

4. Výrokové funkcie (formy), ich definičný obor a obor pravdivosti

Výroková funkcia (forma) $\varphi(x)$ je formálny výraz (formula), ktorý obsahuje znak x , pričom x berieme z nejakej množiny M .

Ak za x zvolíme pevne ľubovoľný prvok z M , zmení sa $\varphi(x)$ na výrok (pravdivý alebo nepravdivý).

Množina M sa nazýva definičným oborom výrokovej funkcie $\varphi(x)$.

Množina všetkých tých prvkov $y \in M$, pre ktoré je $\varphi(y)$ pravdivý výrok, sa nazýva obor pravdivosti výrokovej funkcie $\varphi(x)$.

Výroková funkcia nie je výrok. Výroky z nej dostaneme postupným dosádzaním hodnôt z množiny M za premennú x .

5. Kvantifikované výroky

Už vieme, že z výrokových funkcií môžeme tvoriť výroky dosádzaním hodnôt za jednotlivé premenné. Výroky však možno tvoriť aj pomocou **kvantifikátorov**.

Príklady kvantifikovaných výrokov:

Ani jedno dievča v tejto triede nemá oblečenú sukňu.

Aspoň päť guľičiek vo vrecúšku je modrých.

Práve sedem detí bolo vybraných na školský výlet.

V kine bolo **menej ako 50** ľudí.

Medzi kvantifikované výroky zaraďujeme také výroky, ktoré určujú počet osôb, vecí, či objektov. Tvoríme ich pomocou slovných spojení **ani jeden, všetci, aspoň traja, najviac siedmi, práve štyria, existuje, neexistuje, ...**

Špeciálny typ kvantifikovaných výrokov dostaneme, ak k výrokovej funkcii $\varphi(x)$ pridáme slová „**pre každé**“ alebo „**existuje**“.

Príklady kvantifikovaných výrokov obsahujúcich slovo **pre každé**:

Pre každé prirodzené číslo n platí, že $n^2 \geq n$.

Zapisujeme: $\forall n \in N : n^2 \geq n$

Pre každé reálne číslo x platí, že $x^2 \geq 0$.

Zapisujeme: $\forall x \in R : x^2 \geq 0$

Pre každé reálne číslo x platí, že $x \geq 5$.

Zapisujeme: $\forall x \in R : x \geq 5$

Prvé dva výroky sú pravdivé, tretí je nepravdivý.

Príklady kvantifikovaných výrokov obsahujúcich slovo **existuje**:

Existuje prirodzené číslo n , pre ktoré platí $n^2 \geq 11$.

Zapisujeme: $\exists n \in N : n^2 \geq 11$

Existuje reálne číslo x , pre ktoré platí $x^2 < 0$.

Zapisujeme: $\exists x \in R : x^2 < 0$

Existuje reálne číslo a , pre ktoré má rovnica $ax^2 + 2x + 1 = 0$ práve jedno riešenie.

Zapisujeme: $\exists a \in R$, že rovnica $ax^2 + 2x + 1 = 0$ má práve jedno riešenie.

Prvý a tretí výrok je pravdivý, druhý nepravdivý.

Nech $\varphi(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine M . Potom výraz $\exists x \in M : \varphi(x)$, resp.

$\exists x(x \in M \wedge \varphi(x))$ čítame „**Existuje taký prvok x z množiny M , že platí $\varphi(x)$.**”.

Symbol $\exists$ nazývame **malý (alebo existenčný) kvantifikátor**.

Nech $\varphi(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine M . Potom výraz $\forall x \in M : \varphi(x)$,

resp. $\forall x(x \in M \wedge \varphi(x))$ čítame „**Pre každý prvok x z množiny M platí $\varphi(x)$.**”.

Symbol $\forall$ nazývame **veľký (alebo aj všeobecný) kvantifikátor**.

6. Nutná a postačujúca podmienka

Predstavme si nasledujúcu situáciu:

V utorok pani učiteľka prikázala dievčatám, aby v stredu do školy prišli v bielych tričkách.

Predpokladajme, že všetky dievčatá pani učiteľku poslúchli. To znamená, že ak za x dosadíme ľubovoľného žiaka v triede, platí výrok „*Ak x je dievča, potom má oblečené biele tričko.*“.

Predpokladajme, že je streda. Na matematike pani učiteľka vyvolala k tabuli jedno z dievčat. Čo možno povedať o jeho oblečení?

Odpoveď: Vieme, že určite má oblečené biele tričko.

Skutočnosť, že pri tabuli je dievča, je teda postačujúca pre konštatovanie, že žiak pri tabuli má oblečené biele tričko.

Teraz predpokladajme, že pani učiteľka vyvolala k tabuli niekoho v bielom tričku. Čo možno povedať o jeho pohlaví? Je to určite dievča?

Odpoveď: Nevieme, či je to dievča alebo chlapec. (chlapcom totiž nikto nezakázal prísť v bielom tričku)

Skutočnosť, že pri tabuli je niekto v bielom tričku, nie je postačujúca pre konštatovanie, že pri tabuli je dievča.

Skutočnosť, že pri tabuli je niekto v bielom tričku, je nutná pre to, aby to mohlo byť dievča. Ak by totiž pri tabuli bol niekto v zelenom tričku, tak to určite musí byť chlapec.

V implikácii $A \Rightarrow B$ výrok A nazývame **predpokladom**, výrok B **záverom**.

Predpoklad A je postačujúca podmienka pre záver B.

Záver B je nutná podmienka pre predpoklad A.

Test č. 2

V nasledujúcom teste je 20 úloh z oblastí výrokovej funkcie, kvantifikované výroky, nutná a postačujúca podmienka.

Na nich si prakticky precvičíme:

- definičný obor a obor pravdivosti výrokovej funkcie,
- pravdivostnú hodnotu kvantifikovaných výrokov,
- aký je rozdiel medzi nutnou a postačujúcou podmienkou.

Test č. 2 nájdeme aj v elektronickej verzii v súbore 2.exe.

1. Označte tie čísla, ktoré keď dosadíme za n , dostaneme z výrokovej funkcie „ $2n + 4 > 18$ “ výrok.

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8

2. Označte tie čísla, ktoré keď dosadíme za n , dostaneme z výrokovej funkcie „ $2n + 4 > 18$ “ pravdivý výrok.

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8

3. Označte tie slová, ktoré keď dosadíme za x , dostaneme z výrokovej funkcie "Dunaj tečie cez x ." pravdivý výrok.

- a) Budapešť
- b) Prahu
- c) Viedeň
- d) Bratislavu

4. Napíšte číslo, ktoré patrí do oboru pravdivosti výrokovej funkcie „ $x \cdot x = 25$ “.

5. Napíšte číslo, ktoré patrí do oboru pravdivosti výrokovej funkcie „ $x \cdot x + 3 \cdot x = 28$ “.

6. Napíšte číslo, ktoré patrí do oboru pravdivosti výrokovej funkcie „Pravidelný x -uholník má 9 uhlopriečok.“

7. Označte pravdivé kvantifikované výroky.

- a) Žiadne kladné reálne číslo nie je menšie ako jeho druhá mocnina.
- b) Aspoň jedno prirodzené číslo je väčšie ako jeho druhá mocnina.
- c) Aspoň jedno kladné racionálne číslo je menšie ako jeho druhá mocnina.
- d) Aspoň jedno celé číslo je menšie ako jeho druhá mocnina.

8. Označte pravdivé kvantifikované výroky.

- a) Číslo 12 má práve šesť kladných deliteľov.
- b) Číslo 12 má aspoň 5 kladných deliteľov.

- c) Číslo 12 má aspoň 7 kladných deliteľov.
- d) Číslo 12 má najviac 5 kladných deliteľov.

9. Označte pravdivé kvantifikované výroky.

- a) Existuje prirodzené číslo, ktorého druhá odmocnina sa rovná 2.
- b) Existuje prirodzené číslo, ktorého druhá mocnina sa rovná 2.
- c) Existuje reálne číslo, ktorého druhá odmocnina sa rovná 2.
- d) Existuje reálne číslo, ktorého druhá mocnina sa rovná 2.

10. Prirad'te symbolický zápis kvantifikovaného výroku zodpovedajúcemu slovnému zápisu.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $\forall x \in R : x^2 \geq 0$ | 1. Druhá mocnina ľubovoľného prirodzeného čísla je väčšia alebo rovná nule. |
| b) $\exists x \in R : x^2 \geq 0$ | 2. Druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je väčšia alebo rovná nule. |
| c) $\forall x \in N : x^2 \geq 0$ | 3. Existuje reálne číslo, ktorého druhá mocnina je väčšia alebo rovná nule. |
| d) $\exists x \in N : x^2 \geq 0$ | 4. Existuje prirodzené číslo, ktorého druhá mocnina je väčšia alebo rovná nule. |

11. Prirad'te symbolický zápis kvantifikovaného výroku zodpovedajúcemu slovnému zápisu.

- | | |
|----------------------------------|--|
| a) $\forall x \in N : 14 \mid x$ | 1. Aspoň jedno prirodzené číslo je deliteľom čísla 14. |
| b) $\exists x \in N : 14 \mid x$ | 2. Každé prirodzené číslo je násobkom čísla 14. |
| c) $\forall x \in N : x \mid 14$ | 3. Každé prirodzené číslo je deliteľom čísla 14. |
| d) $\exists x \in N : x \mid 14$ | 4. Aspoň jedno prirodzené číslo je násobkom čísla 14. |

12. Označte pravdivé kvantifikované výroky.

- a) Každé prirodzené číslo je násobkom čísla 14.
- b) Každé prirodzené číslo je deliteľom čísla 14.
- c) Aspoň jedno prirodzené číslo je deliteľom čísla 14.
- d) Aspoň jedno prirodzené číslo je násobkom čísla 14.

13. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Pôjdeme do kina.“ postačujúcou podmienkou pre tvrdenie „Budeme mať príjemný zážitok.“

- a) budeme mať príjemný zážitok
- b) .
- c) Ak
- d) pôjdeme do kina
- e) , potom

14. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Pôjdeme do kina.“ nutnou podmienkou pre tvrdenie „Budeme mať príjemný zážitok.“

- a) , potom
- b) .
- c) Ak
- d) budeme mať príjemný zážitok
- e) pôjdeme do kina

15. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Budeš mať jednotku z matematiky.“ nutnou podmienkou pre tvrdenie „Dostaneš nový počítač.“

- a) budeš mať jednotku z matematiky
- b) .
- c) ,
- d) dostaneš nový počítač
- e) Ak

16. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Budeš mať jednotku z matematiky.“ postačujúcou podmienkou pre tvrdenie „Dostaneš nový počítač.“

- a) budeš mať jednotku z matematiky
- b) dostaneš nový počítač
- c) Ak
- d) .
- e) ,

17. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Číslo je párne.“ nutnou podmienkou pre tvrdenie „Číslo je deliteľné šiestimi.“

- a) .
- b) deliteľné šiestimi

- c) , potom je
- d) párne
- e) Ak je číslo

18. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Číslo je párne.“ postačujúcou podmienkou pre tvrdenie „Číslo je deliteľné šiestimi.“

- a) Ak je číslo
- b) .
- c) párne
- d) , potom je
- e) deliteľné šiestimi

19. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Číslo je párne.“ nutnou podmienkou pre tvrdenie „Číslo je deliteľné šiestimi.“

- a) .
- b) , ak je
- c) Číslo je
- d) deliteľné šiestimi
- e) párne

20. Z daných výrazov utvorte implikáciu, v ktorej bude tvrdenie „Číslo je párne.“ postačujúcou podmienkou pre tvrdenie „Číslo je deliteľné šiestimi.“

- a) Číslo je
- b) .
- c) , ak je
- d) párne
- e) deliteľné šiestimi

Test č. 2 – správne riešenia

1. abcd	7. cd	13. cdeab	19. cebda
2. d	8. ab	14. cdaeb	20. aecdb
3. acd	9. acd	15. edcab	
4. 5 alebo -5	10. a2,b3,c1,d4	16. caebd	
5. 4 alebo -7	11. a2,b4,c3,d1	17. ebcda	
6. 6	12. cd	18. acdeb	