

9. Zobrazenia

V tejto časti sa budeme venovať ďalšiemu špeciálnemu typu binárnych relácií – zobrazeniam. Najskôr sa budeme venovať pojmu binárnej relácie z množiny A do množiny B .

Binárna relácia z množiny A do množiny B

Pripomeňme si najskôr už známu definíciu binárnej relácie v množine M .

Binárna relácia R v množine M je akákoľvek podmnožina karteziánskeho súčinu $M \times M$.

Binárnu reláciu z množiny A do množiny B definujeme nasledovne.

Binárna relácia R z množiny A do množiny B je akákoľvek podmnožina karteziánskeho súčinu $A \times B$.

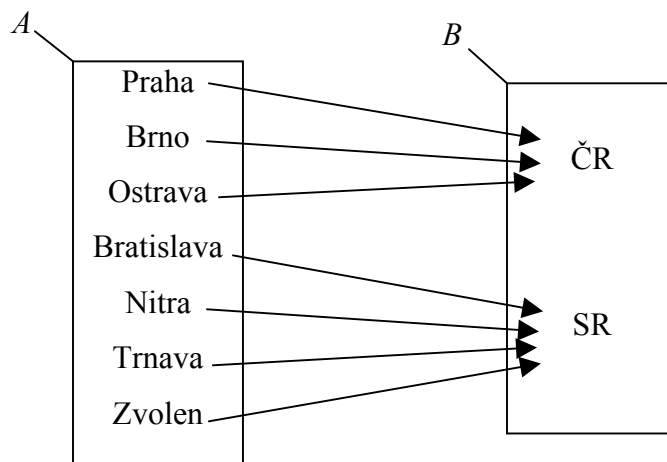
Pojem binárnej relácie z množiny A do množiny B si ozrejníme na príkladoch.

Nech množiny $A = \{\text{Praha, Brno, Ostrava, Bratislava, Nitra, Trnava, Zvolen}\}$ a $B = \{\text{SR, ČR}\}$.

Utvoríme množinu R všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$, ktorých prvá zložka x je z množiny A , druhá zložka y je z množiny B a platí: mesto x leží v štáte y . Všimnite si, že táto množina je binárnou reláciou z množiny A do množiny B .

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [\text{Praha, ČR}], [\text{Brno, ČR}], [\text{Ostrava, ČR}], [\text{Nitra, SR}], \\ [\text{Bratislava, SR}], [\text{Trnava, SR}], [\text{Zvolen, SR}] \end{array} \right\}$$

Teraz nakreslíme vrcholový graf relácie R .

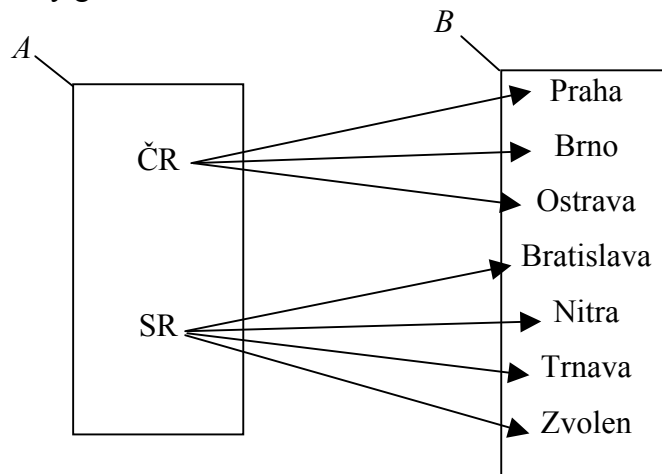


Nech množiny $A = \{SR, \check{C}R\}$ a $B = \{Praha, Brno, Ostrava, Bratislava, Nitra, Trnava, Zvolen\}$.

Utvoríme množinu R všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$, ktorých prvá zložka x je z množiny A , druhá zložka y je z množiny B a platí: mesto y leží v štáte x . Všimnite si, že táto množina je binárnou reláciou z množiny A do množiny B .

$$R = \left\{ \begin{array}{l} [\check{C}R, Praha], [\check{C}R, Brno], [\check{C}R, Ostrava], [SR, Nitra], \\ [SR, Bratislava], [SR, Trnava], [SR, Zvolen] \end{array} \right\}$$

Teraz nakreslíme vrcholový graf relácie R .



Nech $M = \{A, B, C, D, E\}$ je

množina bodov $N = \{p, q, r, s\}$

množina priamok na obrázku.

Utvoríme množinu R všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$,

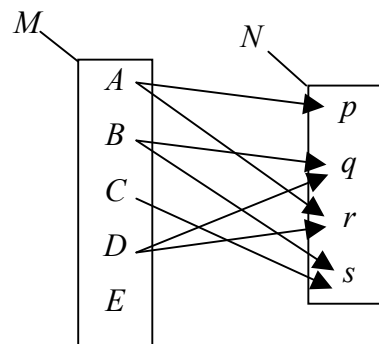
ktorých prvá zložka x je z množiny

M , druhá zložka y je z množiny N

a platí: bod x leží na priamke y .

$$R = \{[A, p], [A, r], [B, q], [B, s], [C, s], [D, q], [D, r]\}$$

Teraz nakreslíme vrcholový graf relácie R .



Zobrazenie z množiny A do množiny B

Teraz sa budeme venovať špeciálnemu typu relácií z množiny A do množiny B . Začneme definíciou.

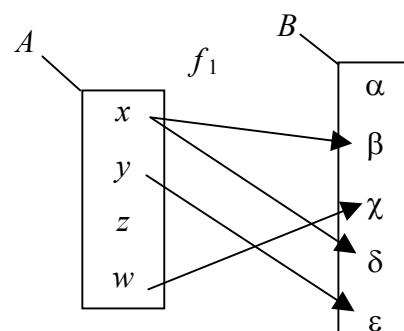
Relácia f z množiny A do množiny B sa nazýva zobrazením množiny A do množiny B , ak platí:

1. $\forall x \in A \exists y \in B : [x, y] \in f$,
2. ak $[x, y] \in f \wedge [x, z] \in f$, potom $y = z$.

Vysvetlime si definíciu zobrazenia. Najskôr sa venujme 1. vlastnosti. Zápis $\forall x \in A \exists y \in B : [x, y] \in f$ čítame: pre každý prvok x množiny A existuje taký prvok y množiny B , že usporiadaná dvojica $[x, y]$ patrí relácii f . Ako sa táto vlastnosť prejavuje? Ak je relácia f z množiny A do množiny B určená vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom sa na prvých miestach v usporiadaných dvojiciach musia objaviť všetky prvky.

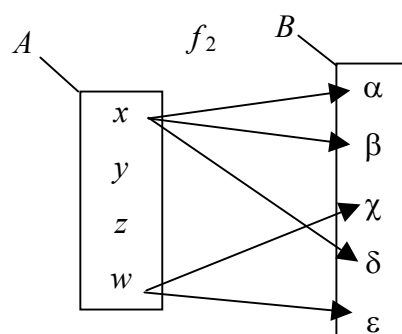
Nech $A = \{x, y, z, w\}$ a $B = \{\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon\}$.

Potom relácia $f_1 = \{[x, \beta], [x, \delta], [y, \varepsilon], [w, \chi]\}$ nie je zobrazením z množiny A do množiny B , pretože prvok z sa nevyskytuje v žiadnej usporiadanej dvojici na prvom mieste.



Podobne, relácia $f_2 = \{[x, \alpha], [x, \beta], [x, \delta], [w, \varepsilon], [w, \chi]\}$

nie je zobrazením z množiny A do množiny B , pretože ani prvok y , ani prvok z sa nevyskytuje v žiadnej usporiadanej dvojici na prvom mieste.



Vo vrcholovom grafe sa táto vlastnosť prejaví tak, že z každého prvku množiny A vychádza aspoň jedna šípka.

Relácia $f_1 = \{[x, \beta], [x, \delta], [y, \varepsilon], [w, \chi]\}$ nie je zobrazením

z množiny A do množiny B , pretože z prvku z nevychádza žiadna šípka. Podobne, relácia $f_2 = \{[x, \alpha], [x, \beta], [x, \delta], [w, \varepsilon], [w, \chi]\}$ nie je zobrazením z množiny A do množiny B , pretože ani z prvku y , ani z prvku z nevychádza žiadna šípka.

Teraz sa venujme 2. vlastnosti. Zápis ak $[x, y] \in f \wedge [x, z] \in f$, potom $y = z$ tvrdí, že prvok x množiny A nemôže byť v relácii f s dvoma rôznymi prvkami y, z množiny B . Ako sa táto vlastnosť prejavuje? Ak je relácia f z množiny A do množiny B určená vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom sa každý prvok množiny A môže vyskytnúť na prvom mieste najviac raz.

Nech $A = \{x, y, z, w\}$ a $B = \{\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon\}$.

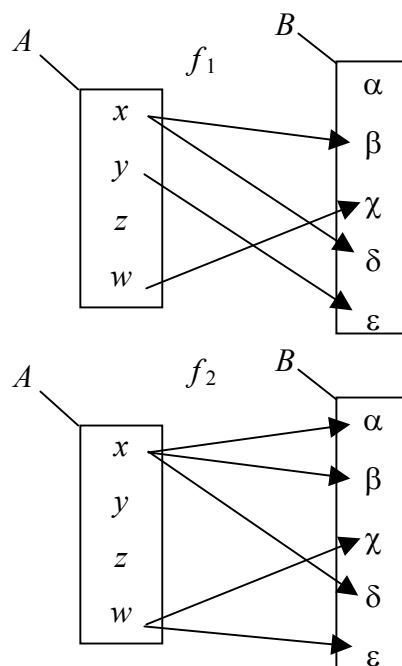
Potom relácia $f_1 = \{[x, \beta], [x, \delta], [y, \varepsilon], [w, \chi]\}$ nie je zobrazením z množiny A do množiny B , pretože prvok x sa vyskytuje na prvom mieste v dvoch rôznych usporiadaných dvojiciach $[x, \beta], [x, \delta]$.

Podobne, relácia $f_2 = \{[x, \alpha], [x, \beta], [x, \delta], [w, \varepsilon], [w, \chi]\}$ nie je zobrazením z množiny A do množiny B , pretože prvok x sa vyskytuje na prvom mieste až v troch usporiadaných dvojiciach $[x, \alpha], [x, \beta], [x, \delta]$ a prvok w v dvoch usporiadaných dvojiciach $[w, \varepsilon], [w, \chi]$.

Vo vrcholovom grafe sa táto vlastnosť prejaví tak, že z každého prvku množiny A vychádza najviac jedna šípka.

Relácia $f_1 = \{[x, \beta], [x, \delta], [y, \varepsilon], [w, \chi]\}$ nie je zobrazením z množiny A do množiny B , pretože z prvku x vychádzajú až dve šípky.

Podobne, relácia $f_2 = \{[x, \alpha], [x, \beta], [x, \delta], [w, \varepsilon], [w, \chi]\}$ nie je zobrazením z množiny A do množiny B , pretože z prvku x vychádzajú až tri šípky a z prvku w vychádzajú až dve šípky.



Ak je relácia f z množiny A do množiny B určená vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom sa každý prvok množiny A musí vyskytnúť na prvom mieste v práve jednej usporiadanej dvojici.

Vo vrcholovom grafe sa táto vlastnosť prejaví tak, že z každého prvku množiny A vychádza práve jedna šípka.

Pojem zobrazenia si teraz vyskúšame na príkladoch.

Dané sú množiny $M = \{A, B, C, D, E\}$ a $N = \{p, q, r, s\}$ a binárne relácie

$$f_1 = \{[A, p], [B, r], [B, q], [C, s], [D, q], [E, r]\},$$

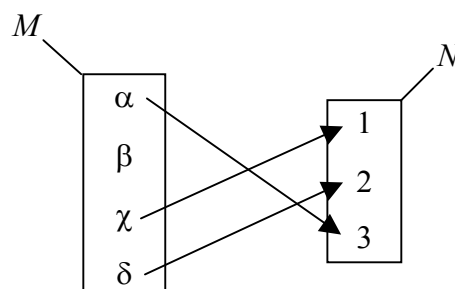
$$f_2 = \{[A, p], [B, r], [D, q], [E, r]\}, \quad f_3 = \{[A, p], [B, r], [D, q], [C, s], [E, r]\},$$

$$f_4 = \{[B, p], [B, r], [C, s], [D, q], [E, r]\} \text{ z množiny } M \text{ do množiny } N.$$

Relácia f_1 nie je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože prvok B sa nachádza na prvom mieste až v dvoch usporiadaných dvojiciach. Relácia f_2 nie je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože prvok C sa nenachádza na prvom mieste v žiadnej usporiadanej dvojici. Relácia f_3 je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože všetky prvky A, B, C, D, E sa nachádzajú na prvom mieste v práve jednej usporiadanej dvojici. Relácia f_4 nie je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože prvok B sa nachádza na prvom mieste až v dvoch usporiadaných dvojiciach. Navyše, prvok A sa nenachádza na prvom mieste v žiadnej usporiadanej dvojici.

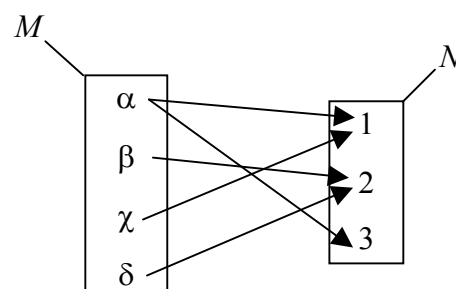
Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$ a binárna relácia f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Relácia f nie je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože z prvku β nevychádza ani jedna šípka.



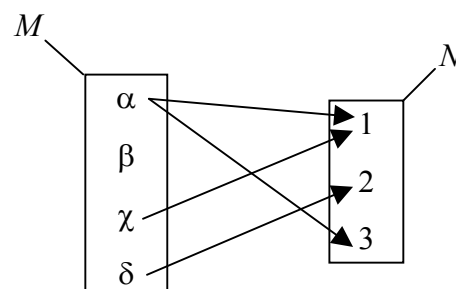
Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$ a binárna relácia f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Relácia f nie je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože z prvku α vychádzajú až dve šípky.



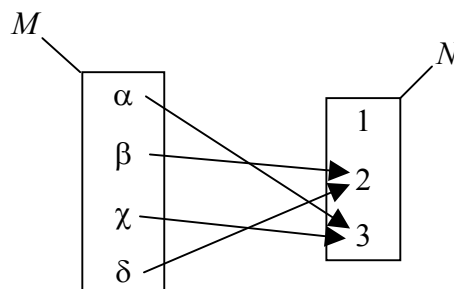
Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$ a binárna relácia f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Relácia f nie je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože z prvku β nevychádza ani jedna šípka. Navyše, z prvku α vychádzajú až dve šípky.



Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$ a binárna relácia f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Relácia f je zobrazením z množiny M do množiny N , pretože z každého prvku množiny M vychádza práve jedna šípka.



Na to, aby f bolo zobrazenie, stačí, aby z každého prvku množiny A vychádzala práve jedna šípka.

Nie je však potrebné, aby práve jedna šípka smerovala do každého prvku množiny B .

V predchádzajúcej časti sme sa venovali hlavne prvej zložke usporiadaných dvojíc. Vo vrcholovom grafe sme si všímali, odkiaľ šípky vychádzajú. V nasledujúcej časti sa budeme venovať hlavne druhej zložke usporiadaných dvojíc. Vo vrcholovom grafe si budeme všimáť, kam šípky vchádzajú.

Vlastnosti zobrazení

V tejto časti sa oboznámime s tromi pojmami súvisiacimi s vlastnosťami zobrazení:

- injektívne zobrazenie (prsté zobrazenie),
- surjektívne zobrazenie (zobrazenie na množinu),
- bijektívne zobrazenie.

Začneme definíciou.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B .

Potom množinu $f(A) = \{y \in B; \exists x \in A: y = f(x)\}$ nazývame obor hodnôt zobrazenia f .

Ak je relácia f z množiny A do množiny B určená vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom množina $f(A)$ je množinou tých prvkov, ktoré sa vyskytujú v usporiadaných dvojiciach na druhých miestach.

Ak je relácia f z množiny A do množiny B určená vrcholovým grafom, potom množina $f(A)$ je množinou tých prvkov, do ktorých smeruje aspoň jedna šípka.

Poznamenajme, že pri zobrazeniach nekonečných množín nemožno určiť reláciu zobrazenia f z množiny A do množiny B ani vymenovaním usporiadaných dvojíc, ani vrcholovým grafom, ale iba charakteristickou vlastnosťou.

Dané sú množiny $M = \{A, B, C, D, E\}$ a $N = \{p, q, r, s\}$ a zobrazenia

$$f_1 = \{[A, p], [B, p], [C, s], [D, q], [E, q]\}, f_2 = \{[A, s], [B, s], [C, s], [D, s], [E, s]\},$$

$$f_3 = \{[A, p], [B, q], [C, q], [D, q], [E, p]\}, f_4 = \{[A, r], [B, r], [C, s], [D, p], [E, q]\}$$

z množiny M do množiny N .

V zobrazení f_1 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nachádzajú prvky p, q, s .

Preto $f_1(M) = \{p, q, s\}$.

V zobrazení f_2 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nachádza iba prvok s .

Preto $f_2(M) = \{s\}$.

V zobrazení f_3 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nachádzajú prvky p, q .

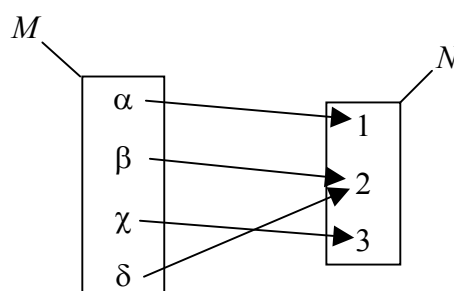
Preto $f_3(M) = \{p, q\}$.

V zobrazení f_4 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nachádzajú všetky prvky množiny N (teda p, q, r, s). Preto $f_4(M) = N = \{p, q, r, s\}$.

Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$

a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

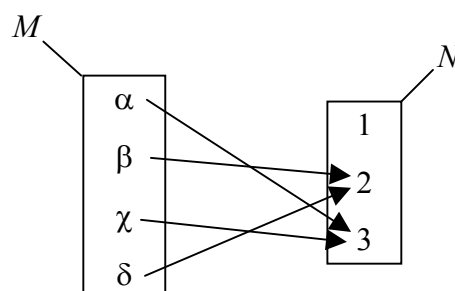
Šípky smerujú do všetkých troch prvkov množiny N (teda do $1, 2, 3$). Preto $f(M) = N = \{1, 2, 3\}$.



Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$

a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Šípky smerujú iba do prvkov 2, 3. Preto $f(M) = \{2, 3\}$.



Zobrazenia f z množiny M do množiny N , pre ktoré platí $f(M) = N$, budeme nazývať surjektívne, alebo zobrazenie z množiny M na množinu N .

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech $f(A) = B$.

Potom zobrazenie f nazývame zobrazením množiny A na množinu B .

Taktiež hovoríme, že zobrazenie f je surjektívne.

Ako zistíme, či je zobrazenie surjektívne? Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom sa všetky prvky množiny B musia aspoň raz vyskytnúť na druhom mieste v niektorej usporiadanej dvojici. Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vrcholovým grafom, potom musí ku každému prvku množiny B smerovať aspoň jedna šípka.

Dané sú množiny $M = \{A, B, C, D, E\}$ a $N = \{p, q, r, s\}$ a zobrazenia

$$f_1 = \{[A, p], [B, q], [C, s], [D, r], [E, q]\}, f_2 = \{[A, q], [B, q], [C, s], [D, s], [E, s]\},$$

$$f_3 = \{[A, p], [B, q], [C, q], [D, s], [E, p]\}, f_4 = \{[A, r], [B, r], [C, s], [D, p], [E, q]\}$$

z množiny M do množiny N .

V zobrazení f_1 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nachádzajú všetky prvky množiny N (teda p, q, r aj s). Preto zobrazenie f_1 je surjektívne.

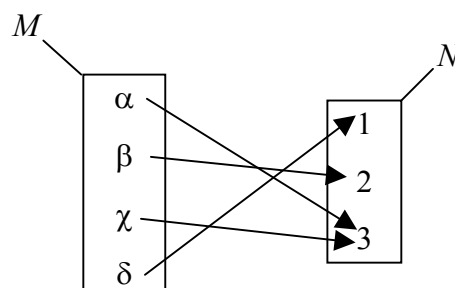
V zobrazení f_2 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nenachádza prvok p a ani prvok r . Preto zobrazenie f_2 nie je surjektívne.

V zobrazení f_3 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nenachádza prvok r . Preto zobrazenie f_3 nie je surjektívne.

V zobrazení f_4 sa na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach nachádzajú všetky prvky množiny N (teda p, q, r aj s). Preto zobrazenie f_4 je surjektívne.

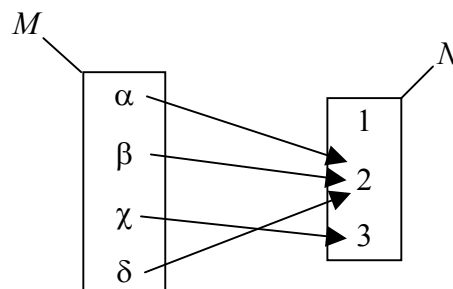
Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Pretože šípky smerujú do všetkých troch prvkov množiny N (teda do 1, 2, 3), zobrazenie f je surjektívne.



Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Pretože do prvku 1 nesmeruje žiadna šípka, zobrazenie f nie je surjektívne.



Predpokladajme, že f je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Ďalej predpokladajme, že množiny A, B majú konečný počet prvkov. Pretože zobrazenie f je surjektívne, potom do každého prvku množiny B vedie aspoň jedna šípka. Pretože f je zobrazenie, z každého prvku množiny A vedie práve jedna šípka. To znamená, že počet prvkov množiny A je väčší alebo rovný počtu prvkov množiny B .

Nech f je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech množiny A, B majú konečný počet prvkov. Potom počet prvkov množiny A je väčší alebo rovný počtu prvkov množiny B .

Teraz sa budeme venovať pojmu injektívne zobrazenie. Začneme definíciou.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B .

Nech $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Potom zobrazenie f nazývame injektívne zobrazenie množiny A do množiny B .

Taktiež hovoríme, že zobrazenie f je prosté.

Vysvetlime si znenie definície.

Výraz $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ znamená, že pre každé dva rôzne prvky x_1, x_2 množiny A platí, že ich obrazy $f(x_1), f(x_2)$ sú tiež rôzne.

Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vymenovaním usporiadaných dvojíc, potom sa žiaden prvok množiny B nesmie nachádzať na druhom mieste v dvoch alebo viacerých usporiadaných dvojiciach.

Ak je zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vrcholovým grafom, potom k žiadnemu prvku množiny B nesmie smerovať viac než jedna šípka.

Dané sú množiny $M = \{A, B, C, D, E\}$ a $N = \{p, q, r, s, t, u\}$ a zobrazenia

$$f_1 = \{[A, p], [B, q], [C, s], [D, r], [E, q]\}, f_2 = \{[A, q], [B, u], [C, s], [D, t], [E, p]\},$$

$$f_3 = \{[A, p], [B, q], [C, q], [D, s], [E, p]\}, f_4 = \{[A, r], [B, u], [C, s], [D, p], [E, q]\}$$

z množiny M do množiny N .

V zobrazení f_1 si všimnime usporiadané dvojice $[B, q], [E, q]$. Prvky na prvých miestach sú rôzne, ale na druhých miestach je v oboch usporiadaných dvojiciach prvok q . Platí teda: $B \neq E$, ale $f(B) = f(E)$. Preto zobrazenie f_1 nie je injektívne (prosté).

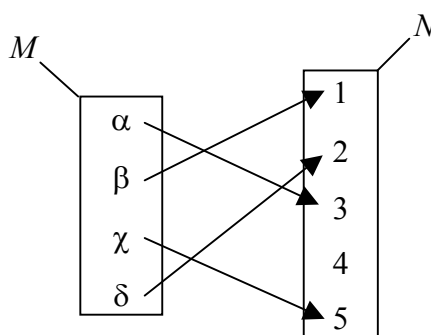
Jednoduchšie vysvetlenie: Zobrazenie f_1 nie je injektívne (prosté), pretože prvok q sa nachádza na druhom mieste až v dvoch usporiadaných dvojiciach.

V zobrazení f_2 sa žiaden prvok množiny N nevyskytuje v dvoch alebo viacerých usporiadaných dvojiciach. Zobrazenie f_2 je injektívne (prosté). Z rovnakého dôvodu je injektívne aj zobrazenie f_4 .

V zobrazení f_3 sa prvky p aj q nachádzajú na druhom mieste až v dvoch usporiadaných dvojiciach. Zobrazenie f_3 nie je injektívne (prosté).

Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Pretože do žiadneho prvku množiny N nesmeruje viac ako jedna šípka, zobrazenie f je injektívne.



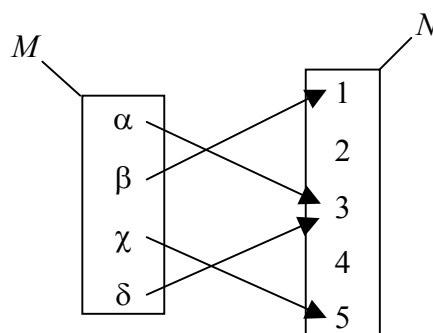
Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Pretože do prvku 3 smeruje viac ako jedna šípka, zobrazenie f nie je injektívne.

$$f(\alpha) = 3$$

Platí totiž: $f(\delta) = 3$

$$\alpha \neq \delta, \text{ ale } f(\alpha) = f(\delta)$$



Predpokladajme, že f je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Ďalej predpokladajme, že množiny A , B majú konečný počet prvkov. Pretože zobrazenie f je injektívne, potom do žiadneho prvku množiny B nevedie viac ako jedna šípka. Pretože f je zobrazenie, z každého prvku množiny A vedie práve jedna šípka. To znamená, že počet prvkov množiny A je menší alebo rovný počtu prvkov množiny B .

Nech f je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech množiny A , B majú konečný počet prvkov. Potom počet prvkov množiny A je menší alebo rovný počtu prvkov množiny B .

Napokon sa budeme venovať pojmu bijektívne zobrazenie. Začneme definíciou.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B .

Zobrazenie f nazývame bijektívne zobrazenie množiny A do množiny B , ak je injektívne a surjektívne.

Ako teda zistíme, či je zobrazenie f bijektívne?

Predpokladajme, že zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vymenovaním usporiadaných dvojíc. Aby bolo injektívne, nesmie sa žiaden prvok množiny B nachádzať na druhom mieste v dvoch alebo viacerých usporiadaných dvojiciach. Aby bolo surjektívne, musí sa každý prvok množiny B nachádzať na druhom mieste aspoň v jednej usporiadanej dvojici. Ak má byť zobrazenie f bijektívne, musí byť aj injektívne, aj surjektívne. **To znamená, že každý prvok množiny B sa musí nachádzať na druhom mieste práve v jednej usporiadanej dvojici.**

Teraz predpokladajme, že zobrazenie f z množiny A do množiny B určené vrcholovým grafom. Aby bolo injektívne, nesmie do žiadneho prvku množiny B smerovať viac ako jedna šípka. Aby bolo surjektívne, musí do každého prvku množiny B smerovať aspoň jedna šípka. Ak má byť zobrazenie f bijektívne, musí byť aj injektívne, aj surjektívne. **To znamená, že do každého prvku množiny B musí smerovať práve jedna šípka.**

Dané sú množiny $M = \{A, B, C, D\}$ a $N = \{p, q, r, s\}$ a zobrazenia

$$f_1 = \{[A, q], [B, p], [C, s], [D, r]\}, f_2 = \{[A, p], [B, q], [C, s], [D, r]\},$$

$$f_3 = \{[A, p], [B, p], [C, q], [D, s]\}, f_4 = \{[A, r], [B, q], [C, s], [D, s]\}$$

z množiny M do množiny N .

Zobrazenia f_1 a f_2 sú injektívne aj surjektívne, pretože každý prvok množiny N sa na druhých miestach je usporiadaných dvojiciach nachádza práve raz. Preto zobrazenia f_1 a f_2 sú bijektívne.

V zobrazení f_3 sa prvok p nachádza na druhom mieste až v dvoch usporiadaných dvojiciach.

Zobrazenie f_3 nie je injektívne, a teda ani bijektívne.

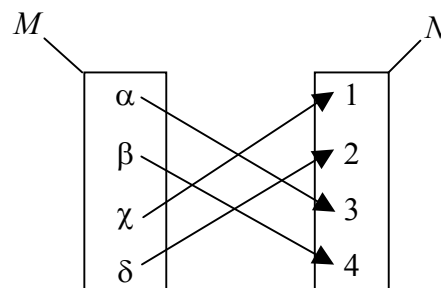
Iné zdôvodnenie: V zobrazení f_3 sa prvok r nenachádza na druhom mieste ani v jednej usporiadanej dvojici. Zobrazenie f_3 nie je surjektívne, a teda ani bijektívne.

Zobrazenie f_4 nie je bijektívne. Zdôvodnenie je podobné ako pri zobrazení f_3 .

Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3, 4\}$

a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Pretože do každého prvku množiny N smeruje práve jedna šípka, zobrazenie f je bijektívne.

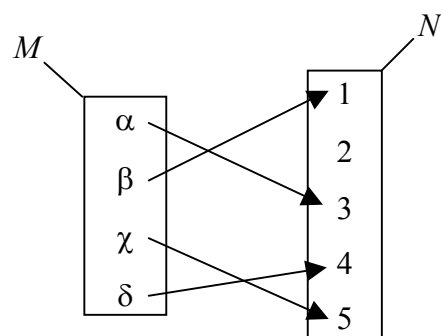


Všimnite si, že pri bijektívnom zobrazení možno prvky navzájom „popárit“. To znamená, že každému prvku množiny M zodpovedá práve jeden prvok množiny N a naopak.

Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

a zobrazenie f z množiny M do množiny N vrcholovým grafom.

Pretože do prvku 2 nesmeruje žiadna šípka, zobrazenie f nie je surjektívne, a teda ani bijektívne.



Predpokladajme, že f je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Ďalej predpokladajme, že množiny A, B majú konečný počet prvkov. Pretože zobrazenie f je

bijektívne, potom do každého prvku množiny B vedie práve jedna šípka. Pretože f je zobrazenie, z každého prvku množiny A vedie práve jedna šípka. To znamená, že počet prvkov množiny A je rovný počtu prvkov množiny B .

Nech f je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech množiny A, B majú konečný počet prvkov. Potom počet prvkov množiny A je rovný počtu prvkov množiny B .

Inverzné zobrazenie

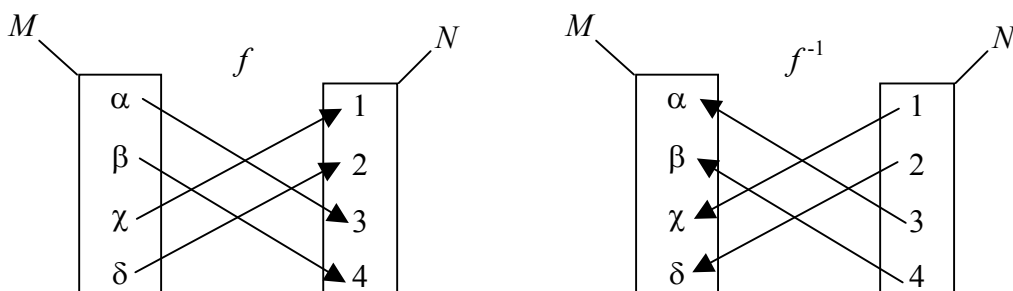
V tejto časti si vysvetlíme pojem inverzného zobrazenia. Prv, ako začneme, odporúčame vrátiť sa k pojmu inverznej relácie v množine. Tu uvedieme iba príslušnú definíciu.

Nech je v množine M definovaná relácia R . Reláciu R^{-1} v množine M definovanú vzťahom $R^{-1} = \{[x, y] \in M \times M : [y, x] \in R\}$ nazývame inverznou reláciou k relácii R .

Analogicky možno definovať inverznú reláciu k relácii z množiny A do množiny B .

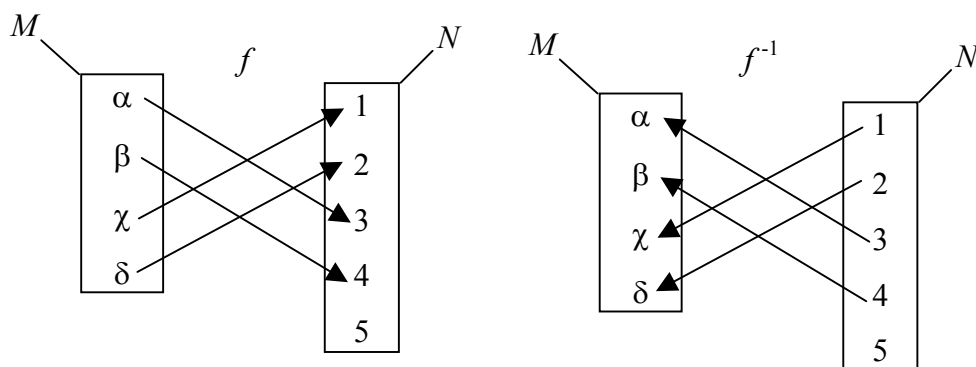
Nech R je relácia z množiny A do množiny B . Reláciu R^{-1} z množiny B do množiny A definovanú vzťahom $R^{-1} = \{[x, y] \in B \times A : [y, x] \in R\}$ nazývame inverznou reláciou k relácii R .

Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3, 4\}$ a bijektívne zobrazenie f z množiny M do množiny N , pričom $f = \{[\alpha, 3], [\beta, 4], [\chi, 1], [\delta, 2]\}$. Jeho vrcholový graf vidíme na obrázku. Obráťme všetky šípky. Všimnime si, že sme získali vrcholový graf iného zobrazenia. Označme ho f^{-1} . Platí: $f^{-1} = \{[3, \alpha], [4, \beta], [1, \chi], [2, \delta]\}$. Relácia f^{-1} je inverznou reláciou k relácii f .



Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny N , ktoré nie je surjektívne, pričom $f = \{[\alpha, 3], [\beta, 4], [\chi, 1], [\delta, 2]\}$. Jeho vrcholový graf vidíme na obrázku. Obráťme všetky šípky. Všimnime si, že sme získali vrcholový graf inverznej relácie k relácii f , ktorá nie je zobrazením.

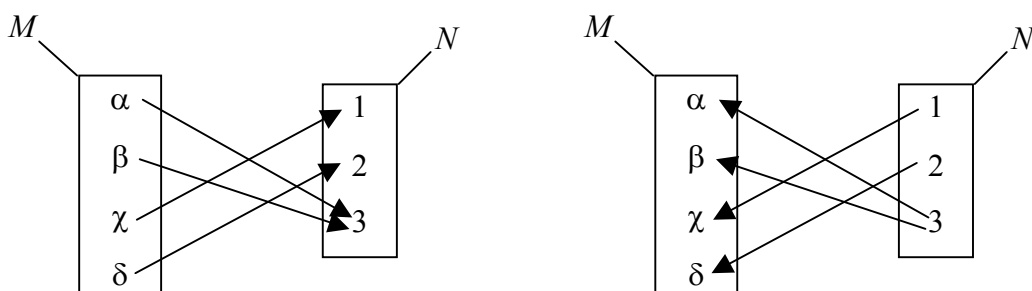
$f^{-1} = \{[3, \alpha], [4, \beta], [1, \chi], [2, \delta]\}$ nie je zobrazenie z množiny N do množiny M , pretože z prvku 5 nevychádza žiadna šípka.



Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a $N = \{1, 2, 3\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny N , ktoré nie je injektívne, pričom $f = \{[\alpha, 3], [\beta, 3], [\chi, 1], [\delta, 2]\}$.

Jeho vrcholový graf vidíme na obrázku. Obráťme všetky šípky. Všimnime si, že sme získali vrcholový graf inverznej relácie k relácii f , ktorá nie je zobrazením.

$f^{-1} = \{[3, \alpha], [3, \beta], [1, \chi], [2, \delta]\}$ nie je zobrazenie z množiny N do množiny M , pretože z prvku 3 vychádza viac ako jedna šípka.



Z predchádzajúcich príkladov vidno, že ak je dané zobrazenie f z množiny A do množiny B , potom inverzná relácia f^{-1} je zobrazením z množiny B do množiny A vtedy a len vtedy, ak zobrazenie f je bijektívne.

Predpokladajme, že f je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Potom jeho vrcholový graf vyzerá nasledovne:

1. Z každého prvku množiny A vychádza práve jedna šípka.

2. Do každého prvku množiny B vchádza práve jedna šípka.

Ak teraz obrátíme šípky, dostaneme vrcholový graf inverznej relácie f^{-1} z množiny B do množiny A . Potom jej vrcholový graf vyzerá nasledovne:

1. Z každého prvku množiny B vychádza práve jedna šípka.

2. Do každého prvku množiny A vchádza práve jedna šípka.

To ale znamená, že f^{-1} je bijektívne zobrazenie z množiny B do množiny A .

Tento poznatok sformulujeme vo forme vety.

Nech f je bijektívne zobrazenie množiny A na množinu B . Potom množina

$f^{-1} = \{[x, y] \in B \times A : [y, x] \in f\}$ je bijektívnym zobrazením množiny B na množinu A .

Teraz uvedieme definíciu inverzného zobrazenia.

Nech f je bijektívne zobrazenie množiny A na množinu B . Potom množina

$f^{-1} = \{[x, y] \in B \times A : [y, x] \in f\}$ sa nazýva inverzným zobrazením k zobrazeniu f .

Poznamenajme, že inverzná relácia f^{-1} k zobrazeniu f je zobrazením iba v prípade, ak f je bijektívne zobrazenie.

Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi\}$ a $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a zobrazenia f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 z množiny M do množiny N .

$$f_1 = \{[\alpha, 1], [\beta, 2], [\chi, 3], [\delta, 4], [\varepsilon, 5], [\phi, 6]\}, f_2 = \{[\alpha, 6], [\beta, 2], [\chi, 3], [\delta, 4], [\varepsilon, 2], [\phi, 3]\},$$

$$f_3 = \{[\alpha, 3], [\beta, 6], [\chi, 2], [\delta, 4], [\varepsilon, 5], [\phi, 1]\}, f_4 = \{[\alpha, 1], [\beta, 1], [\chi, 3], [\delta, 4], [\varepsilon, 5], [\phi, 6]\},$$

$$f_5 = \{[\alpha, 1], [\beta, 4], [\chi, 3], [\delta, 6], [\varepsilon, 2], [\phi, 5]\}$$

Zobrazenie f_1 je bijektívne, preto k nemu existuje inverzné zobrazenie f_1^{-1} . Platí:

$$f_1^{-1} = \{[1, \alpha], [2, \beta], [3, \chi], [4, \delta], [5, \varepsilon], [6, \phi]\}.$$

Zobrazenie f_2 nie je ani injektívne, ani surjektívne, a teda nie je ani bijektívne. Preto k zobrazeniu f_2 neexistuje inverzné zobrazenie. To isté platí pre zobrazenie f_4 .

Zobrazenie f_3 je bijektívne, preto k nemu existuje inverzné zobrazenie f_3^{-1} . Platí:

$$f_3^{-1} = \{[1, \phi], [2, \chi], [3, \alpha], [4, \delta], [5, \varepsilon], [6, \beta]\}.$$

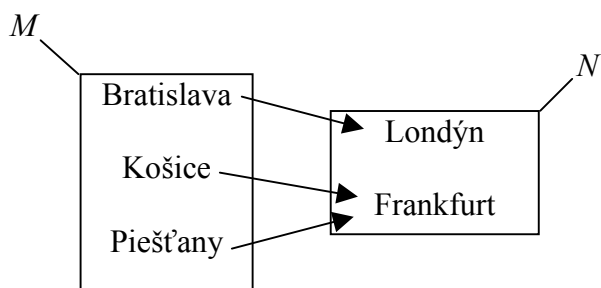
Zobrazenie f_5 je bijektívne, preto k nemu existuje inverzné zobrazenie f_5^{-1} . Platí:

$$f_5^{-1} = \{[1, \alpha], [2, \varepsilon], [3, \chi], [4, \beta], [5, \phi], [6, \delta]\}.$$

Zložené zobrazenie

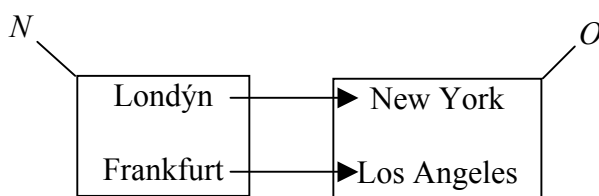
V tejto časti si vysvetlíme pojem zloženého zobrazenia.

Začneme príkladom. Predstavme si, že chceme letecky cestovať zo SR do zámoria. V daný deň možno začať z týchto troch letísk: Bratislava, Košice, Piešťany. Z Bratislavy možno cestovať do Londýna, z Košíc a z Piešťan do Frankfurtu.



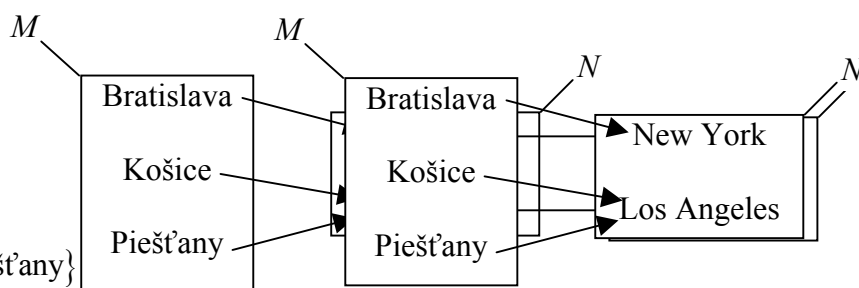
Situáciu znázorníme grafom. Všimnime si, že tento graf predstavuje vrcholový graf zobrazenia z množiny $\{\text{Bratislava, Košice, Piešťany}\}$ do množiny $\{\text{Londýn, Frankfurt}\}$.

V ponuke cestovnej kancelárie sú výhodné tieto lety: Londýn – New York a Frankfurt – Los Angeles. Situáciu opäť znázorníme grafom. Všimnime si, že tento graf opäť predstavuje vrcholový graf zobrazenia z množiny $\{\text{Londýn, Frankfurt}\}$ do množiny $\{\text{New York, Los Angeles}\}$.



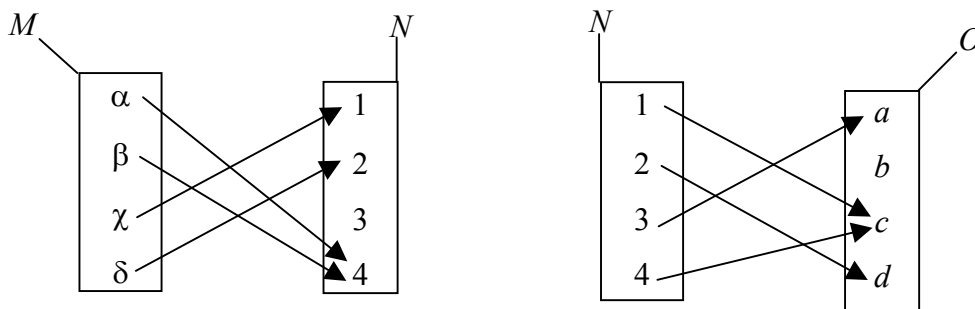
Teraz „spojíme“ oba grafy a vynecháme „prestupnú množinu $\{\text{Londýn, Frankfurt}\}$ “.

Všimnime si, že tento graf opäť predstavuje vrcholový graf zobrazenia z množiny $\{\text{Bratislava, Košice, Piešťany}\}$ do množiny $\{\text{New York, Los Angeles}\}$.



Postup, ktorý sme si práve predviedli, nazývame skladanie zobrazení. Výsledné zobrazenie, ktoré týmto postupom získame, nazývame zložené zobrazenie.

Dané sú dve zobrazenia určené vrcholovými grafmi. Nakreslite vrcholový graf zloženého zobrazenia.

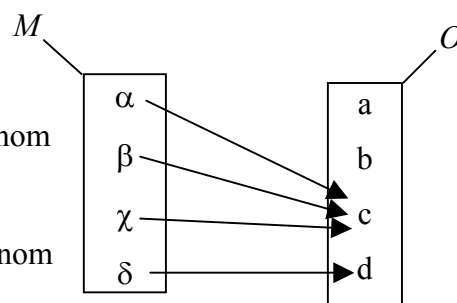


Z α „možno cestovať“ do 4 a zo 4 „ďalej“ do c . Preto v zloženom zobrazení ide šípka z α do c .

Z β „možno cestovať“ do 4 a zo 4 do c . Preto v zloženom zobrazení ide šípka z β do c .

Z χ „možno cestovať“ do 1 a z 1 do c . Preto v zloženom zobrazení ide šípka z χ do c .

Z δ „možno cestovať“ do 2 a z 2 do d . Preto v zloženom zobrazení ide šípka z δ do d .



Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $O = \{a, b, c, d\}$. Ďalej je dané zobrazenie f z množiny M do množiny N a zobrazenie g z množiny N do množiny O .

$$f = \{[\alpha, 4], [\beta, 4], [\chi, 1], [\delta, 2]\}, \quad g = \{[1, c], [2, d], [3, a], [4, c]\}$$

Ak by sme nakreslili vrcholové grafy, dostali by sme zložené zobrazenie podobne ako v predchádzajúcom príklade. Môžeme však postupovať aj odlišne:

Zobrazenie f obsahuje usporiadanú dvojicu $[\alpha, 4]$ a zobrazenie g usporiadanú dvojicu $[4, c]$.

Preto zložené zobrazenie musí obsahovať usporiadanú dvojicu $[\alpha, c]$. (4 vynecháme, použili sme ju „na prestupovanie“)

Zobrazenie f obsahuje usporiadanú dvojicu $[\beta, 4]$ a zobrazenie g usporiadanú dvojicu $[4, c]$.

Preto zložené zobrazenie musí obsahovať usporiadanú dvojicu $[\beta, c]$.

Zobrazenie f obsahuje usporiadanú dvojicu $[\chi, 1]$ a zobrazenie g usporiadanú dvojicu $[1, c]$.

Preto zložené zobrazenie musí obsahovať usporiadanú dvojicu $[\chi, c]$.

Zobrazenie f obsahuje usporiadanú dvojicu $[\delta, 2]$ a zobrazenie g usporiadanú dvojicu $[2, d]$.

Preto zložené zobrazenie musí obsahovať usporiadanú dvojicu $[\delta, d]$.

Zložené zobrazenie je $\{[\alpha, c], [\beta, c], [\chi, c], [\delta, d]\}$.

V nasledujúcej časti sa budeme vyjadrovať presnejšie. Najskôr uvedieme nasledujúcu vetu.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech g je zobrazenie z množiny B do množiny C . Potom množina $h = \{[x, z] \in A \times C : \exists y \in B [x, y] \in f \wedge [y, z] \in g\}$ je zobrazenie z množiny A do množiny C .

Ukážeme, že množina $h = \{[x, z] \in A \times C : \exists y \in B [x, y] \in f \wedge [y, z] \in g\}$ spĺňa obe podmienky uvedené v definícii zobrazenia, teda:

1. $\forall a \in A \exists c \in C : [a, c] \in h$,
2. ak $[a, c_1] \in h \wedge [a, c_2] \in h$, potom $c_1 = c_2$.

Nech a je ľubovoľný prvok z množiny A . Pretože f je zobrazenie z množiny A do množiny B , existuje prvok $b \in B$, pričom $[a, b] \in f$. Pretože g je zobrazenie z množiny B do množiny C , existuje prvok $c \in C$, pričom $[b, c] \in g$. To znamená, že $\exists c \in C : [a, c] \in h$. Dokázali sme prvú vlastnosť definície zobrazenia.

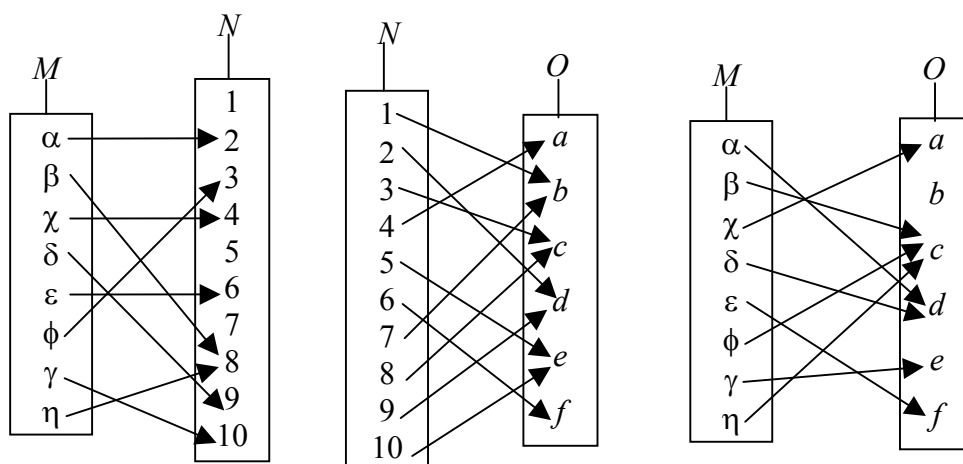
Nech a je ľubovoľný prvok z množiny A . Pretože f je zobrazenie z množiny A do množiny B , existuje jediný prvok $b \in B$, pričom $[a, b] \in f$. Pretože g je zobrazenie z množiny B do množiny C , existuje jediný prvok $c \in C$, pričom $[b, c] \in g$. To znamená, že $\exists! c \in C : [a, c] \in h$ (čítame: existuje práve jeden prvok c množiny C , pre ktorý $[a, c] \in h$). Dokázali sme aj druhú vlastnosť definície zobrazenia.

Záver: Dokázali sme, že množina $h = \{[x, z] \in A \times C : \exists y \in B [x, y] \in f \wedge [y, z] \in g\}$ je zobrazenie z množiny A do množiny C . To nám dovoľuje vysloviť nasledujúcu definíciu zloženého zobrazenia.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Nech g je zobrazenie z množiny B do množiny C . Potom množinu $h = \{[x, z] \in A \times C : \exists y \in B [x, y] \in f \wedge [y, z] \in g\}$ nazývame zloženým zobrazením (kompozíciou) zobrazení f a g a označujeme ho znakom $g \circ f$.

Dané sú dve zobrazenia určené vrcholovými grafmi (prvé dva obrázky zľava). Nakreslíme vrcholový graf zloženého zobrazenia (obrázok vpravo).

Dané sú množiny $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $O = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ďalej sú dané zobrazenia f z množiny M do množiny N , g z množiny N do množiny O , h z množiny O do množiny M .



$$f = \{[\alpha, 4], [\beta, 4], [\chi, 1], [\delta, 2], [\varepsilon, 3], [\phi, 2]\}, \quad g = \{[1, b], [2, e], [3, a], [4, f]\},$$

$$h = \{[a, \chi], [b, \varepsilon], [c, \alpha], [d, \beta], [e, \delta], [f, \phi]\}.$$

Určíme zložené zobrazenia $g \circ f$ a $h \circ (g \circ f)$.

$$g \circ f = \{[\alpha, f], [\beta, f], [\chi, b], [\delta, e], [\varepsilon, a], [\phi, e]\}$$

$$h \circ (g \circ f) = \{[\alpha, \phi], [\beta, \phi], [\chi, \varepsilon], [\delta, \delta], [\varepsilon, \chi], [\phi, \delta]\}$$

Teraz sa budeme venovať injektívnosti a surjektívnosti zloženého zobrazenia.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B a g je zobrazenie z množiny B do množiny C .

Ak f aj g sú injektívne, potom aj $g \circ f$ je injektívne.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B a g je zobrazenie z množiny B do množiny C .

Ak f aj g sú surjektívne, potom aj $g \circ f$ je surjektívne.

Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B a g je zobrazenie z množiny B do množiny C .

Ak f aj g sú bijektívne, potom aj $g \circ f$ je bijektívne.

Permutácie

V tejto časti sa budeme venovať špeciálnemu typu zobrazenia – bijektívnemu zobrazeniu z množiny M do množiny M . Začneme definíciou.

Permutáciou konečnej množiny M nazývame každé bijektívne zobrazenie množiny M na množinu M .

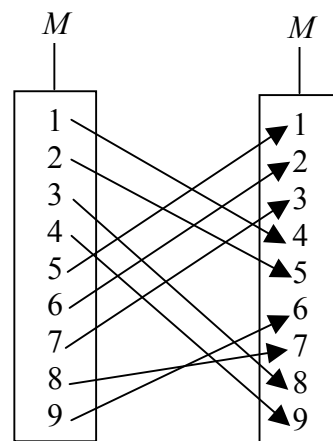
Pojem permutácie množiny si vysvetlíme na príkladoch.

Daná je množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny M určené vrcholovým grafom.

Pretože z každého prvku množiny M vychádza práve jedna šípka, relácia f je skutočne zobrazením množiny M do množiny M .

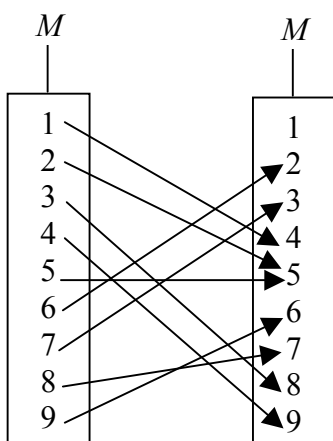
Pretože do každého prvku množiny M vchádza práve jedna šípka, zobrazenie f je bijektívne.

Teda zobrazenie f je permutáciou množiny M .



Daná je množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny M určené vrcholovým grafom.

Pretože z každého prvku množiny M vychádza práve jedna šípka, relácia f je skutočne zobrazením množiny M do množiny M . Pretože do prvku 5 vchádzajú až dve šípky, zobrazenie f nie je injektívne, a teda ani bijektívne. Zobrazenie f nie je permutáciou množiny M .



Daná je množina $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a zobrazenie

$f = \{[a, b], [b, c], [c, d], [d, e], [e, f], [f, a]\}$ z množiny M do množiny M .

Pretože každý prvok množiny M sa nachádza na prvom mieste v práve jednej usporiadanej dvojici, relácia f je skutočne zobrazením množiny M do množiny M . Pretože každý prvok

množiny M sa nachádza na druhom mieste v práve jednej usporiadanej dvojici, zobrazenie f je bijektívne. Teda zobrazenie f je permutáciou množiny M .

Daná je množina $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a zobrazenie $f = \{[a, a], [b, c], [c, d], [d, e], [e, f], [f, a]\}$ z množiny M do množiny M .

Pretože prvok a množiny M sa nachádza na druhom mieste v dvoch rôznych usporiadaných dvojiciach, zobrazenie f nie je injektívne, a teda ani bijektívne. Zobrazenie f nie je permutáciou množiny M .

Daná je množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a zobrazenie f z množiny M do množiny M určené vzťahom $f(x) = 10 - x$.

Zobrazenie $f = \{[1, 9], [2, 8], [3, 7], [4, 6], [5, 5], [6, 4], [7, 3], [8, 2], [9, 1]\}$.

Pretože každý prvok množiny M sa nachádza na prvom mieste v práve jednej usporiadanej dvojici, relácia f je skutočne zobrazením množiny M do množiny M . Pretože každý prvok množiny M sa nachádza na druhom mieste v práve jednej usporiadanej dvojici, zobrazenie f je bijektívne. Teda zobrazenie f je permutáciou množiny M .

V matematike používame pre zápis permutácií prehľadnejšiu formu. Ak je daná n -prvková množina $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$, potom permutáciu f množiny M zapisujeme v tvare

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_n \\ f(m_1) & f(m_2) & f(m_3) & \dots & f(m_n) \end{pmatrix}.$$

V prvom riadku sú teda všetky prvky množiny M a v druhom riadku sú v príslušných stĺpcoch ich obrazy v permutácii f . Pretože permutácia je bijektívnym zobrazením, v druhom riadku sú tie isté prvky ako v prvom, iba navzájom „poprehadzované“.

Tento zápis si vysvetlíme na príkladoch.

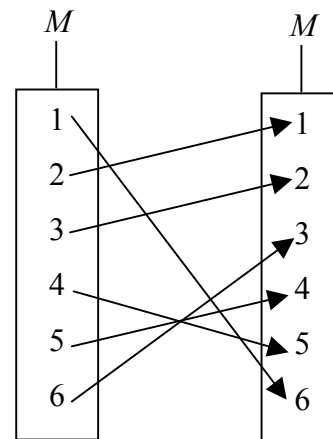
Daná je množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a permutácia $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Pretože v druhom riadku pod prvkom 2 je prvok 1, platí $f(2) = 1$.

Pretože v druhom riadku pod prvkom 5 je prvok 4, platí $f(5) = 4$.

Podobne určíme aj obrazy ostatných prvkov.



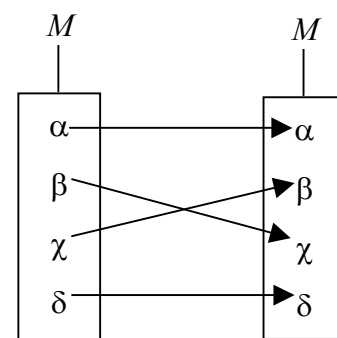
Daná je množina $M = \{\alpha, \beta, \chi, \delta\}$ a permutácia $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \alpha & \chi & \beta & \delta \end{pmatrix}$.

Jej vrcholový graf vidíme na obrázku.

Pretože v druhom riadku pod prvkom α je prvok α , platí $f(\alpha) = \alpha$.

Pretože v druhom riadku pod prvkom β je prvok χ , platí $f(\beta) = \chi$.

Podobne určíme aj obrazy ostatných prvkov.



Teraz sa budeme venovať permutáciám množín s malým počtom prvkov.

Nájdeme všetky permutácie množiny $M = \{1, 2\}$.

Prvky množiny $\{1, 2\}$ možno poprehadzovať dvoma spôsobmi: 1,2 a 2,1.

Preto existujú iba dve permutácie množiny $\{1, 2\}$, a to $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Teraz nájdeme všetky permutácie množiny $M = \{a, b, c\}$.

Prvky množiny $\{a, b, c\}$ možno poprehadzovať šiestimi spôsobmi:

a,b,c a,c,b b,a,c b,c,a c,a,b c,b,a

Preto existuje šesť permutácií množiny $\{a, b, c\}$, a to:

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad f_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Inverzná relácia f^{-1} k permutácii f množiny M je permutáciou množiny M .

Nájdeme inverzné permutácie k permutáciám

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix},$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad f_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Pre permutáciu $f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ platí: $f_1(a) = a, f_1(b) = b, f_1(c) = c$.

Pre permutáciu $(f_1)^{-1}$ preto platí: $(f_1)^{-1}(a) = a, (f_1)^{-1}(b) = b, (f_1)^{-1}(c) = c$.

Teda $(f_1)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = f_1$.

Pre permutáciu $f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$ platí: $f_2(a) = a, f_2(b) = c, f_2(c) = b$.

Pre permutáciu $(f_2)^{-1}$ preto platí: $(f_2)^{-1}(a) = a, (f_2)^{-1}(c) = b, (f_2)^{-1}(b) = c$.

Teda $(f_2)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = f_2$.

Podobne zistíme, že $(f_3)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} = f_3$ a $(f_6)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = f_6$.

Pre permutáciu $f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ platí: $f_4(a) = b, f_4(b) = c, f_4(c) = a$.

Pre permutáciu $(f_4)^{-1}$ preto platí: $(f_4)^{-1}(b) = a, (f_4)^{-1}(c) = b, (f_4)^{-1}(a) = c$.

Teda $(f_4)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = f_5$.

Podobne zistíme, že $(f_5)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = f_4$.

Nech f a g sú permutácie množiny M . Potom zložené zobrazenie $g \circ f$ je permutáciou množiny M .

Nájďme zložené permutácie $f_3 \circ f_5$ a $f_5 \circ f_3$ k permutáciám $f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$ a

$$f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

$$(f_3 \circ f_5)(a) = f_5(f_3(a)) = f_5(b) = a,$$

$$(f_3 \circ f_5)(b) = f_5(f_3(b)) = f_5(a) = c,$$

$$(f_3 \circ f_5)(c) = f_5(f_3(c)) = f_5(c) = b,$$

$$\text{teda } f_3 \circ f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = f_2$$

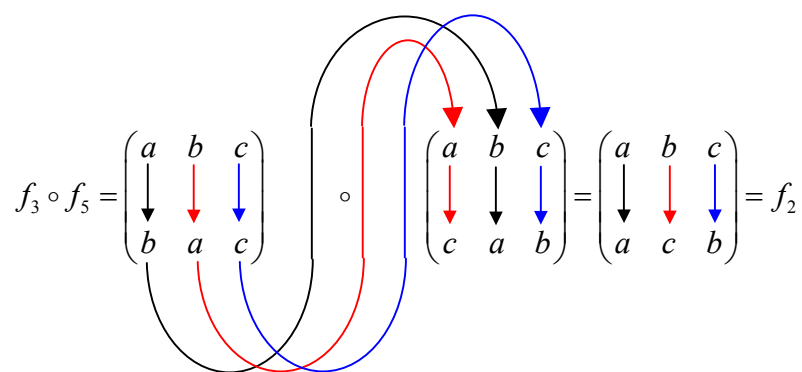
$$(f_5 \circ f_3)(a) = f_3(f_5(a)) = f_3(c) = c,$$

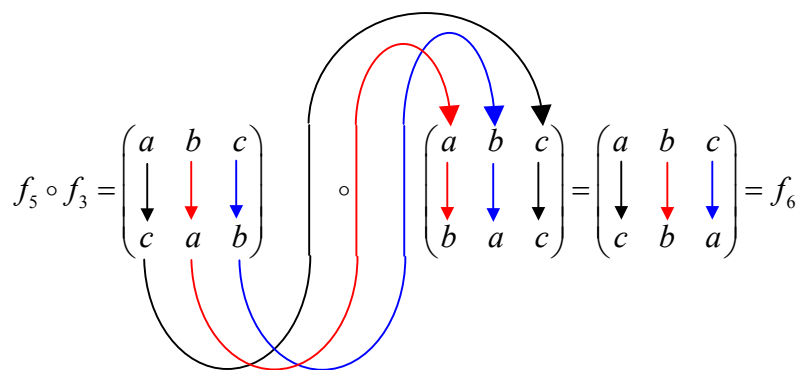
$$(f_5 \circ f_3)(b) = f_3(f_5(b)) = f_3(a) = b,$$

$$(f_5 \circ f_3)(c) = f_3(f_5(c)) = f_3(b) = a,$$

$$\text{teda } f_5 \circ f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = f_6$$

Skladanie permutácií môžeme realizovať aj podľa nasledujúcej schémy:





Test č. 11

V nasledujúcom teste je 50 úloh z oblasti zobrazení.

Na nich si prakticky precvičíme:

- karteziánsky súčin dvoch množín,
- pojem binárnej relácie z množiny A do množiny B ,
- pojem zobrazenia z množiny A do množiny B ,
- určovanie vlastností zobrazenia: injektívne, surjektívne, bijektívne,
- pojem inverzného zobrazenia, podmienky jeho existencie a jeho určovanie,
- pojem zloženého zobrazenia a jeho určovanie,
- pojem permutácie, rôzne spôsoby jej vyjadrenia, inverznú permutáciu, skladanie permutácií.

Test č. 11 nájdeme aj v elektronickej verzii v súbore 11.exe.

1. Označte pravdivé tvrdenie. Binárna relácia R z množiny A do množiny B je

- a) akákoľvek podmnožina karteziánskeho súčinu $A \times B$.
- b) akákoľvek podmnožina množiny $A \cup B$.
- c) akákoľvek podmnožina množiny $A \cap B$.
- d) každá neprázdna podmnožina množiny $A - B$.

2. Dané sú množiny A a B . Označte tie usporiadané dvojice, ktoré patria do karteziánskeho súčinu $A \times B$.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

- a) $[2, 3]$
- b) $[e, 5]$

c) $[1, f]$

d) $[4, h]$

3. Dané sú množiny A a B a binárna relácia R z A do B . Označte tie usporiadané dvojice, ktoré môže obsahovať relácia R .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

a) $[a, h]$

b) $[3, f]$

c) $[2, 3]$

d) $[e, 5]$

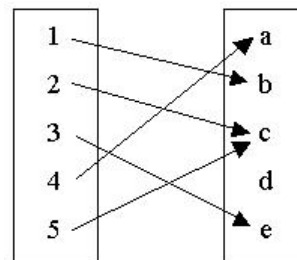
4. Na obrázku je graf binárnej relácie R z množiny A do množiny B . Označte tie usporiadané dvojice, ktoré relácia R obsahuje.

a) $[2, b]$

b) $[3, e]$

c) $[a, 4]$

d) $[2, c]$



5. Daná je binárna relácia R z množiny A do množiny B .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 3], [2, 4], [3, 1], [4, 2], [5, 3]\}$$

Označte pravdivé tvrdenia.

a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B .

b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

6. Daná je binárna relácia R z množiny A do množiny B .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 1], [2, 1], [3, 2], [4, 2], [5, 3]\}$$

Označte pravdivé tvrdenia.

a) R je zobrazenie z množiny A do množiny B .

- b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

7. Daná je binárna relácia R z množiny A do množiny B .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d, e\}, R = \{[1, a], [2, b], [3, e], [4, d], [5, c]\}$$

Označte pravdivé tvrdenia.

- a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B .
- b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

8. Daná je binárna relácia R z množiny A do množiny B .

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d, e\}, R = \{[1, a], [2, b], [3, e], [4, d], [4, c]\}$$

Označte pravdivé tvrdenia.

- a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B .
- b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

9. Daná je binárna relácia R z množiny A do množiny B .

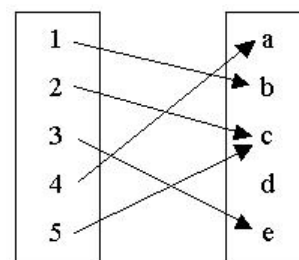
$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d, e\}, R = \{[1, a], [2, b], [3, e]\}$$

Označte pravdivé tvrdenia.

- a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B .
- b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
- d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

10. Na obrázku je graf binárnej relácie R z množiny A do množiny B . Označte pravdivé tvrdenia.

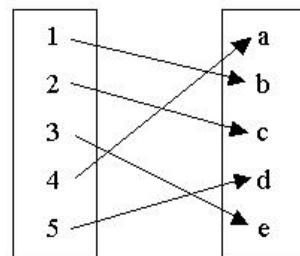
- a) R je zobrazenie z množiny A do množiny B .
- b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .



- c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .

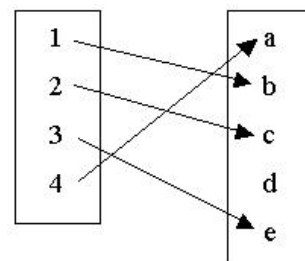
11. Na obrázku je graf binárnej relácie R z množiny A do množiny B . Označte pravdivé tvrdenia.

- a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B .
 b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .



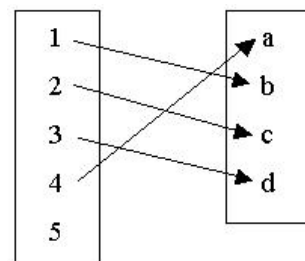
12. Na obrázku je graf binárnej relácie R z množiny A do množiny B . Označte pravdivé tvrdenia.

- a) R je zobrazenie z množiny A do množiny B .
 b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .



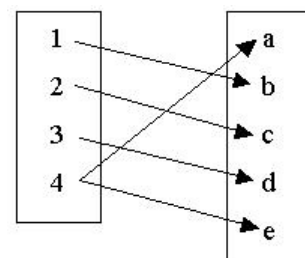
13. Na obrázku je graf binárnej relácie R z množiny A do množiny B . Označte pravdivé tvrdenia.

- a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B .
 b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .



14. Na obrázku je graf binárnej relácie R z množiny A do množiny B . Označte pravdivé tvrdenia.

- a) R nie je zobrazenie z množiny A do množiny B .
 b) R je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 c) R je surjektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .
 d) R je bijektívne zobrazenie z množiny A do množiny B .



15. Označte tie zobrazenia z množiny A do množiny B , ktoré sú injektívne.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- a) $f = \{[1,1], [2,2], [3,4], [4,5], [5,1]\}$
 b) $f = \{[1,3], [2,2], [3,1], [4,6], [5,4]\}$
 c) $f = \{[1,1], [2,2], [3,4], [4,5], [5,6]\}$
 d) $f = \{[1,1], [2,2], [3,4], [4,2], [5,6]\}$

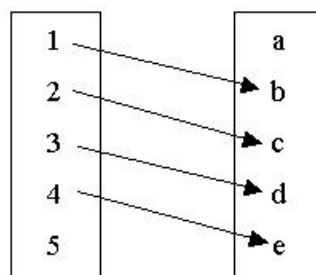
16. Označte tie zobrazenia z množiny A do množiny B , ktoré sú surjektívne.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- a) $f = \{[1,1], [2,1], [3,2], [4,2], [5,3], [6,3]\}$
 b) $f = \{[1,1], [2,2], [3,3], [4,4], [5,5], [6,1]\}$
 c) $f = \{[1,5], [2,4], [3,1], [4,2], [5,1], [6,3]\}$
 d) $f = \{[1,1], [2,2], [3,2], [4,4], [5,5], [6,1]\}$

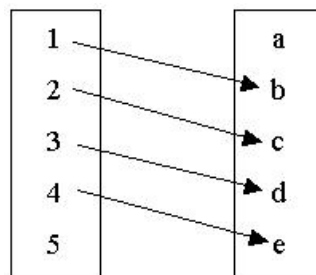
17. Na obrázku je graf binárnej relácie R . Označte prvky, ktoré stačí do grafu pridať, aby R bolo zobrazenie.

- a) šípka z 5 do a
 b) šípka z 5 do c
 c) šípka z 3 do a
 d) šípka z 3 do d



18. Na obrázku je graf binárnej relácie R . Označte prvky, ktoré stačí do grafu pridať, aby R bolo bijektívne zobrazenie.

- a) šípka z 5 do a
 b) šípka z 5 do c
 c) šípka z 3 do a
 d) šípka z 3 do d



19. Daná je množina $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Označte, aké prvky môže mať množina B , aby existovalo injektívne zobrazenie z A do B .

- a) $B = \{a, b, c, d, e\}$

- b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- c) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- d) $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

20. Daná je množina $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Označte, aké prvky môže mať množina B , aby existovalo surjektívne zobrazenie z A do B .

- a) $B = \{a, b, c, d, e\}$
- b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- c) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- d) $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

21. Nech f je binárna relácia z množiny A do množiny B . Nech g je inverzná relácia k relácii f . Postačujúcou podmienkou pre to, aby g bolo zobrazenie, je, aby

- a) f bolo surjektívne zobrazenie.
- b) f bolo injektívne zobrazenie.
- c) f bolo bijektívne zobrazenie.
- d) f bolo zobrazenie.

22. Priradiť k zobrazeniam inverzné zobrazenia.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $f = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$ | 1. $f^{-1} = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1]\}$ |
| b) $f = \{[1, 3], [2, 2], [3, 1]\}$ | 2. $f^{-1} = \{[1, 3], [2, 2], [3, 1]\}$ |
| c) $f = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1]\}$ | 3. $f^{-1} = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$ |
| d) $f = \{[1, 3], [2, 1], [3, 2]\}$ | 4. $f^{-1} = \{[1, 3], [2, 1], [3, 2]\}$ |

23. Priradiť k zobrazeniam inverzné zobrazenia.

- | | |
|---|--|
| a) $f = \{[1, 1], [2, 4], [3, 2], [4, 3]\}$ | 1. $f^{-1} = \{[1, 2], [2, 1], [3, 4], [4, 3]\}$ |
| b) $f = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 1]\}$ | 2. $f^{-1} = \{[1, 3], [2, 2], [3, 1], [4, 4]\}$ |
| c) $f = \{[1, 2], [2, 1], [3, 4], [4, 3]\}$ | 3. $f^{-1} = \{[1, 1], [2, 3], [3, 4], [4, 2]\}$ |

$$d) f = \{[1,3], [2,2], [3,1], [4,4]\}$$

$$4. f^{-1} = \{[1,4], [2,1], [3,2], [4,3]\}$$

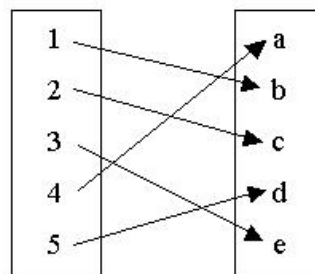
24. Na obrázku je graf bijektívneho zobrazenia f . Označte k nemu inverzné zobrazenie.

$$a) f^{-1} = \{[1,a], [2,b], [3,c], [4,d], [5,e]\}$$

$$b) f^{-1} = \{[1,b], [2,c], [3,e], [4,a], [5,d]\}$$

$$c) f^{-1} = \{[a,4], [b,1], [c,2], [d,5], [e,3]\}$$

$$d) f^{-1} = \{[a,1], [b,2], [c,3], [d,4], [e,5]\}$$



25. Označte tie zobrazenia z množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ do množiny $B = \{a, b, c, d, e\}$, ku ktorým existujú inverzné zobrazenia.

$$a) f_1 = \{[1,a], [2,b], [3,c], [4,d], [5,e]\}$$

$$b) f_2 = \{[1,b], [2,c], [3,e], [4,d], [5,a]\}$$

$$c) f_3 = \{[1,a], [2,b], [3,a], [4,d], [5,c]\}$$

$$d) f_4 = \{[1,e], [2,e], [3,e], [4,e], [5,e]\}$$

26. Dané sú zobrazenia f, g . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[1, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f: A \rightarrow B, f = \{[1,4], [2,3], [3,2], [4,1], [5,3]\}$$

$$g: B \rightarrow C, g = \{[1,4], [2,6], [3,5], [4,1]\}$$

27. Dané sú zobrazenia f, g . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f: A \rightarrow B, f = \{[1,4], [2,3], [3,2], [4,1], [5,3]\}$$

$$g: B \rightarrow C, g = \{[1,4], [2,6], [3,5], [4,1]\}$$

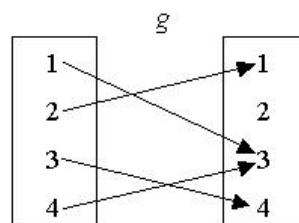
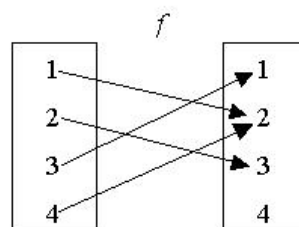
28. Dané sú zobrazenia f, g . Aké číslo treba dať miesto $?$, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

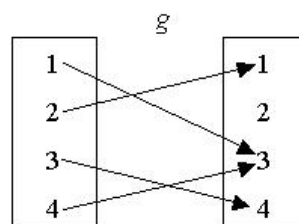
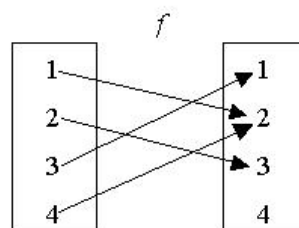
$$f: A \rightarrow B, f = \{[1, 4], [2, 3], [3, 2], [4, 1], [5, 3]\}$$

$$g: B \rightarrow C, g = \{[1, 4], [2, 6], [3, 5], [4, 1]\}$$

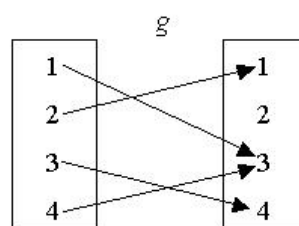
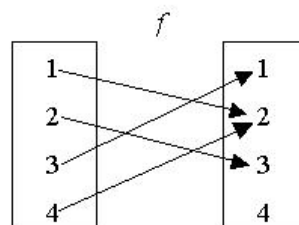
29. Na obrázku sú grafy zobrazení f, g . Aké číslo treba dať miesto $?$, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?



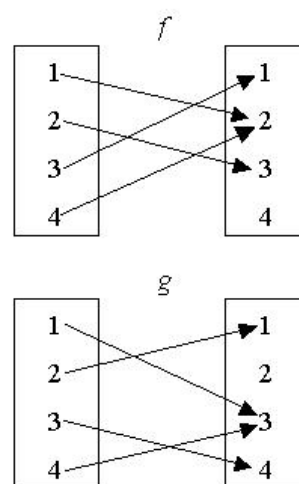
30. Na obrázku sú grafy zobrazení f, g . Aké číslo treba dať miesto $?$, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?



31. Na obrázku sú grafy zobrazení f, g . Aké číslo treba dať miesto $?$, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $g \circ f$?



32. Na obrázku sú grafy zobrazení f , g . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[1, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?



33. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ f$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

34. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ (f \circ f)$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

35. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zobrazeniu f^{-1} ?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

36. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ f^{-1}$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

37. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ f$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

38. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ (f \circ f)$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

39. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zobrazeniu f^{-1} ?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

40. Dané je bijektívne zobrazenie f z množiny A do množiny B . Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ f^{-1}$?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5], [4, 1], [5, 2]\}$$

41. Prirad'te danej množine počet jej permutácií.

- | | |
|------------------------|-------|
| a) $\{1, 2, 3, 4\}$ | 1. 1 |
| b) $\{a\}$ | 2. 2 |
| c) $\{1, 2, 3\}$ | 3. 6 |
| d) $\{\alpha, \beta\}$ | 4. 24 |

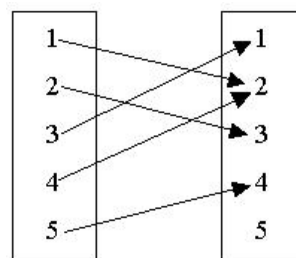
42. Na obrázku je graf zobrazenia f z množiny M do množiny M . Označte správne tvrdenie.

a) Zobrazenie f nie je permutáciou množiny M .

b) Zobrazenie f je permutáciou množiny M , pretože je injektívne.

c) Zobrazenie f je permutáciou množiny M , pretože je surjektívne.

d) Zobrazenie f je permutáciou množiny M , pretože je bijektívne.



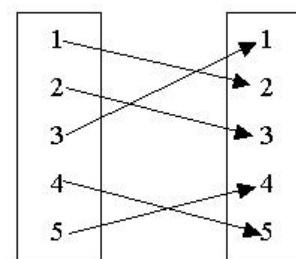
43. Na obrázku je graf zobrazenia f z množiny M do množiny M . Označte správne tvrdenie.

a) Zobrazenie f je permutáciou množiny M .

b) Zobrazenie f nie je permutáciou množiny M , pretože nie je injektívne.

c) Zobrazenie f nie je permutáciou množiny M , pretože nie je surjektívne.

d) Zobrazenie f nie je permutáciou množiny M , pretože nie je bijektívne.



44. Prirad'te k permutácii jej inverzné zobrazenie.

a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

45. Prirad'te k permutácii jej inverzné zobrazenie.

a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$c) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

46. Prirad'te k permutácii f zložené zobrazenie $f \circ f$.

$$a) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1. f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

47. Prirad'te k permutácii f zložené zobrazenie $f \circ f$.

$$a) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1. f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

48. Dané sú permutácie $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?

49. Dané sú permutácie $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[2, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $f \circ g$?

50. Dané sú permutácie $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Aké číslo treba dať miesto ?, aby usporiadaná dvojica $[3, ?]$ patrila zloženému zobrazeniu $g \circ f$?

Test č. 11 – správne riešenia

1. a	11. bcd	21. c	31. 2	41. a4,b1,c3,d2
2. cd	12. ab	22. a3,b2,c4,d1	32. 1	42. a
3. b	13. a	23. a3,b4,c1,d2	33. 2	43. a
4. bd	14. a	24. c	34. 4	44. a3,b4,c2,d1
5. c	15. bc	25. ab	35. 1	45. a2,b4,c1,d3
6. a	16. bc	26. 1	36. 3	46. a3,b1,c2
7. bcd	17. ab	27. 5	37. 1	47. a1,b4,c2,d3
8. a	18. a	28. 6	38. 3	48. 3
9. a	19. bcd	29. 3	39. 5	49. 1
10. a	20. ac	30. 4	40. 2	50. 1