

8. Relácia usporiadania

V tejto časti sa budeme venovať ďalšiemu špeciálnemu typu binárnych relácií v množine M - reláciám usporiadania. Najskôr si uvedieme nasledujúce štyri definície.

Relácia R definovaná v množine M sa nazýva relácia ostrého lineárneho usporiadania, ak je:

1. antireflexívna,
2. antisymetrická,
3. tranzitívna,
4. súvislá.

Relácia R definovaná v množine M sa nazýva relácia lineárneho usporiadania (neostrého), ak je:

1. reflexívna,
2. antisymetrická,
3. tranzitívna,
4. súvislá.

Relácia R definovaná v množine M sa nazýva relácia ostrého čiastočného usporiadania, ak je:

1. antireflexívna,
2. antisymetrická,
3. tranzitívna.

Relácia R definovaná v množine M sa nazýva relácia čiastočného usporiadania (neostrého), ak je:

1. reflexívna,
2. antisymetrická,
3. tranzitívna.

Už na prvý pohľad vidíme, že všetky štyri definície sú si podobné. Vo všetkých štyroch definíciách totiž vyžadujeme, aby relácia R bola antisymetrická a tranzitívna.

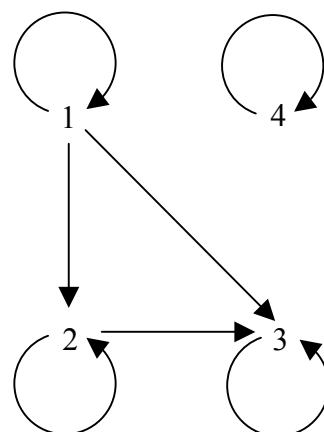
Ako sa daná skutočnosť prejaví na vrcholovom grafe? Pretože relácia R je antisymetrická, jej vrcholový graf neobsahuje žiadne obojsmerné šípky. Pretože relácia R je tranzitívna, v jej vrcholovom grafe nemá zmysel prestupovať. Inými slovami, vždy, keď vrcholový graf obsahuje šípku z x do y a aj z y do z , potom obsahuje aj šípku z x do z .

Keď porovnáme prvú a druhú definíciu zistíme, v čom spočíva rozdiel medzi ostrým a neostrým usporiadaním. Kým pri ostrom usporiadaní vyžadujeme, aby relácia R bola antireflexívna, pri neostrom usporiadaní vyžadujeme, aby relácia R bola reflexívna. Vrcholový graf relácie ostrého usporiadania neobsahuje žiadnu slučku. Vrcholový graf relácie neostrého usporiadania má pri každom vrchole slučku. Podobne možno porovnať aj tretiu a štvrtú definíciu.

Keď porovnáme prvú a tretiu definíciu zistíme, v čom spočíva rozdiel medzi lineárnym a čiastočným usporiadaním. V definícii lineárneho usporiadania vyžadujeme, aby relácia R bola súvislá. Vo vrcholovom grafe relácie lineárneho usporiadania teda existuje medzi každými dvoma rôznymi vrcholmi nejaká šípka. V definícii čiastočného usporiadania takáto požiadavka nie je obsiahnutá. Podobne možno porovnať aj druhú a štvrtú definíciu.

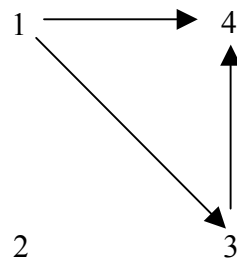
Relácie usporiadania si teraz precvičíme na nasledujúcich príkladoch.

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 2], [2, 3], [3, 3], [4, 4]\}$. Vrcholový graf danej relácie vidíme na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje obojsmerné šípky, relácia R je antisymetrická. Pretože vo vrcholovom grafe relácie R nemá zmysel prestupovať, relácia R je tranzitívna. Pretože vrcholový graf relácie R obsahuje pri každom vrchole slučku, relácia R je reflexívna. (neostré usporiadanie) Pretože vrcholy 1 a 4 nie sú spojené žiadnou šípkou, relácia R nie je súvislá. (čiastočné usporiadanie)



Záver: Relácia R je reláciou **neostrého čiastočného usporiadania** v množine M .

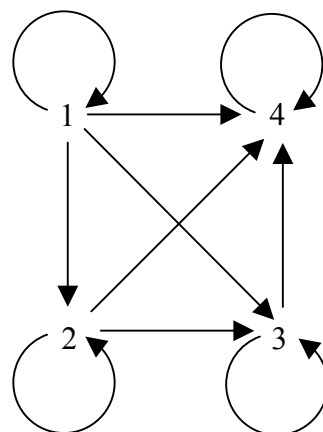
Nech množina $M = \{1,2,3,4\}$ a relácia $R = \{[1,3], [1,4], [3,4]\}$. Vrcholový graf danej relácie vidíme na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje obojsmerné šípky, relácia R je antisymetrická. Pretože vo vrcholovom grafe relácie R nemá zmysel prestupovať, relácia R je tranzitívna. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje žiadnu slučku, relácia R je antireflexívna. (ostré usporiadanie) Pretože vrcholy 1 a 2 nie sú spojené žiadnou šípkou, relácia R nie je súvislá. (častočné usporiadanie)



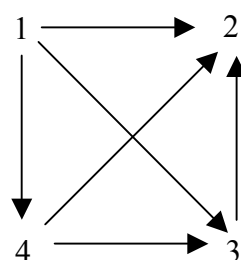
Záver: Relácia R je reláciou **ostrého častočného usporiadania** v množine M .

Nech množina $M = \{1,2,3,4\}$ a relácia $R = \{[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [2,2], [2,3], [2,4], [3,3], [3,4], [4,4]\}$.

Vrcholový graf danej relácie vidíme na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje obojsmerné šípky, relácia R je antisymetrická. Pretože vo vrcholovom grafe relácie R nemá zmysel prestupovať, relácia R je tranzitívna. Pretože vrcholový graf relácie R obsahuje pri každom vrchole slučku, relácia R je reflexívna. (neostré usporiadanie) Pretože každé dva rôzne vrcholy sú spojené šípkou, relácia R je súvislá. (lineárne usporiadanie) Záver: Relácia R je reláciou **neostrého lineárneho usporiadania** v množine M .

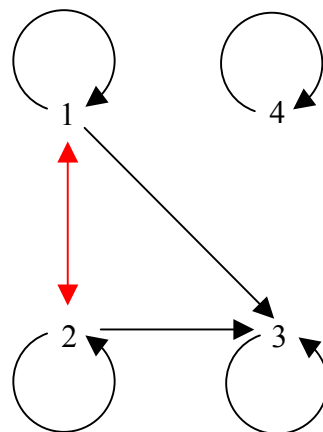


Nech množina $M = \{1,2,3,4\}$ a relácia $R = \{[1,2], [1,3], [1,4], [3,2], [4,2], [4,3]\}$. Vrcholový graf danej relácie vidíme na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje obojsmerné šípky, relácia R je antisymetrická. Pretože vo vrcholovom grafe relácie R nemá zmysel prestupovať, relácia R je tranzitívna. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje žiadnu slučku, relácia R je antireflexívna. (ostré usporiadanie) Pretože každé dva rôzne vrcholy sú spojené šípkou, relácia R je súvislá. (lineárne usporiadanie)

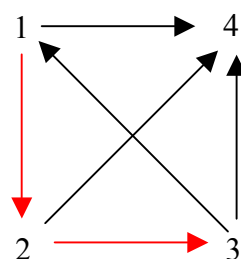


Záver: Relácia R je reláciou **ostrého lineárneho usporiadania** v množine M .

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 3], [4, 4]\}$. Vrcholový graf danej relácie vidíme na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R obsahuje obojsmernú šípku (z 1 do 2), relácia R nie je antisymetrická. Pretože relácia R nie je antisymetrická, nemôže byť reláciou usporiadania (ani ostrého, ani neostrého, ani lineárneho, ani čiastočného). Ďalšie vlastnosti teda ani neurčujeme.

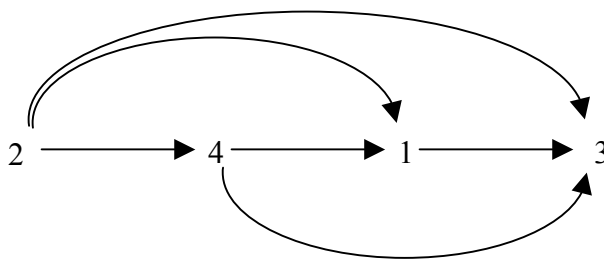


Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a relácia $R = \{[1, 2], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 1], [3, 4]\}$. Vrcholový graf danej relácie vidíme na obrázku. Pretože vrcholový graf relácie R neobsahuje obojsmerné šípky, relácia R je antisymetrická. Vrcholový graf relácie R obsahuje šípku z 1 do 2 a aj šípku z 2 do 3, ale neobsahuje šípku z 1 do 3. Preto relácia R nie je tranzitívna (vo vrcholovom grafe relácie R má zmysel prestupovať, napr. keď cestujeme z 1 do 3). Pretože relácia R nie je tranzitívna, nemôže byť reláciou usporiadania (ani ostrého, ani neostrého, ani lineárneho, ani čiastočného). Ďalšie vlastnosti teda ani neurčujeme.

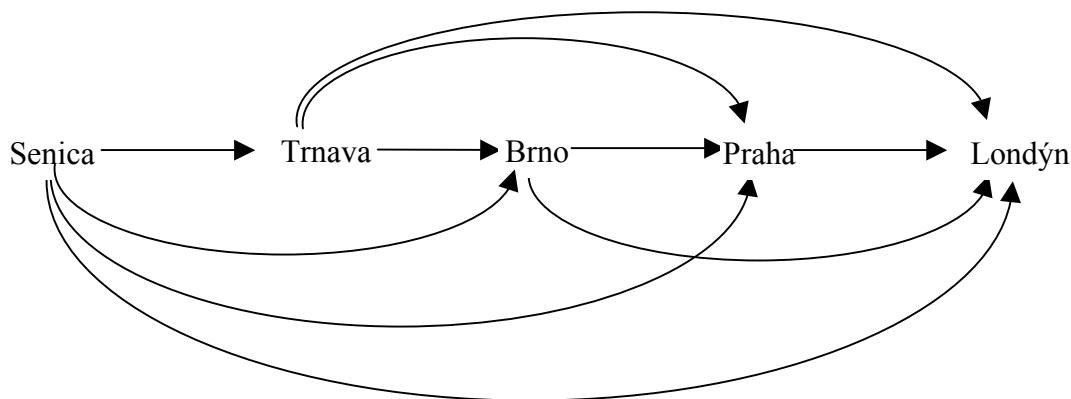


Lineárne usporiadaná množina

Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a relácia ostrého lineárneho usporiadania $R = \{[1, 3], [2, 1], [2, 3], [2, 4], [4, 1], [4, 3]\}$. Vrcholový graf tejto relácie vieme nakresliť tak, aby všetky šípky smerovali zľava doprava. Všimnime si, že prvky 1, 2, 3, 4 možno usporiadať do radu 2 – 4 – 1 – 3, pričom v relácii lineárneho usporiadania R sú všetky tie usporiadané dvojice prvkov, ktorých prvá zložka sa v rade nachádza vľavo od druhej.



Nech množina $M = \{\text{Brno}, \text{Senica}, \text{Londýn}, \text{Trnava}, \text{Praha}\}$ a relácia ostrého lineárneho usporiadania $R = \{[x, y] \in M \times M : x \text{ má menej obyvateľov ako } y\}$. Aj vrcholový graf tejto relácie vieme nakresliť tak, aby všetky šípky smerovali zľava doprava.



Prvky množiny M sme opäť usporiadali do radu Senica – Trnava – Brno – Praha – Londýn, pričom v relácii lineárneho usporiadania R sú všetky tie usporiadané dvojice prvkov, ktorých prvá zložka sa v rade nachádza vľavo od druhej.

Z predchádzajúcich dvoch príkladov vidíme, že:

Prvky množiny M , na ktorej je definovaná relácia ostrého lineárneho usporiadania R , vieme vždy zoradiť do reťazca tak, že ak $[x, y] \in R$, potom x sa nachádza v reťazci naľavo od y .

Zápis takéhoto reťazca z predchádzajúcich príkladov je $2 \prec_R 4 \prec_R 3 \prec_R 1$, resp.

$\text{Senica} \prec_R \text{Trnava} \prec_R \text{Brno} \prec_R \text{Praha} \prec_R \text{Londýn}$.

Teraz uvedieme definíciu lineárne usporiadanej množiny.

Ak na množine M je definovaná relácia lineárneho usporiadania R , tak množinu M usporiadanú touto reláciou označujeme (M, R) a nazývame lineárne usporiadaná množina.

Pod pojmom lineárne usporiadaná množina teda rozumieme dvojicu M, R , kde M je množina objektov a R je relácia lineárneho usporiadania na tejto množine. Príklady lineárne usporiadaných množín sme uviedli v predchádzajúcich dvoch príkladoch.

Ďalej uvedieme definíciu prvého a posledného prvku lineárne usporiadanej množiny.

Nech (M, R) je lineárne usporiadaná množina.

Prvok $a \in M$ nazývame prvým prvkom v množine M vzhľadom na lineárne usporiadanie R , ak platí:

$\forall x \in M : x \neq a \Rightarrow a \prec_R x$ (čítame: pre každý prvok x množiny M platí, že ak x je rôzny od a , potom a predchádza x v usporiadaní R).

Prvok $b \in M$ nazývame posledným prvkom v množine M vzhľadom na lineárne usporiadanie R , ak platí:

$\forall x \in M : x \neq b \Rightarrow x \prec_R b$ (čítame: pre každý prvok x množiny M platí, že ak x je rôzny od b , potom x predchádza b v usporiadaní R).

Uvedomme si, že zápis $a \prec_R x$ znamená, že $[a, x] \in R$, ale $[x, a] \notin R$.

V predchádzajúcich príkladoch sme dostali nasledujúce postupnosti prvkov:

$2 \prec_R 4 \prec_R 3 \prec_R 1 \dots$ To znamená, že prvok 2 je prvým prvkom množiny M

a prvok 1 je posledným prvkom množiny M .

$\text{Senica} \prec_R \text{Trnava} \prec_R \text{Brno} \prec_R \text{Praha} \prec_R \text{Londýn} \dots$ prvok Senica je prvým prvkom množiny M ,

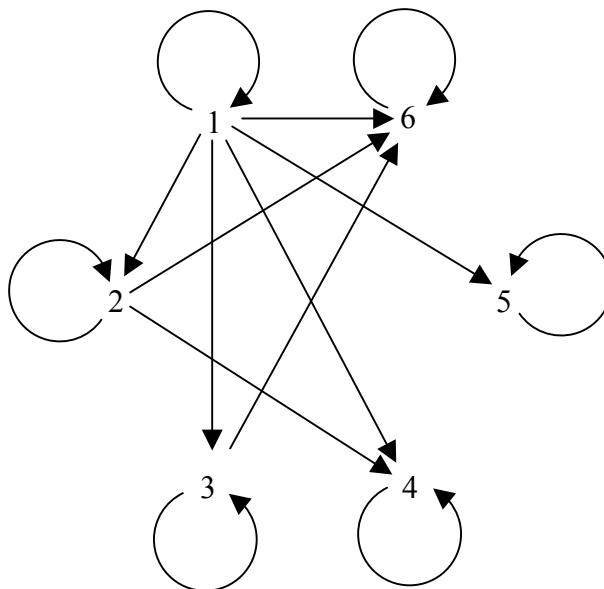
prvok Londýn je posledným prvkom množiny M .

Pojem lineárne usporiadanej množiny a jej prvého a posledného prvku si vysvetlíme na nasledujúcich príkladoch.

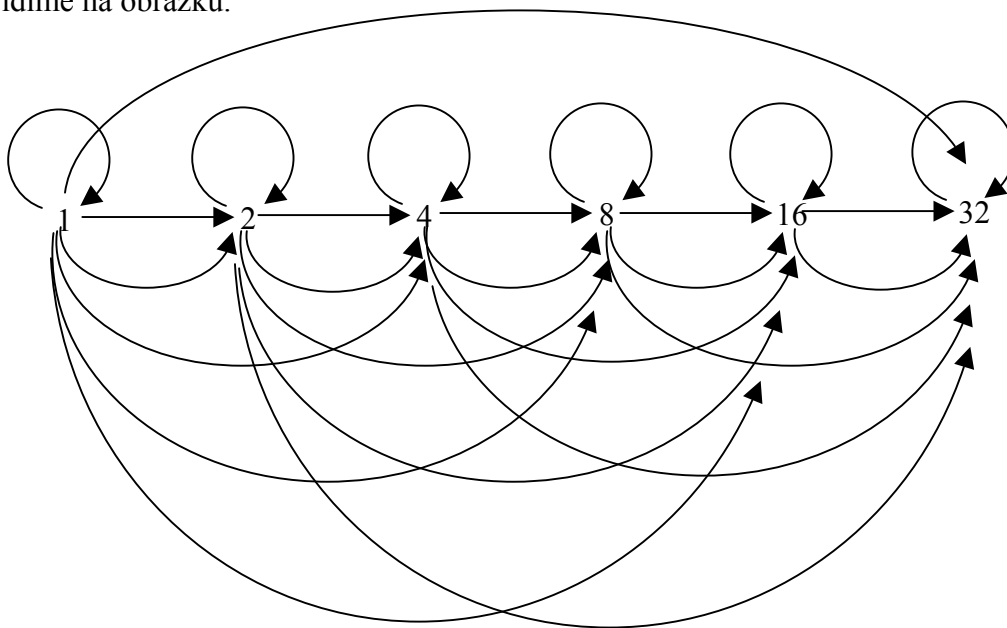
Nech množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : x \mid y\}$.

Vrcholový graf relácie R vidíme na obrázku. Z vrcholového grafu vidíme, že relácia R nie je súvislá (neobsahuje žiadnu šípku medzi prvkami 2 a 3). Relácia R teda nie je reláciou lineárneho usporiadania na množine M a dvojica (M, R) nie je lineárne usporiadanou množinou.



Nech množina $M = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ a relácia $R = \{[x, y] \in M \times M : x \mid y\}$. Vrcholový graf relácie R vidíme na obrázku.



Z vrcholového grafu vidíme, že relácia R je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna a súvislá. Je teda reláciou neostrého lineárneho usporiadania na množine M . Dvojica (M, R) je lineárne usporiadanou množinou. Navyše platí: $1 \underset{R}{\prec} 2 \underset{R}{\prec} 4 \underset{R}{\prec} 8 \underset{R}{\prec} 16 \underset{R}{\prec} 32$. To znamená, že prvok 1 je prvým prvkom množiny M a prvok 32 je posledným prvkom množiny M .

Test č. 10

V nasledujúcom teste je 20 úloh z oblasti relácie usporiadania a lineárne usporiadanej množiny.

Na nich si prakticky precvičíme:

- určovanie, či daná relácia je reláciou ostrého lineárneho usporiadania, neostrého lineárneho usporiadania, ostrého čiastočného usporiadania, neostrého čiastočného usporiadania,
- určovanie prvého a posledného prvku lineárne usporiadanej množiny.

Test č. 10 nájdeme aj v elektronickej verzii v súbore 10.exe.

1. Nech R je binárna relácia v množine M . Označte vlastnosti, ktoré musí mať relácia R , aby bola reláciou ostrého lineárneho usporiadania.

- a) reflexívna
- b) antireflexívna
- c) symetrická
- d) antisymetrická
- e) tranzitívna
- f) súvislá

2. Nech R je binárna relácia v množine M . Označte vlastnosti, ktoré musí mať relácia R , aby bola reláciou neostrého lineárneho usporiadania.

- a) reflexívna
- b) antireflexívna
- c) symetrická
- d) antisymetrická
- e) tranzitívna
- f) súvislá

3. Nech R je binárna relácia v množine M . Označte vlastnosti, ktoré musí mať relácia R , aby bola reláciou ostrého čiastočného usporiadania.

- a) reflexívna
- b) antireflexívna

- c) symetrická
- d) antisymetrická
- e) tranzitívna
- f) súvislá

4. Nech R je binárna relácia v množine M . Označte vlastnosti, ktoré musí mať relácia R , aby bola reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

- a) reflexívna
- b) antireflexívna
- c) symetrická
- d) antisymetrická
- e) tranzitívna
- f) súvislá

5. Daná je relácia R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 2], [3, 2], [3, 3], [4, 2], [4, 3], [4, 4]\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

6. Daná je relácia R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [3, 2], [4, 2], [4, 3]\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

7. Daná je relácia R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 2], [2, 4], [3, 3], [4, 4]\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

8. Daná je relácia R v množine M .

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 4]\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

9. Daná je relácia R v množine prirodzených čísel.

$$R = \{[x, y] \in N \times N : x \leq y\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

10. Daná je relácia R v množine prirodzených čísel.

$$R = \{[x, y] \in N \times N : x < y\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

11. Daná je relácia R v množine prirodzených čísel.

$$R = \{[x, y] \in N \times N : x \text{ delí } y\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

12. Daná je relácia R v množine prirodzených čísel.

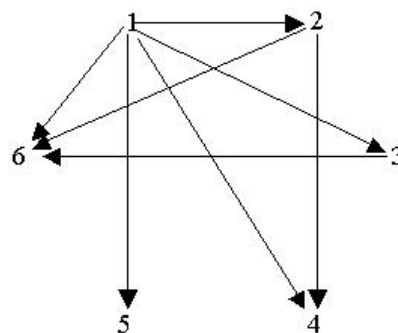
$$R = \{[x, y] \in N \times N : x \neq y \wedge x \text{ delí } y\}$$

Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.

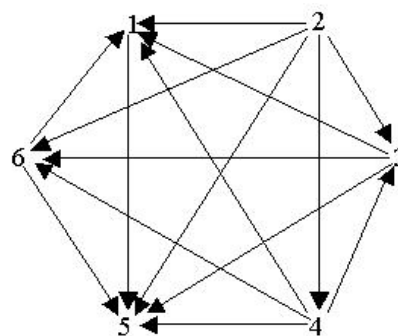
13. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.



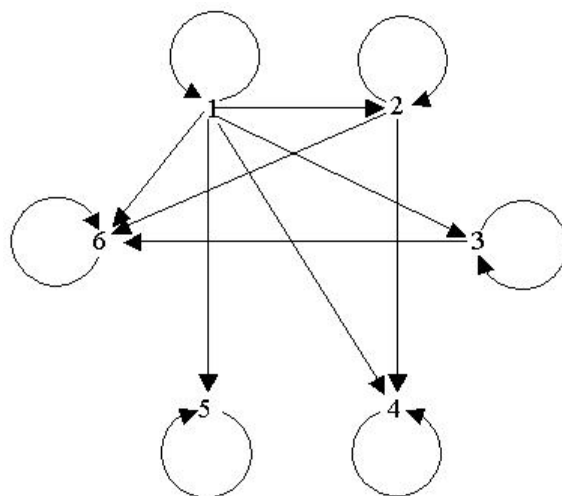
14. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.



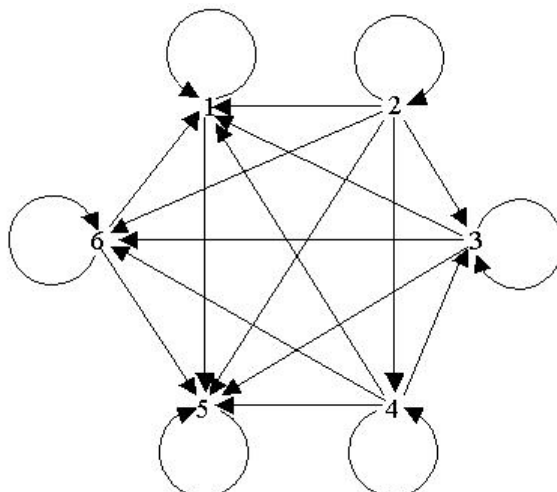
15. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.



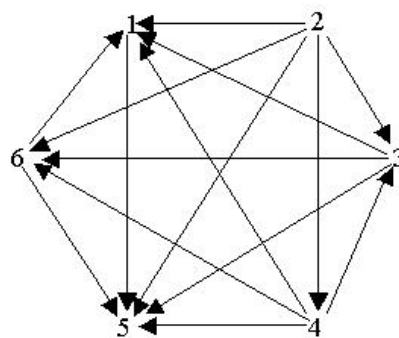
16. Na obrázku je vrcholový graf relácie R v množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vyberte správne tvrdenie.

- a) Relácia R je reláciou ostrého lineárneho usporiadania.
- b) Relácia R je reláciou neostrého lineárneho usporiadania.
- c) Relácia R je reláciou ostrého čiastočného usporiadania.
- d) Relácia R je reláciou neostrého čiastočného usporiadania.



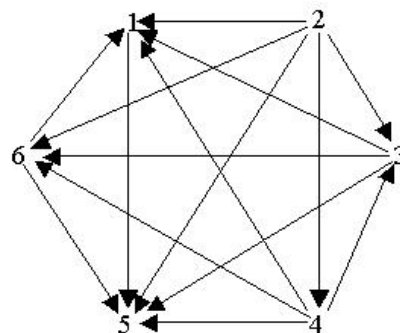
17. Na obrázku je vrcholový graf relácie ostrého lineárneho usporiadania R v množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Prvým prvkom v množine M vzhľadom na ostré lineárne usporiadanie R je

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5
- f) 6



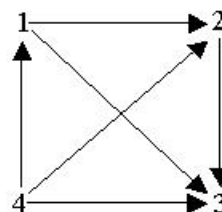
18. Na obrázku je vrcholový graf relácie ostrého lineárneho usporiadania R v množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Posledným prvkom v množine M vzhľadom na ostré lineárne usporiadanie R je

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5
- f) 6



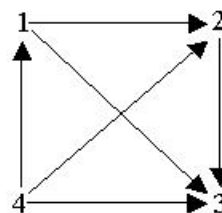
19. Na obrázku je vrcholový graf relácie ostrého lineárneho usporiadania R v množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Prvým prvkom v množine M vzhľadom na ostré lineárne usporiadanie R je

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4



20. Na obrázku je vrcholový graf relácie ostrého lineárneho usporiadania R v množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Posledným prvkom v množine M vzhľadom na ostré lineárne usporiadanie R je

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4



Test č. 10 – správne riešenia

1. bdef	5. b	9. b	13. c	17. b
2. adef	6. a	10. a	14. a	18. e
3. bde	7. d	11. d	15. d	19. d
4. ade	8. c	12. c	16. b	20. c