TRNAVSKÁ UNIVERZITA V TRNAVE
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KOMBINATORIKA A PRÁCA S ÚDAJMI

MILAN POKORNÝ

TRNAVA 2019

Názov publikácie:
Kombinatorika a práca s údajmi

Autor:
PaedDr. Milan Pokorný, PhD.

Recenzenti:
prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.
PaedDr. Jana Fialová, PhD.

Technické spracovanie a typografická korektúra:
PaedDr. Milan Pokorný, PhD.

Vydavateľské údaje:
© 2019, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave

Rozsah:
89 strán
3,51 AH

ISBN 978-80-568-0165-9

Obsah

Slovo na úvod

Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika sú neoddeliteľnou súčasťou matematiky. Svoje miesto majú vo vyučovaní na všetkých stupňoch škôl, vrátane primárneho vzdelávania. Prečo? Odpoveď sme si požičali od Scholtzovej a od Kaputa.

Podľa Scholtzovej, „v prvom rade je to atraktívnosť kombinatoriky. Mnoho problémových situácií môže byť zaujímavých pre žiakov a zároveň sa im poskytuje možnosť skúmania a objavovania. Po druhé: dajú sa v nej nájsť aktivity vhodné pre výborných žiakov, ale aj také, ktoré sú primerané pre žiakov nie veľmi úspešných v matematike."

Kaput uvádza nasledujúce dôvody pre zaradenie elementárnej kombinatoriky do výučby na školách:

1. Nakoľko pri riešení úloh z elementárnej kombinatoriky nepotrebujeme vyššiu matematiku, obsahuje vhodné problémy pre rôzne ročníky. So žiakmi možno diskutovať aj o náročnejších problémoch, čím žiaci objavia potrebu ďalej sa vzdelávať v matematike.

2. Kombinatorické úlohy možno použiť, aby sme žiakov naučili vymenovávať, tvoriť hypotézy, zovšeobecňovať a systematicky myslieť. Môžu pomôcť pri vytváraní rôznych pojmov, ako ekvivalencia, usporiadanie, funkcia, atď.

3. Žiakom možno ukázať aplikácie kombinatoriky v rôznych oblastiach.

Inovovaný štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie určuje aj vzdelávací štandard učebného predmetu matematika. Podľa tohto dokumentu treba „vytvárať možnosti na tie kognitívne činnosti žiakov, ktoré operujú s pojmami, akými sú hľadanie, pátranie, skúmanie, objavovanie, lebo v nich spočíva základný predpoklad poznávania a porozumenia." Kombinatorika je jednou z tém vo vyučovaní matematiky, ktorá je na to veľmi vhodná.

Podľa inovovaného štátneho vzdelávacieho programu má žiak prvého ročníka základnej školy „identifikovať jednoduché pravidlo vytvorenia danej postupnosti; doplniť do postupnosti niekoľko chýbajúcich znakov, symbolov, čísel, obrázkov; nájsť niekoľko rôznych spôsobov usporiadania predmetov, znakov, symbolov." Žiak druhého ročníka má „vytvoriť systém pri hľadaní a zapisovaní spôsobov usporiadania dvoch (troch) predmetov, znakov, symbolov; nájsť všetky rôzne spôsoby usporiadania dvoch (troch) predmetov, znakov, symbolov; určiť počet možností usporiadania dvoch (troch) predmetov, znakov, symbolov; zozbierať, zoskupiť, zaznamenať údaje rôznymi spôsobmi; vytvoriť jednoduchú tabuľku a orientovať sa v nej; doplniť chýbajúce čísla (znaky) podľa logického usporiadania (sudoku, magické štvorce); nájsť niekoľko spôsobov zaplatenia danej sumy". Žiak tretieho ročníka má „rozlíšiť istú udalosť, možnú udalosť, nemožnú udalosť; vytvoriť systém pri hľadaní a zapisovaní rôznych dvojciferných (trojciferných, štvorciferných) čísel zložených z daných číslic (číslice sa môžu aj opakovať); vytvoriť rôzne dvojciferné (trojciferné, štvorciferné) čísla z množiny číslic (číslice sa môžu aj opakovať); vyriešiť slovné úlohy s kombinatorickou motiváciou; zozbierať, zoskupiť, zaznamenať údaje rôznymi spôsobmi; z daných údajov vytvoriť prehľadnú tabuľku; doplniť do tabuľky chýbajúce údaje, opísať časti tabuľky, orientovať sa v tabuľke; využívať tabuľku ako nástroj na riešenie úloh; orientovať sa v stĺpcovom grafe; dokresliť chýbajúce údaje do stĺpcového grafu; vyriešiť aplikačné úlohy súvisiace s orientáciou v tabuľke alebo stĺpcovom grafe". Podobne formulované ciele sú aj pre žiaka štvrtého ročníka.

Aby učiteľ na prvom stupni základnej školy zvládol naplniť takto formulované vzdelávacie ciele, je nutné, aby nadobudol poznatky z kombinatoriky, základov pravdepodobnosti a opisnej štatistiky. Samozrejme, nie je postačujúce, aby ovládal iba to, čo predpisuje štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie. Je potrebné, aby mal nadhľad, ktorý mu umožní zvoliť vhodné metódy tak, aby efektívne naplnil vyššie uvedené vzdelávacie ciele.

Tento učebný text je určený predovšetkým poslucháčom bakalárskeho štúdia predškolskej a elementárnej pedagogiky. Väčšina z nich pokračuje magisterským štúdiom v odbore učiteľstvo pre primárne vzdelávanie a následne vo svojej pedagogickej praxi vyučuje aj matematiku. Treba si uvedomiť, že ich štúdium má pomerne široký záber. Nemožno teda predpokladať, že všetci študenti prichádzajú so vstupnými vedomosťami na úrovni absolventa maturitnej skúšky z matematiky. Tomu je prispôsobený aj výber učebnej látky v tomto učebnom texte a spôsob jej podania.

Predkladaný učebný text je primárne určený k predmetu Kombinatorika a práca s údajmi na Pedagogickej fakulte Trnavskej univerzity. Cieľom predmetu je „naučiť študenta pri riešení úloh z kombinatoriky a elementárnej pravdepodobnosti používať základné algoritmy a spôsoby riešenia kombinatorických úloh. Študent nadobudne potrebné vedomosti z opisnej štatistiky potrebné pre efektívnu prácu s údajmi vo forme tabuliek a grafov."

Je všeobecne známe, že matematiku sa nemožno učiť čítaním si textov stále dookola. Podľa Hejného, Novotnej a Stehlíkovej by pre riešenie problému mala byť charakteristická aktivita a intenzita práce žiakov. Takto nadobudnuté poznatky sú hlbšie a trvalejšie a žiaci si ľahko vybavujú postupy pri riešení podobných úloh. Zvyšuje sa tak úspešnosť a žiaci zažívajú príjemné pocity, ktoré majú vplyv na ich motiváciu. Ako uvádza Beránek, poznatky, na ktoré prídu študenti sami vlastnou aktívnou činnosťou, majú trvalý charakter.

Zároveň pri objavení vlastnej hypotézy a jej následnom dôkaze pociťujú radosť z úspechu a sú motivovaní k hľadaniu a riešeniu podobných problémov.

Našou snahou teda je, aby študenti pri práci s predkladaným učebným textom samostatne pracovali, tvorivo mysleli, samostatne hľadali riešenia úloh. Preto sme ako súčasť učebných textov použili aj viac ako 70 interaktívnych úloh, na ktorých si študenti môžu precvičiť získané vedomosti a aktívne riešiť úlohy. Veríme, že zaradenie týchto aplikácií zefektívni vzdelávací proces a prispeje k úspešnému dosiahnutiu vzdelávacích cieľov predmetu Kombinatorika a práca s údajmi.

Výučbové ciele predloženého učebného textu sú:

1. Študent vie určiť riešenie kombinatorickej úlohy systematickým vypisovaním možností.
2. Študent vie pri riešení kombinatorických úloh použiť pravidlo súčtu.
3. Študent vie pri riešení kombinatorických úloh použiť pravidlo súčinu.
4. Študent vie rozpoznať rôzne typy kombinatorických úloh (kombinácie bez opakovania a s opakovaním, variácie bez opakovania a s opakovaním, permutácie) a dokáže určiť vhodný postup na výpočet počtu možností.
5. Študent vie rozpoznať istý a nemožný jav.
6. Študent ovláda pojem pravdepodobnosti na úrovni absolventa strednej školy.
7. Študent vie porovnať pravdepodobnosti dvoch javov, či už experimentálne alebo pomocou logického uvažovania.
8. Študent ovláda pojem početnosť a relatívna početnosť.
9. Študent vie prezentovať údaje formou tabuľky početnosti.
10. Študent vie prezentovať údaje pomocou stĺpcového a kruhového diagramu.
11. Študent vie čítať údaje z tabuľky.
12. Študent vie čítať údaje zo stĺpcového a kruhového diagramu.
13. Študent ovláda stredné hodnoty a miery variability a vie ich vhodne použiť (najmä aritmetický priemer).

Uvedené ciele treba zvládnuť na úrovni špecifického transferu.

Predložený učebný text vznikol aj vďaka podpore grantu KEGA 003UMB-4/2017.

V každom texte sa objavia nejaké chyby. Mnohé sme už odstránili, ale určite nie všetky. Prosíme preto čitateľov, aby svoje pripomienky a názory poslali na adresu mpokorny@truni.sk.

Na záver by sme chceli poďakovať recenzentom, prof. RNDr. Pavlovi Hanzelovi, CSc. a PaedDr. Jane Fialovej, PhD., ktorí starostlivo prečítali celý učebný text a svojimi kritickými pripomienkami nepochybne prispeli k jeho skvalitneniu.

Autor

1 Riešime úlohy systematickým vypisovaním možností

Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa, ako môže riešiť kombinatorické úlohy systematickým vypisovaním všetkých možností. Pri takomto riešení úloh má veľký význam práve voľba správneho systému, ktorý riešiteľ používa pri hľadaní všetkých možností, ktoré vyhovujú zadaniu úlohy. Je potrebné zvoliť si taký systém, ktorý minimalizuje riziko, že niektoré správne možnosti zabudneme, prípadne že niektoré uvedieme duplicitne.

Pri niektorých úlohách ukážeme viacero vhodných systémov na riešenie úlohy, aby si čitateľ mohol osvojiť ten, ktorý mu najviac vyhovuje.

Úloha 1.1: Nájdite všetky spôsoby, ako možno pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí zaplatiť sumu 10 Eur.

Riešenie:

Systém riešenia založíme na tom, že si budeme všímať počet použitých dvojeurových mincí.
Pri platení sumy 10 Eur možno použiť 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5 dvojeurových mincí.
Ak použijeme 5 dvojeurových mincí, jednoeurovú už žiadnu nepoužijeme.
Ak použijeme 4 dvojeurové mince, potrebujeme ešte 2 jednoeurové.
Ak použijeme 3 dvojeurové mince, potrebujeme ešte 4 jednoeurové.
Ak použijeme 2 dvojeurové mince, potrebujeme ešte 6 jednoeurových.
Ak použijeme 1 dvojeurovú mincu, potrebujeme ešte 8 jednoeurových.
Ak nepoužijeme žiadnu dvojeurovú mincu, potrebujeme ešte 10 jednoeurových.

Existuje šesť spôsobov, ako možno pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí zaplatiť sumu 10 Eur.

Úloha 1.2: Piati kamaráti, Adam, Boris, Cyril, Dušan a Emil, hrajú turnaj v stolnom tenise. Každý s každým má odohrať jeden zápas. Koľko zápasov odohrajú? Vypíšte ich.

Riešenie 1:

Najskôr si vypíšeme všetky Adamove zápasy:

Adam – Boris

Adam – Cyril

Adam – Dušan

Adam – Emil

Teraz si vypíšeme všetky Borisove zápasy (Adama už neuvažujeme):

Boris – Cyril

Boris – Dušan

Boris – Emil

Teraz si vypíšeme všetky Cyrilove zápasy (Adama ani Borisa už neuvažujeme):

Cyril – Dušan

Cyril – Emil

Napokon si vypíšeme všetky Dušanove zápasy (Adama, Borisa ani Cyrila už neuvažujeme):

Dušan – Emil

Spolu odohrajú 10 zápasov.

Riešenie 2:

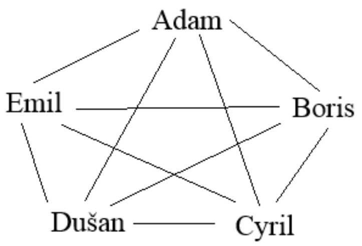
Najskôr si urobíme obrázok:

Adam

Emil Boris

Dušan Cyril

V obrázku postupne čiarami spájame dvojice chlapcov, až kým nepospájame všetkých. Pri spojení dvojice si ju vždy zapíšeme. Dostaneme obrázok:



Adam – Boris	Adam – Cyril
Adam – Dušan	Adam – Emil
Boris – Cyril	Boris – Dušan
Boris – Emil	Cyril – Dušan
Cyril – Emil	Dušan - Emil

V obrázku je spolu 10 čiar. Preto chlapci **spolu odohrajú 10 zápasov.**

Riešenie 3:

Najskôr si urobíme tabuľku:

	Adam	Boris	Cyril	Dušan	Emil
Adam					
Boris					
Cyril					
Dušan					
Emil					

Prázdne bunky v tabuľke predstavujú zápasy.

Zápasy teda sú:

Adam – Boris	Adam – Cyril	Adam – Dušan	Adam – Emil
	Boris – Cyril	Boris – Dušan	Boris – Emil
		Cyril – Dušan	Cyril – Emil
			Dušan - Emil

Prázdnych buniek je 10. Preto chlapci **spolu odohrajú 10 zápasov.**

Úloha 1.3: Piati kamaráti, Adam, Boris, Cyril, Dušan a Emil, hrajú turnaj v šachu. Každý s každým má odohrať jeden zápas raz bielymi a raz čiernymi figúrami. Koľko zápasov odohrajú? Vypíšte ich. (V šachu zápis Adam – Boris znamená, že Adam hrá s bielymi figúrami a Boris s čiernymi.)

Riešenie 1:

Najskôr si vypíšeme všetky Adamove zápasy bielymi figúrami:

Adam – Boris   Adam – Cyril   Adam – Dušan   Adam – Emil

Teraz si vypíšeme všetky Borisove zápasy bielymi figúrami:

Boris – Adam   Boris – Cyril   Boris – Dušan   Boris – Emil

Teraz si vypíšeme všetky Cyrilove zápasy bielymi figúrami:

Cyril – Adam   Cyril – Boris   Cyril – Dušan   Cyril – Emil

Teraz si vypíšeme všetky Dušanove zápasy bielymi figúrami:

Dušan – Adam   Dušan – Boris   Dušan – Cyril   Dušan – Emil

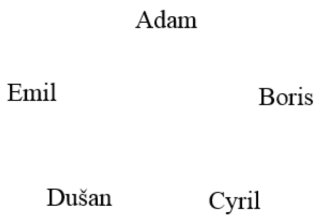
Nakoniec si vypíšeme všetky Emilove zápasy bielymi figúrami:

Emil – Adam   Emil – Boris   Emil – Cyril   Emil – Dušan

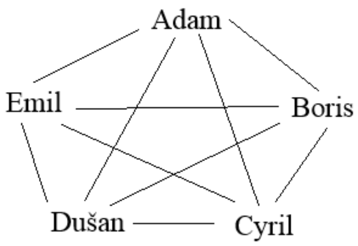
Spolu odohrajú 20 zápasov.

Riešenie 2:

Najskôr si urobíme obrázok:



V obrázku postupne čiarami spájame dvojice chlapcov, až kým nepospájame všetkých. Pri spojení dvojice si vždy zapíšeme oba zápasy tejto dvojice. Dostaneme obrázok:



Adam – Boris, Boris - Adam
Adam – Dušan, Dušan – Adam
Boris – Cyril, Cyril – Boris
Boris – Emil, Emil – Boris
Cyril – Emil, Emil – Cyril

Adam – Cyril, Cyril – Adam
Adam – Emil, Emil – Adam
Boris – Dušan, Dušan – Boris
Cyril – Dušan, Dušan – Cyril
Dušan – Emil, Emil – Dušan

V obrázku je spolu 10 čiar. Každá predstavuje dva zápasy. Preto chlapci **spolu odohrajú 20 zápasov.**

Riešenie 3:

Najskôr si urobíme tabuľku:

	Adam	Boris	Cyril	Dušan	Emil
Adam					
Boris					
Cyril					
Dušan					
Emil					

Prázdne bunky v tabuľke predstavujú zápasy.

Zápasy teda sú:

Adam – Boris	Adam – Cyril	Adam – Dušan	Adam – Emil
Boris – Adam	Boris – Cyril	Boris – Dušan	Boris – Emil
Cyril – Adam	Cyril – Boris	Cyril – Dušan	Cyril – Emil
Dušan – Adam	Dušan – Boris	Dušan – Cyril	Dušan – Emil
Emil – Adam	Emil – Boris	Emil – Cyril	Emil – Dušan

Prázdnych buniek je 20. Preto chlapci **spolu odohrajú 20 zápasov.**

Úloha 1.4: Miška našla v komore štyri kusy ovocia: banán, pomaranč, jablko a kivi. Na desiatu si chce vziať dva kusy ovocia. Vypíšte všetky spôsoby, ako si Miška môže vybrať dva kusy ovocia. Koľko má rôznych možností?

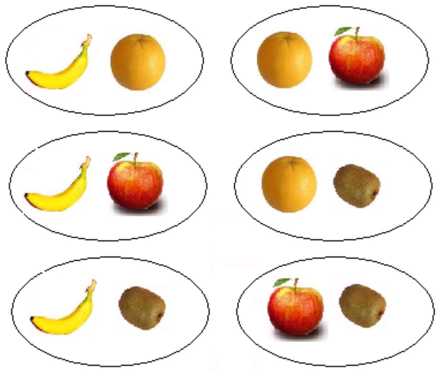
Riešenie:

Najprv si uvedomíme, že je úplne jedno, či si vezme banán + pomaranč alebo pomaranč + banán.

Máme teda rovnaké možnosti riešenia ako v úlohe 1.2.

Možnosti sú:

banán + pomaranč	banán + jablko	banán + kivi
pomaranč + jablko	pomaranč + kivi	
jablko + kivi		



Miška má šesť rôznych možností, ako si môže zostaviť desiatu.

Úloha 1.5: Nájdite všetky spôsoby, ako môže na dvoch kockách (modrej a žltej) padnúť súčet osem. Koľko ich je?

Riešenie:

Ak na modrej kocke padne šestka, potom na žltej musí padnúť dvojka.

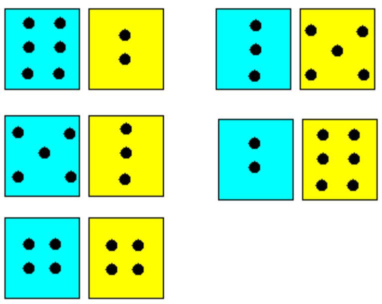
Ak na modrej kocke padne päťka, potom na žltej musí padnúť trojka.

Ak na modrej kocke padne štvorka, potom na žltej musí padnúť štvorka.

Ak na modrej kocke padne trojka, potom na žltej musí padnúť päťka.

Ak na modrej kocke padne dvojka, potom na žltej musí padnúť šestka.

Ak na modrej kocke padne jednotka, potom už súčet osem padnúť nemôže.



Existuje päť spôsobov, ako môže na modrej a žltej kocke padnúť súčet osem.

Úloha 1.6: Janko našiel na povale tri drevené číslice: jednotku, dvojku a trojku. Vypíšte všetky trojciferné čísla, ktoré z nich vie zostaviť. Koľko ich je?

Riešenie 1:

Najskôr si zapíšeme čísla začínajúce jednotkou.

123, 132

Potom si zapíšeme čísla začínajúce dvojkou.

213, 231

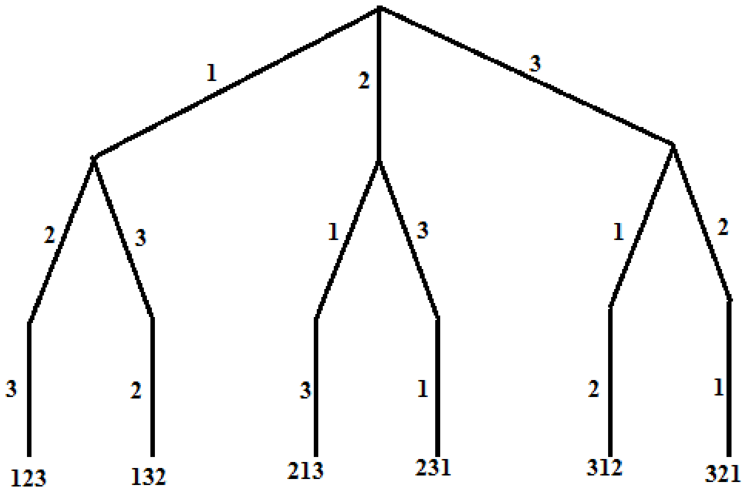
Napokon si zapíšeme čísla začínajúce trojkou.

312, 321

Janko môže zostaviť šesť rôznych trojciferných čísel.

Riešenie 2:

Situáciu si zobrazíme stromovým diagramom.



Na „hornom poschodí“ máme uvedené všetky možnosti pre číslicu na mieste stoviek. Na „prostrednom poschodí“ máme uvedené všetky zvyšné možnosti pre číslicu na mieste desiatok. Napokon, na „dolnom poschodí“ máme uvedenú zvyšnú možnosť pre číslicu na mieste jednotiek. Čísla vytvorené takýmto spôsobom sú vypísané v dolnej časti obrázka.

Janko môže zostaviť šesť rôznych trojciferných čísel.

Úloha 1.7: Janko našiel na povale tri krabice s drevenými číslicami. V prvej krabici boli jednotky, v druhej dvojky a v tretej trojky. Vypíšte všetky trojciferné čísla, ktoré z nich vie zostaviť. Koľko ich je?

Riešenie 1:

Najskôr si zapíšeme čísla začínajúce jednotkou.

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133

Potom si zapíšeme čísla začínajúce dvojkou.

211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233

Napokon si zapíšeme čísla začínajúce trojkou.

311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

Janko môže zostaviť 27 rôznych trojciferných čísel.

Riešenie 2:

Zostavíme si tabuľku, kde v každom riadku bude jedno číslo.

<table>
<tr><td>1. cifra</td><td>2. cifra</td><td>3. cifra</td><td rowspan="28">V treťom stĺpci striedame číslice 1, 2, 3.

V druhom stĺpci striedame číslice 1, 2, 3, ale po trojiciach.

V prvom stĺpci striedame číslice 1, 2, 3, ale po deväticiach.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

Janko môže zostaviť 27 rôznych trojciferných čísel.

Úloha 1.8: Janko našiel na povale krabicu s dostatočným počtom drevených jednotiek a pätiek. Vypíšte všetky trojciferné čísla, ktoré z nich vie zostaviť. Koľko ich je?

Riešenie 1:

Najskôr si zapíšeme čísla začínajúce jednotkou.

111, 115, 151, 155

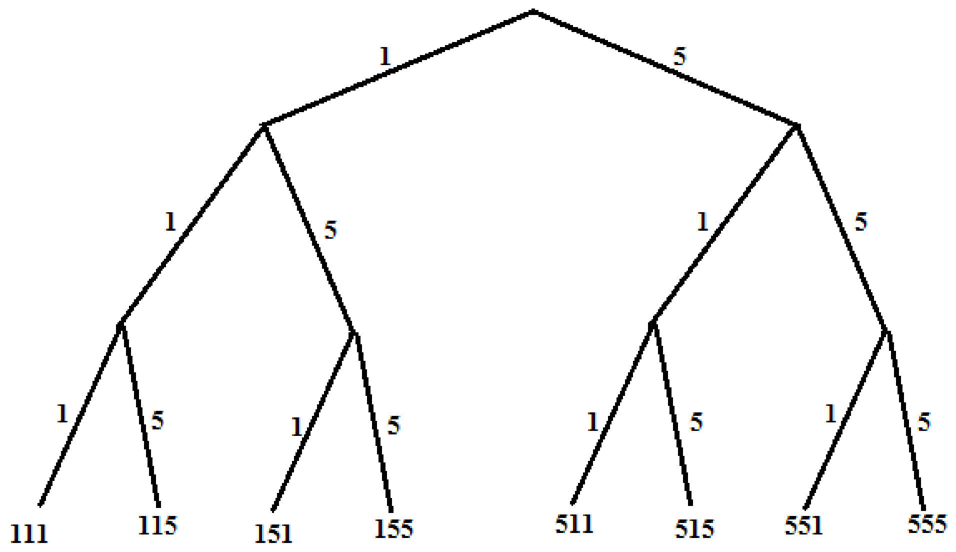
Potom si zapíšeme čísla začínajúce päťkou.

511, 515, 551, 555

Janko môže zostaviť osem rôznych trojciferných čísel.

Riešenie 2:

Situáciu si zobrazíme stromovým diagramom.



Na každom „poschodí“ máme uvedené obe možnosti pre číslicu na mieste stoviek, desiatok a jednotiek. Čísla vytvorené takýmto spôsobom sú vypísané v dolnej časti obrázka.

Janko môže zostaviť osem rôznych trojciferných čísel.

Napokon si ukážeme, že pri riešení niektorých úloh nám môže šikovná myšlienka pomôcť viac ako systém.

Úloha 1.9: V hlavnej súťaži mužov v tenise vo Wimbledone hrá 128 mužov. Najskôr sa rozlosujú do 64 dvojíc, pričom do ďalšieho kola postupujú vždy iba víťazi. Takto turnaj pokračuje, až kým dvaja najúspešnejší neodohrajú finálový zápas. Koľko zápasov odohrajú?

Riešenie 1:

V prvom kole sa 128 tenistov rozdelí do 64 dvojíc, ktoré odohrajú vzájomné zápasy. Víťazi postúpia do druhého kola, porazení vypadnú. V prvom kole teda odohrajú 64 zápasov.

V druhom kole sa 64 tenistov rozdelí do 32 dvojíc, ktoré odohrajú vzájomné zápasy. Víťazi postúpia do tretieho kola, porazení vypadnú. V druhom kole teda odohrajú 32 zápasov.
V treťom kole sa 32 tenistov rozdelí do 16 dvojíc, ktoré odohrajú vzájomné zápasy. Víťazi postúpia do osemfinále, porazení vypadnú. V treťom kole teda odohrajú 16 zápasov.
V osemfinále sa 16 tenistov rozdelí do 8 dvojíc, ktoré odohrajú vzájomné zápasy. Víťazi postúpia do štvrťfinále, porazení vypadnú. V osemfinále teda odohrajú 8 zápasov.
Vo štvrťfinále sa 8 tenistov rozdelí do 4 dvojíc, ktoré odohrajú vzájomné zápasy. Víťazi postúpia do semifinále, porazení vypadnú. Vo štvrťfinále teda odohrajú 4 zápasy.
Vo semifinále sa 4 tenisti rozdelia do 2 dvojíc, ktoré odohrajú vzájomné zápasy. Víťazi postúpia do finále, porazení vypadnú. V semifinále teda odohrajú 2 zápasy.
Nakoniec dvaja najúspešnejší tenisti odohrajú finálový zápas.
Spolu teda odohrajú 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 +1 = 127 zápasov.

Riešenie 2:
V každom zápase vypadne zo súťaže jeden tenista. V súťaži je 128 tenistov a nakoniec zostane jeden víťaz, teda 127 ich musí vypadnúť. **Preto v súťaži odohrajú 127 zápasov.**

2 Riešime úlohy pravidlom súčinu

Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa, ako môže využiť pravidlo súčinu na určenie počtu možností v kombinatorickej úlohe. Čitateľ sa taktiež naučí rozpoznať úlohy, v ktorých je efektívne použiť pravidlo súčinu.

Pri niektorých úlohách si naviac tieto možnosti aj vypíšeme.

Vysvetlenie 2.1

Pravidlo súčinu nám vraví, že ak máme dve množiny objektov *A* a *B*, pričom v prvej množine je *a* prvkov a v druhej je *b* prvkov, potom počet všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvá zložka je z množiny *A* a druhá z množiny *B*, je *a.b*.

Ilustráciu tohto pravidla vidíme na obrázku. Množina *A* má štyri prvky a množina *B* má tri prvky. Preto počet všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvá zložka je z množiny *A* a druhá z množiny *B*, je 4.3=12.

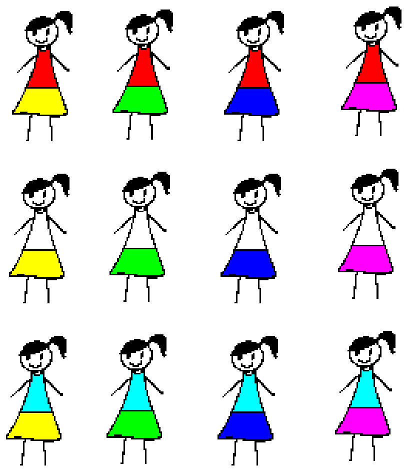
A = {♣,♦,♥,♠}   *B* = {✉,☎,🕮}

	✉	☎	🕮
♣	[♣,✉]	[♣,☎]	[♣,🕮]
♦	[♦,✉]	[♦,☎]	[♦,🕮]
♥	[♥,✉]	[♥,☎]	[♥,🕮]
♠	[♠,✉]	[♠,☎]	[♠,🕮]

Úloha 2.1: Janka má pre bábiku tri tričká (červené, modré a biele) a štyri sukničky (žltú, zelenú, modrú a fialovú). Koľkými rôznymi spôsobmi môže bábiku obliecť?

Riešenie:

Pretože Janka oblieka bábike vždy jedno tričko a jednu sukničku, tvoríme usporiadané dvojice [tričko,suknička]. Pretože tričká máme tri a sukničky štyri, je podľa pravidla súčinu celkový počet takýchto usporiadaných dvojíc 3.4, teda 12.



Janka môže obliecť bábiku 12 rôznymi spôsobmi. Vidíme ich na obrázku.

Úloha 2.2: Trieda 7.A, v ktorej je 12 chlapcov a 10 dievčat, vyhrala za zber papiera dva lístky do kina. Rozhodli sa, že vyžrebujú spomedzi seba jedného chlapca a jedno dievča, ktorí spolu pôjdu do kina. Koľkými spôsobmi môže dopadnúť žrebovanie?

Riešenie:

Pri žrebovaní vyberieme jedného chlapca a jedno dievča. Tvoríme teda usporiadané dvojice [chlapec, dievča]. Pretože chlapcov je 12 a dievčat 10, je podľa pravidla súčinu celkový počet takýchto usporiadaných dvojíc 12.10, teda 120.

Žrebovanie môže dopadnúť 120 rôznymi spôsobmi.

Presvedčíme sa, že výsledok je správny. Chlapcov si označíme A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L. Dievčatá si označíme M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z. Možné vyžrebované dvojice sú:

A+M	A+N	A+O	A+P	A+R	A+S	A+T	A+U	A+V	A+Z
B+M	B+N	B+O	B+P	B+R	B+S	B+T	B+U	B+V	B+Z
C+M	C+N	C+O	C+P	C+R	C+S	C+T	C+U	C+V	C+Z
D+M	D+N	D+O	D+P	D+R	D+S	D+T	D+U	D+V	D+Z
E+M	E+N	E+O	E+P	E+R	E+S	E+T	E+U	E+V	E+Z
F+M	F+N	F+O	F+P	F+R	F+S	F+T	F+U	F+V	F+Z
G+M	G+N	G+O	G+P	G+R	G+S	G+T	G+U	G+V	G+Z
H+M	H+N	H+O	H+P	H+R	H+S	H+T	H+U	H+V	H+Z
I+M	I+N	I+O	I+P	I+R	I+S	I+T	I+U	I+V	I+Z
J+M	J+N	J+O	J+P	J+R	J+S	J+T	J+U	J+V	J+Z
K+M	K+N	K+O	K+P	K+R	K+S	K+T	K+U	K+V	K+Z
L+M	L+N	L+O	L+P	L+R	L+S	L+T	L+U	L+V	L+Z

Keďže sú umiestnené v tabuľke s 12 riadkami a 10 stĺpcami, je ich skutočne 120.

Vidíme, že v tomto prípade je metóda vypísania všetkých možností veľmi prácna, nakoľko ich je pomerne veľa. Teda použitie pravidla súčinu je v tomto prípade veľmi efektívne.

Úloha 2.3: Janko našiel na povale krabicu s drevenými číslicami 1, 2, 3, 4 a 5. Z každej číslice je tam dostatočne veľa kusov. Koľko rôznych dvojciferných čísel môže z týchto číslic zostaviť?

Riešenie:

Janko potrebuje zostaviť dvojciferné číslo. Potrebuje vybrať nejakú číslicu na jeho prvé miesto a nejakú na jeho druhé miesto. Pretože má 5 možností, ktorú číslicu dá na prvé miesto a taktiež 5 možností, ktorú číslicu dá na druhé miesto, je podľa pravidla súčinu celkový počet takto vytvorených čísel 5.5, teda 25.

Janko môže zostaviť 25 rôznych dvojciferných čísel.

Schematicky si to budeme zapisovať nasledovne:

1. číslica		2. číslica		
$\boxed{\text{5 možností}}$	$\cdot$	$\boxed{\text{5 možností}}$	$=$	25 možností
1,2,3,4,5		1,2,3,4,5		

Vypísaním čísel sa presvedčíme, že náš výpočet je správny.

Vytvorené čísla sú:

11, 12, 13, 14, 15

21, 22, 23, 24, 25

31, 32, 33, 34, 35

41, 42, 43, 44, 45

51, 52, 53, 54, 55

Vysvetlenie 2:

Pravidlo súčinu si môžme zovšeobecniť aj na vytváranie usporiadaných trojíc, štvoríc, …

Pravidlo súčinu nám vraví, že ak máme tri množiny objektov *A*, *B*, *C*, pričom v prvej množine je *a* prvkov, v druhej je *b* prvkov a v tretej je *c* prvkov, potom počet všetkých usporiadaných trojíc, ktorých prvá zložka je z množiny *A*, druhá z množiny *B* a tretia z množiny *C* je *a.b.c*.

Podobne, pravidlo súčinu nám vraví, že ak máme štyri množiny objektov *A*, *B*, *C*, *D*, pričom v prvej množine je *a* prvkov, v druhej je *b* prvkov, v tretej je *c* prvkov a v štvrtej je *d* prvkov, potom počet všetkých usporiadaných štvoríc, ktorých prvá zložka je z množiny *A*, druhá z množiny *B*, tretia z množiny *C* a štvrtá z množiny *D* je *a.b.c.d*.

Úloha 2.4: Janka má pre bábiku šesť tričiek, štyri sukničky a päť topánočiek. Koľkými rôznymi spôsobmi môže bábiku obliecť?

Riešenie:

Pretože Janka oblieka bábike vždy jedno tričko, jednu sukničku a obúva jedny topánočky, tvoríme usporiadané trojice [tričko,suknička,topánočky]. Pretože tričiek máme šesť, sukničky štyri a topánočiek päť, je podľa pravidla súčinu celkový počet takýchto usporiadaných trojíc 6.4.5, teda 120.

Janka môže obliecť bábiku 120 rôznymi spôsobmi.

V tomto prípade je metóda vypísania všetkých možností veľmi prácna, nakoľko ich je pomerne veľa. Preto v tejto a v nasledujúcich úlohách preferujeme použitie pravidla súčinu.

Úloha 2.5: Koľko existuje rôznych párnych trojciferných čísel?

Riešenie:

Každé trojciferné číslo je vlastne usporiadaná trojica číslic. Pri riešení úlohy si teda treba uvedomiť, koľko mám možností pre výber prvej číslice, koľko pre výber druhej číslice a koľko pre výber tretej číslice.

Prvú číslicu vyberám z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teda mám **9 možností**.

Druhú číslicu vyberám z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teda mám **10 možností**.

Tretiu číslicu vyberám z číslic 0, 2, 4, 6, 8 (lebo číslo musí byť párne), teda mám **5 možností**.

Podľa pravidla súčinu **celkový počet takýchto trojciferných čísel je** 9.10.5, teda **450**.

Schematický zápis:

Úloha 2.6: Koľko existuje štvorciferných čísel, ktorých zápis neobsahuje číslicu 3?

Riešenie:

Každé štvorciferné číslo je vlastne usporiadaná štvorica číslic. Pri riešení úlohy si teda treba uvedomiť, koľko mám možností pre výber prvej číslice, koľko pre výber druhej číslice, koľko pre výber tretej číslice a koľko pre výber štvrtej číslice.

Prvú číslicu vyberám z číslic 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teda mám **8 možností**.

Druhú číslicu vyberám z číslic 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teda mám **9 možností**.

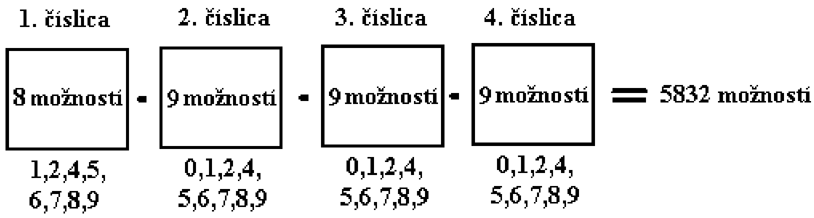
Tretiu číslicu vyberám z číslic 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teda mám **9 možností**.

Štvrtú číslicu vyberám z číslic 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teda mám **9 možností**.

Podľa pravidla súčinu **celkový počet takýchto štvorciferných čísel je** 8.9.9.9, teda **5832**.

V tomto prípade je metóda vypísania všetkých možností prakticky nepoužiteľná. Teda použitie pravidla súčinu je pri riešení tejto úlohy najvhodnejšou metódou.

Schematický zápis:



Úloha 2.7: Na kufríku uja Karola sú tri kolieska, ktorými sa nastavuje kód. Na každom koliesku je číslica od 0 po 9. Ujo Karol však zabudol kód. Jeho syn Janko postupne skúšal rôzne možnosti. Napokon sa mu ho podarilo otvoriť. Povedal, že mal šťastie, lebo vyskúšal iba štvrtinu všetkých možností. Koľko možností musel Janko vyskúšať?

Riešenie:

Pri nastavení prvého kolieska máme 10 možností, a to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pri nastavení druhého kolieska máme 10 možností, a to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pri nastavení tretieho kolieska máme 10 možností, a to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Spolu teda máme 10 . 10 . 10 = 1000 možností, ako kufrík zakódovať.

Janko vyskúšal štvrtinu z nich, teda 250.

Janko musel vyskúšať 250 možností.

Úloha 2.8: V trnavskom okrese majú autá značky typu T T _ _ _ _ _, kde na prvých troch voľných miestach je ľubovoľná číslica a na zvyšných dvoch je ľubovoľné veľké písmeno anglickej abecedy. Koľko takýchto značiek vieme maximálne vytvoriť?

Riešenie:

Pre voľbu prvej číslice máme 10 možností, a to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pre voľbu druhej číslice máme 10 možností, a to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pre voľbu tretej číslice máme 10 možností, a to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pre voľbu prvého písmena máme 26 možností, a to A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Pre voľbu druhého písmena máme 26 možností, a to A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Pri tvorbe značky teda máme 10 . 10 . 10 . 26 . 26 = 676 000 možností.

Takýchto značiek v trnavskom okrese dokážeme vytvoriť 676 000.

Úloha 2.9: Vieme, že 1 Byte má 8 bitov. Každý bit môžeme reprezentovať ako 0 alebo 1. Aký rozsah čísel si vieme zapamätať v 1 Byte?

Riešenie:

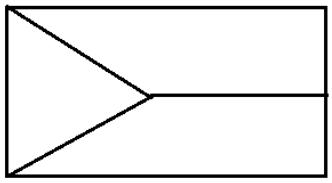
Pre voľbu prvého bitu máme 2 možnosti, a to 0 a 1.

Podobne 2 možnosti máme aj pre voľbu druhého, tretieho, štvrtého, piateho, šiesteho, siedmeho a ôsmeho bitu.

Celkovo teda máme 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 256 možností.

V 1 Byte si vieme zapamätať napríklad čísla od 0 po 255.

Úloha 2.10: Janko má v peračníku 12 farbičiek. Koľkými spôsobmi môže vyfarbiť vlajku na obrázku, ak každú z jej troch častí musí zafarbiť inou farbou?



Riešenie:

Pre voľbu farby prvej časti máme 12 možností.

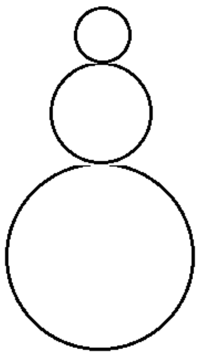
Pre voľbu farby druhej časti máme 11 možností (lebo nemožno použiť farbu z prvej časti).

Pre voľbu farby tretej časti máme 10 možností (lebo nemožno použiť farby z prvej ani druhej časti).

Celkovo teda máme 12 . 11 . 10 = 1320 možností.

Janko môže vyfarbiť vlajku 1320 spôsobmi.

Úloha 2.11: Janko má v peračníku 12 farbičiek. Koľkými spôsobmi môže vyfarbiť snehuliaka na obrázku, ak každú z jeho troch gúľ musí zafarbiť inou farbou?



Riešenie:

Pre voľbu farby prvej gule máme 12 možností.

Pre voľbu farby druhej gule máme 11 možností (lebo nemožno použiť farbu z prvej gule).

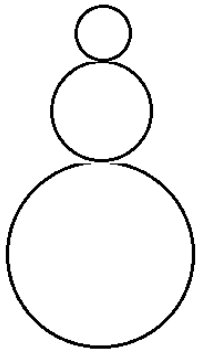
Pre voľbu farby tretej gule máme 10 možností (lebo nemožno použiť farby z prvej ani druhej gule).

Celkovo teda máme 12 . 11 . 10 = 1320 možností.

Janko môže vyfarbiť snehuliaka 1320 spôsobmi.

Všimnite si, že je jedno, či Janko vyfarbuje vlajku alebo snehuliaka. Podstatné je, že v oboch prípadoch vyfarbuje tri oblasti a vždy má na výber z 12 farieb.

Úloha 2.12: Janko má v peračníku 12 farbičiek. Koľkými spôsobmi môže vyfarbiť snehuliaka na obrázku, ak gule môžu mať aj rovnaké farby?



Riešenie:

Pre voľbu farby prvej gule máme 12 možností.

Pre voľbu farby druhej gule máme 12 možností.

Pre voľbu farby tretej gule máme 12 možností.

Celkovo teda máme 12 . 12 . 12 = 1728 možností.

Janko môže vyfarbiť snehuliaka 1728 spôsobmi.

3 Riešime úlohy pravidlom súčtu

Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa, ako môže využiť pravidlo súčtu na určenie počtu možností v kombinatorickej úlohe. Čitateľ sa taktiež naučí rozpoznať úlohy, v ktorých je efektívne použiť pravidlo súčtu.

Ak je počet hľadaných možností v úlohe malý, je malé aj riziko, že niektoré možnosti vynecháme alebo uvedieme duplicitne. Čo však v prípade, že je hľadaný počet možností väčší? Vtedy je vhodné rozdeliť si všetky možnosti do vhodných skupín tak, aby každé riešenie úlohy patrilo do práve jednej skupiny. Výsledný počet možností je potom súčtom počtu možností v jednotlivých skupinách. Takto dokážeme systematicky a efektívne vyriešiť aj také úlohy, pri ktorých je hľadaný počet všetkých vyhovujúcich možností väčší.

Úloha 3.1: Koľko existuje spôsobov, ako možno pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí a päťeurových bankoviek zaplatiť sumu 20 Eur?

Riešenie:

Všetky spôsoby si rozdelíme podľa toho, koľko použijeme päťeurových bankoviek.

1. **Ak použijeme 4 päťeurové bankovky**, už sme zaplatili sumu 20 Eur. V tomto prípade teda existuje **jediný spôsob**.

2. **Ak použijeme 3 päťeurové bankovky**, už sme zaplatili sumu 15 Eur. Ešte musíme zaplatiť 5 Eur pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí. Pri tomto platení môžeme použiť 0, 1 alebo 2 dvojeurovky. **Máme teda 3 spôsoby**. Vidíme ich na obrázku.

3. **Ak použijeme 2 päťeurové bankovky**, už sme zaplatili sumu 10 Eur. Ešte musíme zaplatiť 10 Eur pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí. Pri tomto platení môžeme použiť 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5 dvojeurovieк. **Máme teda 6 spôsobov**.

4. **Ak použijeme 1 päťeurovú bankovku**, už sme zaplatili sumu 5 Eur. Ešte musíme zaplatiť 15 Eur pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí. Pri tomto platení môžeme použiť 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 alebo 7 dvojeurovieк. **Máme teda 8 spôsobov**.

5. **Ak nepoužijeme päťeurové bankovky**, musíme zaplatiť 20 Eur pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí. Pri tomto platení môžeme použiť 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 alebo 10 dvojeuroviek. **Máme teda 11 spôsobov.**

Celkový počet spôsobov určíme ako súčet 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29.

Existuje 29 spôsobov, ako možno pomocou jednoeurových a dvojeurových mincí a päťeurových bankoviek zaplatiť sumu 20 Eur.

Zhrnieme si ich v tabuľke.

Počet päťeuroviek	Počet dvojeuroviek	Počet jednoeuroviek
4	0	0
3	0	5
3	1	3
3	2	1
2	0	10
2	1	8
2	2	6
2	3	4
2	4	2
2	5	0
1	0	15
1	1	13
1	2	11
1	3	9
1	4	7
1	5	5
1	6	3
1	7	1
0	0	20
0	1	18
0	2	16
0	3	14
0	4	12
0	5	10
0	6	8
0	7	6
0	8	4
0	9	2
0	10	0

Úloha 3.2: Mama má v miske šesť kusov ovocia: banán, pomaranč, jablko, hrušku, broskyňu a kivi. Do školy má Janke na desiatu dať dva rôzne kusy ovocia. Koľkými spôsobmi môže pripraviť Janke desiatu?

Riešenie:

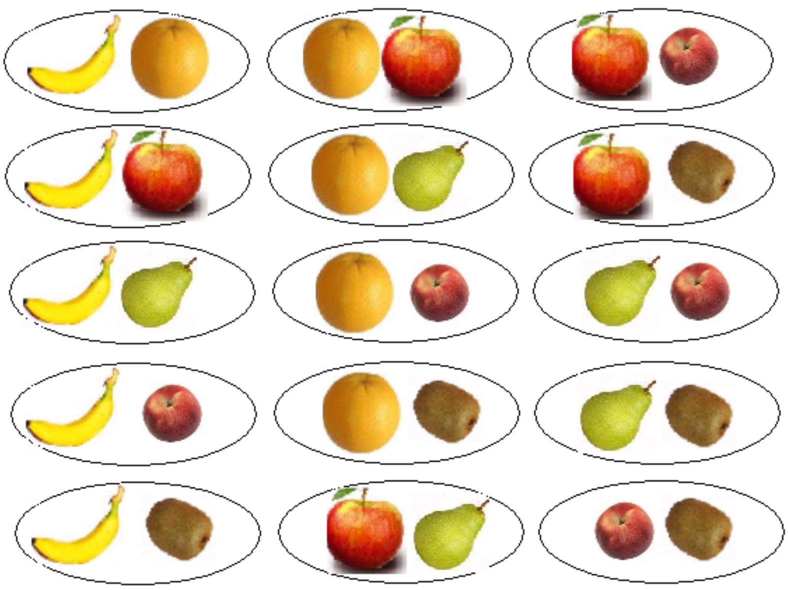
Ak dá mama Janke na desiatu banán, potom vyberá ešte jedno ovocie z piatich (pomaranč, jablko, hruška, broskyňa a kivi). **Má teda 5 možností**. Ďalej uvažujeme iba možnosti, kde mama banán nevybrala.

Ak dá mama Janke na desiatu pomaranč, potom vyberá ešte jedno ovocie zo štyroch (jablko, hruška, broskyňa a kivi). **Má teda 4 možnosti**. Ďalej uvažujeme iba možnosti, kde mama nevybrala banán ani pomaranč.

Ak dá mama Janke na desiatu jablko, potom vyberá ešte jedno ovocie z troch (hruška, broskyňa a kivi). **Má teda 3 možnosti**. Ďalej uvažujeme iba možnosti, kde mama nevybrala banán, pomaranč ani jablko.

Ak dá mama Janke na desiatu hrušku, potom vyberá ešte jedno ovocie z dvoch (broskyňa a kivi). **Má teda 2 možnosti**. Ďalej uvažujeme iba možnosti, kde mama nevybrala banán, pomaranč, jablko ani hrušku. Potom však musela vybrať broskyňu a kivi. **Mala teda jednu možnosť.**

Vidíme, že mama má 5+4+3+2+1=15 možností, ako pripraviť Janke desiatu. Vidíme ich na obrázku.



Úloha 3.3: Koľko je spôsobov, ako môže na troch kockách (modrej, žltej a zelenej) padnúť súčet desať?

Riešenie:

Všetky možnosti si rozdelíme podľa toho, čo padne na modrej kocke.

Ak na modrej kocke padne šestka, potom súčet na žltej a zelenej musí byť 4. To sa môže stať **troma spôsobmi** (3+1, 2+2, 1+3).

Ak na modrej kocke padne päťka, potom súčet na žltej a zelenej musí byť 5. To sa môže stať **štyrmi spôsobmi** (4+1, 3+2, 2+3, 1+4).

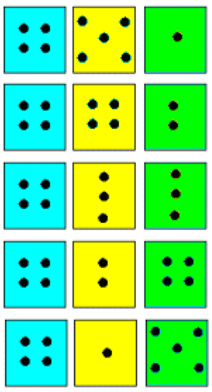
Ak na modrej kocke padne štvorka, potom súčet na žltej a zelenej musí byť 6. To sa môže stať **piatimi spôsobmi** (5+1, 4+2, 3+3, 2+4, 1+5). Vidíme ich na obrázku.

Ak na modrej kocke padne trojka, potom súčet na žltej a zelenej musí byť 7. To sa môže stať **šiestimi spôsobmi** (6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6).

Ak na modrej kocke padne dvojka, potom súčet na žltej a zelenej musí byť 8. To sa môže stať **piatimi spôsobmi** (6+2, 5+3, 4+4, 3+5, 2+6).

Ak na modrej kocke padne jednotka, potom súčet na žltej a zelenej musí byť 9. To sa môže stať **štyrmi spôsobmi** (6+3, 5+4, 4+5, 3+6).

Vidíme, že existuje 3+4+5+6+5+4=27 spôsobov, ako môže na modrej, žltej a zelenej kocke padnúť súčet desať. Päť z nich vidíme na obrázku.



Úloha 3.4: Janko našiel na povale štyri drevené číslice: dvojku, trojku, päťku a sedmičku. Koľko prirodzených čísel dokáže pomocou nich zapísať?

Riešenie:

Všetky možnosti si rozdelíme podľa počtu cifier v čísle.

1. Jednociferné: 2, 3, 5, 7 – **štyri čísla**

2. Počet dvojciferných čísel je podľa pravidla súčinu 4 . 3 = **12**.

(Sú to: 23, 25, 27, 32, 35, 37, 52, 53, 57, 72, 73, 75)

3. Počet trojciferných čísel je podľa pravidla súčinu 4 . 3 . 2 = **24**.

(Sú to: 235, 237, 253, 257, 273, 275, 325, 327, 352, 357, 372, 375, 523, 527, 532, 537, 572, 573, 723, 725, 732, 735, 752, 753)

4. Počet štvorciferných čísel je podľa pravidla súčinu 4 . 3 . 2 . 1 = **24**.

(Sú to: 2357, 2375, 2537, 2573, 2735, 2753, 3257, 3275, 3527, 3572, 3725, 3752, 5237, 5273, 5327, 5372, 5723, 5732, 7235, 7253, 7325, 7352, 7523, 7532)

Janko môže zapísať 4 + 12 + 24 + 24 = **64 prirodzených čísel.**

Úloha 3.5: Koľko trojciferných čísel má ciferný súčet 7?

Riešenie:

Všetky takéto trojciferné čísla si rozdelíme podľa číslice na mieste stoviek.

Ak je na mieste stoviek jednotka, potom súčet číslic na mieste desiatok a jednotiek má byť 6. Sú to čísla 106, 115, 124, 133, 142, 151, 160.

Ak je na mieste stoviek dvojka, potom súčet číslic na mieste desiatok a jednotiek má byť 5. Sú to čísla 205, 214, 223, 232, 241, 250.

Ak je na mieste stoviek trojka, potom súčet číslic na mieste desiatok a jednotiek má byť 4. Sú to čísla 304, 313, 322, 331, 340.

Ak je na mieste stoviek štvorka, potom súčet číslic na mieste desiatok a jednotiek má byť 3. Sú to čísla 403, 412, 421, 430.

Ak je na mieste stoviek päťka, potom súčet číslic na mieste desiatok a jednotiek má byť 2. Sú to čísla 502, 511, 520.

Ak je na mieste stoviek šestka, potom súčet číslic na mieste desiatok a jednotiek má byť 1. Sú to čísla 601, 610.

Ak je na mieste stoviek sedmička, potom súčet číslic na mieste desiatok a jednotiek má byť 0. Je to číslo 700.

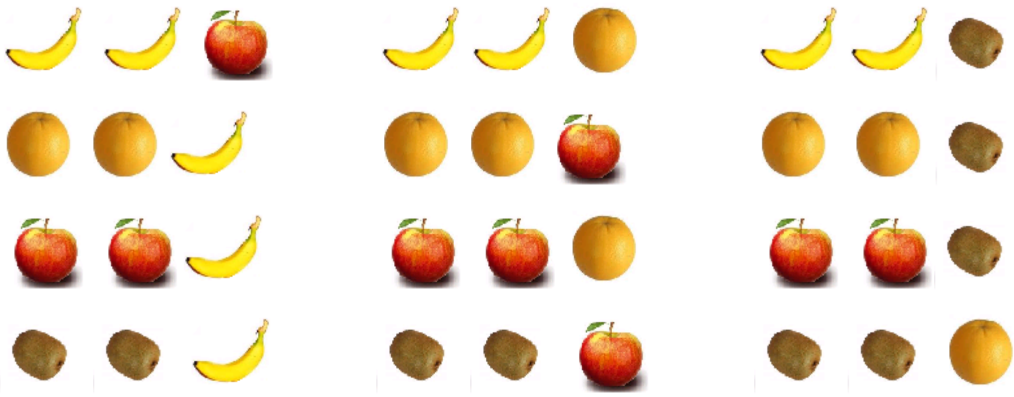
Existuje 7+6+5+4+3+2+1=**28 trojciferných čísel, ktoré majú ciferný súčet 7.**

Úloha 3.6: V obchode predávajú 4 druhy ovocia. Koľkými spôsobmi si môžeme kúpiť tri kusy ovocia?

Riešenie 1:

Najprv si nájdeme také možnosti, v ktorých kúpime tri rovnaké kusy ovocia.

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých kúpime dva rovnaké kusy ovocia a tretí iný.



Nakoniec si nájdeme také možnosti, v ktorých kúpime tri rôzne kusy ovocia.

Existuje 4 + 12 + 4 = **20 možností, ako si z ponuky 4 druhov ovocia môžem kúpiť tri kusy ovocia.**

Riešenie 2:

Ovocie si označím A, B, C, D.

Najprv si nájdeme také možnosti, v ktorých kúpime tri rovnaké kusy ovocia.

AAA, BBB, CCC, DDD

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých kúpime dva rovnaké kusy ovocia a tretí iný.

AAB, AAC, AAD, BBA, BBC, BBD, CCA, CCB, CCD, DDA, DDB, DDC

Nakoniec si nájdeme také možnosti, v ktorých kúpime tri rôzne kusy ovocia.

ABC, ABD, ACD, BCD

Existuje 4 + 12 + 4 = **20 možností, ako si z ponuky 4 druhov ovocia môžeme kúpiť tri kusy ovocia.**

Úloha 3.7: V kvetinárstve predávajú ruže, tulipány a narcisy. Koľko rôznych kytíc z 5 kusov kvetov vieme zostaviť?

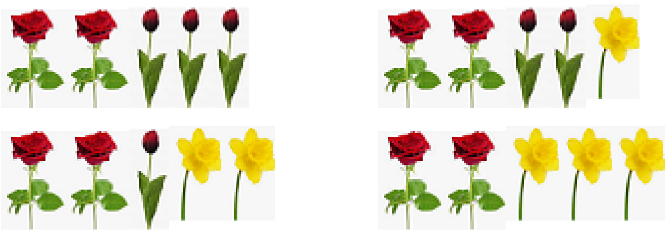
Riešenie 1:

Najprv si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 5 ruží.

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 4 ruže.

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 3 ruže.

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 2 ruže.



Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 1 ružu.

Nakoniec si nájdeme možnosti bez ruže.

Existuje 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = **21 možností, ako si z ponuky 3 druhov kvetov môžem kúpiť kyticu z piatich kusov kvetov.**

Riešenie 2:

Kvety si označíme A, B, C.

Najprv si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 5 kvetov A.

AAAAA

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 4 kvety A.

AAAAB, AAAAC

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 3 kvety A.

AAABB, AAABC, AAACC

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 2 kvety A.

AABBB, AABBC, AABCC, AACCC

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 1 kvet A.

ABBBB, ABBBC, ABBCC, ABCCC, ACCCC

Nakoniec si nájdeme také možnosti, v ktorých nemáme žiaden kvet A.

BBBBB, BBBBC, BBBCC, BBCCC, BCCCC, CCCCC

Existuje 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = **21 možností, ako si z ponuky 3 druhov kvetov môžem kúpiť kyticu z piatich kusov kvetov.**

Riešenie 3:

Kvety si označíme A, B, C.

Najprv si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 5 rovnakých kvetov.

AAAAA, BBBBB, CCCCC

Teraz si nájdeme také možnosti, v ktorých máme 2 druhy kvetov.

AAAAB, AAAAC, BBBBA, BBBBC, CCCCA, CCCCB

AAABB, AAACC, BBBAA, BBBCC, CCCAA, CCCBB

Nakoniec si nájdeme také možnosti, v ktorých máme všetky tri druhy kvetov.

AAABC, BBBAC, CCCAB

AABBC, AACCB, BBCCA

Existuje 3 + 12 + 6 = **21 možností, ako si z ponuky 3 druhov kvetov môžem kúpiť kyticu z piatich kusov kvetov.**

4 Typy kombinatorických úloh

Väčšina kombinatorických úloh sa dá zaradiť do niekoľkých štandardných typov. Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa, aby rozpoznal správny typ kombinatorickej úlohy a zvolil efektívnu metódu jej riešenia.

Permutácie bez opakovania

Ako prvý typ si predstavíme úlohy, v ktorých treba vytvoriť všetky možné usporiadania n prvkov. Inak povedané, z danej n-prvkovej množiny vyberáme usporiadané n-tice prvkov, pričom každý prvok môžeme použiť najviac raz. Takéto n-tice budeme nazývať permutácie. Permutácia obsahuje všetky prvky danej množiny, je to akési usporiadanie všetkých prvkov množiny.

Úloha 4.1: Vo finále pretekov na 100 metrov bežali Adam a Boris. Koľkými spôsobmi mohli skončiť preteky?

Riešenie 1 – systematickým vypisovaním:

Adama si označíme A, Borisa B.

Preteky mohli skončiť buď poradím AB alebo BA.

Preteky môžu skončiť 2 spôsobmi.

Riešenie 2 – pravidlom súčinu:

Víťaza môžeme vybrať z dvoch možností.

Druhého možno vybrať už len jednou možnosťou.

Preteky môžu skončiť 2 . 1 = **2 spôsobmi.**

Úloha 4.2: Vo finále pretekov na 100 metrov bežali Adam, Boris a Cyril. Koľkými spôsobmi mohli skončiť preteky?

Riešenie 1 – systematickým vypisovaním:

Adama si označíme A, Borisa B a Cyrila C.

Preteky mohli skončiť týmito poradiami:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Preteky môžu skončiť 6 spôsobmi.

Riešenie 2 – pravidlom súčinu:

Víťaza môžeme vybrať z troch možností.

Druhého možno vybrať z dvoch možností.

Tretieho možno vybrať už len jednou možnosťou.

Preteky môžu skončiť 3 . 2 . 1 = **6 spôsobmi.**

Úloha 4.3: Vo finále pretekov na 100 metrov bežali Adam, Boris, Cyril a Dušan. Koľkými spôsobmi mohli skončiť preteky?

Riešenie 1 – systematickým vypisovaním:

Adama si označíme A, Borisa B, Cyrila C a Dušana D.

Preteky mohli skončiť týmito poradiami:

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB,

BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,

CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,

DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Preteky môžu skončiť 24 spôsobmi.

Riešenie 2 – pravidlom súčinu:

Víťaza môžeme vybrať zo štyroch možností.

Druhého možno vybrať z troch možností.

Tretieho možno vybrať z dvoch možností.

Štvrtého možno vybrať už len jednou možnosťou.

Preteky môžu skončiť 4 . 3 . 2 . 1 = **24 spôsobmi.**

Úloha 4.4: Vo finále pretekov na 100 metrov bežalo osem pretekárov. Koľkými spôsobmi mohli skončiť preteky?

Riešenie:

Víťaza môžeme vybrať z 8 možností.

Druhého možno vybrať zo 7 možností.

Tretieho možno vybrať z 6 možností.

Štvrtého možno vybrať z 5 možností.

Piateho možno vybrať zo 4 možností.

Šiesteho možno vybrať z 3 možností.

Siedmeho možno vybrať z 2 možností.

Ôsmeho možno vybrať už len 1 možnosťou.

Preteky môžu skončiť 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = **40 320 spôsobmi.**

Zhrnutie 1:

V úlohách 4.1 – 4.4 sme zistili, že:

2 prvky vieme zoradiť 2 . 1 = 2 spôsobmi,

3 prvky vieme zoradiť 3 . 2 . 1 = 6 spôsobmi,

4 prvky vieme zoradiť 4 . 3 . 2 . 1 = 24 spôsobmi,

8 prvkov vieme zoradiť 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40 320 spôsobmi.

Súčin 2 . 1 označujeme aj 2! a čítame 2 faktoriál.

Súčin 3 . 2 . 1 označujeme aj 3! a čítame 3 faktoriál.

Súčin 4 . 3 . 2 . 1 označujeme aj 4! a čítame 4 faktoriál.

Súčin 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 označujeme aj 8! a čítame 8 faktoriál.

Ak je daná množina *N*, ktorá má *n* prvkov a chceme tieto prvky usporiadať, môžeme to urobiť $\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}_{n \text{ činiteľov}} = n!$ spôsobmi.

Úloha 4.5: V súťaži Let's Dance podpísali organizátori zmluvy s piatimi mužskými a piatimi ženskými celebritami a s piatimi mužskými a piatimi ženskými profesionálnymi tanečníkmi. Koľkými rôznymi spôsobmi ich môžu popáriť, ak vždy vytvárajú dvojice muž – žena (jeden je vždy celebrita a jeden profesionál)?

Riešenie:

Najprv vyberieme partnerky pre mužské celebrity. Potrebujeme im priradiť päť profesionálnych tanečníc, každému jednu. Preto potrebujeme určiť počet permutácií päťprvkovej množiny. Ich počet je daný vzorcom 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120.

1. mužská celebrita	**2. mužská celebrita**	**3. mužská celebrita**	**4. mužská celebrita**	**5. mužská celebrita**
partnerku vyberáme 5 spôsobmi	**partnerku vyberáme 4 spôsobmi**	**partnerku vyberáme 3 spôsobmi**	**partnerku vyberáme 2 spôsobmi**	**partnerku vyberáme 1 spôsobom**

Teraz vyberieme partnerky pre ženské celebrity. Potrebujeme im priradiť päť profesionálnych tanečníkov, každej jedného. Preto opäť potrebujeme určiť počet permutácií päťprvkovej množiny. Ich počet je daný vzorcom 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120.

1. ženská celebrita	2. ženská celebrita	3. ženská celebrita	4. ženská celebrita	5. ženská celebrita
partnera vyberáme 5 spôsobmi	partnera vyberáme 4 spôsobmi	partnera vyberáme 3 spôsobmi	partnera vyberáme 2 spôsobmi	partnera vyberáme 1 spôsobom

Použitím pravidla súčinu zistíme, že **organizátori môžu vytvoriť páry** 120 . 120 = **14 400 spôsobmi.**

Permutácie s opakovaním

Niekedy sa stretneme aj so situáciou, že máme usporiadať skupinu objektov, v ktorej sa rovnaké objekty vyskytujú viackrát. Prvý objekt sa vyskytuje n_1-krát, druhý objekt sa vyskytuje n_2-krát, tretí objekt sa vyskytuje n_3-krát, atď. Nech $n= n_1+ n_2+...+ n_k$. Pýtame sa, koľkými spôsobmi to môžeme urobiť.

Takto zadaná úloha súvisí s permutáciami. Počet rôznych spôsobov zoradenia je v takomto prípade určený vzorcom $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Úloha 4.6: Janko našiel na povale krabicu s troma drevenými číslicami 1 a dvoma drevenými číslicami 2. Koľko rôznych päťciferných čísel vie z nich zostaviť?

Riešenie 1 – pomocou vzorca:

Keď tvoríme päťciferné číslo, potrebujeme zoradiť všetkých päť číslic. Tieto však nie sú rôzne, ale jednotka sa opakuje trikrát a dvojka dvakrát.

Počet rôznych zoradení je daný vzorcom $\frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 10$.

Janko môže zostaviť 10 rôznych päťciferných čísel.

Riešenie 2 – odvodíme si vzorec:

Keďže máme k dispozícii tri drevené jednotky a dve drevené dvojky, farebne si ich rozlíšime. Napríklad budeme mať 1, 1, 1, 2, 2.

Koľkými spôsobmi ich vieme zoradiť, aby sme vytvorili päťciferné číslo? Použitím pravidla súčinu už vieme, že je to 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 spôsobmi. Preto je vo vzorci z 1. riešenia v čitateli súčin 5 . 4 . 3 . 2 . 1.

To isté číslo však vieme vytvoriť viacerými spôsobmi. Napríklad číslo 11122 vytvoríme 12 spôsobmi, a to:

11122	11122
11122	11122
11122	11122
11122	11122
11122	11122
11122	11122

Šesť spôsobov vľavo je takých, kde sme navzájom menili poradie jednotiek. Keďže jednotky sú tri, vieme ich usporiadať 3 . 2 . 1 = 6 spôsobmi a pritom vždy vytvoríme to isté číslo.

V každom riadku sú dva spôsoby také, kde sme navzájom menili poradie dvojok. Keďže dvojky sú dve, vieme ich usporiadať 2 . 1 = 2 spôsobmi.

Celkovo teda každé číslo vieme vytvoriť 3 . 2 . 1 . 2 . 1 = 12 spôsobmi, a preto je v menovateli vzorca v prvom riešení súčin 3 . 2 . 1 . 2 . 1.

V 120 vytvorených spôsoboch zoradenia sa teda každé číslo vyskytne 12-krát. Preto je počet rôznych vytvorených čísel 120 : 12 = 10.

Janko môže zostaviť 10 rôznych päťciferných čísel.

Úloha 4.7: Janko našiel na povale krabicu s troma drevenými písmenami A, troma písmenami B, jedným C a dvoma D. Koľko rôznych slov obsahujúcich deväť znakov z nich môže vytvoriť? (slová nemusia mať zmysel)

Riešenie:

Janko má k dispozícii spolu deväť písmen, ktoré potrebuje zoradiť. Tieto však nie sú rôzne, ale áčko a béčko sa opakuje trikrát a déčko dvakrát.

Počet rôznych zoradení je daný vzorcom $\frac{9!}{3!3!1!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5040$.

Janko môže vytvoriť 5 040 rôznych slov.

Variácie bez opakovania.

Doteraz sme sa venovali usporiadaniu n prvkov. Teraz budeme z n prvkov vyberať usporiadané k-tice tak, že prvky v k-tici sa nesmú opakovať. Usporiadaná k-tica z n-prvkovej množiny, v ktorej sa prvky neopakujú, sa nazýva variácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania.

Počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov určíme ako súčin $\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\text{ činiteľov}}$, alebo jednoducho iba použijeme pravidlo súčinu.

Úloha 4.8: Na atletickom mítingu bežalo finále stovky osem pretekárov. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu obsadiť stupne víťazov?

Riešenie:

Na stupne víťazov sa postavia traja pretekári, pričom záleží aj na tom, kto je prvý, kto druhý a kto tretí. Teda vyberáme usporiadané trojice z ôsmich prvkov.

Inými slovami, potrebujeme určiť počet variácií tretej triedy z ôsmich prvkov. Ich počet je daný vzorcom 8 . 7 . 6 = 336, pretože prvého vyberáme z ôsmich možností, druhého zo siedmich možností a tretieho zo šiestich možností.

Pretekári môžu obsadiť stupne víťazov 336 spôsobmi.

Úloha 4.9: Mama má k dispozícii desať rôznych druhov ovocia, z každého jeden kus. Koľkými spôsobmi môže pripraviť desiatu pre svoje štyri deti, ak každému má dať jeden kus ovocia?

Riešenie:

Pretože mama má štyri deti, vyberá 4 kusy ovocia z 10. Teda vyberáme usporiadané štvorice z desiatich prvkov.

Inými slovami, potrebujeme určiť počet variácií štvrtej triedy z desiatich prvkov. Ich počet je daný vzorcom 10 .9 . 8 . 7 = 5040, pretože prvému vyberá desiatu z desiatich kusov ovocia, druhému z deviatich, tretiemu z ôsmich a štvrtému zo siedmich.

Mama môže pripraviť desiatu 5040 spôsobmi.

Úloha 4.10: V tanečnom krúžku je 22 dievčat a 10 chlapcov. Učiteľ z nich chce zostaviť 10 párov chlapec - dievča. Koľkými spôsobmi môže priradiť chlapcom dievčatá?

Riešenie:

Učiteľ bude vyberať 10 dievčat z 22, pričom záleží aj na tom, ktoré dievča priradí ktorému chlapcovi. Teda vyberáme usporiadané desatice z 22 prvkov.

Inými slovami, potrebujeme určiť počet variácií desiatej triedy z 22 prvkov. Ich počet je daný vzorcom 22.21.20.19.18.17.16.15.14.13 = 2 346 549 004 800.

Učiteľ môže vytvoriť páry 2 346 549 004 800 spôsobmi.

Úloha 4.11: Janko našiel na povale krabicu s drevenými číslicami 1,2,3,5,6,8,9. V krabici bol z každej číslice jeden kus. Koľko rôznych štvorciferných čísel vie z nich zostaviť?

Riešenie:

Keď tvoríme štvorciferné číslo, potrebujeme štyri číslice. Janko ich má spolu 7. Teda vyberáme usporiadané štvorice zo siedmich prvkov.

Inými slovami, potrebujeme určiť počet variácií štvrtej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je daný vzorcom 7 . 6 . 5 . 4 = 840.

Janko môže zostaviť 840 rôznych štvorciferných čísel.

Poznámka: Keby medzi číslicami bola nula, riešenie by vyzeralo inak. Prečo?

Úloha 4.12: Janko našiel na povale krabicu s drevenými číslicami 1,2,3,5,6,8,9. V krabici bol z každej číslice jeden kus. Koľko rôznych čísel vie z nich zostaviť?

Riešenie:

Jednociferné čísla: Potrebujeme určiť počet variácií prvej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je 7.

Dvojciferné čísla: Potrebujeme určiť počet variácií druhej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je 7 . 6 = 42.

Trojciferné čísla: Potrebujeme určiť počet variácií tretej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je 7 . 6 . 5 = 210.

Štvorciferné čísla: Potrebujeme určiť počet variácií štvrtej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je 7 . 6 . 5 . 4 = 840.

Päťciferné čísla: Potrebujeme určiť počet variácií piatej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je 7 . 6 . 5 . 4 . 3 = 2520.

Šesťciferné čísla: Potrebujeme určiť počet variácií šiestej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 = 5040.

Sedemciferné čísla: Potrebujeme určiť počet variácií siedmej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040.

Janko môže zostaviť 7 + 42 + 210 + 840 + 2520 + 5040 + 5040 **= 13 699 rôznych čísel.**

Variácie s opakovaním

V predchádzajúcej lekcii sme sa venovali variáciám bez opakovania. Išlo o úlohy, kedy sme z množiny objektov vyberali usporiadané *k*-tice prvkov z danej množiny, pričom každý prvok sme mohli použiť najviac raz.

Teraz sa budeme venovať situáciám, keď prvky množiny možno do usporiadanej *k*-tice zaradiť aj viackrát. V takomto prípade hovoríme o variáciách s opakovaním.

Počet variácií s opakovaním *k*-tej triedy z *n* prvkov určíme ako súčin $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ činiteľov}} = n^k$, alebo jednoducho iba použitím pravidla súčinu.

Úloha 4.13: V triede je 22 pomerne vyrovnaných žiakov. Triedna učiteľka má určiť, kto bude triedu reprezentovať na utorkovej súťaži v matematike, kto na štvrtkovej súťaži v angličtine a kto na piatkovej súťaži v slovenčine. Koľkými spôsobmi môže triedna učiteľka uskutočniť výber?

Riešenie:

Triedna učiteľka má obsadiť tri miesta na súťaži, pričom jeden žiak môže ísť aj na viacero súťaží. Teda vyberáme usporiadané trojice z 22 prvkov, pričom tieto prvky sa môžu opakovať.

Potrebujeme určiť počet variácií s opakovaním tretej triedy z 22 prvkov. Ich počet je daný vzorcom 22 . 22 . 22 = 10 648.

Triedna učiteľka môže uskutočniť výber 10 648 spôsobmi.

Úloha 4.14: Mama má k dispozícii desať rôznych druhov ovocia, z každého dostatočné zásoby. Koľkými spôsobmi môže pripraviť desiatu pre svoje štyri deti, ak každému má dať jeden kus ovocia?

Riešenie:

Pretože mama má štyri deti, vyberá 4 kusy ovocia z 10, pričom to isté ovocie môže vybrať aj viackrát. Teda vyberáme usporiadané štvorice z desiatich prvkov, pričom prvky sa môžu opakovať.

Potrebujeme určiť počet variácií s opakovaním štvrtej triedy z desiatich prvkov. Ich počet je daný vzorcom 10 . 10 . 10 . 10 = 10000.

Mama môže pripraviť desiatu 10000 spôsobmi.

Úloha 4.15: Kufrík má zámok zakódovaný pomocou troch koliesok, na ktorých sú písmená anglickej abecedy. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme zakódovať kufrík?

Riešenie:

V prvom rade potrebujeme vedieť, že anglická abeceda má 26 písmen.

Pretože kufrík má tri kolieska, vyberáme tri písmená z 26, pričom to isté písmeno môžeme vybrať aj viackrát. Teda vyberáme usporiadané trojice z 26 prvkov, pričom prvky sa môžu opakovať.

Potrebujeme určiť počet variácií s opakovaním tretej triedy z 26 prvkov. Ich počet je daný vzorcom 26 . 26 . 26 = 17 576.

Kufrík môžeme zakódovať 17576 spôsobmi.

Úloha 4.16: Janko našiel na povale krabicu s drevenými číslicami 1,2,3,5,6,8,9. V krabici bolo z každej číslice veľa kusov. Koľko rôznych štvorciferných čísel vie z nich zostaviť?

Riešenie:

Keď tvoríme štvorciferné číslo, potrebujeme štyri číslice, pričom jedna číslica sa môže vyskytovať aj viackrát. Janko má 7 rôznych číslic. Teda vyberáme usporiadané štvorice zo siedmich prvkov, pričom prvky sa môžu opakovať.

Potrebujeme určiť počet variácií s opakovaním štvrtej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je daný vzorcom 7 . 7 . 7 . 7 = 2 401.

Janko môže zostaviť 2401 rôznych štvorciferných čísel.

Poznámka: Keby medzi číslicami bola nula, riešenie by vyzeralo inak. Prečo?

Úloha 4.17: Janko našiel na povale krabicu s drevenými číslicami 1,2,3,5,6,8,9. V krabici bolo z každej číslice veľa kusov. Postupne si z nich skladal také trojciferné čísla, v ktorých sa aspoň jedna číslica vyskytla viackrát. Koľko rôznych takýchto čísel si mohol zostaviť?

Riešenie:

Počet všetkých trojciferných čísel, ktoré môžeme postaviť:

Potrebujeme určiť počet variácií s opakovaním tretej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je daný vzorcom 7 . 7 . 7 = 343.

Počet všetkých trojciferných čísel, v ktorých sa číslice neopakujú:

Potrebujeme určiť počet variácií bez opakovania tretej triedy zo siedmich prvkov. Ich počet je daný vzorcom 7 . 6 . 5 = 210.

Počet všetkých trojciferných čísel, v ktorých sa aspoň jedna číslica opakuje, je teda 343 – 210 = 133.

Janko môže zostaviť 133 takých trojciferných čísel, v ktorých sa aspoň jedna číslica opakuje viackrát.

Kombinácie bez opakovania

Teraz sa budeme venovať jednej špeciálnej skupine kombinatorických úloh. Pôjde o úlohy, kedy budeme z množiny objektov vyberať určité jej podmnožiny. Bude nás zaujímať, koľkými spôsobmi môžeme z danej množiny vybrať nejakú jej podmnožinu.

Predstavme si situáciu, že je daná množina N, ktorá má n prvkov. Z týchto prvkov chceme vybrať jej k-prvkovú podmnožinu K. Pýtame sa, koľkými spôsobmi to môžeme urobiť. Takto zadaná úloha je typická pre kombinácie bez opakovania. Teda kombináciou budeme nazývať ľubovoľnú takúto vybranú podmnožinu.

Kombinácia k-tej triedy z n prvkov je teda každá k-prvková podmnožina danej n-prvkovej množiny. Počet takýchto kombinácií vyjadruje kombinačné číslo $\binom{n}{k}$. Hodnotu tohto kombinačného čísla určíme podľa vzorca $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, pričom $n!$ označuje súčin čísel 1.2.3...(n-1).n.

Ak vyberáme z n-prvkovej množiny dvojprvkové podmnožiny, potom ich počet je $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$. Ak vyberáme z n-prvkovej množiny trojprvkové podmnožiny, potom ich počet je $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot2\cdot1} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$. Ak vyberáme z n-prvkovej množiny štvorprvkové podmnožiny, potom ich počet je $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}$.

Ak vyberáme z n-prvkovej množiny päťprvkové podmnožiny, potom ich počet je $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{120}$.

Úloha 4.18: Na halovom turnaji vo futbale sa zúčastnili štyri mužstvá: ŠK Slovan Bratislava, FC Spartak Trnava, MFK Ružomberok a AS Trenčín. Každé mužstvo hralo s každým jeden zápas. Koľko zápasov odohrali?

Riešenie 1 – použitím vzorca:

V každom zápase hrajú proti sebe dve mužstvá. Potrebujeme teda vybrať 2-prvkové podmnožiny z štvorprvkovej množiny všetkých mužstiev.

Musíme zistiť počet všetkých kombinácií druhej triedy zo štyroch prvkov. Počet takýchto kombinácií je $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Na turnaji sa odohralo šesť zápasov.

Riešenie 2 – odvodíme si vzorec:

V každom zápase hrajú proti sebe dve mužstvá. Vytvárame usporiadané dvojice zo štyroch prvkov. Podľa pravidla súčinu vyberáme prvé mužstvo zo 4 a druhé z troch, teda máme 4 . 3 = 12 usporiadaných dvojíc. Preto je v čitateli vo vzorci v prvom riešení súčin 4 . 3.

Sú to:

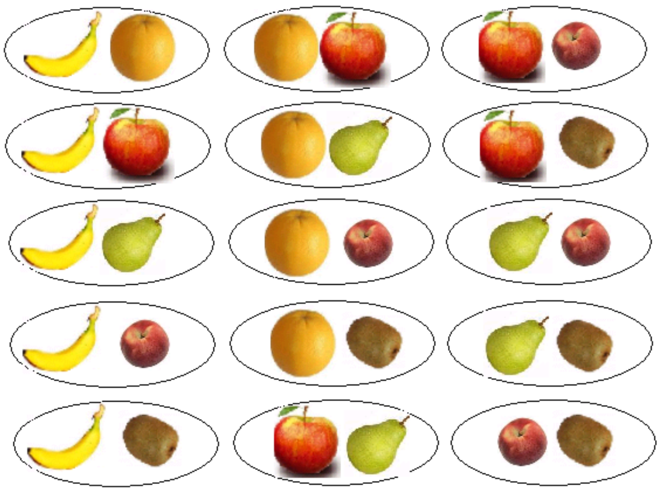
Vždy dve dvojice v riadku však predstavujú ten istý zápas (lebo dve mužstvá viem zoradiť dvoma spôsobmi, napríklad Trnava-Trenčín alebo Trenčín-Trnava). Preto je v menovateli vo vzorci v prvom riešení číslo 2.

Počet zápasov je 12 : 2 = 6.

Na turnaji sa odohralo šesť zápasov.

Úloha 4.19: Mama má v miske šesť kusov ovocia: banán, pomaranč, jablko, hrušku, broskyňu a kivi. Do školy má Janke na desiatu dať dva kusy ovocia. Koľkými spôsobmi môže pripraviť Janke desiatu?

Riešenie:



Mama má dať Janke 2 kusy ovocia, ktoré vyberie zo šesťprvkovej množiny.

Musíme zistiť počet všetkých kombinácií druhej triedy zo šiestich prvkov. Počet takýchto kombinácií je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Mama má 15 možností, ako pripraviť Janke desiatu.

Úloha 4.20: V triede je 31 pomerne vyrovnaných žiakov. Koľkými spôsobmi môže učiteľ matematiky z nich vybrať

a) dvojčlenné

b) trojčlenné

c) štvorčlenné

mužstvo na školskú matematickú súťaž?

Riešenie:

a) Chceme zistiť počet všetkých kombinácií druhej triedy z 31 prvkov. Ich počet je $\frac{31 \cdot 30}{2} = 465$.

b) Chceme zistiť počet všetkých kombinácií tretej triedy z 31 prvkov. Ich počet je $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{6} = 4495$.

c) Chceme zistiť počet všetkých kombinácií štvrtej triedy z 31 prvkov. Ich počet je $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{24} = 31465$.

Niekedy sa stretneme aj so situáciami, keď vyberáme niekoľko podmnožín z viacerých množín a tieto potom skombinujeme.

Predstavme si situáciu, že sú dané disjunktné množiny N_1 a N_2, ktoré majú n_1 a n_2 prvkov. Z množiny N_1 chceme vybrať jej k_1-prvkovú podmnožinu K_1, z množiny N_2 chceme vybrať jej k_2-prvkovú podmnožinu K_2 a takto vybrané podmnožiny chceme zjednotiť. Pýtame sa, koľkými spôsobmi to môžeme urobiť.

Takto zadaná úloha vyžaduje kombináciu pravidla súčinu a kombinácií bez opakovania. Riešenie potom vyjadruje súčin kombinačných čísel $\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}$.

Úloha 4.21: V triede je 17 dievčat a 15 chlapcov. Na volejbalový turnaj treba z nich vybrať družstvo so štyrmi chlapcami a dvoma dievčatami. Koľkými spôsobmi to môžeme urobiť?

Riešenie:

Pretože vyberáme štyroch chlapcov z 15, potrebujeme určiť počet kombinácií štvrtej triedy z 15 prvkov. Tento počet je $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{24} = 1365$.

Ďalej vyberáme dve dievčatá zo 17. Potrebujeme teda určiť počet kombinácií druhej triedy zo 17 prvkov. Tento počet je $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$.

Použitím pravidla súčinu zistíme, že **družstvo so štyrmi chlapcami a dvoma dievčatami na volejbalový turnaj môžeme vybrať** 1 365 . 136 = **185 640 spôsobmi.**

Úloha 4.22: Futbalový tréner má v kádri troch brankárov, sedem obrancov, piatich záložníkov a šiestich útočníkov. Koľkými spôsobmi môže zostaviť jedenásťčlenné družstvo pozostávajúce z brankára, štyroch obrancov, štyroch záložníkov a dvoch útočníkov?

Riešenie:

Jedného brankára z troch vieme vybrať 3 spôsobmi.

Štyroch obrancov zo siedmich vieme vybrať $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{24} = 35$ spôsobmi.

Štyroch záložníkov z piatich vieme vybrať $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{24}=5$ spôsobmi.

Dvoch útočníkov zo šiestich vieme vybrať $\frac{6\cdot5}{2}=15$ spôsobmi.

Použitím pravidla súčinu zistíme, že **jedenásťčlenné družstvo pozostávajúce z brankára, štyroch obrancov, štyroch záložníkov a dvoch útočníkov môžeme vybrať** 3 . 35 . 5 . 15 = **7 875 spôsobmi.**

Kombinácie s opakovaním

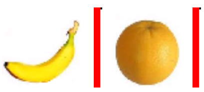
V predchádzajúcich úlohách sme sa venovali kombináciám bez opakovania. Išlo o úlohy, kedy sme z množiny objektov vyberali určité jej podmnožiny. Zaujímalo nás, koľkými spôsobmi sme mohli z danej množiny vybrať nejakú jej podmnožinu.

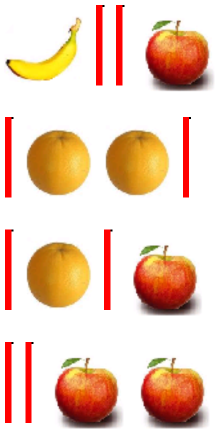
Teraz budeme mať k rôznych skupín prvkov, z ktorých si budeme vyberať n prvkov. Takéto úlohy budeme riešiť pomocou kombinácií s opakovaním. Počet takýchto kombinácií vyjadruje kombinačné číslo $\binom{k+n-1}{k-1}=\frac{(k+n-1)!}{(k-1)!\cdot n!}$.

Vzorec si vysvetlíme na príklade. V obchode predávajú banány, pomaranče a jablká. Chceme si kúpiť dva kusy ovocia. Možnosti sú znázornené v tabuľke.

banány	pomaranče	Jablká
		
		
		
		
		
		

Jednotlivé možnosti z tabuľky si možno zapísať tak, že najskôr uvedieme banány, potom pomaranče, potom jablká a vždy rôzne ovocie oddelíme priečkami.





Tri druhy ovocia môžeme oddeliť dvoma priečkami. V každom riadku teda máme vybrané 2+2=4 objekty (dva kusy ovocia a 2 priečky). Na jednoznačnosť riešenia stačí vedieť, na ktorých miestach sú priečky. Možné miesta pre priečky sú 4 a priečky sú 2. Teda počet možností je určený kombinačným číslom $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$.

Všeobecne, ak máme k rôznych skupín prvkov, z ktorých si budeme vyberať n prvkov, tak potrebujeme umiestniť $k - 1$ priečok na $n + k - 1$ rôznych miest. Počet takýchto umiestnení vyjadruje kombinačné číslo $\binom{k+n-1}{k-1} = \frac{(k+n-1)!}{(k-1)! \cdot n!}$.

Úloha 4.23: V obchode predávajú dva druhy Brumíkov (vanilkové a jahodové). Janka si chce kúpiť 5 Brumíkov. Koľkými rôznymi spôsobmi si ich môže vybrať?

Riešenie:

Ide o úlohu, kedy si z dvoch skupín objektov (vanilkové a jahodové Brumíky) vyberáme päť kusov. Úlohu teda riešime pomocou kombinácií s opakovaním, kde k=2 a n=5.

Počet týchto kombinácií je $\binom{2+5-1}{2-1} = \binom{6}{1} = \frac{6!}{1!5!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$.

Janka si môže vybrať Brumíkov 6 spôsobmi.

Úloha 4.24: V obchode predávajú tri druhy Brumíkov (vanilkové, jahodové a čokoládové). Janka si chce kúpiť 5 Brumíkov. Koľkými rôznymi spôsobmi si ich môže vybrať?

Riešenie:

Ide o úlohu, kedy si z troch skupín objektov (vanilkové, jahodové a čokoládové Brumíky) vyberáme päť kusov. Úlohu teda riešime pomocou kombinácií s opakovaním, kde *k*=3 a *n*=5.

Počet týchto kombinácií je $\begin{pmatrix} 3+5-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{7!}{2!5!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 21.$

Janka si môže vybrať Brumíkov 21 spôsobmi.

Úloha 4.25: V obchode predávajú štyri druhy Brumíkov (vanilkové, jahodové, čokoládové a medové). Janka si chce kúpiť 3 Brumíkov. Koľkými rôznymi spôsobmi si ich môže vybrať?

Riešenie:

Ide o úlohu, kedy si zo štyroch skupín objektov (vanilkové, jahodové, čokoládové a medové Brumíky) vyberáme tri kusy. Úlohu teda riešime pomocou kombinácií s opakovaním, kde *k*=4 a *n*=3.

Počet týchto kombinácií je $\begin{pmatrix} 4+3-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 20\,.$

Janka si môže vybrať Brumíkov 20 spôsobmi.

Úloha 4.26: V obchode predávajú štyri druhy Brumíkov (vanilkové, jahodové, čokoládové a medové). Pani učiteľka si pre svojich žiakov na MDD chce kúpiť 20 Brumíkov. Koľkými rôznymi spôsobmi si ich môže vybrať?

Riešenie:

Ide o úlohu, kedy si zo štyroch skupín objektov (vanilkové, jahodové, čokoládové a medové Brumíky) vyberáme dvadsať kusov. Úlohu teda riešime pomocou kombinácií s opakovaním, kde k=4 a n=20.

Počet týchto kombinácií je $\binom{4+20-1}{4-1}=\binom{23}{3}=\frac{23!}{3!20!}=$

$$=\frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1771.$$

Pani učiteľka si môže vybrať Brumíkov 1 771 spôsobmi.

5 Riešime úlohy na pravdepodobnosť

Viaceré úlohy z pravdepodobnosti úzko súvisia s riešením úloh z kombinatoriky. V živote sa častokrát zamýšľame, aká je šanca či pravdepodobnosť, že nastane alebo nenastane nejaký jav.

Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa, ako môže riešiť jednoduché úlohy z pravdepodobnosti. Čitateľ sa naučí používať pojmy šanca a pravdepodobnosť na úrovni žiaka základnej školy a riešiť slovné úlohy s touto tematikou. Oboznámi sa tu aj s pojmami istý jav a nemožný jav a bude vedieť riešiť slovné úlohy na tieto javy.

Vysvetlenie 1:

Pojem pravdepodobnosť nebudeme presne definovať. Uspokojíme sa s tým, že pravdepodobnosť, že nastane nejaká udalosť, budeme chápať ako podiel počtu priaznivých prípadov a počtu všetkých možných prípadov.

Pri hode kockou môžu padnúť čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, čo je šesť rovnako pravdepodobných možností. Preto hovoríme, že pravdepodobnosť, že pri hode kockou padne šestka, je jedna šestina. Pravdepodobnosť môžeme okrem zlomku vyjadriť aj desatinným číslom alebo percentami. Keďže 1 : 6 = 0,1667 = 16,67%, je pravdepodobnosť toho, že pri hode kockou padne šestka, 0,1667 alebo 16,67%.

Ak hodíme jednoeurovou mincou, môže padnúť na dve strany (národnú a európsku). Preto hovoríme, že pravdepodobnosť, že pri hode jednoeurovou mincou padne národná strana, je jedna polovica. Ak túto pravdepodobnosť vyjadríme desatinným číslom, je to 0,5, ak percentami, je to 50%.

Pravdepodobnosti teda priraďujeme číselnú hodnotu. Istému javu priradíme číslo 1, nemožnému javu číslo 0. Jav, ktorý s istotou nastane, má teda pravdepodobnosť 1 (alebo 100%). Jav, ktorý nemôže nastať, má pravdepodobnosť 0. Jav, ktorý nastať môže, ale nemusí, bude mať pravdepodobnosť väčšiu ako nula a menšiu ako 1.

Úloha 5.1: Manželia Novákovci šli na ples požiarnikov. V tombole sa predávalo 1000 lístkov a všetky a predali. Pán Novák si kúpil 10 lístkov, pani Nováková dvadsať. Aká je pravdepodobnosť, že pán Novák vyhrá prvú cenu? Aká je pravdepodobnosť, že pani Nováková vyhrá prvú cenu? Aká je pravdepodobnosť, že prvú cenu vyhrajú Novákovci?

Riešenie:

Prvú cenu budú žrebovať z tisíc možných lístkov. Teda celkový počet možností je 1000.

Pán Novák si kúpil 10 lístkov, teda priaznivých možností pre pána Nováka je 10.

Pravdepodobnosť, že pán Novák vyhrá prvú cenu, je teda 10 : 1000 = 0,01 = 1%.

Pani Nováková si kúpila 20 lístkov, teda priaznivých možností pre pani Novákovú je 20.

Pravdepodobnosť, že pani Nováková vyhrá prvú cenu, je teda 20 : 1000 = 0,02 = 2%.

Novákovci si kúpili 30 lístkov, teda priaznivých možností pre Novákovcov je 30.

Pravdepodobnosť, že Novákovci vyhrajú prvú cenu, je teda 30 : 1000 = 0,03 = 3%.

Úloha 5.2: Janko a Marienka hrali celý večer kocky. Hádzali naraz dvoma kockami. Ak padol súčet 12, dala Marienka Jankovi 1 Euro. Ak padol súčet 7, dal Janko 1 Euro Marienke. Na konci večera Janko zistil, že prehral dosť veľa peňazí. Povedal Marienke: „Dnes si mala veľké šťastie." Mala Marienka naozaj iba šťastie? Alebo je dôvod, prečo častejšie vyhrávala?

Riešenie:

Pozrime sa, ako môže dopadnúť hod dvoma kockami. Zrejme nastane jeden z nasledujúcich 36 prípadov:

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6
	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	
		3+1	3+2	3+3	3+4	4+4	5+4	6+4		
			4+1	4+2	4+3	5+3	6+3			
				5+1	5+2	6+2				
					6+1					

V prvom stĺpci sú hody, ktoré dávajú súčet 2, v druhom hody, ktoré dávajú súčet 3, v treťom hody, ktoré dávajú súčet 4, atď.

Súčet 12, ktorý je priaznivý pre Janka, môže padnúť iba jediným spôsobom z 36 možných. Teda pravdepodobnosť, že Janko vyhrá 1 Euro, je 1/36.

Súčet 7, ktorý je priaznivý pre Marienku, môže padnúť až šiestimi spôsobmi z 36 možných. Teda pravdepodobnosť, že Marienka vyhrá 1 Euro, je 6/36 = 1/6.

Vidíme, že Marienka má pri každom hode šesťkrát vyššiu šancu na výhru ako Janko. To, že za večer vyhrala veľa peňazí, nie je teda vecou náhody či šťastia, ale jej vhodnej stratégie.

Úloha 5.3: Anka a Janka hádzali naraz dvoma mincami. Ak obe padli na národnú stranu, dala Anka Janke 1 Euro. Ak na národnú stranu padla iba jedna minca, dala 1 Euro Janka Anke. Pre koho je táto hra výhodnejšia? Kto bude vyhrávať, ak budú hrať dostatočne dlho?

Riešenie:

Označme si národnú stranu N a európsku stranu E.

Potom hod dvoma mincami môže dopadnúť jedným z nasledujúcich 4 spôsobov.

NN NE EN EE

Vidíme, že pre Janku je priaznivý iba jeden prípad, a to NN. Pravdepodobnosť výhry Janky je preto jedna štvrtina.

Pre Anku sú priaznivé až dva prípady, a to NE a EN. Pravdepodobnosť výhry Anky je preto dve štvrtiny, čo je jedna polovica.

Hra je oveľa výhodnejšia pre Anku. Po dostatočne dlhej dobe vyhrá pomerne veľa peňazí na úkor Janky.

Všimnime si, že hazardné hry, ktoré môžu na prvý pohľad vyzerať spravodlivo, v skutočnosti spravodlivé vôbec nemusia byť.

Úloha 5.4: Miška si vymyslela nasledovnú hru. Pod jeden z troch kalíškov ukryje dvojeurovú mincu. Príde k nej hráč, ktorý nevidel, kde ju ukryla a dá jej jedno euro. Potom si vyberie jeden kalíšok tak, že na neho položí ruku, ale nepohne ním. Miška potom jeden zo zvyšných kalíškov odkryje, samozrejme ten prázdny. Zostanú teda dva kalíšky, pod jedným je dvojeurová minca. Hráč si môže ponechať pôvodný kalíšok, alebo zmeniť rozhodnutie a vybrať si ten druhý, čo ostal. Ten zdvihne a ak je pod ním minca, vezme si ju ako výhru.

Miška tvrdí, že hra je spravodlivá, lebo hráč si napokon vyberá jeden z dvoch kalíškov, a teda má šancu vyhrať v polovici prípadov. Má pravdu? Alebo je možnosť, ako Mišku pripraviť o peniaze?

Riešenie:

To, že v druhej fáze vždy zmeníte svoje rozhodnutie, je návod, ako obrať Mišku o peniaze.

Prečo?

Na začiatku si totiž vyberáte jeden z troch kalíškov. Šanca, že si vyberiete ten, pod ktorým nie je minca, je teda dve tretiny. Potom Miška otočí ten druhý prázdny kalíšok. Vy následne zdvihnete ten, pod ktorým je minca a vezmete si ju. Máte teda šancu vyhrať dve tretiny, a nie jedna polovica, ako si Miška myslela.

Úloha 5.5: Vo vrecúšku sú 4 červené a 5 bielych guličiek.

a) Aká je pravdepodobnosť, že keď náhodne vyberieme jednu guličku, tak bude červená?
b) Koľko najmenej guličiek musíme naraz vybrať, aby sme mali istotu, že aspoň jedna z vybraných guličiek je červená?
c) Koľko najmenej guličiek musíme naraz vybrať, aby sme mali istotu, že vo výbere máme aspoň dve guličky rovnakej farby?
d) Aká je pravdepodobnosť, že ak naraz vyberieme dve guličky, budú obe červené?

Riešenie:

a) Guličiek je spolu 9. Červené sú štyri. Teda **pravdepodobnosť, že vyberieme červenú guličku, je štyri devätiny.**
b) Ak by sme vytiahli 5 alebo menej guličiek, mohli by byť všetky biele. Preto **ak chceme mať istotu, že sme vytiahli aspoň jednu červenú guličku, musíme naraz vybrať aspoň šesť guličiek**.
c) Ak by sme vytiahli 2 guličky, mohla by byť jedna červená a druhá biela. Preto **ak chceme mať istotu, že vo výbere máme aspoň dve guličky rovnakej farby, musíme naraz vybrať aspoň tri guličky**.
d) Tento prípad je trochu zložitejší.

Označme si červené guličky C_1, C_2, C_3, C_4 a biele B_1, B_2, B_3, B_4, B_5.

Potom ťah dvoch guličiek môže skončiť jedným z týchto 36 spôsobov:

C_1C_2	C_1C_3	C_1C_4	C_1B_1	C_1B_2	C_1B_3	C_1B_4	C_1B_5
	C_2C_3	C_2C_4	C_2B_1	C_2B_2	C_2B_3	C_2B_4	C_2B_5
		C_3C_4	C_3B_1	C_3B_2	C_3B_3	C_3B_4	C_3B_5
			C_4B_1	C_4B_2	C_4B_3	C_4B_4	C_4B_5
				B_1B_2	B_1B_3	B_1B_4	B_1B_5
					B_2B_3	B_2B_4	B_2B_5
						B_3B_4	B_3B_5
							B_4B_5

Pre zadanie úlohy je však priaznivých iba 6 spôsobov, a to:

C_1C_2 C_1C_3 C_1C_4 C_2C_3 C_2C_4 C_3C_4

Pravdepodobnosť, že ak naraz vyberieme dve guličky, tak budú obe červené, je šesť tridsaťšestín, čo je jedna šestina.

Úloha 5.6: Pri hre *Človeče, nehnevaj sa* treba na začiatku hodiť šestku. Niekedy máme dojem, že to trvá večne.

Skúste si zahrať začiatok tejto hry stokrát (ak ste skupinka, pôjde vám to rýchlejšie) a zapisujte si, v koľkých prípadoch vám padla šestka na prvý pokus, v koľkých až na druhý, v koľkých až na tretí, atď. Možno zistíte, že na prvý pokus je to najčastejšie. Alebo nie je?

Riešenie:

Vysvetlenie tejto úlohy zatiaľ mierne prevyšuje naše vedomosti.

Vieme, že pravdepodobnosť, že na prvý pokus padne šestka, je jedna šestina.

Aká je pravdepodobnosť, že šestka padne až na druhý pokus? Z 36 možných výsledkov dvoch hodov kockou je priaznivých 5 prípadov, a to 1 a 6, 2 a 6, 3 a 6, 4 a 6, 5 a 6. Pravdepodobnosť, že šestka padne až na druhý pokus, je teda 5/36.

Podobne sa dá ukázať, že pravdepodobnosť, že šestka padne až na tretí pokus, je 25/216, pravdepodobnosť, že šestka padne až na štvrtý pokus, je 125/1296, atď., teda vždy o niečo menej.

Pamätajte na to, keď budete nabudúce hrať *Človeče, nehnevaj sa***.**

Úloha 5.7: Janko naraz hádže dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť, že hodí súčet 7? Aká je pravdepodobnosť, že hodí súčet 11?

Nesprávne riešenie:

Pri hode dvoma kockami môže padnúť súčet 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, teda 11 rôznych súčtov. Preto pravdepodobnosť, že padne súčet 7, je 1/11. Podobne, pravdepodobnosť, že padne súčet 11, je 1/11.

Toto riešenie nie je správne, lebo súčty 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 nie sú pri hode dvoma kockami rovnako pravdepodobné.

Správne riešenie:

Pri hode dvoma kockami môžu nastať tieto prípady:

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Všetkých možných rovnako pravdepodobných prípadov je teda 36.

Súčet 7 môže teda padnúť 6 spôsobmi (1+6,2+5,3+4,4+3,5+2,6+1). Preto **pravdepodobnosť, že padne súčet 7, je 6/36=1/6.**

Súčet 11 môže teda padnúť 2 spôsobmi (5+6,6+5). Preto **pravdepodobnosť, že padne súčet 11, je 2/36=1/18.**

Úloha 5.8: Janko naraz hádže štyrmi mincami. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode padnú všetky štyri mince na rub? Aká je pravdepodobnosť, že pri hode padnú práve dve mince na rub?

Nesprávne riešenie:

Pri hode 4 mincami môžu na rub padnúť 4,3,2,1,0 mincí. Máme teda 5 rôznych výsledkov pokusu. Preto pravdepodobnosť, že na rub padnú všetky 4 mince, je 1/5. Podobne, pravdepodobnosť, že na rub padnú práve dve mince, je tiež 1/5.

Toto riešenie nie je správne, lebo javy, že na rub padnú 4,3,2,1,0 mincí, nie sú pri hode 4 mincami rovnako pravdepodobné.

Správne riešenie:

Označme si rub R a líc L. Pri hode 4 mincami môžu nastať tieto prípady:

RRRR

RRRL RRLR RLRR LRRR

RRLL RLRL RLLR LRRL LRLR LLRR

RLLL LRLL LLRL LLLR

LLLL

Všetkých možných rovnako pravdepodobných prípadov je teda 16.

Všetky mince na rub môžu padnúť iba jedným spôsobom. Preto **pravdepodobnosť, že padnú všetky mince na rub, je 1/16.**

Práve dve mince na rub môžu padnúť 6 spôsobmi. Preto **pravdepodobnosť, že práve dve mince padnú na rub, je 6/16=3/8.**

Úloha 5.9: Silvia a Monika sú spolužiačky pochádzajúce z rôznych rodín. Ich mamičky práve čakajú bábätko. Aká je pravdepodobnosť, že obe budú mať sestričku?

Riešenie:

Môžu nastať tieto štyri prípady:

Silvia má bračeka a Monika má bračeka

Silvia má bračeka a Monika má sestričku

Silvia má sestričku a Monika má bračeka

Silvia má sestričku a Monika má sestričku

Preto pravdepodobnosť, že obe budú mať sestričku, je jedna štvrtina alebo 25%.

Úloha 5.10: Janka vymyslela nasledovnú hru. Hráč vloží do banku 1 Euro. Potom naraz hodí troma kockami. Ak bude súčet väčší ako 15, vyhráva 15 Eur a vráti sa mu aj vklad z banku. Inak príde o svoj vklad.

Aká je pravdepodobnosť, že súčet pri hode troma kockami je väčší ako 15?

Je táto hra spravodlivá? Alebo je výhodná pre Janku?

Riešenie:

Najskôr si vypíšeme prípady, ako môže pri hode troma kockami padnúť súčet 18, 17 a 16. Sú to tieto prípady:

6 + 6 + 6	6 + 6 + 5	6 + 6 + 4
	6 + 5 + 6	6+ 4 + 6
	5 + 6 + 6	4 + 6 + 6
		6 + 5 + 5
		5 + 6 + 5
		5 + 5 + 6

Súčet väčší ako 15 môže pri hode troma kockami padnúť 10 rôznymi spôsobmi.

Pri hode troma kockami je celkovo 6 . 6 . 6 = 216 spôsobov, ako môže takýto hod dopadnúť (šesť možností na prvej kocke, šesť na druhej, šesť na tretej, použijeme pravidlo súčinu).

Preto pravdepodobnosť, že pri hode troma kockami padne súčet väčší ako 15, je 10/216, čo je približne 4,6%.

Predpokladajme, že by si hráč zahral hru 216-krát so všetkými možnými rôznymi výsledkami.

Hráč by vsadil do banku 216 Eur.

206 hier by prehral, teda prišiel by o 206 Eur.

V 10 hrách by vyhral 10 . 15 = 150 Eur.

Vidíme, že hra je pre hráča nevýhodná a pre Janku výhodná.

Úloha 5.11: Janka vymyslela nasledovnú hru. Hráč vloží do banku 1 Euro. Potom naraz hodí troma mincami. Ak padnú všetky na rovnakú stranu, vyhráva vopred určenú sumu a vráti sa mu aj vklad z banku. Inak príde o svoj vklad.

Aká je pravdepodobnosť, že pri hode troma mincami padnú všetky na rovnakú stranu?

Aká má byť výhra, aby hra bola spravodlivá?

Aká má byť výhra, aby hra bola výhodná pre Janku?

Riešenie:

Označme si strany mince ako N (národná) a E (európska).

Pri hode tromi mincami môže nastať týchto osem prípadov:

NNN, NNE, NEN, NEE, ENN, ENE, EEN, EEE

V dvoch z nich všetky mince padnú na rovnakú stranu.

Preto pravdepodobnosť, že pri hode troma mincami padnú všetky na rovnakú stranu, je 2/8, teda 1/4 alebo 25%.

Predpokladajme, že by si hráč zahral hru 8-krát so všetkými možnými rôznymi výsledkami.

Hráč by vsadil do banku 8 Eur.

6 hier by prehral, teda prišiel by o 6 Eur.

V 2 hrách by vyhral.

Aby hra bola spravodlivá, výhra musí byť 3 Eurá.

Ak bude výhra menej ako 3 Eurá, je hra výhodná pre Janku.

Úloha 5.12: Skupina 4 chlapcov a 4 dievčat (majú rôzne mená) sa rozhodla, že vytvoria 4 dvojice, ktoré pôjdu spolu do kina. Každý chlapec si vyžrebuje jedno dievča, s ktorým pôjde. Jankovi sa veľmi páči Miška.

Aká je pravdepodobnosť, že Janko pôjde s Miškou?

Aká je pravdepodobnosť, že Moniku si vyžrebuje Marek?

Koľký v poradí si má žrebovať Janko, aby mal čo najväčšiu pravdepodobnosť, že pôjde s Miškou?

Riešenie:

Každý chlapec má 4 možné dievčatá, s ktorými môže ísť. Preto **pravdepodobnosť, že Janko pôjde s Miškou, je jedna štvrtina** alebo 25%.

Každé dievča má 4 možných chlapcov, s ktorými môže ísť. Preto **pravdepodobnosť, že si Moniku vyžrebuje Marek, je jedna štvrtina** alebo 25%.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že **je jedno, koľký v poradí si Janko bude žrebovať. Pravdepodobnosť, že Janko pôjde s Miškou, je jedna štvrtina bez ohľadu na to, či si žrebuje ako prvý, druhý, tretí alebo posledný**.

Skúsme si posledný záver zdôvodniť aj inak. Predstavme si, že Janko žrebuje ako druhý. Prvý bol povedzme Marek. Žrebovania mohli dopadnúť takto:

Marek pôjde s	Janko pôjde s
Miška	Monika
Miška	Peťa
Miška	Zuzka
Monika	Miška
Monika	Peťa
Monika	Zuzka
Peťa	Miška
Peťa	Monika
Peťa	Zuzka
Zuzka	Monika
Zuzka	Peťa
Zuzka	Miška

Z 12 možných prípadov sa Jankovi ušla Miška v troch. Preto **pravdepodobnosť, že Janko pôjde s Miškou, je 3/12 = 1/4 = 25%.**

6 Stredné hodnoty a miery variability

Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa najčastejšie používané stredné hodnoty a miery variability so špeciálnym dôrazom na aritmetický priemer a jeho použitie.

Aritmetický priemer

Aritmetický priemer zadaných čísel vypočítame tak, že všetky čísla sčítame a získaný súčet vydelíme počtom čísel.

Úloha 6.1: Miško meria 146 cm a Paľko 132 cm. Aká je ich priemerná výška?

Riešenie:

Najskôr sčítame obe čísla: 146 + 132 = 278

Teraz súčet vydelíme dvoma: 278 : 2 = 139

Záver: Ich priemerná výška je 139 cm.

Pozorovanie:

Všimnime si, že Miško je od priemernej výšky o 7 cm vyšší, Paľko zasa o 7 cm nižší.

Táto skutočnosť nie je náhodná.

Pri priemere dvoch rôznych čísel je jedno z nich od priemeru väčšie presne o toľko, o koľko je to druhé menšie.

Úloha 6.2: V tabuľke sú uvedené výšky žiakov 7.B. Aká je priemerná výška žiaka v tejto triede?

138 cm	139 cm	142 cm	142 cm	144 cm	145 cm	146 cm	148 cm	148 cm
150 cm	151 cm	153 cm	153 cm	154 cm	155 cm	155 cm	157 cm	162 cm

Riešenie:

Najskôr všetky čísla sčítame:

138+139+142+142+144+145+146+148+148+150+151+153+

153+154+155+155+157+162=2682

Počet všetkých žiakov triedy je 18.

Preto súčet všetkých čísel vydelíme číslom 18.

2682 : 18 = 149

Záver: Priemerná výška žiakov 7.B je 149 cm.

Pozorovanie:

Všimnime si, že presne polovica žiakov je od priemernej výšky nižšia a polovica zasa vyššia. Približne takto aj chápeme aritmetický priemer – ako hodnotu, ktorá je približne v strede. **Táto skutočnosť však neplatí vždy.** Platí však, že priemerná hodnota čísel nie je menšia ako najnižšie z čísel a nie je väčšia ako najväčšie z čísel. Aj bez počítania sme teda vopred vedeli, že priemerná výška bude väčšia ako 138 cm a menšia ako 162 cm.

Úloha 6.3: Priemerná výška Aničky, Julky a Silvie je 147 cm. Anička meria 140 cm, Julka 145 cm. Koľko meria Silvia?

Riešenie 1:

Dievčatá sú tri a ich priemerná výška je 147 cm.

Preto súčet ich výšok musí byť $3 \cdot 147 = 441$ cm.

Silvia teda meria $441 - 140 - 145 = 156$ cm.

Záver: Silvia meria 156 cm.

Riešenie 2:

Anička je od priemeru o 7 cm nižšia a Julka je od priemeru o 2 cm nižšia.

Preto Silvia musí byť od priemeru o 9 cm vyššia.

Silvia teda meria $9 + 147 = 156$ cm.

Záver: Silvia meria 156 cm.

Úloha 6.4: Jožko má z matematiky štyri jednotky, dve dvojky a trojku. Aký je priemer jeho známok? Koľko jednotiek musí ešte dostať, aby mal priemer lepší ako 1,5?

Riešenie:

Súčet Jožkových známok je $1+1+1+1+2+2+3=11$.

Počet jeho známok je 7.

Jeho priemer je teda $11:7=1,57$.

Ak by dostal ešte jednu jednotku, bol by súčet jeho známok 12, počet 8, a teda priemer $12:8=1,5$.

Ak by dostal ešte dve jednotky, bol by súčet jeho známok 13, počet 9, a teda priemer $13:9=1,44$.

Záver: Priemer Jožkových známok je približne 1,57. Na to, aby bol jeho priemer lepší ako 1,5, musí dostať ešte aspoň dve jednotky.

Úloha 6.5: V triede je 12 chlapcov a 7 dievčat. Priemerná výška chlapca je 148 cm, dievčaťa 142 cm. Aká je priemerná výška žiaka v triede?

Riešenie:

Problém je v tom, že nepoznáme presné výšky žiakov, iba priemery dvoch skupín žiakov (chlapcov a dievčat).

Keďže priemerná výška chlapca je 148 cm a chlapcov je 12, musí byť súčet ich výšok $12 \cdot 148 = 1\,776$ cm.

Podobne, pretože priemerná výška dievčaťa je 142 cm a dievčat je 7, musí byť súčet ich výšok $7 \cdot 142 = 994$ cm.

Súčet výšok všetkých žiakov je potom $1\,776 + 994 = 2\,770$ cm.

Pretože žiakov je 19, ich priemerná výška je $2\,770 : 19 = 145{,}79$.

Záver: Priemerná výška žiaka v triede je 145,79 cm.

Pozorovanie:

Všimnime si, že nemôžeme jednoducho spriemerovať čísla 148 cm a 142 cm. Ich priemer je totiž 145 cm, čo však nepredstavuje priemernú výšku žiaka v triede. Priemer čísel teda nemožno počítať tak, že vezmeme priemery dvoch či viacerých podskupín a z týchto priemerov vypočítame priemer celej skupiny.

Úloha 6.6: Balík obsahujúci 200 výkresov má hrúbku 4 cm. Aká je hrúbka jedného výkresu?

Riešenie:

Hrúbka jedného výkresu je $4 : 200 = 0{,}02$ cm $= 0{,}2$ mm.

Záver: Hrúbka jedného výkresu je 0,2 mm.

Pozorovanie:

Všimnime si, že aj takto možno využiť poznatky o aritmetickom priemere.

Pri výpočte aritmetického priemeru treba byť opatrní, ako to vidno aj na nasledujúcej úlohe.

Úloha 6.7: Nákladný automobil šiel z mesta A do mesta B vzdialeného 120 km priemernou rýchlosťou 40 km/h a späť priemernou rýchlosťou 60 km/h. Vypočítajte priemernú rýchlosť automobilu na trase tam a späť.

Nesprávne riešenie:

Ak by sme vypočítali aritmetický priemer rýchlostí, získame výsledok $\bar{x} = \frac{40+60}{2} = 50 \text{ km/h}$. Je to správne?

Z mesta A do mesta B išiel automobil rýchlosťou 40 km/h, teda mu to trvalo 3 hodiny.

Z mesta B späť do mesta A išiel automobil rýchlosťou 60 km/h, teda mu to trvalo 2 hodiny.

Celkovo teda išiel 5 hodín. Ak by jeho priemerná rýchlosť bola 50 km/h, musel by prejsť 250 km. Ale cesta z mesta A do mesta B a späť má iba 240 km!

Správne riešenie:

Automobil šiel z A do B rýchlosťou 40 km/h, teda prišiel za 3 hodiny. Späť šiel rýchlosťou 60 km/h, teda prišiel za 2 hodiny. Spolu teda prešiel 240 km za 5 hodín. Jeho priemerná rýchlosť teda bola $\frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}$.

Na nasledujúcich dvoch úlohách si zasa ukážeme, že aritmetický priemer nie vždy vyjadruje to, čo od neho očakávame, a to výkon typického jedinca, od ktorého je približne polovica jedincov horších a polovica lepších. Preto, aj keď ho však určíme správne, ešte stále nemusí byť najvhodnejšou charakteristikou pre hodnoty znaku v súbore. Je totiž veľmi ovplyvniteľný extrémnymi hodnotami, ktoré sa počas experimentu môžu náhodne vyskytnúť, hoci v celom základnom súbore je početnosť ich výskytu veľmi malá.

Úloha 6.8: V experimente bolo úlohou žiakov navliecť 60 korálikov na niť za čo najkratší čas. Experimentu sa zúčastnili šiesti žiaci. Časy piatich z nich boli 120, 150, 180, 200 a 240 sekúnd. Šiestemu sa však úloha vôbec nedarila a preto jeho čas bol až 1800 sekúnd. Vyjadruje aritmetický priemer výkon jedinca, od ktorého je približne polovica jedincov horších a približne polovica jedincov lepších?

Riešenie:

Aritmetický priemer je $\frac{120+150+180+200+240+1800}{6} = \frac{2690}{6} \doteq 448$ sekúnd.

Ako vidíme, aritmetický priemer nezodpovedá výkonu jedinca, od ktorého je približne polovica horších a polovica lepších. Je totiž veľmi ovplyvnený tým, že sa do náhodného experimentu dostalo jedno motoricky nie veľmi zručné dieťa. V tomto prípade aritmetický priemer nie je vhodnou charakteristikou súboru.

Úloha 6.9: V podniku pracuje sedem zamestnancov, ktorých mzda je 500, 550, 600, 630, 650, 680 a 710 Eur. Podnik riadia dvaja manažéri so mzdou 1400 eur. Aká je priemerná mzda v podniku?

Riešenie:

Aritmetický priemer je $\dfrac{500+550+600+630+650+680+710+1400+1400}{9} \approx 791$ Eur.

Ako vidíme, priemerná mzda nevyjadruje hodnotu, od ktorej približne polovica ľudí zarába viac a polovica menej. V tomto prípade takú vysokú mzdu okrem dvoch manažérov nemá nikto.

Úloha 6.10: V tabuľke sú uvedené výsledky 109 žiakov v teste z matematiky. Určte aritmetický priemer týchto žiakov v tomto teste.

Počet bodov	Počet žiakov
0	2
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	16
7	13
8	10
9	8
10	5

Riešenie:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 0+5\cdot 1+8\cdot 2+11\cdot 3+14\cdot 4+17\cdot 5+16\cdot 6+13\cdot 7+10\cdot 8+8\cdot 9+5\cdot 10}{2+5+8+11+14+17+16+13+10+8+5} = \frac{584}{109} \approx 5{,}36$$

Aritmetický priemer počtu bodov v tomto teste je približne 5,36.

Stredné hodnoty

Najčastejšie používané stredné hodnoty sú aritmetický priemer, geometrický priemer, harmonický priemer, modus, medián, kvartily a percentily.

Geometrický priemer

Geometrický priemer daných *n* kladných čísel vypočítame tak, že najprv všetkých *n* hodnôt vynásobíme a potom zo získaného súčinu vypočítame *n*-tú odmocninu.

Úloha 6.11: V teste z dejepisu dosiahlo 12 žiakov tieto výsledky: 5, 7, 11, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 25, 26, 28. Vypočítajte geometrický priemer tejto skupiny žiakov v danom teste.

Riešenie:

Geometrický priemer je

Teda: $\sqrt[12]{5\cdot 7\cdot 11\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 18\cdot 20\cdot 22\cdot 25\cdot 26\cdot 28} = \sqrt[12]{119037718800000} \doteq 14{,}89$.

Geometrický priemer žiakov v teste z dejepisu je 14,89.

Harmonický priemer

Harmonický priemer daných kladných čísel vypočítame tak, že najprv určíme súčet prevrátených hodnôt všetkých čísel a potom týmto súčtom vydelíme ich počet.

Úloha 6.12: V teste z dejepisu dosiahlo 12 žiakov tieto výsledky: 5, 7, 11, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 25, 26, 28. Vypočítajte harmonický priemer tejto skupiny žiakov v danom teste.

Riešenie:

Najprv určíme súčet prevrátených hodnôt.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\frac{1}{28} \doteq 0{,}93345$$

Teraz týmto súčtom vydelíme počet čísel.

$$\frac{12}{0{,}93345} \doteq 12{,}86$$

Harmonický priemer žiakov v teste z dejepisu je 12,86.

Teraz sa vráťme k úlohe 6.8 o navliekaní korálok šiestimi deťmi z časti o aritmetickom priemere.

Úloha 6.13: Vypočítajte harmonický priemer údajov z úlohy 6.8.

Riešenie:

Najprv určíme súčet prevrátených hodnôt.

$$\frac{1}{120}+\frac{1}{150}+\frac{1}{180}+\frac{1}{200}+\frac{1}{240}+\frac{1}{1800} \doteq 0{,}030278$$

Teraz týmto súčtom vydelíme počet čísel.

$$\frac{6}{0{,}030278} \doteq 198$$

Harmonický priemer časov detí navliekajúcich koráliky je 198 sekúnd.

Vidíme, že v tomto prípade harmonický priemer oveľa lepšie charakterizuje výkon „priemerného" jedinca ako aritmetický priemer.

Medián

Medián je tá hodnota z radu hodnôt zoradeného podľa veľkosti, ktorá delí tento rad na polovice. V prípade párneho počtu hodnôt považujeme za medián aritmetický priemer prostredných dvoch hodnôt.

Úloha 6.14: Určte medián z hodnôt 5, 8, 7, 12, 13, 6, 8, 4, 3, 2.

Riešenie:

Hodnoty usporiadame podľa veľkosti: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 12, 13.

Pretože počet hodnôt je 10, mediánom je aritmetický priemer 5. a 6. hodnoty (t.j. prostredných dvoch).

Medián = $\frac{6+7}{2}$ = 6,5.

Medián hodnôt je 6,5.

Úloha 6.15: Určte medián z hodnôt 5, 8, 7, 12, 13, 6, 4, 3, 2.

Riešenie:

Hodnoty usporiadame podľa veľkosti: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13.

Pretože počet hodnôt je 9, mediánom je piata hodnota v poradí (t.j. prostredná).

Medián hodnôt je 6.

Modus

Modus je tá hodnota, ktorá sa vyskytuje najčastejšie. Táto hodnota musí byť určená jednoznačne, inak nemožno uviesť modus.

Úloha 6.16: Určte modus z hodnôt 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7.

Riešenie:

Najčastejšie sa vyskytujúcou hodnotou je 4, ktorá sa vyskytuje trikrát. Teda **modus je 4.**

Úloha 6.17: Určte modus z hodnôt 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7.

Riešenie:

Pretože hodnoty 4 a 6 sa obe vyskytujú trikrát, **modus nemožno uviesť**.

Percentily, Kvartily

Percentily sú tie hodnoty z radu hodnôt zoradeného podľa veľkosti, ktoré sa vyskytujú na pozícii určenej percentami.

Napríklad hodnota, ktorá je 70. percentilom, je väčšia od 70% hodnôt a menšia od 30% hodnôt.

Podobne hodnota, ktorá je 10. percentilom, je väčšia od 10% hodnôt a menšia od 90% hodnôt.

Medián je 50. percentil. 25. percentil nazývame 1. kvartil. 75. percentil nazývame 3. kvartil. 1. kvartil je teda hodnota, ktorá je väčšia od 25% hodnôt a menšia od 75% hodnôt. Podobne, 3. kvartil je hodnota, ktorá je väčšia od 75% hodnôt a menšia od 25% hodnôt.

Úloha 6.18: V teste, ktorý písalo 2312 žiakov, bolo 754 žiakov od Janka horších. Aký je Jankov percentil? Koľko bodov v teste získal Janko?

Riešenie:

Percentil určuje, od koľko percent žiakov bol Janko lepší.

754 : 2312 = 33%

Jankov percentil je 33.

Percentil nám nič nevraví o tom, koľko bodov Janko získal. Na túto otázku na základe údajov v úlohe nemožno odpovedať.

Úloha 6.19: Na Testovaní 9 sa zúčastnilo približne 43000 žiakov. Od Janka ich bolo lepších približne 7500. Aký je Jankov percentil?

Riešenie:

Od Janka bolo lepších približne 7500 žiakov.

Teda on bol lepší približne od 43000 – 7500 = 35500 žiakov.

35500 : 43000 = 83%

Jankov percentil je 83.

Úloha 6.20: Na Testovaní 9 sa zúčastnilo približne 43000 žiakov. Miškin percentil bol 62. Od koľkých žiakov bola lepšia? Od koľkých žiakov bola horšia?

Riešenie:

0,62 . 43000 = 26660

Miška bola lepšia približne od 26660 žiakov a horšia približne od 43000 – 26660 = **16340 žiakov.**

Miery variability

Doteraz sme sa venovali stredným hodnotám. Teraz sa oboznámime s najčastejšie používanými mierami variability. Sú to variačné rozpätie, priemerná odchýlka, smerodajná odchýlka, rozptyl a Pearsonov variačný koeficient.

Variačné rozpätie

Variačné rozpätie je rozdiel medzi najväčšou a najmenšou hodnotou.

Úloha 6.21: V teste z dejepisu dosiahlo 12 žiakov tieto výsledky: 5, 7, 11, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 25, 26, 28. Vypočítajte variačné rozpätie.

Riešenie:

Rozdiel medzi najväčšou a najmenšou hodnotou je 28-5=23.

Variačné rozpätie je 23.

Priemerná odchýlka

Priemerná odchýlka je aritmetický priemer z absolútnych hodnôt odchýlok všetkých hodnôt rozdelenia od ich aritmetického priemeru. Vypočítame ju podľa vzorca $e = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n}$.

Úloha 6.22: Vypočítajte priemernú odchýlku hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21.

Riešenie:

Najprv určíme aritmetický priemer hodnôt.

(16 + 17 + 19 + 20 + 21 + 21) : 6 = 114 : 6 = 19

Aritmetický priemer je teda 19.

Teraz určíme absolútnu hodnotu rozdielov hodnôt a aritmetického priemeru.

|16-19|=3, |17-19|=2, |19-19|=0, |20-19|=1, |21-19|=2, |21-19|=2

Napokon určíme priemer absolútnych hodnôt rozdielov.

(3 + 2 + 0 + 1 + 2 + 2) : 6 = 10 : 6 = 1,67

Priemerná odchýlka hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21 **je 1,67.**

Rozptyl a smerodajná odchýlka, Pearsonov variačný koeficient

Rozptyl je súčet štvorcov odchýlok všetkých hodnôt rozdelenia od ich aritmetického priemeru delený počtom hodnôt (prípadne počtom hodnôt zmenšeným o 1, ak počítame rozptyl výberu). Vypočítame ho podľa vzorca $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$ (resp. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$).

Smerodajná odchýlka je odmocnina z rozptylu.

Pearsonov variačný koeficient je podielom smerodajnej odchýlky a aritmetického priemeru vyjadrený v percentách.

Úloha 6.23: Vypočítajte rozptyl, smerodajnú odchýlku a Pearsonov variačný koeficient hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21.

Riešenie 1:

Najprv určíme aritmetický priemer hodnôt.

(16 + 17 + 19 + 20 + 21 + 21) : 6 = 114 : 6 = 19

Aritmetický priemer je teda 19.

Teraz určíme druhé mocniny rozdielov hodnôt a aritmetického priemeru.

$(16-19)^2=9$, $(17-19)^2=4$, $(19-19)^2=0$, $(20-19)^2=1$, $(21-19)^2=4$, $(21-19)^2=4$

Teraz vypočítame súčet druhých mocnín rozdielov a vydelíme ho číslom 6 (počet čísel).

(9 + 4 + 0 + 1 + 4 + 4) : 5 = 22 : 6 = 3,67

Rozptyl hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21 **je približne 3,67.**

Smerodajná odchýlka je odmocnina z rozptylu.

Smerodajná odchýlka hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21 **je** $\sqrt{3{,}67}$ **= 1,91.**

Pearsonov variačný koeficient je podielom smerodajnej odchýlky a aritmetického priemeru vyjadrený v percentách.

Pearsonov variačný koeficient hodnôt **16, 17, 19, 20, 21, 21** je $\frac{1{,}91}{19} =$ 10,6%.

Riešenie 2 – pomocou tabuľky:

Najprv určíme aritmetický priemer hodnôt.

(16 + 17 + 19 + 20 + 21 + 21) : 6 = 114 : 6 = 19

Aritmetický priemer je teda $\overline{x} = 19$.

Teraz si vytvoríme tabuľku:

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
16	–3	9
17	–2	4
19	0	0
20	1	1
21	2	4
21	2	4
súčet		22

V prvom stĺpci máme zapísané čísla, v druhom ich odchýlku od priemeru a v treťom druhú mocninu tejto odchýlky. Súčet týchto druhých mocnín je 22.

Tento súčet vydelíme číslom 6 (počet čísel).

22 : 6 = 3,67

Rozptyl hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21 **je približne 3,67.**

Smerodajná odchýlka je odmocnina z rozptylu.

Smerodajná odchýlka hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21 **je** $\sqrt{3,67}$ **= 1,91.**

Pearsonov variačný koeficient je podielom smerodajnej odchýlky a aritmetického priemeru vyjadrený v percentách.

Pearsonov variačný koeficient hodnôt 16, 17, 19, 20, 21, 21 **je** $\frac{1,91}{19} =$ **10,6%.**

7 Prezentujeme údaje formou tabuliek a grafov

Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa pojmy početnosť, relatívna početnosť, kumulatívna početnosť a riešenie na nich zameraných slovných úloh. Taktiež sa oboznámite s prezentáciou údajov formou tabuľky a s grafickým spracovaním údajov formou kruhového diagramu a stĺpcového diagramu.

Štatistická jednotka je základný objekt pozorovania, na ktorom skúmame konkrétny jav. Štatistickou jednotkou teda môže byť napríklad žiak (skúmame jeho výšku), bežec (skúmame jeho výkon v behu na 12 minút), krajina (skúmame jej počet obyvateľov).
Štatistický súbor je množina všetkých štatistických jednotiek, na ktorých skúmame konkrétny jav. Štatistickým súborom teda môže byť množina žiakov našej školy, množina bežcov v našom oddiele, množina krajín Európy.
Rozsah štatistického súboru je počet štatistických jednotiek, ktoré do neho patria. Zvyčajne ho označujeme n.
Štatistický znak alebo **premenná** je merateľná vlastnosť štatistických jednotiek, z ktorých sa skladá štatistický súbor. Štatistickými znakmi sú napríklad výška človeka, výkon v dvanásťminútovom behu, počet obyvateľov krajiny.

Početnosť označuje počet, koľkokrát sa určitý štatistický znak s danou hodnotou nachádza v štatistickom súbore.
Napríklad:
- ak pri dvadsiatich hodoch kockou padne osemkrát číslo jedna, potom početnosť jednotky je osem,
- ak z tridsiatich dní v mesiaci september pršalo počas deviatich dní, potom početnosť daždivých dní je deväť,
- ak na vysvedčení mali z matematiky siedmi žiaci jednotku, potom početnosť jednotkárov je sedem.

Relatívna početnosť označuje, aká časť štatistického súboru má štatistický znak s danou hodnotou. Získame ju tak, že početnosť vydelíme rozsahom súboru. Môže, ale nemusí byť vyjadrená percentuálne.
Napríklad:

- ak pri dvadsiatich hodoch kockou padne osemkrát číslo jedna, potom početnosť jednotky je osem a jej relatívna početnosť je 8 : 20 = 0,4 = 40%,
- ak z tridsiatich dní v mesiaci september pršalo počas deviatich dní, potom početnosť daždivých dní je deväť a ich relatívna početnosť je 9 : 30 = 0,3 = 30%,
- ak na vysvedčení mali z matematiky siedmi žiaci jednotku a v triede je 20 žiakov, potom početnosť jednotkárov je sedem a ich relatívna početnosť je 7 : 20 = 0,35 = 35%.
Súčet relatívnych početností všetkých štatistických znakov je 1, respektíve 100%.

Kumulatívna početnosť označuje, koľkokrát v štatistickom súbore má štatistický znak hodnotu menšiu alebo rovnú ako daná hodnota (prípadne väčšiu alebo rovnú ako daná hodnota). Napríklad:
- ak pri dvadsiatich hodoch kockou padne osemkrát číslo jedna a dvakrát číslo dva, potom kumulatívna početnosť pre padnutie čísla menšieho alebo rovného dvom je 8 + 2 = 10,
- ak na vysvedčení mali z matematiky siedmi žiaci jednotku, štyria dvojku a traja trojku, potom kumulatívna početnosť žiakov so známkou lepšou alebo rovnou trojke je 7 + 4 + 3 = 14.

Relatívna kumulatívna početnosť označuje, aká časť štatistického súboru má štatistický znak s hodnotou menšou alebo rovnou danej hodnote (alebo väčšou alebo rovnou danej hodnote). Získame ju tak, že kumulatívnu početnosť vyjadríme v percentách.
Napríklad:
- ak pri dvadsiatich hodoch kockou padne osemkrát číslo jedna a dvakrát číslo dva, potom relatívna kumulatívna početnosť pre padnutie čísla menšieho alebo rovného dvom je (8 + 2) : 20 = 10 : 20 = 50%,
- ak na vysvedčení mali z matematiky siedmi žiaci jednotku, šiesti dvojku a piati trojku, pričom v triede je 20 žiakov, potom relatívna kumulatívna početnosť žiakov so známkou lepšou alebo rovnou trojke je (7 + 6 + 5) : 20 = 18 : 20 = 90%.

Úloha 7.1: Pred koncom roka uzatváral učiteľ matematiky koncoročné známky svojim 20 žiakom. Jednotku mali Miška, Hanka, Jurko, Peťko, Denis a Michal, dvojku Janka, Anka, Silvia, Mirka, Denisa, Alex, Milan a Stanko, trojku Natália, Kristínka, Tibor, Marcel a Boris a štvorku mal iba Patrik. Doplňte nasledujúce tabuľky.

Známka	Počet-nosť	Relat. počet.	Kumul. počet.	Relat. kumul. počet.
1				
2				
3				
4				
5				

Pohlavie	Početnosť	Relatívna početnosť
chlapec		
dievča		

Riešenie:

Pretože jednotkárov je 6, ich početnosť je 6. Žiakov je spolu 20. Preto relatívna početnosť jednotkárov je 6 : 20 = 0,3 = 30%. Do riadku so známkou 1 teda doplníme do druhého stĺpca číslo 6 a do tretieho buď 0,3 alebo 30%. To isté doplníme aj pre kumulatívnu (resp. relatívnu kumulatívnu) početnosť.

Pretože dvojkárov je 8, ich početnosť je 8. Relatívna početnosť dvojkárov je 8 : 20 = 0,4 = 40%. Do riadku so známkou 2 teda doplníme do druhého stĺpca číslo 8 a do tretieho buď 0,4 alebo 40%. Početnosť žiakov so známkou lepšou alebo rovnou dvojke je 6 + 8 = 14. Preto bude kumulatívna početnosť v druhom riadku 14. Relatívna kumulatívna početnosť potom bude 14 : 20 = 70%.

Pretože trojkárov je 5, ich početnosť je 5. Relatívna početnosť trojkárov je 5 : 20 = 0,25 = 25%. Početnosť žiakov so známkou lepšou alebo rovnou trojke je 6 + 8 + 5 = 19. Preto bude kumulatívna početnosť v treťom riadku 19. Relatívna kumulatívna početnosť potom bude 19 : 20 = 95%.

Pretože štvorkár je iba jeden, je početnosť štvorkárov 1. Ich relatívna početnosť je 1 : 20 = 0,05 = 5%. Početnosť žiakov so známkou lepšou alebo rovnou štvorke je 6 + 8 + 5 + 1 = 20. Preto bude kumulatívna početnosť v štvrtom riadku 20. Relatívna kumulatívna početnosť potom bude 20 : 20 = 100%.

Nakoľko pätorku nemal žiaden žiak, ich početnosť aj relatívna početnosť je nula. Ich kumulatívna početnosť je 20 a relatívna kumulatívna početnosť 100%.

Pretože chlapcov je 11, ich početnosť je 11. Relatívna početnosť chlapcov je 11 : 20 = 0,55 = 55%.

Pretože dievčat je 9, ich početnosť je 9. Relatívna početnosť dievčat je 9 : 20 = 0,45 = 45%.

Známka	Počet-nosť	Relat. počet.	Kumul. počet.	Relat. kumul. počet.
1	6	30%	6	30%
2	8	40%	14	70%
3	5	25%	19	95%
4	1	5%	20	100%
5	0	0%	20	100%

Pohlavie	Početnosť	Relatívna početnosť
chlapec	11	55%
dievča	9	45%

Všimnime si, že súčet relatívnych početností je v oboch tabuľkách 100%.

Úloha 7.2: Marcel hrával juniorskú ligu v hádzanej. Počas sezóny odohral 25 zápasov. Počet gólov, ktoré strelil, je zaznamenaný v tabuľke.

Počet gólov v zápase	Početnosť takýchto zápasov
3	2
4	8
5	5
6	7
7	3

Odpovedzte na otázky:

Čo vyjadruje druhý riadok tabuľky?

Koľko najmenej gólov dal Marcel v zápase?

Koľko najviac gólov dal Marcel v zápase?

Aký je najčastejší počet gólov, ktoré dal Marcel v zápase?

Koľko gólov dal Marcel spolu vo všetkých zápasoch?

Koľko gólov dal Marcel priemerne v jednom zápase?

Riešenie:

Druhý riadok tabuľky vyjadruje, že Marcel odohral dva také zápasy, v ktorých v každom dal tri góly.

Marcel dal v zápase najmenej tri góly.

Marcel dal v zápase najviac sedem gólov.

Najčastejší počet gólov, ktoré dal Marcel v zápase, je 4. Takto dopadlo osem jeho zápasov.

V 2 zápasoch dal po 3 góly, to je spolu $2 \cdot 3 = 6$.

V 8 zápasoch dal po 4 góly, to je spolu $8 \cdot 4 = 32$.

V 5 zápasoch dal po 5 gólov, to je spolu $5 \cdot 5 = 25$.

V 7 zápasoch dal po 6 gólov, to je spolu $7 \cdot 6 = 42$.

V 3 zápasoch dal po 7 gólov, to je spolu $3 \cdot 7 = 21$.

Spolu teda dal 6 + 32 + 25 + 42 + 21 = 126 gólov.

Marcel dal spolu 126 gólov v 25 zápasoch. Priemerne teda dal 126 : 25 = 5,04 gólu na zápas.

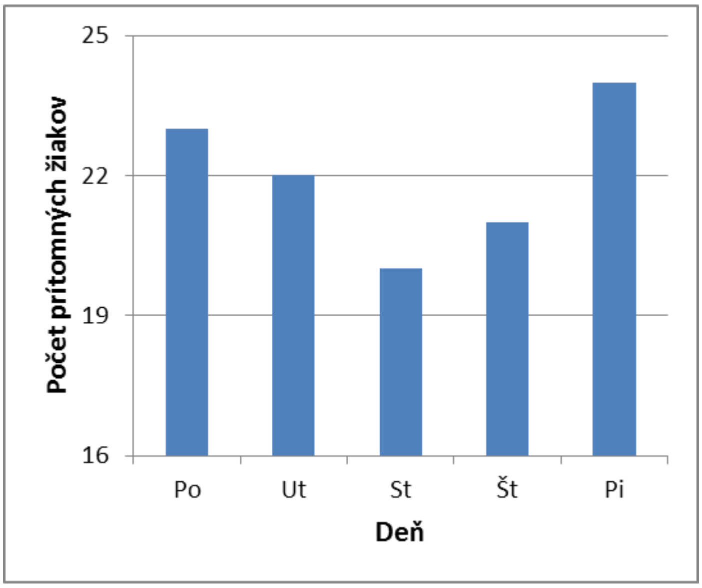
Úloha 7.3: Na stĺpcovom diagrame je znázornený počet žiakov, ktorí boli v triede 9.A prítomní na vyučovaní počas týždňa. V triede je spolu 25 žiakov. Doplňte tabuľku a odpovedzte na otázky.

Deň	**Početnosť prítomných žiakov**	**Relatívna početnosť prítomných žiakov**
Pondelok		
Utorok		
Streda		
Štvrtok		
Piatok		

V ktorý deň chýbalo najviac žiakov? Koľko?

V ktorý deň chýbalo najmenej žiakov? Koľko?

Koľko žiakov chýbalo priemerne v jeden deň?



Riešenie:

Z diagramu vidíme, že v pondelok bolo prítomných 23 žiakov. To je početnosť prítomných žiakov v pondelok. Relatívna početnosť je potom 23 : 25 = 0,92 = 92%.

V utorok bolo prítomných 22 žiakov. Relatívna početnosť je potom 22 : 25 = 0,88 = 88%.

V stredu bolo prítomných 20 žiakov. Relatívna početnosť je potom 20 : 25 = 0,8 = 80%.

Vo štvrtok bolo prítomných 21 žiakov. Relatívna početnosť je potom 21 : 25 = 0,84 = 84%.

V piatok bolo prítomných 24 žiakov. Relatívna početnosť je potom 24 : 25 = 0,96 = 96%.

Deň	**Početnosť prítomných žiakov**	**Relatívna početnosť prítomných žiakov**
Pondelok	23	92 %
Utorok	22	88 %
Streda	20	80 %
Štvrtok	21	84 %
Piatok	24	96 %

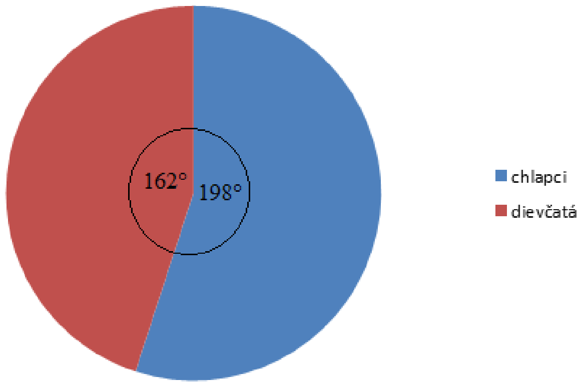
Najviac žiakov chýbalo v stredu. Boli to 5 žiaci

Najmenej žiakov chýbalo v piatok. Bol to iba jeden žiak.

Priemerne chýbali (2 + 3 + 5 + 4 + 1) : 5 = 3 žiaci.

Úloha 7.4: Pred koncom roka uzatváral učiteľ matematiky koncoročné známky svojim 20 žiakom. Jednotku mali Miška, Hanka, Jurko, Peťko, Denis a Michal, dvojku Janka, Anka, Silvia, Mirka, Denisa, Alex, Milan a Stanko, trojku Natália, Kristínka, Tibor, Marcel a Boris a štvorku mal iba Patrik. Pomocou rysovacích pomôcok vyrobte kruhový diagram znázorňujúci počet chlapcov a dievčat v tejto triede.

Riešenie:



Kruhový diagram narysujeme pomocou kružidla. Jediným problémom zostáva, ako správne rozdeliť kruh na dve časti v takom pomere, v akom sú chlapci a dievčatá z danej triedy.

Pretože chlapcov je 11, ich početnosť je 11. Relatívna početnosť chlapcov je 11 : 20 = 0,55. Keďže veľkosť stredového uhla prislúchajúceho celej kružnici je 360°, bude veľkosť stredového uhla prislúchajúceho chlapcom 0,55 · 360 = 198°.

Pretože dievčat je 9, ich početnosť je 9. Relatívna početnosť dievčat je 9 : 20 = 0,45. Keďže veľkosť stredového uhla prislúchajúceho celej kružnici je 360°, bude veľkosť stredového uhla prislúchajúceho dievčatám 0,45 · 360 = 162°.

Úloha 7.5: Na grafe relatívnej početnosti sú znázornené výsledky písomnej práce z matematiky v triede 8.A, do ktorej chodí 20 žiakov. Doplňte tabuľku.

Známka	početnosť	relatívna početnosť	kumulatívna početnosť	relatívna kumulatívna početnosť
1				
2				
3				
4				
5				

Riešenie:

Jednotku podľa údajov v grafe získalo 20% žiakov, čo predstavuje 0,20 . 20 = 4 žiakov.

Dvojku podľa údajov v grafe získalo 30% žiakov, čo predstavuje 0,30 . 20 = 6 žiakov.

Trojku podľa údajov v grafe získalo 25% žiakov, čo predstavuje 0,25 . 20 = 5 žiakov.

Štvorku podľa údajov v grafe získalo 15% žiakov, čo predstavuje 0,15 . 20 = 3 žiakov.

Pätorku podľa údajov v grafe získalo 10% žiakov, čo predstavuje 0,10 . 20 = 2 žiakov.

Kumulatívna početnosť pre jednotku je 4 a relatívna kumulatívna početnosť je 20%.

Kumulatívna početnosť pre dvojku je 4+6=10 a relatívna kumulatívna početnosť je 10:20=50%.

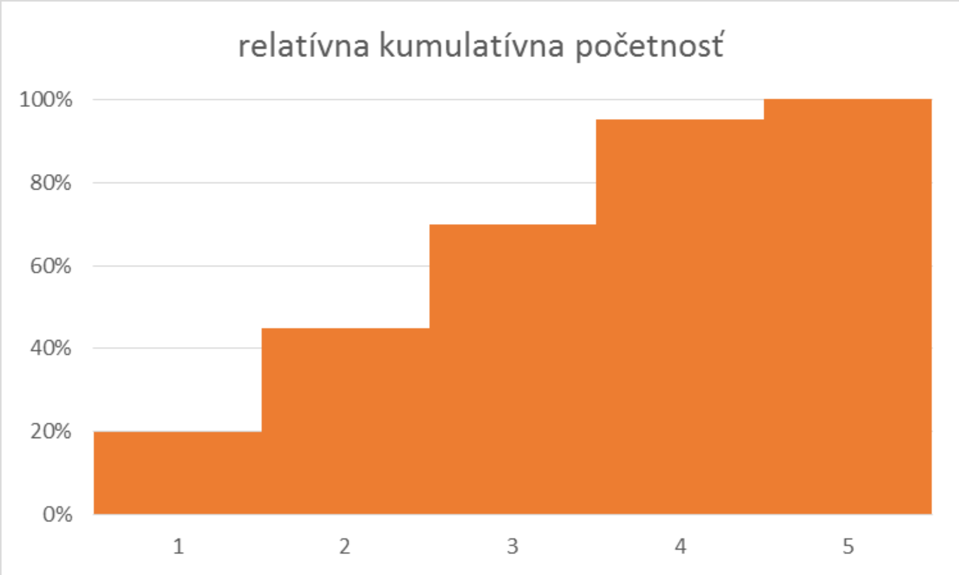
Kumulatívna početnosť pre trojku je 4+6+5=15 a relatívna kumulatívna početnosť je 15:20=75%.

Kumulatívna početnosť pre štvorku je 4+6+5+3=18 a relatívna kumulatívna početnosť je 18:20=90%.

Kumulatívna početnosť pre pätorku je 4+6+5+3+2=20 a relatívna kumulatívna početnosť je 20:20=100%.

Známka	početnosť	relatívna početnosť	kumulatívna početnosť	relatívna kumulatívna početnosť
1	4	20%	4	20%
2	6	30%	10	50%
3	5	25%	15	75%
4	3	15%	18	90%
5	2	10%	20	100%

Úloha 7.6: Na grafe relatívnej kumulatívnej početnosti sú znázornené výsledky písomnej práce z matematiky v triede 8.A, do ktorej chodí 20 žiakov. Zostrojte tabuľku početnosti, relatívnej početnosti, kumulatívnej početnosti a relatívnej kumulatívnej početnosti. Potom odpovedzte na otázky:



Koľko percent žiakov malo jednotku?

Koľko percent žiakov malo trojku?

Koľkí žiaci mali dvojku?

Aká bola priemerná známka?

Riešenie:

Nakoľko je daný graf relatívnej kumulatívnej početnosti, najskôr v tabuľke vyplníme relatívnu kumulatívnu početnosť. Pre jednotku je to 20%, pre dvojku 45%, pre trojku 70%, pre štvorku 95% a pre pätorku 100%.

Z toho potom vypočítame relatívnu početnosť. Pre jednotku je to 20%, pre dvojku 45-20=25%, pre trojku 70-45=25%, pre štvorku 95-70=25% a pre pätorku 100-95=5%.

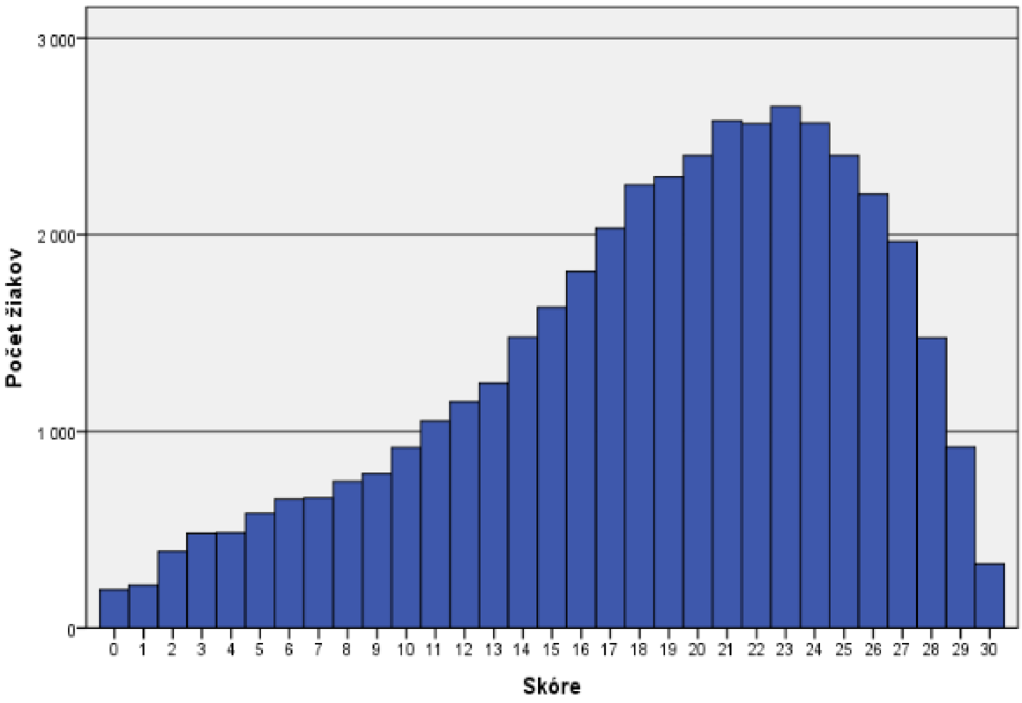
Pretože žiakov bolo 20, jeden žiak predstavuje 5%. Údaje pre početnosť a kumulatívnu početnosť teda vypočítame tak, že údaje pre relatívnu početnosť a relatívnu kumulatívnu početnosť vydelíme 5%.

Známka	početnosť	relatívna početnosť	kumulatívna početnosť	relatívna kumulatívna početnosť
1	4	20%	4	20%
2	5	25%	9	45%
3	5	25%	14	70%
4	5	25%	19	95%
5	1	5%	20	100%

Úloha 7.7: Na grafe sú výsledky Testovania 5 z matematiky v roku 2015, ktorého sa zúčastnilo približne 43 000 žiakov.

(Zdroj: http://www.nucem.sk/documents//46/testovanie_5_2015/SPRAVA_T5_2015_na_zverejnenie.pdf)

Obrázok 3 znázorňuje rozloženie dosiahnutých bodov (skóre) v teste z matematiky.



Obr. 3 Histogram skóre žiakov v teste z MAT

Odpovedzte na otázky:

Koľko žiakov získalo skóre 27?

Koľko žiakov získalo skóre menšie ako 10?

Koľko žiakov získalo skóre aspoň 25?

Janko získal skóre 7. Aký je jeho percentil?

Miška získala skóre 25. Aký je jej percentil?

Ankin percentil bol 90. Aké mala skóre?

Riešenie:

Koľko žiakov získalo skóre 27?

Skóre 27 získalo približne 1950 žiakov.

Koľko žiakov získalo skóre menšie ako 10?

Skóre 0 získalo približne 200 žiakov.

Skóre 1 získalo približne 250 žiakov.

Skóre 2 získalo približne 400 žiakov.

Skóre 3 získalo približne 500 žiakov.

Skóre 4 získalo približne 500 žiakov.

Skóre 5 získalo približne 600 žiakov.

Skóre 6 získalo približne 700 žiakov.

Skóre 7 získalo približne 700 žiakov.

Skóre 8 získalo približne 750 žiakov.

Skóre 9 získalo približne 800 žiakov.

Skóre menšie ako 10 získalo približne 200 + 250 + 400 + 500 + 500 + 600 + 700 + 700 + 750 + 800 = **5400 žiakov.**

Koľko žiakov získalo skóre aspoň 25?

Skóre 25 získalo približne 2400 žiakov.

Skóre 26 získalo približne 2200 žiakov.

Skóre 27 získalo približne 1950 žiakov.

Skóre 28 získalo približne 1500 žiakov.

Skóre 29 získalo približne 900 žiakov.

Skóre 30 získalo približne 350 žiakov.

Skóre aspoň 25 získalo približne 2400 + 2200 + 1950 + 1500 + 900 + 350 = **9300 žiakov.**

Janko získal skóre 7. Aký je jeho percentil?

Najprv zistíme, koľko žiakov získalo skóre od 0 do 6.

Skóre od nula do šesť získalo približne 200 + 250 + 400 + 500 + 500 + 600 + 700 = 3150 žiakov.

Pričítame polovicu žiakov s rovnakým výsledkom, ako mal Janko (teda so skóre 7).

3150 + 700 : 2 = 3500

Tento počet vydelíme celkovým počtom žiakov.

3500 : 43000 = 0,08 = 8%

Jankov percentil je približne 8.

Miška získala skóre 25. Aký je jej percentil?

Už vieme, že skóre aspoň 25 získalo približne 9300 žiakov.

Teda skóre od 0 po 24 získalo približne 43000 – 9300 = 33700 žiakov.

Pričítame polovicu žiakov s rovnakým výsledkom, ako mala Miška (teda so skóre 25).

33700 + 2400 : 2 = 34900

Tento počet vydelíme celkovým počtom žiakov.

34900 : 43000 = 0,81 = 81%

Miškin percentil je približne 81.

Ankin percentil bol 90. Aké mala skóre?

Ak bol Ankin percentil 90, potom od nej bolo lepších približne 10 percent žiakov, čo je približne 0,10 . 43000 = 4300 žiakov.

Skóre 30 získalo približne 350 žiakov.

Skóre aspoň 29 získalo približne 350 + 900 = 1250 žiakov.

Skóre aspoň 28 získalo približne 350 + 900 + 1500 = 2750 žiakov.

Skóre aspoň 27 získalo približne 350 + 900 + 1500 + 1950 = 4700 žiakov.

Ankine skóre bolo 27.

8 Dvojrozmerné rozdelenia

Cieľom tejto kapitoly je naučiť čitateľa, ako formou tabuľky a grafu prezentovať závislosť dvoch veličín. Preto sa v tejto časti budeme venovať charakteristike súvislosti medzi dvoma premennými.

Uveďme si niekoľko príkladov:

1. Premenná *X* predstavuje telesnú výšku detí určitého veku, premenná *Y* ich hmotnosť. Skúmame súvislosť medzi výškou a hmotnosťou uvedených detí.
2. Premenná *X* predstavuje poradie detí podľa ich priemerného prospechu, premenná *Y* ich poradie podľa obľúbenosti u spolužiakov. Skúmame súvislosť medzi priemerným prospechom a obľúbenosťou v kolektíve.
3. Premenná *X* predstavuje pohlavie, premenná *Y* vyjadruje, či dieťa prospelo alebo neprospelo z matematiky v 8. ročníku ZŠ. Skúmame súvislosť medzi pohlavím a prospievaním ôsmakov na ZŠ.

Pri skúmaní súvislosti medzi dvoma premennými môžu nastať rôzne situácie:

1. zhoda - veľkým hodnotám premennej *X* zodpovedajú veľké hodnoty premennej *Y* (napríklad s rastúcou výškou ľudí rastie aj ich hmotnosť alebo čím lepšiu známku mal žiak z matematiky na vysvedčení, tým lepšie by mal zvládnuť aj kontrolný test),

2. protiklad - veľkým hodnotám premennej *X* zodpovedajú malé hodnoty premennej *Y* (napríklad s rastúcim vekom ľudí klesá percento tých, ktorí nemajú skúsenosť s požitím alkoholického nápoja),

3. nezávislosť - veľkým hodnotám premennej *X* zodpovedajú tak veľké, ako aj malé či stredné hodnoty premennej *Y* (napríklad telesná výška ľudí len málo súvisí s hodnotou IQ).

Úloha 8.1: V tabuľke sú uvedené výsledky 34 žiakov v dvoch testoch.

č. žiaka	známka z mat.	známka z fyz.	č. žiaka	známka z mat.	známka z fyz.	č. žiaka	známka z mat.	známka z fyz.
1	2	2	13	3	2	25	3	3
2	2	3	14	3	2	26	3	3
3	1	2	15	2	1	27	3	2
4	1	1	16	3	3	28	3	3
5	3	2	17	3	3	29	2	2
6	2	2	18	2	2	30	2	2
7	3	3	19	3	3	31	2	1

8	3	4
9	1	1
10	2	2
11	4	4
12	3	3

2	3	4
21	2	2
22	2	2
23	4	4
24	3	3

32	5	5
33	2	2
34	4	5

Navrhnite vhodnejšiu formu prezentácie formou tabuľky a grafu.

Riešenie:

Vhodná prezentácia formou tabuľky má napríklad tvar kontingenčnej tabuľky z Excelu.

		známka z fyziky					
		1	2	3	4	5	
známka z matematiky	1	2	1				3
	2	2	9	1			12
	3		4	9	2		15
	4				2	1	3
	5					1	1
		4	14	10	4	2	34

Údaje v tabuľke interpretujeme takto:

4 žiaci mali z matematiky známku 3 a z fyziky známku 2

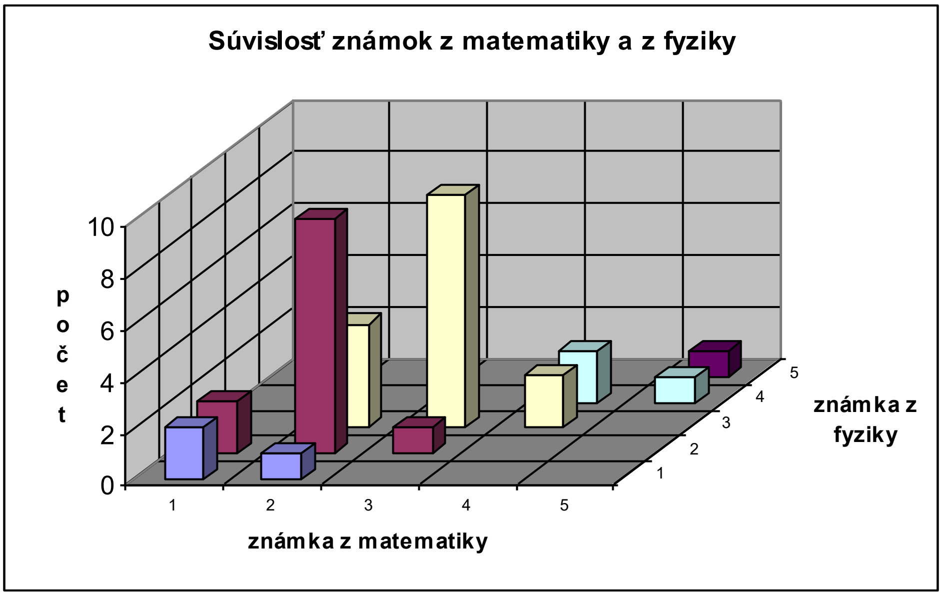
dvojku z matematiky malo 12 žiakov

trojku z fyziky malo 10 žiakov

v triede je 34 žiakov

Z tejto formy tabuľky vidíme, či údaje majú tendenciu sa vyskytovať v okolí hlavnej diagonály, prípadne vedľajšej. Ak sa vyskytujú v okolí jednej diagonály, poukazuje to na určitú súvislosť medzi oboma premennými. Ak sú približne rovnomerne rozmiestnené v celej tabuľke, súvislosť medzi premennými je prakticky nulová.

Údaje možno taktiež interpretovať vo forme trojrozmerného diagramu.



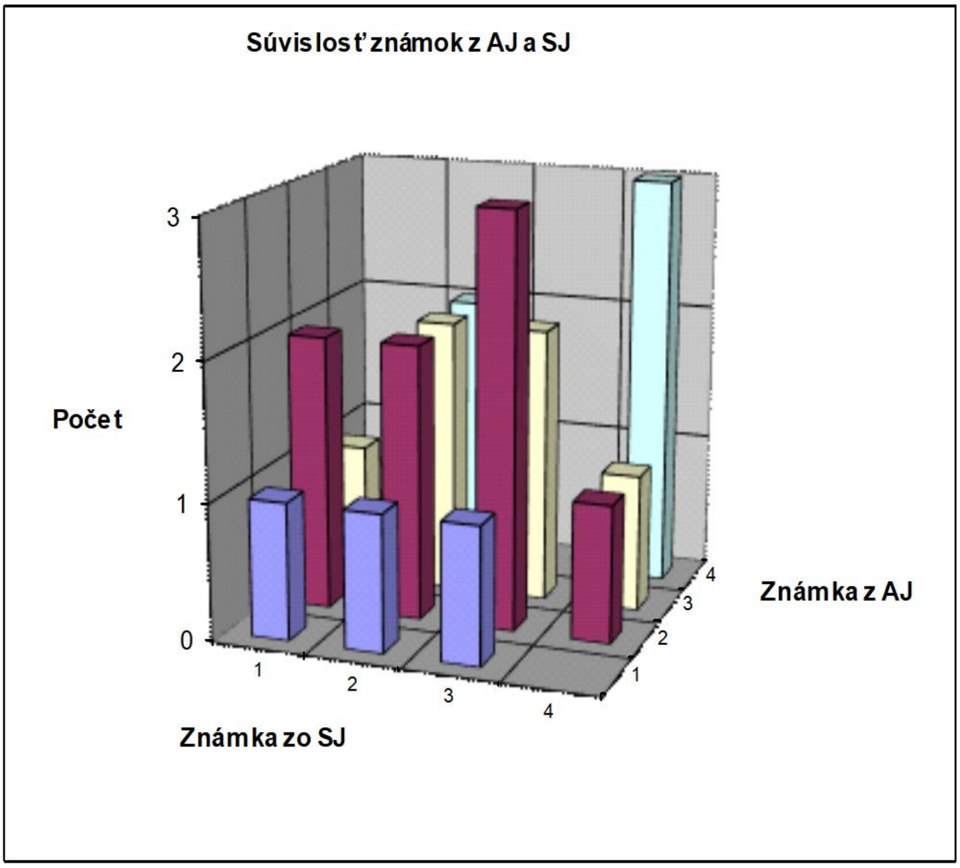
Úloha 8.2: V tabuľke sú uvedené údaje o známke z maturity zo slovenského a anglického jazyka. Znázornite ich vo forme prehľadnejšej tabuľky a vo forme trojrozmerného diagramu.

č. žiaka	SJ	AJ	č. žiaka	SJ	AJ	č. žiaka	SJ	AJ
1	1	1	9	2	3	17	3	3
2	1	2	10	2	4	18	4	2
3	1	2	11	2	4	19	4	3
4	1	3	12	3	1	20	4	4
5	2	1	13	3	2	21	4	4
6	2	2	14	3	2	22	4	4
7	2	2	15	3	2			
8	2	3	16	3	3			

Riešenie:

Vhodná prezentácia formou tabuľky má napríklad tvar kontingenčnej tabuľky z Excelu.

		známka zo SJ				
		1	2	3	4	
známka z AJ	1	1	1	1		3
	2	2	2	3	1	8
	3	1	2	2	1	6
	4		2		3	5
		4	7	6	5	22



Úloha 8.3: V triede 8.B je 36 žiakov, z toho 15 chlapcov a 21 dievčat. Z matematiky neprospel jeden chlapec a dve dievčatá. Zapíšte tieto údaje formou prehľadnej tabuľky a potom vypočítajte aj relatívne početnosti. Znázornite údaje v grafickej podobe.

Riešenie:

Údaje zapíšeme do tabuľky.

		Pohlavie		spolu
		chlapec	dievča	
prospech z matematiky	prospel	14	19	33
	neprospel	1	2	3
spolu		15	21	36

Údaje z tabuľky čítame napríklad takto: Z 36 žiakov je 21 dievčat, z ktorých 19 prospelo z matematiky.

Teraz urobíme tabuľku relatívnych početností.

14 z 15 chlapcov predstavuje 93,3%.

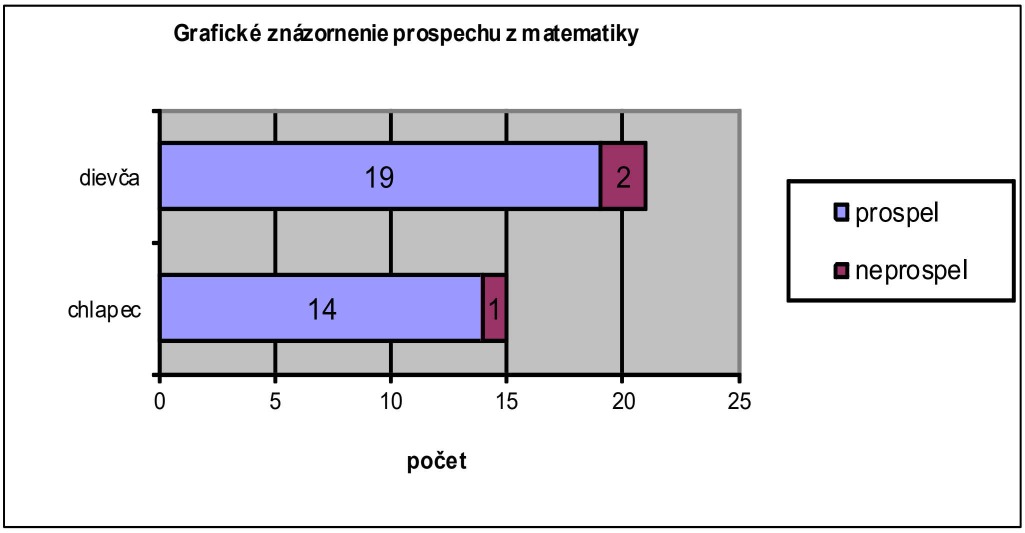
1 z 15 chlapcov predstavuje 6,7%.

19 z 21 dievčat predstavuje 90,5%.

2 z 21 dievčat predstavuje 9,5%.

		Pohlavie	
		chlapec	dievča
prospech z matematiky	prospel	93,3%	90,5%
	neprospel	6,7%	9,5%

Graficky možno údaje znázorniť napríklad takto:



9 Autotesty

Autotest č. 1 – Kombinatorika

1. Na futbalovom turnaji sa zúčastnilo šesť mužstiev. Odohrali zápasy každý s každým. Koľko zápasov odohrali spolu?
2. K dispozícii máme tri jednotky a dve dvojky. Koľko rôznych päťciferných čísel možno z nich zostaviť?
3. Koľko rôznych štvorciferných čísel vieme vytvoriť z číslic 2,3,5,8, ak každú možno použiť iba raz?
4. Koľkými rôznymi spôsobmi môže na troch rovnakých hracích kockách padnúť súčet 10?
5. Koľkými rôznymi spôsobmi môže na troch rôznych hracích kockách (modrej, žltej a zelenej) padnúť súčet 10?
6. V obchode majú štyri druhy čokolád Milka. Koľkými spôsobmi si môžeme zakúpiť tri čokolády?
7. Na kružnici si zvoľte 5 rôznych bodov. Koľko priamok tieto body určujú?
8. Na kružnici si zvoľte 5 rôznych bodov. Koľko viete vytvoriť trojuholníkov, ktorých vrcholmi sú tieto body?
9. Snehuliak sa skladá z troch kruhov. Každý kruh má inú farbu. Janko má 4 farebné pastelky. Koľko rôznych snehuliakov vie nakresliť?
10. Na štart behu sa postavili štyria žiaci. Koľkými rôznymi spôsobmi si môžu podeliť medaily?

Autotest č. 2 – Pravdepodobnosť

1. Janko hodil naraz troma mincami. Aká je pravdepodobnosť, že dve z nich padli na národnú stranu a jedna na európsku stranu?
2. Janko hodil naraz dvoma kockami. Aká je pravdepodobnosť, že hodil súčet 5?
3. Janko hodil naraz troma kockami. Aká je pravdepodobnosť, že hodil súčet 15?
4. Janko si kúpil lístok do tomboly. Bude sa žrebovať 20 cien a predalo sa tisíc lístkov. Aká je pravdepodobnosť, že Janko niečo vyhrá?
5. Janko si kúpil lístok do tomboly. Bude sa žrebovať 20 cien a predalo sa tisíc lístkov. Aká je pravdepodobnosť, že Janko vyhrá prvú cenu?
6. Vo vrecúšku sú štyri biele a štyri čierne guľôčky. Koľko najmenej guľôčok musí Miška vytiahnuť, aby mala istotu, že vytiahla aspoň dve biele?
7. Vo vrecúšku sú štyri biele a štyri čierne guľôčky. Timko náhodne vyberie tri guľôčky. Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri majú rovnakú farbu?
8. Mama kúpila svojim štyrom deťom štyri rôzne Brumíky. Nevedeli sa dohodnúť, ktorý si ktorého vezme. Preto si Brumíky náhodne vytiahli z nepriesvitnej tašky. Miško má rád medového. Aká je pravdepodobnosť, že si ho vytiahol?
9. Mama kúpila svojim štyrom deťom štyri rôzne Brumíky. Nevedeli sa dohodnúť, ktorý si ktorého vezme. Preto si Brumíky náhodne vytiahli z nepriesvitnej tašky. Miško má rád medového. Koľký v poradí si má ťahať, aby mal čo najväčšiu pravdepodobnosť, že si ho vytiahne?

   a) Prvý, lebo vtedy tam medový Brumík ešte je.

   b) Druhý, lebo potom si ťahá z troch a je malá šanca, že by tam medový už nebol.

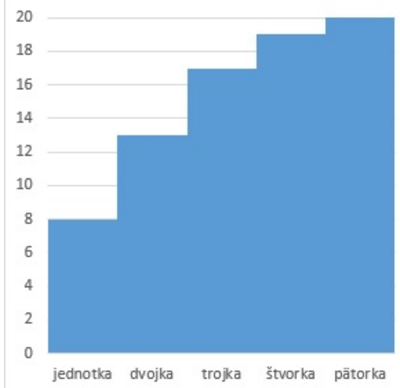
   c) Tretí, lebo si ťahá už len z dvoch a ešte je veľká šanca, že medový je v ponuke.

   d) Štvrtý, lebo ak zostal medový, má istotu, že bude jeho.

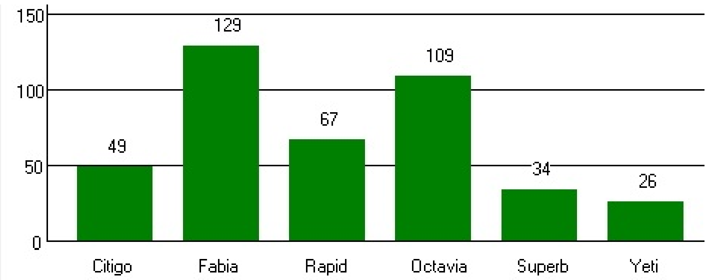
   e) Na poradí nezáleží, pravdepodobnosť je vždy rovnaká.
10. Trieda 7.A vyhrala za zber papiera 2 lístky do kina. Keďže v triede je 16 žiakov (majú všetci rôzne mená), náhodne vyžrebovali dvoch, ktorí pôjdu. Aká je pravdepodobnosť, že pôjde Karol so Zuzkou?

Autotest č. 3 – Opisná štatistika

1. Na koncoročnom vysvedčení z matematiky v triede 8.A mali ôsmi žiaci jednotku, šiesti dvojku, štyria trojku a dvaja štvorku. Aká je priemerná známka celej triedy?
2. Graf znázorňuje kumulatívnu početnosť pre koncoročnú známku z matematiky v triede 8.A. Koľko žiakov malo trojku?



3. Julka dostala z prvých dvoch písomných prác trojku a štvorku. Koľko najmenej jednotiek by musela následne dostať, aby jej priemer bol lepší ako 2,00?
4. Na koncoročnom vysvedčení z matematiky v triede 8.A bola priemerná známka 2,00. Vieme, že ôsmi žiaci mali dvojku, štyria trojku a dvaja štvorku. Pätorku nemal nikto. Koľko bolo jednotkárov?
5. V teste, ktorý písalo 3600 žiakov, bolo 2700 žiakov od Janka lepších. Aký je Jankov percentil?
6. Na Testovaní 9 sa zúčastnilo približne 43000 žiakov. Miškin percentil bol 67. Približne koľko žiakov bolo od nej lepších? (zaokrúhlite na stovky)
7. Graf znázorňuje predaj vozidiel Škoda v minulom mesiaci. Koľko percent predstavuje predaj Fabií na celkovom predaji?



8. Na koncoročnom vysvedčení z matematiky v triede 8.A mali ôsmi žiaci jednotku, šiesti dvojku, štyria trojku a dvaja štvorku. Aká je relatívna početnosť pre známku 3?
9. Na koncoročnom vysvedčení z matematiky v triede 8.A mali ôsmi žiaci jednotku, šiesti dvojku, štyria trojku a dvaja štvorku. Učiteľ znázornil výsledky koláčovým (kruhovým) grafom v Exceli. Aký je stredový uhol pre kruhový výsek predstavujúci známku 3?
10. V triede 7.B je 10 chlapcov a 10 dievčat. Z matematiky neprospel iba Janko. Koľko percent je v žltej bunke?

		Pohlavie	
		chlapec	dievča
prospech z matematiky	prospel		
	neprospel		

Výsledky autotestov

Autotest č. 1 – Kombinatorika

1. 15 2. 10 3. 24 4. 6 5. 27 6. 20 7. 10 8. 10 9. 24 10. 24

Autotest č. 2 – Pravdepodobnosť

1. 3/8 2. 1/9 3. 5/108 4. 1/50 5. 1/1000

6. 6 7. 1/7 8. 1/4 9. e 10. 1/120

Autotest č. 3 – Opisná štatistika

1. 2 2. 4 3. 4 4. 8 5. 25.percentil

6. 14200 7. 31% 8. 20% 9. 72° 10. 90%

Literatúra

Beránek, J.: Goniometrické funkce v problémovém vyučování v matematice. Sborník referátů z konference Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách, Masarykova univerzita, Brno, 2012, s. 5-15. ISBN 978-80-210-5886-6

Calda, E. – Dupač, V.: Matematika pro gymnázia, Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Prometheus, Praha 2004. ISBN 80-7196-147-7

Hecht, T. – Bero, P. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, zošit 4, Kombinatorika. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 1996. ISBN 80-7158-138-0

Hejný, M. – Novotná, J. - Stehlíková, N.: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha, Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3

Híc, P. – Pokorný, M.: Opisná štatistika. Trnava : Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave, 2008. ISBN 978-80-8082-201-9

Kaput, J. N.: Combinatorial Analysis and School Mathematics, Educational Studies in Mathematics 3, 1970, s. 111- 127.

Pokorný, M.: Kombinatorika. http://matematika.truni.sk/kombinatorika/

Pokorný, M.: Pravdepodobnosť a štatistika. http://matematika.truni.sk/ps/

Scholtzová, I.: Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ (rozvíjanie kombinatorického myslenia). Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, 2003.

Šedivý, O. – Čeretková, S. – Malperová, M. – Bálint, Ľ.: Matematika pre 8. ročník základných škôl, 2. časť. SPN, 2003. ISBN 80--08--03520-X

Šedivý, O. – Čeretková, S. – Malperová, M. – Bálint, Ľ.: Matematika pre 9. ročník základných škôl, 2. časť. SPN, 2002. ISBN 80--08--02947--1

Žabka, J. – Černek, P.: Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2010. ISBN 978--80--7158--990--7

Žabka, J. – Černek, P.: Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2010. ISBN 978-80-8120-051-9

Žabka, J. – Černek, P.: Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2011. ISBN 978-80-8120-050-2

Žabka, J. – Černek, P.: Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2012. ISBN 978-80-8120-125-7

Inovovaný štátny vzdělávací program. Dostupné na:
http://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/

Kolektív autorov: Testovanie 5-2015, Priebeh, výsledky a analýzy. Dostupné na:
http://www.nucem.sk/documents//46/testovanie_5_2015/SPRAVA_T5_2015_na_zverejnenie.pdf

Príloha: Zoznam interaktívnych aplikácií

Interaktívne aplikácie z kombinatoriky

1 – Umiestňovanie guľôčok 1

2 – Umiestňovanie guľôčok 2

3 – Umiestňovanie guľôčok 3

4 – Umiestňovanie guľôčok 4

5 – Hod štyrmi kockami 1

6 – Hod štyrmi kockami 2

7 – Hod štyrmi kockami 3

8 – Hod tromi kockami 1

9 – Hod tromi kockami 2

10 – Hod tromi kockami 3

11 – Hod štyrmi rôznymi kockami 1

12 – Hod štyrmi rôznymi kockami 2

13 – Hod štyrmi rôznymi kockami 3

14 – Hod tromi rôznymi kockami 1

15 – Hod tromi rôznymi kockami 2

16 – Hod tromi rôznymi kockami 3

17 – Príprava desiatej 1

18 – Príprava desiatej 2

19 – Príprava desiatej 3

20 – Príprava desiatej 4

21 – Príprava desiatej 5

22 – Príprava desiatej 6

23 – Príprava desiatej 7

24 – Príprava desiatej 8

25 – Tvorba čísel z daných číslic 1

26 – Tvorba čísel z daných číslic 2

Interaktívne aplikácie z pravdepodobnosti

Interaktívne aplikácie z opisnej štatistiky