieme, že karteziánsky súčin

$$M \times M = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3]\}.$$

Ak vyberieme ľubovoľnú podmnožinu tohto karteziánskeho súčinu, dostaneme binárnu reláciu v množine M . Teda binárnymi reláciami v množine M sú napríklad:

$$R_1 = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3]\}$$

$$R_2 = \{ \}$$

$$R_3 = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$$

$$R_4 = \{[1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 2]\}$$

$$R_5 = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2], [2, 3], [3, 3]\}$$

$$R_6 = \{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\}$$

$$R_7 = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2], [3, 3]\}$$

$$R_8 = \{[3, 1]\}$$

Množina R_2 je prázdnu podmnožinou karteziánskeho súčinu $M \times M$, preto ju nazývame prázdnu reláciou v M .

Množina $R_1 = M \times M$, preto sa nazýva úplnou reláciou v M .

Ak je množina všetkých prvých zložiek usporiadaných dvojíc relácie R rovná M , potom reláciu R nazývame reláciou na množine M .

Z relácií R_1 až R_8 v množine M sú reláciami na množine M relácie R_1, R_3, R_4, R_5, R_7 , pretože množina všetkých prvých zložiek ich usporiadaných dvojíc obsahuje všetky prvky množiny $M = \{1, 2, 3\}$.

Relácia R_2 nie je reláciou na množine M , lebo na prvom mieste vo svojich usporiadaných dvojiciach neobsahuje 1, 2, ani 3. Relácia R_6 nie je reláciou na množine M , lebo na prvom mieste vo svojich usporiadaných dvojiciach neobsahuje 3. Relácia R_8 nie je reláciou na množine M , lebo na prvom mieste vo svojich usporiadaných dvojiciach neobsahuje 1 ani 2.

Teraz sa budeme venovať zápisu toho, že určitá usporiadaná dvojica patrí do relácie R . Ak usporiadaná dvojica $[a, b]$ patrí do relácie R , používame zápis $[a, b] \in R$ a čítame „ a je v relácii s b “. Rovnako sa používa aj zápis aRb , ktorý tiež čítame „ a je v relácii s b “. Oba spôsoby si vysvetlíme na príkladoch.

Nech množina $A = \{1, 3, 7\}$ a relácia $R = \{[1, 1], [1, 3], [1, 7], [3, 3], [3, 7], [7, 7]\}$. Relácia R teda obsahuje šesť usporiadaných dvojíc.

Ak usporiadaná dvojica $[1, 1]$ patrí do relácie R , potom to môžeme zapísať $[1, 1] \in R$ alebo $1R1$. Podobne, ak usporiadaná dvojica $[1, 3]$ patrí do relácie R , potom to môžeme zapísať $[1, 3] \in R$ alebo $1R3$. To, že usporiadaná dvojica $[3, 7]$ patrí do relácie R môžeme zapísať $[3, 7] \in R$ alebo $3R7$.

Nech množina $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a nech relácia $<$ obsahuje všetky tie usporiadané dvojice z $A \times A$, ktorých prvá zložka je menšia ako druhá. Relácia $<$ teda obsahuje desať usporiadaných dvojíc $[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [3, 4], [3, 5], [4, 5]$.

Ak usporiadaná dvojica $[3, 5]$ patrí do relácie $<$, potom to môžeme zapísať $[3, 5] \in <$ alebo $3 < 5$. Podobne, ak usporiadaná dvojica $[2, 4]$ patrí do relácie $<$, potom to môžeme zapísať $[2, 4] \in <$ alebo $2 < 4$.

Vidíme teda, že zápis typu aRb nie je pre nás nový. Už od prvého stupňa základnej školy ho používame na zápis binárnych relácií rovná sa, je menší, je väčší, je menší alebo sa rovná a je väčší alebo sa rovná. Podobne sme zapisovali aj reláciu deliteľnosti.

3. Určenie binárnej relácie charakteristickou vlastnosťou

Nie vždy je najvýhodnejšie určovať binárne relácie vymenovaním všetkých prvkov. Ak množina M pozostáva zo všetkých celých čísel od 1 do 1 000 a relácia R obsahuje všetky tie usporiadané dvojice karteziánskeho súčinu $M \times M$, pre ktoré platí, že prvá zložka je menšia ako druhá, potom relácia R obsahuje 499 500 usporiadaných dvojíc, napríklad $[1, 485], [122, 851], [185, 187], [3, 74], [998, 999], \dots$. Z časových dôvodov zrejme nie je výhodné určovať takúto reláciu vypísaním všetkých prvkov.

Na určenie relácie R budeme používať zápis $R = \{[x, y] \in M \times M : x < y\}$, ktorý čítame: R je množina všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$ karteziánskeho súčinu $M \times M$, pre ktoré platí, že $x < y$.

V prípade, že množina M je nekonečná, vo väčšine prípadov musíme použiť zápis relácie pomocou charakteristickej vlastnosti.

Vyjadrenie relácie pomocou charakteristickej vlastnosti si vysvetlíme na príkladoch. Nech množina $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ a binárna relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : x \mid y\}$. Teda R je množina všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$ karteziánskeho súčinu $M \times M$, pre ktoré platí, že x delí y . Prvkami tejto relácie sú napríklad usporiadané dvojice $[2, 8]$ (pretože 2 delí 8), $[3, 18]$ (pretože 3 delí 18), $[27, 81]$ (pretože 27 delí 81). Prvkami tejto relácie nie sú napríklad usporiadané dvojice $[2, 7]$ (pretože 2 nedelí 7), $[12, 4]$ (pretože 12 nedelí 4), $[27, 9]$ (pretože 27 nedelí 9).

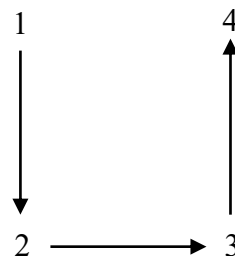
Nech množina $H = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ a binárna relácia $Q = \{[x, y] \in H \times H : 3x = y\}$. Potom Q je množina všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$ karteziánskeho súčinu $H \times H$, pre ktoré platí, že $3x = y$. Prvkami tejto relácie sú napríklad usporiadané dvojice $[3, 9]$ (pretože $3 \cdot 3 = 9$), $[24, 72]$ (pretože $3 \cdot 24 = 72$), $[11, 33]$ (pretože $3 \cdot 11 = 33$). Prvkami tejto relácie nie sú

napríklad usporiadané dvojice $[2,7]$ (pretože $3.2 \neq 7$), $[3,17]$ (pretože $3.3 \neq 17$), $[27,9]$ (pretože $3.27 \neq 9$).

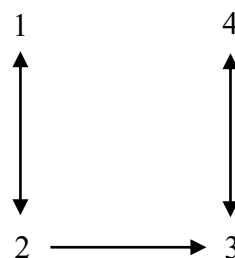
4. Vrcholový graf binárnej relácie

Predpokladajme, že je daná binárna relácia R v množine M . Ak množina M neobsahuje veľký počet prvkov, môžeme reláciu R znázorniť aj jej vrcholovým grafom (diagramom). Toto znázornenie si vysvetlíme na príkladoch.

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a binárna relácia $R = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4]\}$. Vrcholový graf relácie R je znázornený na obrázku. Relácia R obsahuje tri usporiadané dvojice: $[1, 2], [2, 3], [3, 4]$. Skutočnosť, že $[1, 2] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená šípkou z 1 do 2. Skutočnosť, že $[2, 3] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená šípkou z 2 do 3. Skutočnosť, že $[3, 4] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená šípkou z 3 do 4.

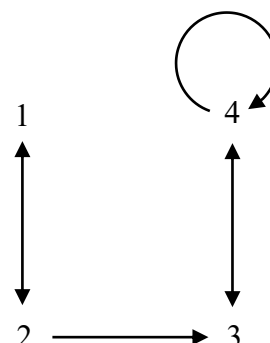


Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a binárna relácia $R = \{[1, 2], [2, 1], [2, 3], [3, 4], [4, 3]\}$. Vrcholový graf relácie R je znázornený na obrázku. Relácia R obsahuje päť usporiadaných dvojíc: $[1, 2], [2, 1], [2, 3], [3, 4], [4, 3]$. Skutočnosť, že $[1, 2] \in R$ a zároveň aj $[2, 1] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená obojsmernou šípkou z 1 do 2. Skutočnosť, že $[2, 3] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená šípkou z 2 do 3. Skutočnosť, že $[3, 4] \in R$ a zároveň aj $[4, 3] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená obojsmernou šípkou z 3 do 4.



Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a binárna relácia

$R = \{[1, 2], [2, 1], [2, 3], [3, 4], [4, 4]\}$. Vrcholový graf relácie R je znázornený na obrázku. Relácia R obsahuje päť usporiadaných dvojíc: $[1, 2], [2, 1], [2, 3], [3, 4], [4, 4]$. Skutočnosť, že $[1, 2] \in R$ a zároveň aj $[2, 1] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená obojsmernou šípkou z 1

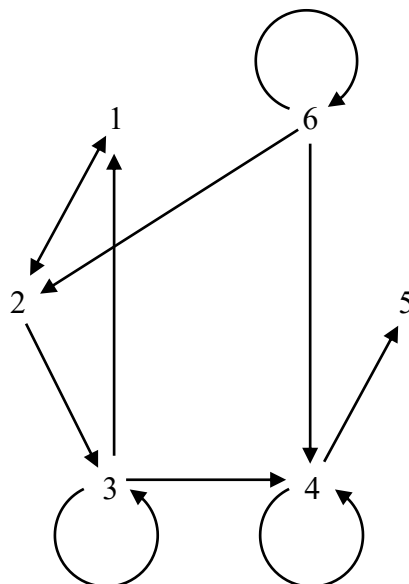


do 2. Skutočnosť, že $[2,3] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená šípkou z 2 do 3. Skutočnosť, že $[3,4] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená šípkou z 3 do 4. Skutočnosť, že $[4,4] \in R$, je vo vrcholovom grafe znázornená slučkou pri vrchole 4.

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a binárna relácia

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [1,2], [2,1], [2,3], [3,1], [3,3], [3,4], \\ [4,4], [4,5], [6,2], [6,4], [6,6] \end{array} \right\}.$$

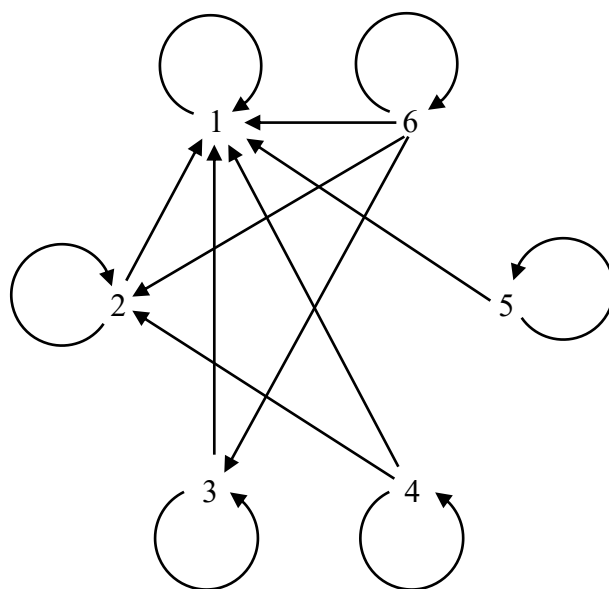
Vrcholový graf relácie R vidíme na obrázku.



Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a binárna relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : y \mid x\}$. Reláciu R môžeme zapísať vymenovaním jej prvkov takto:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [1,1], [2,1], [2,2], [3,1], [3,3], \\ [4,1], [4,2], [4,4], [5,5], \\ [6,1], [6,2], [6,3], [6,6] \end{array} \right\}$$

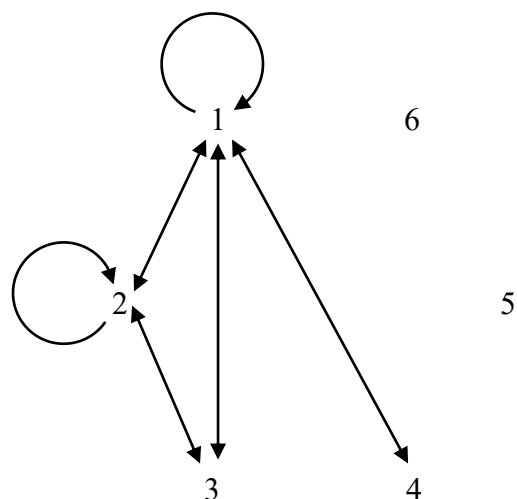
Vrcholový graf relácie R je znázornený na obrázku.



Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a binárna relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : x + y < 6\}$. Reláciu R môžeme zapísať vymenovaním jej prvkov takto:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [1,1], [1,2], [1,3], [1,4], \\ [2,1], [2,2], [2,3], \\ [3,1], [3,2], [4,1] \end{array} \right\}$$

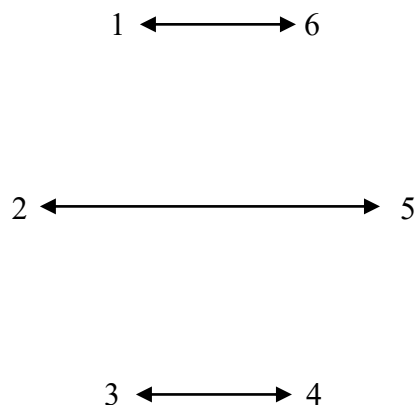
Vrcholový graf relácie R je znázornený na obrázku.



Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a binárna relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : x + y = 7\}$. Reláciu R môžeme zapísať vymenovaním jej prvkov takto:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [1,6], [2,5], [3,4], \\ [4,3], [5,2], [6,1] \end{array} \right\}$$

Vrcholový graf relácie R je znázornený na obrázku.



5. Inverzná a doplnková relácia

Nech R je relácia v M . Relácia R' v M definovaná vzťahom $R' = (M \times M) - R$ sa nazýva doplnkovou reláciou k relácii R .

Vysvetlime si podrobnejšie definíciu doplnkovej relácie. Zápis $M \times M$ už poznáme, predstavuje karteziánsky súčin. Znak $-$ predstavuje rozdiel množín. Výraz $(M \times M) - R$ teda znamená množinu všetkých tých usporiadaných dvojíc, ktoré patria do karteziánskeho súčinu $M \times M$, ale nepatria do relácie R .

Doplnkovú reláciu teda možno zapísať i takto: $R' = \{[x, y] \in M \times M : [x, y] \notin R\}$ (teda množina všetkých tých usporiadaných dvojíc karteziánskeho súčinu $M \times M$, ktoré nepatria do relácie R).

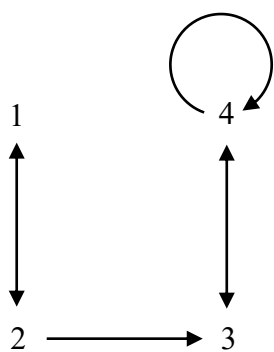
Z uvedeného vzťahu teda pre každú usporiadanú dvojicu karteziánskeho súčinu $M \times M$ platí, že buď patrí do R , alebo do R' . Preto platí:
 $\forall [x, y] \in M \times M : [x, y] \in R' \Leftrightarrow [x, y] \notin R$.

Ak je relácia R určená vymenovaním prvkov, potom reláciu R' zostrojíme tak, že do nej zapíšeme tie usporiadané dvojice, ktoré chýbali v relácii R . To znamená, že ak $M = \{1, 2, 3\}$ a $R = \{[1, 2], [2, 1], [2, 3], [3, 1]\}$, potom $R' = \{[1, 1], [1, 3], [2, 2], [3, 2], [3, 3]\}$.

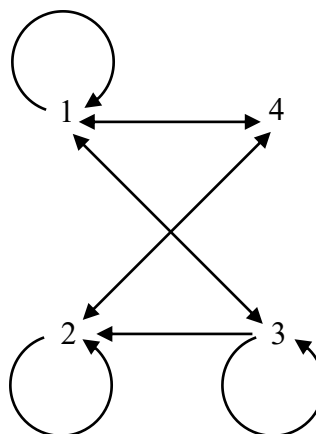
Ak je relácia R určená charakteristickou vlastnosťou, potom reláciu R' určíme tak, že definíciu „znegujeme“. To znamená, že ak $R = \{[x, y] \in M \times M : x + 2y = 10\}$, potom $R' = \{[x, y] \in M \times M : x + 2y \neq 10\}$.

Ak je relácia R určená vrcholovým grafom, tak vrcholový graf relácie R^{-1} zostrojíme tak, že **všetky obojsmerné šípky a slučky odstránime, všetky jednosmerné šípky obrátíme a tam, kde šípky neboli, dokreslíme obojsmerné šípky**. Napokon **tam, kde nebola slučka, ju pridáme**. Konkrétny príklad vidíme na obrázku.

R :



R' :



Nech je v množine M definovaná relácia R . Reláciu R^{-1} v množine M definovanú vzťahom $R^{-1} = \{[x, y] \in M \times M : [y, x] \in R\}$ nazývame inverznou reláciou k relácii R .

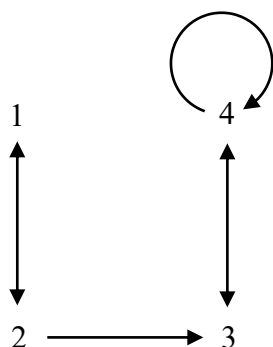
Vysvetlime si podrobnejšie definíciu inverznej relácie. Je to množina všetkých usporiadaných dvojíc $[y, x]$ karteziánskeho súčinu $M \times M$, ktoré sa nachádzajú v relácii R v tvare $[x, y]$.

Ak je relácia R určená vymenovaním prvkov, potom reláciu R^{-1} zostrojíme tak, že v jednotlivých usporiadaných dvojiciach navzájom vymeníme prvú a druhú zložku. To znamená, že ak $R = \{[1, 2], [2, 1], [2, 3], [3, 1]\}$, potom $R^{-1} = \{[2, 1], [1, 2], [3, 2], [1, 3]\}$.

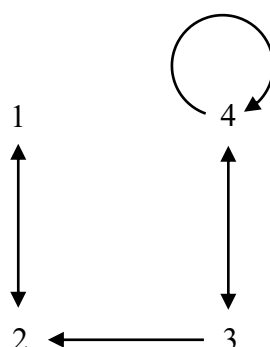
Ak je relácia R určená charakteristickou vlastnosťou, potom reláciu R^{-1} určíme tak, že v definícii navzájom zameníme x a y . To znamená, že ak $R = \{[x, y] \in M \times M : x + 2y = 10\}$, potom $R^{-1} = \{[x, y] \in M \times M : y + 2x = 10\}$.

Ak je relácia R určená vrcholovým grafom, tak vrcholový graf relácie R^{-1} zostrojíme tak, že všetky obojsmerné šípky a slučky ponecháme a **všetky jednosmerné šípky obrátíme**. Konkrétny príklad vidíme na obrázku.

R :



R^{-1} :



Teraz si ukážeme zopár príkladov inverzných a doplnkových relácií.

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a binárna relácia $R = \{[1, 2], [2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 3], [3, 4], [4, 4]\}$.

Inverznú reláciu zostrojíme tak, že navzájom zameníme poradie prvkov v usporiadaných dvojiciach. Teda $R^{-1} = \{[2, 1], [1, 2], [3, 2], [1, 3], [3, 3], [4, 3], [4, 4]\}$.

Doplnkovú reláciu zostrojíme tak, že do nej zahrnieme tie usporiadané dvojice karteziánskeho súčinu $M \times M$, ktoré nie sú zahrnuté v relácii R . Teda $R' = \{[1, 1], [1, 3], [1, 4], [2, 2], [2, 4], [3, 2], [4, 1], [4, 2], [4, 3]\}$.

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a binárna relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : y > x\}$.

Inverznú reláciu zostrojíme tak, že navzájom zameníme x a y v definícii. Teda $R^{-1} = \{[x, y] \in M \times M : x > y\}$.

Doplnkovú reláciu zostrojíme tak, že definíciu „znegujeme“. Teda $R' = \{[x, y] \in M \times M : y \leq x\}$. (uvedomme si, že negáciou $y > x$ je $y \leq x$)

Nech množina $M = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ a binárna relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : 3x + 2y > 1200\}$.

Inverznú reláciu zostrojíme tak, že navzájom zameníme x a y v definícii. Teda

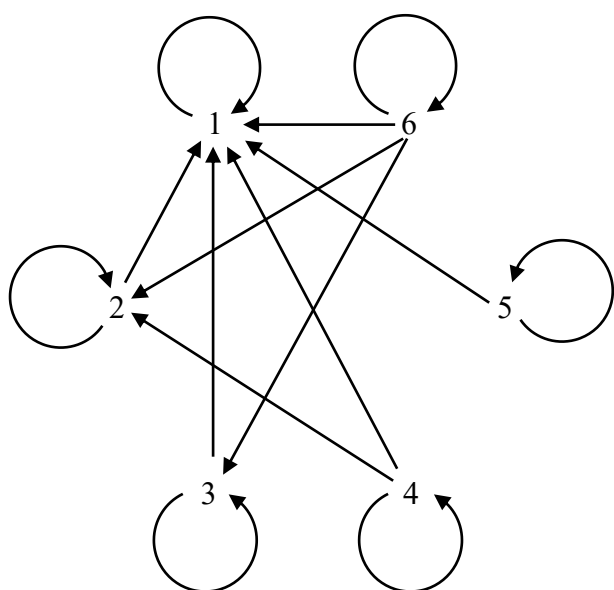
$$R^{-1} = \{[x, y] \in M \times M : 3y + 2x > 1200\}.$$

Doplňkovú reláciu zostrojíme tak, že definíciu „znegujeme“. Teda

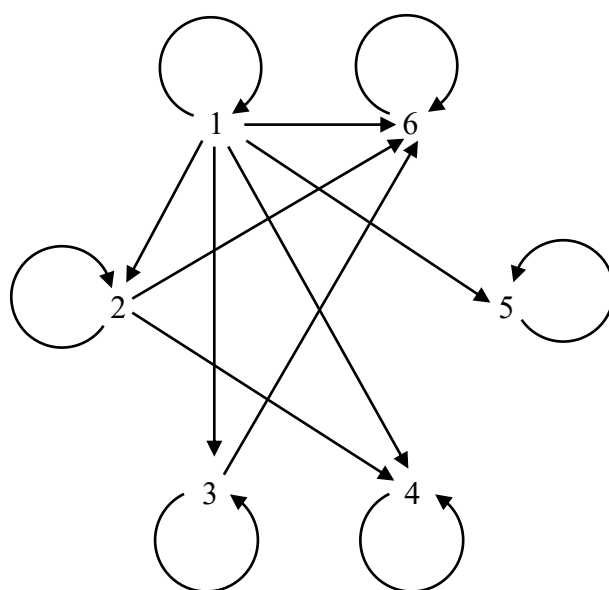
$$R' = \{[x, y] \in M \times M : 3x + 2y \leq 1200\}.$$

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a binárna relácia R je určená jej vrcholovým grafom.

Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R vidíme na obrázku.



R :

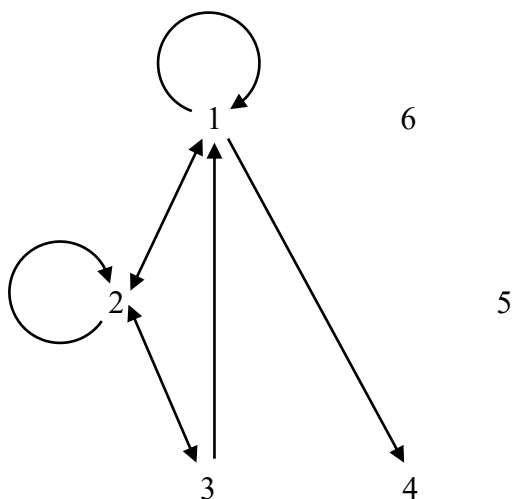


R^{-1} :

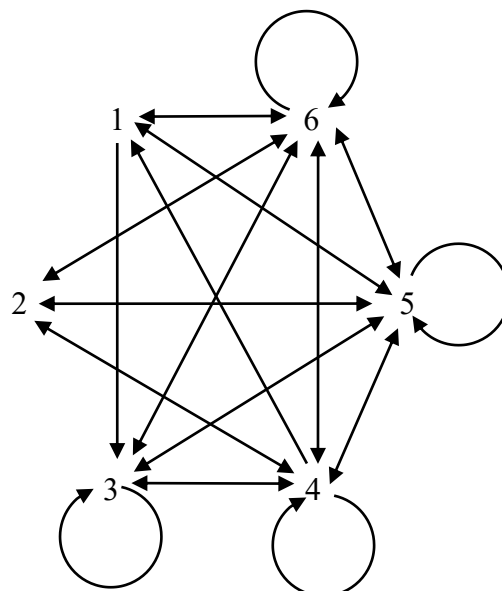
Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a binárna relácia R je určená jej vrcholovým grafom.

Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R vidíme na obrázku.

R :



R' :



Test č. 7

V nasledujúcom teste je 30 úloh z oblasti karteziánskeho súčinu a binárnych relácií.

Na nich si prakticky precvičíme:

- karteziánsky súčin dvoch a troch množín,
- pojem binárnej relácie v množine a na množine,
- určenie binárnej relácie vypísaním usporiadaných dvojíc a charakteristickou vlastnosťou,
- vrcholový graf binárnej relácie,
- pojem inverznej relácie, jej zápis charakteristickou vlastnosťou a jej vrcholový graf,
- pojem doplnkovej relácie, jej zápis charakteristickou vlastnosťou a jej vrcholový graf.

Test č. 7 nájdeme aj v elektronickej verzii v súbore 7.exe.

1. Koľko prvkov má karteziánsky súčin množín $A \times B$? $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3\}$

- a) 15
- b) 3
- c) 5
- d) 2

2. Označte prvky, ktoré patria do karteziánskeho súčinu množín $A \times B$.

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{\Delta, \square, \bigcirc\}$$

- a) $[a, \square]$
- b) $[d, \bigcirc]$
- c) $[\Delta, a]$
- d) $[c, c]$

3. Označte prvky, ktoré patria do karteziánskeho súčinu množín $B \times A$.

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{\Delta, \square, \bigcirc\}$$

- a) $[\square, \Delta]$
- b) $[c, \square]$
- c) $[\bigcirc, d]$

d) $[\square, c]$

4. Označte správne tvrdenie.

- a) Karteziánsky súčin množín je komutatívny.
- b) Karteziánsky súčin množín nie je komutatívny.

5. Koľko prvkov má karteziánsky súčin množín $A \times B \times C$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2\}, C = \{a, b, c\}$$

- a) 5
- b) 2
- c) 3
- d) 30

6. Označte prvky, ktoré patria do karteziánskeho súčinu množín $A \times B \times C$.

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{\square, \Delta, \bigcirc\}$$

- a) $[a, \Delta, 2]$
- b) $[\square, 2, \Delta]$
- c) $[b, 3, \bigcirc]$
- d) $[a, 2, \Delta]$

7. Daná je množina $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Označte množiny, ktoré sú binárnymi reláciami v množine A .

- a) $\{[a, e, f], [a, c, f], [b, c, h], [f, d, a]\}$
- b) $\{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$
- c) $\{a, b, c, d\}$
- d) $\{[a, g], [a, h], [b, i], [c, f]\}$
- e) $\{[a, e], [a, f], [b, c], [f, d]\}$
- f) $\{a, b, c, d, e, f\}$

8. Daná je množina $A = \{a, b\}$. Označte množiny, ktoré sú úplnými binárnymi reláciami v množine A .

- a) $\{a, b\}$
- b) $\{[a, a], [b, b]\}$
- c) $\{[a, a], [a, b], [b, a], [b, b]\}$
- d) $\{[a, b], [b, a]\}$

9. Daná je množina $A = \{a, b, c\}$. Označte množiny, ktoré sú binárnymi reláciami na množine A .

- a) $\{[a, b], [b, c]\}$
- b) $\{[a, a], [a, b], [a, c], [b, a], [b, b], [b, c]\}$
- c) $\{[a, b], [b, c], [c, a]\}$
- d) $\{[a, a], [b, b], [c, c]\}$

10. Daná je množina A a relácia R . $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{[1, 4], [2, 3], [3, 4], [4, 2]\}$

Označte pravdivé výroky.

- a) $1R4$
- b) $3R4$
- c) $2R5$
- d) $4R3$

11. Daná je množina M a relácia R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100\}, R = \{[x, y] \in M \times M; x + y = 100\}$$

Označte prvky, ktoré patria relácii R .

- a) $[3; 7]$
- b) $[3; 97]$
- c) $[50; 50]$
- d) $[1; 100]$

12. Daná je množina M a relácia R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100\}, R = \{[x, y] \in M \times M; x \text{ delí } y\}$$

Označte prvky, ktoré patria relácii R .

- a) $[3; 3]$
- b) $[30; 3]$
- c) $[11; 37]$
- d) $[3; 9]$

13. Daná je množina M a relácia R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100\}, R = \{[x, y] \in M \times M; 2x + 3y \geq 50\}$$

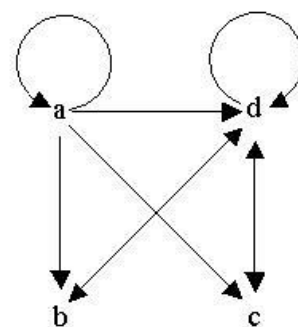
Označte prvky, ktoré patria relácii R .

- a) $[7; 3]$
- b) $[1; 11]$
- c) $[17; 23]$
- d) $[5; 5]$

14. Na obrázku je znázornený vrcholový graf relácie R v množine

$M = \{a, b, c, d\}$. Označte prvky, ktoré patria relácii R .

- a) $[b; c]$
- b) $[d; a]$
- c) $[a; a]$
- d) $[a; d]$



15. Označte prvky, ktoré obsahuje vrcholový graf binárnej relácie R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 20\}, R = \{[x, y] \in M \times M; x + y = 20\}$$

- a) slučka pri vrchole 10
- b) obojsmerná šípka z vrchola 12 do vrchola 8
- c) slučka pri vrchole 5

d) jednosmerná šípka z vrchola 10 do vrchola 15

16. Označte prvky, ktoré obsahuje vrcholový graf binárnej relácie R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 20\}, R = \{[x, y] \in M \times M; 4x + y \geq 40\}$$

a) slučka pri vrchole 15

b) slučka pri vrchole 3

c) obojsmerná šípka z vrchola 2 do vrchola 3

d) jednosmerná šípka z vrchola 5 do vrchola 15

17. Označte pravdivé tvrdenia.

$$M = \{1, 2, 3\}, R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [3, 2], [3, 3]\}$$

Vrcholový graf relácie R v množine M

a) obsahuje slučku pri každom svojom vrchole.

b) obsahuje aspoň jednu obojsmernú šípku.

c) obsahuje aspoň tri jednosmerné šípky.

d) neobsahuje slučku pri žiadnom vrchole.

18. Označte pravdivé tvrdenia.

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}, R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ delí } y\}$$

Vrcholový graf relácie R v množine M

a) obsahuje slučku pri každom vrchole.

b) obsahuje aspoň jednu obojsmernú šípku.

c) neobsahuje žiadnu jednosmernú šípku.

d) obsahuje jednosmernú šípku vchádzajúcu do vrchola 17.

19. Priradiť k sebe navzájom inverzné binárne relácie v množine $M = \{a, b, c\}$.

a) $\{[a, a], [a, b], [b, c], [c, c]\}$

1. $\{[a, b], [b, a], [c, a], [c, b]\}$

b) $\{[a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, a]\}$

2. $\{[a, a], [b, a], [c, b], [c, c]\}$

c) $\{[a, b], [a, c], [b, a], [b, c]\}$

3. $\{[a, a], [b, b], [c, a], [c, b], [c, c]\}$

d) $\{[a, a], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c]\}$

4. $\{[a, c], [b, a], [b, b], [c, a], [c, b]\}$

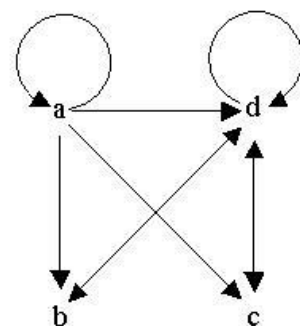
20. Priradiťte k sebe navzájom doplnkové binárne relácie v množine $M = \{a, b, c\}$.

- | | |
|---|---|
| a) $\{[a, a], [a, b], [b, c], [c, c]\}$ | 1. $\{[a, a], [b, a], [c, b], [c, c]\}$ |
| b) $\{[a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, a]\}$ | 2. $\{[a, b], [b, a], [c, a], [c, b]\}$ |
| c) $\{[a, b], [a, c], [b, a], [b, c]\}$ | 3. $\{[a, c], [b, a], [b, b], [c, a], [c, b]\}$ |
| d) $\{[a, a], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c]\}$ | 4. $\{[a, a], [b, b], [c, a], [c, b], [c, c]\}$ |

21. Na obrázku je znázornený vrcholový graf relácie R v množine $M = \{a, b, c, d\}$.

Označte tvrdenia, ktoré platia pre vrcholový graf inverznej relácie k relácii R .

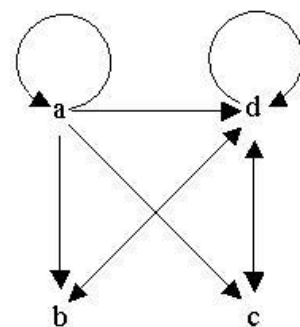
- a) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje slučku pri vrchole a .
- b) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje obojsmernú šípku z c do d .
- c) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje slučku pri vrchole c .
- d) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje jednosmernú šípku z a do b .



22. Na obrázku je znázornený vrcholový graf relácie R v množine $M = \{a, b, c, d\}$.

Označte tvrdenia, ktoré platia pre vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R .

- a) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje slučku pri vrchole a .
- b) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje obojsmernú šípku z c do d .
- c) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje slučku pri vrchole c .
- d) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje jednosmernú šípku z b do a .



23. Na obrázku je znázornený vrcholový graf relácie R v množine $M = \{a, b, c, d\}$.

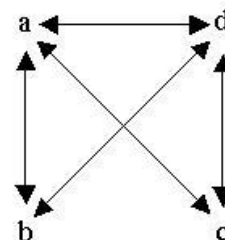
Označte tvrdenia, ktoré platia pre vrcholový graf inverznej relácie k relácii R .

a) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje slučku pri každom vrchole.

b) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje obojsmernú šípku z c do d .

c) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje obojsmernú šípku z b do c .

d) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje aspoň jednu jednosmernú šípku.



24. Na obrázku je znázornený vrcholový graf relácie R v množine $M = \{a, b, c, d\}$.

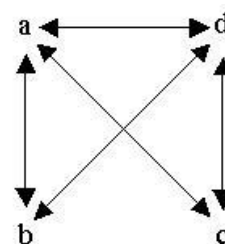
Označte tvrdenia, ktoré platia pre vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R .

a) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje slučku pri každom vrchole.

b) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje obojsmernú šípku z c do d .

c) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje obojsmernú šípku z b do c .

d) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje aspoň jednu jednosmernú šípku.



25. Na obrázku je znázornený vrcholový graf relácie R v množine $M = \{a, b, c, d\}$.

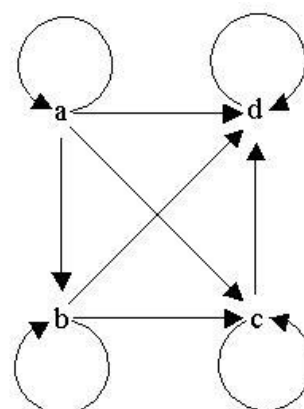
Označte tvrdenia, ktoré platia pre vrcholový graf inverznej relácie k relácii R .

a) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje slučku pri každom vrchole.

b) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje aspoň jednu obojsmernú šípku.

c) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje aspoň jednu jednosmernú šípku.

d) Vrcholový graf inverznej relácie k relácii R obsahuje jednosmernú šípku z a do b .



26. Na obrázku je znázornený vrcholový graf relácie R v množine $M = \{a, b, c, d\}$.

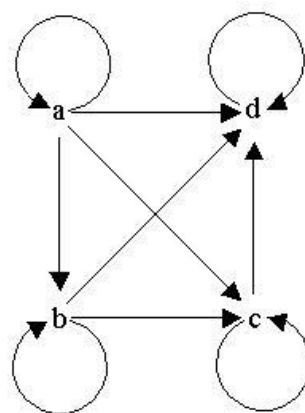
Označte tvrdenia, ktoré platia pre vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R .

a) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R neobsahuje ani jednu slučku.

b) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje aspoň jednu obojsmernú šípku.

c) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje aspoň jednu jednosmernú šípku.

d) Vrcholový graf doplnkovej relácie k relácii R obsahuje jednosmernú šípku z b do a .



27. Priradiť k sebe navzájom inverzné binárne relácie v množine $M = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$.

a) $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y = 40\}$

1. $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y \geq 40\}$

b) $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y \geq 40\}$

2. $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y \neq 40\}$

c) $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y \neq 40\}$

3. $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y = 40\}$

d) $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y < 40\}$

4. $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y < 40\}$

28. Priradiť k sebe navzájom doplnkové binárne relácie v množine $M = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$.

a) $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y = 40\}$

1. $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y < 40\}$

b) $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y \geq 40\}$

2. $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y = 40\}$

c) $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y \neq 40\}$

3. $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y \geq 40\}$

d) $\{[x, y] \in M \times M; 2x + y < 40\}$

4. $\{[x, y] \in M \times M; x + 2y \neq 40\}$

29. Priradiť k sebe navzájom inverzné binárne relácie v množine prirodzených čísel.

a) $\{[x, y] \in N \times N; x = y\}$

1. $\{[x, y] \in N \times N; x \text{ nedelí } y\}$

b) $\{[x, y] \in N \times N; x \text{ delí } y\}$

2. $\{[x, y] \in N \times N; x \neq y\}$

c) $\{[x, y] \in N \times N; x \neq y\}$

3. $\{[x, y] \in N \times N; x = y\}$

d) $\{[x, y] \in N \times N; y \text{ nedelí } x\}$

4. $\{[x, y] \in N \times N; y \text{ delí } x\}$

30. Prirad'te k sebe navzájom doplnkové binárne relácie v množine prirodzených čísel.

- | | |
|---|---|
| a) $\{[x, y] \in N \times N; x = y\}$ | 1. $\{[x, y] \in N \times N; x \text{ nedelí } y\}$ |
| b) $\{[x, y] \in N \times N; x \text{ delí } y\}$ | 2. $\{[x, y] \in N \times N; x \neq y\}$ |
| c) $\{[x, y] \in N \times N; x \neq y\}$ | 3. $\{[x, y] \in N \times N; x = y\}$ |
| d) $\{[x, y] \in N \times N; y \text{ nedelí } x\}$ | 4. $\{[x, y] \in N \times N; y \text{ delí } x\}$ |

Test č. 7 – správne riešenia

1. a	7. be	13. c	19. a2,b4,c1,d3	25. ac
2. ab	8. c	14. cd	20. a3,b1,c4,d2	26. acd
3. cd	9. cd	15. ab	21. ab	27. a3,b1,c2,d4
4. b	10. ab	16. a	22. cd	28. a4,b1,c2,d3
5. d	11. bc	17. ab	23. b	29. a3,b4,c2,d1
6. cd	12. ad	18. a	24. ac	30. a2,b1,c3,d4