VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ

PEDAGOGICKÁ FAKULTA TRNAVSKEJ UNIVERZITY V TRNAVE

Miroslava Ožvoldová

MATEMATIKA – APLIKÁCIE PRE FYZIKU 1

TRNAVA 2013

Recenzenti:
doc. RNDr. Mária Lucká, CSc.
doc. RNDr. Daniela Hriciščáková, CSc.

Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave 2013

ISBN 978-80-8082-754-0

OBSAH

Predslov..3

1 ČÍSELNÉ MNOŽINY...4
1.1 Úvod...5
1.2 Galaxia čísiel...7
1.3 Komplexné čísla a ich geometrická interpretácia...9

2 RIEŠENIE VYBRANÝCH ROVNÍC A NEROVNÍC..16
2.1 Úprava algebrických výrazov...16
2.2 Lineárna a kvadratická rovnica...24
2.3 Rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou...27
2.4 Aplikácia využitia rovníc vo fyzike..31

3 POLYNÓMY A ALGEBRICKÉ ROVNICE..38
3.1 Úvod do polynómov..38
3.2 Algebrické rovnice a ich zápis v tvare koreňových činiteľov.............................44
3.3 Algebrické rovnice s reálnymi koeficientmi..49
3.4 Hornerova schéma..53
3.5 Využitie interaktívnych simulácií na riešenie algebrických rovníc....................61

4 ZÁKLADY VEKTOROVEJ ALGEBRY...64
4.1 Fyzikálne vektorové veličiny..64
4.2 Vektorový priestor..69
4.3 Súčiny medzi vektormi..77

5 MATICE..87
5.1 Pojem matice...87
5.2 Operácie s maticami..97
5.3 Výpočet inverznej matice pomocou Gaussovho algoritmu................................101

6 DETERMINANT MATICE 106
6.1 Determinant matice a výpočet determinantu matice druhého a tretieho stupňa...........106
6. 2 Výpočet determinantu stupňa n, pre $n > 3$...115
6.3 Inverzná matica...122

7 SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC..126
7.1 Sústava lineárnych rovníc – definícia, pojmy..127
7.2 Riešenie sústava n-lineárnych rovníc o n-neznámych......................................129
7.3 Riešenie sústavy m-lineárnych rovníc o n-neznámych - Frobeniova veta.................138
7.4 Riešenie sústavy lineárnych rovníc s parametrom..145

8 REÁLNA FUNKCIA JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ......................................150
8.1 Základné pojmy...151
8.2 Niektoré vlastnosti funkcií...158
8.3 Grafy vybraných funkcií...165
8.4 Limita funkcie..172

9 DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ....................181
9.1 Spojitosť funkcie...182
9.2 Derivácia funkcie jednej premennej, jej fyzikálny a geometrický význam................184
9.3 Pravidlá na výpočet derivácie funkcie...190
9.4 Derivácií vyšších rádov funkcie jednej premennej...196
9.5 Výpočet limít pomocou derivácií –L´Hospitalovo pravidlo.......................................198
9.6 Monotónnosť funkcie a extrémy funkcií...201
9.7 Priebeh funkcie..207

Predslov

Pri vstupe na vysokú školu pre jej bezproblémový priebeh nie sú zanedbateľné vedomosti, ktoré študent nadobudol na strednej škole. Matematika v mnohých prípadoch robí študentom nemalé problémy, pretože študenti prichádzajú s rôznymi úrovňami vedomostí, podľa typu absolvovanej strednej školy. Aby sme študentom uľahčili nástup na vysokoškolské štúdium a jeho zvládnutie v začiatkoch štúdia pripravila som predložený študijný materiál, ako učebnú pomôcku. Samozrejme nevylučuje sa samoštúdium z iných, študentom vybraných literárnych prameňov.

Elektronické skriptá pre predmet Matematika − aplikácie pre fyziku 1 sú prvou časťou zo súboru pokrývajúce sylaby predmetov Matematika − aplikácie pre fyziku 1− 4. Nakoľko sa jedná o úvodnú časť a predmet, ktorý začína v prvom ročníku v zimnom semestri, sústredili sme sa na nevyhnutnú teóriu s určitými ukážkami konkrétnych fyzikálnych aplikácií. Ich počet sa bude môcť postupne zvyšovať na základe získaného teoretického základu.

Textje rozdelený do desiatich kapitol, podľa tematického zamerania a časového harmonogramu. Okrem stručnej teórie je doplnený hojným počtom riešených príkladov (celkove 160), ktoré študentom odporúčame samostatne prerieŝiť a nahliadnuť na riešenie až v prípade, ak nastanú problémy v samostatnom riešení. Správnosť pochopenia teórie a zavedených pojmov si študent môže preveriť odpoveďami na kontrolné otázky, ktoré sú rovnako ako aj úlohy uvedené na konci každého paragrafu, v celkovom počte223.

Základ vidíme v zvládnutí matematických zručností a vedomostí pri:

- práci s číselnými množinami a s komplexnými číslami;
- úprave algebrických výrazov s využitím základných vzťahov a vzorcov, ako i riešení vybraných rovníc a nerovníc i s absolútnou hodnotou;
- hľadaní koreňov algebrických rovníc;
- základných operáciách s vektorovými veličinami, reprezentovanými v geometrickom modeli orientovanou úsečkou a v aritmetickom modeli maticami. Naučiť sa pracovať s vektorovými rovnicami, ako i pochopiť význam skalárneho a vektorového súčinu vo fyzike;
- operáciách s maticami a determinantmi;
- riešení sústavy lineárnych rovníc;
- využívaní základných elementárnych funkciách jednej premennej a ich diferenciálneho počtu vo fyzike.

Nakoľko dobrý študijný materiál vzniká postupne a elektronické skriptá je možné ľahšie inovovať, pripomienky a doplnky zo strany čitateľa rada uvítam na adrese mozvoldo@truni.sk. Ďakujem za pomoc pri ich vylepšovaní.

Autorka

KAPITOLA 1
ČÍSELNÉ MNOŽINY

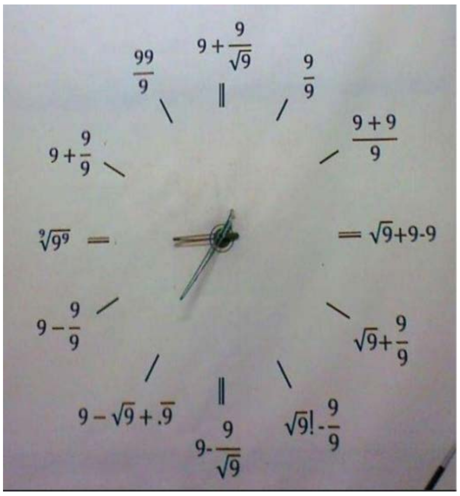
Učebné ciele:

- Zvládnuť prácu s číselnými množinami;
- Systém reálnych čísiel, operácie, vlastnosti a práca na množine reálnych čísiel;
- Zručnosti v práci s operáciami s reálnymi a komplexnými číslami a s výrazmi.

Kľúčové slová: Množina, reálne a komplexné čísla, úprava algebrických výrazov.

Požadované vedomosti: Znalosť stredoškolskej matematiky z oblasti množín, základných vzťahov a úpravy výrazov.

Motivácia



Obrázok 1.1: Hodiny pre budúcich bakalárov
http://www.vychytane.sk/filesystem/image/201203/12665-0-hodiny-pre-narocnych.jpg

Otázka 1: Prezentujú hodiny na obrázku 1.1 správne údaje hodín? Preverte!

Otázka 2: Koľko prirodzených čísiel možno nájsť na hodinách v daných zápisoch?
A) 12 B) 1 C) ani jedno D) šesť

Otázka 3: Koľko racionálnych čísiel možno nájsť v zápisoch na hodinách?
A) 12 B) 1 C) ani jedno D) šesť

Otázka 4: Koľko iracionálnych čísiel možno nájsť v zápisoch na hodinách?
A) 12 B) 1 C) ani jedno D) sedem

1.1 Úvod

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem **množina**. Pre naše potreby pod množinou budeme rozumieť súbor určitých čísiel, vecí, resp. objektov), ktoré nazývame prvkami tejto množiny. My však budeme pracovať s číselnými množinami, t.j. s množinami, ktorých prvkami sú čísla. Pre určité množiny budeme používať konkrétne, dohodnuté označenia:

K ... množina všetkých komplexných čísel.

R ... množina všetkých reálnych čísel.

Q ....množina všetkých racionálnych čísiel.

Z ... množina všetkých celých čísel.

N ... množina všetkých prirodzených čísel.

$\{a\}$ ... jednoprvková množina, ktorej prvkom je číslo a.

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ... množina, pozostávajúca iba z prvkov, vypísaných v zátvorkách.

Na strednej škole sme sa stretli s pojmom **podmnožiny danej množiny**. Spomedzi podmnožín množiny R (ktorú označujeme tiež ako množinu $(-\infty, +\infty)$, sa najčastejšie používajú intervaly: (za predpokladu, že $a < b$):

otvorený interval: $(a, b) = \{x \in R\colon a < x < b\}$

uzavretý interval: $\langle a, b \rangle = \{x \in R\colon a \le x \le b\}$

zľava uzavretý, sprava otvorený interval: $< a, b) = \{x \in R\colon a \le x < b\}$

zľava otvorený, sprava uzavretý interval: $(a, b\rangle = \{x \in R : a < x \le b\}$

otvorené intervaly: $(a, \infty) = \{x \in R\colon x > a\}$

$(-\infty, b) = x \in R\colon x < a\}$

$\langle a, \infty) = \{x \in R\colon x \ge a\}$

$(-\infty, a\rangle = \{x \in R\colon x \le a\}$.

Definícia 1.1 - Rovnosť dvoch množín

Hovoríme, že množiny A a B **sa rovnajú** (píšeme $A=B$), ak množina A je podmnožinou množiny B ($A \subset B$) a súčasne B je podmnožinou množiny A ($B \subset A$). Inými slovami: $A=B$, ak každý prvok z množiny A patrí aj množine B a tiež obrátene, každý prvok množiny B je prvkom množiny A.

Definícia 1.2 - Zjednotenie dvoch množín

Zjednotením množín A a B (označenie $A \cup B$) rozumieme množinu všetkých tých prvkov, ktoré patria aspoň do jednej z uvedených množín A, B.

Definícia 1.3 - Prienik dvoch množín

Prienikom množín A a B (označenie $A \cap B$) rozumieme množinu všetkých tých prvkov, ktoré patria súčasne množine A aj množine B.

Definícia 1.4 - Rozdiel dvoch množín

Rozdielom množín A a B (označenie $A \setminus B$) rozumieme množinu všetkých tých prvkov, ktoré patria množine A, ale nie sú prvkami množiny B.

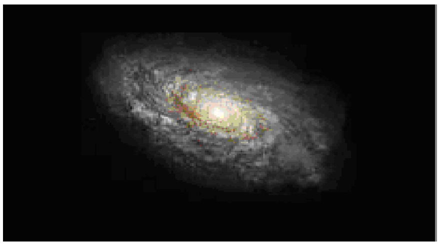
Poznámka: Rozdiel množín $A \backslash B$ niekedy tiež nazývame komplementom (doplnkom) množiny B v množine A.

Úvodom sa budeme zaoberať „Galaxiou reálnych čísiel“, z ktorej sa neskôr presunieme do galaxie, t.j. množiny komplexných čísiel K.

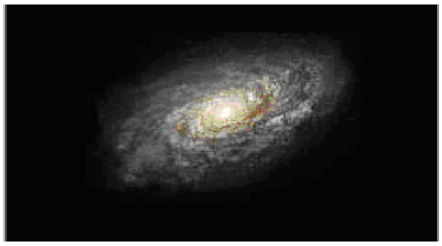
Otázka 5: Viete zodpovedať, ktoré z uvedených čísiel patrí do množiny racionálnych a ktoré do množiny iracionálnych čísiel (obr. 1.2)? Vpíšte si ich do jednotlivých podmnožín, ktoré si znázornite na papier, resp. do obr. 1.2.

$\boxed{-26}$ $\boxed{-7}$ $\boxed{-2.75}$ $\boxed{-\sqrt{2}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\frac{2}{3}}$ $\boxed{1.4}$ $\boxed{\sqrt{3}}$ $\boxed{8}$ $\boxed{16}$

Galaxia „racionálnych čísiel“



Galaxia „iracionálnych čísiel“

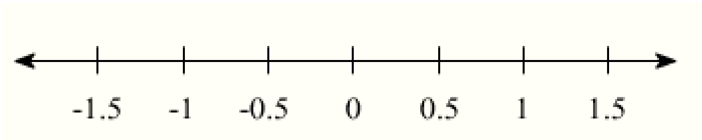


Obrázok 1.2: Galaxia čísiel

Ak sa chcete presvedčiť o správnosti vašej odpovede, kliknite si na interaktívnu stránku Kalifornskej univerzity: http://www.ucopenaccess.org/course, (aktívna jun.2013) resp. Unit 1: Basic Algebra Principles, Lesson 1, Multimédiá, Play lesson 1, kde nájdete viacero zaujímavých interaktívnych appletov týkajúcich sa reálnych čísiel, ako i správnu odpoveď na otázku č. 5.

Otázka 6:

Na číselnej osi sú zobrazené čísla:



a) Koľko prirodzených čísiel je zobrazených na osi?

b) Ktoré z čísiel zobrazených na číselnej osi je prirodzené číslo?

Odpoveď: a) jedno, b) 1.

Ak nie ste si svojimi odpoveďami istí, zopakujte si definície v nasledovnej časti.

1.2 Galaxia čísiel

Medzi základné pojmy matematiky patrí pojem číslo. Určuje nám kvantitu určitej veličiny v reálnom svete, napr. veľkosť oblečenia, vzdialenosť dvoch miest na mape, atď. V škole sme sa s nimi stretli v spojení s pojmom **prirodzené čísla:**

N ... množina všetkých prirodzených čísel: 1, 2, 3, 4, 5,.....

Namiesto prirodzené čísla sa používa i názov kladné celé čísla. Sčítaním a násobením dvoch prirodzených čísiel dostaneme opäť prirodzené číslo, čo znamená že *operácie sčítania a násobenia na množine prirodzených čísiel N sú vždy uskutočniteľné.* Ak však urobíme rozdiel dvoch prirodzených čísiel napr. 7 a 4 môžu nastať dva prípady. V prvom dostaneme:

a) $7 - 4 = 3 \rightarrow 3$ je prirodzené číslo – operácia odčítania je uskutočniteľná na *N;*

b) $4 - 7 = -3$,

t.j. ak urobíme rozdiel čísiel v obrátenom poradí, operácia odčítania na množine prirodzených čísiel nie je možná.

Aby operácia odčítania bola vždy definovaná, množinu prirodzených čísiel musíme rozšíriť o nulu a záporné čísla, čím definujeme množinu *Z* ...množinu všetkých **celých čísiel.**

Z ... množina všetkých celých čísiel: ....-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,.......

V množine všetkých celých čísiel sú operácie sčítania, odčítania a násobenia vždy uskutočniteľné. Delením dvoch celých čísiel nedostaneme vždy celé číslo. Aby i delenie celého čísla celým číslom (rôznym od nuly) bolo vždy uskutočniteľné, musíme množinu rozšíriť o množinu zlomkov, t.j. racionálnych čísiel, čiže čísiel v tvare p/q. Množinu **racionálnych čísiel** zvykneme označovať Q. Ak p a q sú nesúdeliteľné celé čísla hovoríme o rýdzo racionálnom čísle.

Q... množina všetkých racionálnych čísiel, t.j. množina $Q = \left\{ \frac{p}{q};\, p \in Z \wedge q \in N \right\}$

....-3, -2, -1, - ⅜, -⅓, , 0, ⅔, 1, ⅞, 2, ..

Je zrejmé, že množina všetkých celých čísiel *Z* je podmnožinou množiny racionálnych čísiel Q ($Z \subset Q$), ako špeciálny prípad q = 1. V množine všetkých racionálnych čísiel sú definované štyri základné počtové operácie: sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie číslom (rôznym od nuly) vždy uskutočniteľné, nazývame ich *počtové operácie.* Avšak ak chceme riešiť napríklad rovnicu $x^2 - 3 = 0$, nevystačíme ani s množinou racionálnych čísiel, pretože táto rovnica nemá riešenie v množine racionálnych čísiel, keďže neexistuje také racionálne číslo *x*, pre ktoré platí $x^2 = 3$. Taktiež s množinou racionálnych čísiel nevystačíme, ak napríklad chceme počítať veľkosť vektora daného predpisom $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ sú jednotkové vektory karteziánskej súradnicovej sústavy. Vieme, že na základe

Pytagorovej vety (resp. podľa vzťahu pre veľkosť vektora, ktorému sa budeme ešte venovať neskôr v kapitole 3), pre veľkosť vektora platí

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

a teda je vyjadrená ako **iracionálne číslo**. Množina iracionálnych čísiel s označením *I*, je nekonečná a jej prvky získame napríklad pri odmocňovaní, logaritmovaní a výpočte trigonometrických funkcií.

I .. množina všetkých iracionálnych čísiel: .... $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\log 2$, ...

Množiny racionálnych a iracionálnych čísiel tvoria množinu reálnych čísiel *R*, ktorú možno usporiadať do jedného radu podľa veľkosti. Tento rad reálnych čísel sa nazýva číselná os.

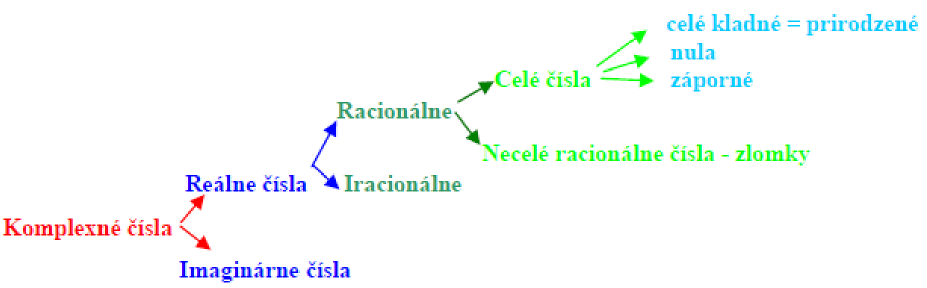
R .. množina všetkých racionálnych čísiel:. ..-3, -1, $-\frac{1}{3}$, , 0, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{7}{8}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\log 2$

Avšak ani množina reálnych čísiel nie je postačujúca na vyriešenie niektorých kvadratických rovníc ako napríklad $x^2 + 1 = 0$, pretože neexistuje žiadne reálne číslo *x*, pre ktoré platí $x^2 = -1$. Aby sa tento problém odstránil, predpokladali matematici, že takéto imaginárne čísla existujú. Zaviedli symbol „*i*" (imaginárna jednotka), pre ktoré platí $i^2 = -1$ a tieto čísla nazvali imaginárnymi číslami. Množina reálnych čísiel spolu s imaginárnymi tvorí množinu **komplexných čísiel**, o ktorých pojednáva nasledovný §1.3.

K množina všetkých komplexných, t.j. čísiel v tvare z = $a + bi$:

......, $3 + 2i$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i$, $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$, π, $\log x$, ...

Množinu všetkých čísiel možno schematicky znázorniť:



1.3 Komplexné čísla a ich geometrická interpretácia

Prv ako zadefinujeme komplexné číslo, objasnime si geometrickú interpretáciu reálneho čísla a pojem absolútna hodnota. Je výhodné zobrazovať **reálne čísla ako body na priamke** (číselnej osi, obvykle na osi *x*), na ktorej je zvolený začiatok 0, orientácia a jednotka dĺžky.

-2 **0** **1** **2** ***a*** ***b*** ***x***

Definícia 1.5 - Absolútna hodnota reálneho čísla
Ku každému reálnemu číslu *a* možno priradiť práve jedno nezáporné číslo, ktoré nazývame **absolútnou hodnotou** a označujeme $|a|$, ktoré je definované:

$$|a| = \begin{Bmatrix} a & \text{pre } a \geq 0 \\ -a & \text{pre } a \langle 0 \end{Bmatrix}$$

Poznámka:

Vzdialenosť bodov *a* a *b* označujeme: $d(a,b) = |b - a| = |a - b|$.

Definícia 1.6 - Komplexné číslo
Číslo z, ktoré možno zapísať v tvare

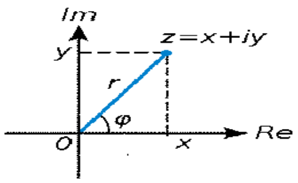
$$z = a + bi, \tag{1.1}$$

kde *a* a *b* sú reálne čísla a *i* je imaginárna jednotka, definovaná vzťahom

$$i^2 = -1 \tag{1.2}$$

sa nazýva **komplexné číslo.** Číslo *a* – nazývame reálnou časťou (označenie Re *z*) a číslo *b* – imaginárnou časťou (označenie Im *z*) komplexného čísla z.

Komplexné číslo vznikne sčítaním a násobením reálnych a imaginárnych čísiel. Ich zavedenie súvisí s hľadaním riešenia rovníc, ktoré v obore R nemajú riešenie. Z definície 1.6 vyplýva, že každé komplexné číslo možno **zobraziť ako bod v rovine,** $z = x + yi$, v ktorej *x*-ová os zobrazuje reálnu časť komplexného čísla a na *y*-ovú os zobrazujeme imaginárnu časť komplexného čísla.



Obrázok 1.3: Zobrazenie komplexného čísla v Gaussovej rovine

Z definície 1.6 vyplýva, že komplexné čísla sú usporiadané dvojice reálnych čísiel. (Taktiež je zaužívané označenie $a = (a_1, a_2)$, resp. v označení $z = (z_1, z_2)$, kde prvú súradnicu a_1 resp. z_1 tvorí reálna časť komplexného čísla a druhú súradnicu a_2 resp. z_2 imaginárna časť komplexného čísla.

Definícia 1.7 - Operácie s komplexnými číslami

Pre komplexné číslo $z = a + b\,i$ je definovaná:

1. rovnosť dvoch komplexných čísel: $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$, resp.

$$z_1 = (a_1, b_1), \quad z_2 = (a_2, b_2)$$

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow (a_1 = a_2) \cap (b_1 = b_2)$$

2. operácia sčítania:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\, b_1 + b_2)$$

3. operácia násobenia:

$$z_1 \,.\, z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\; a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Definícia 1.8 - Imaginárne čísla

Komplexné čísla tvaru $z = (0, b)$, t.j. tie čísla, ktoré majú reálnu časť rovnú nule, nazývame **rýdzo** imaginárnymi číslami**.**

Poznámka:

1. Dá sa ukázať, že uvedené operácie spĺňajú komutatívny, asociatívny a distributívny zákon, rovnako ako pri reálnych číslach.

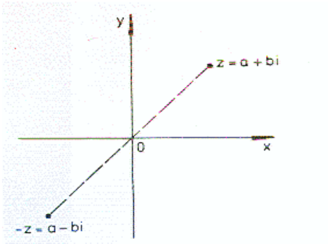
2. Pre čísla tvaru $z = a + 0i$ pracujeme s operáciami sčítania a násobenia len s reálnou časťou, pretože imaginárna časť je stále nulová.

3. Komplexné čísla tvaru $z = a + 0i$ t.j. čísla s nulovou imaginárnou časťou, môžeme stotožniť s reálnymi číslami. *Množina reálnych čísel je teda podmnožinou množiny komplexných čísel.* Takže komplexné číslo je zovšeobecnením pojmu reálneho čísla.

Definícia 1.9 - Číslo opačné

Číslo opačné ku komplexnému číslu $z = a+bi$ nazývame číslo $-z = -a - bi$.

Otázka 3: Je na obrázku 1.4 znázornené správne číslo opačné k číslu z?



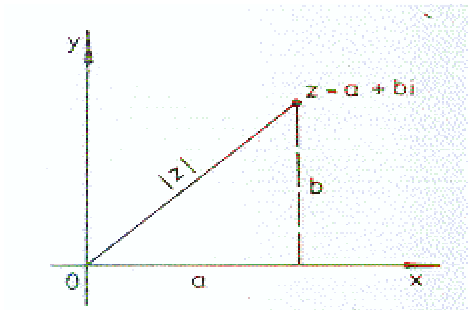
Obrázok 1.4: K znázorneniu opačného čísla

Odpoveď: Číslo z je zobrazené správne, ale nie správne popísané! Pozor na obrázky na internete, vždy si overte správnosť zdroja!!

Definícia 1.10 - Absolútna hodnota komplexného čísla

Absolútna hodnota | z | **(veľkosť) komplexného čísla** $z = a+bi$, (obr. 1.5), je kladné číslo, určené vzťahom

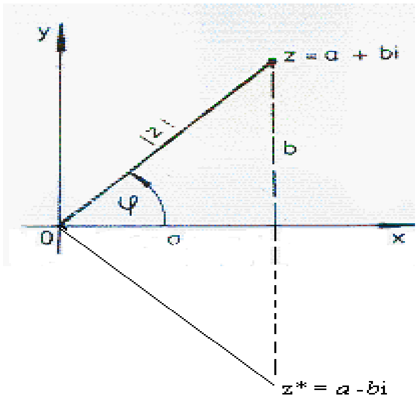
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad . \tag{1.3}$$



Obrázok 1.5: Absolútna hodnota komplexného čísla | z |

Definícia 1.11 - Komplexne združené číslo z*

Číslo $z^* = a - bi$ nazývame **komplexne združeným číslom** k číslu $z = a + bi$. (obr. 1.6).



Obrázok 1.6: Grafické znázornenie komplexného a k nemu komplexne združeného čísla

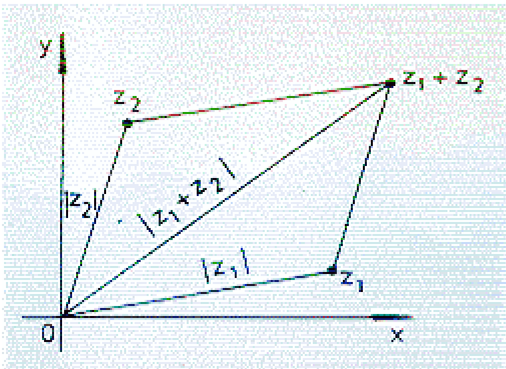
Poznámka:

1. Komplexne združené číslo dostaneme zámenou *i* za –*i*.

2. Komplexné číslo z a komplexne združené číslo z* sú symetrické podľa osi *x*.

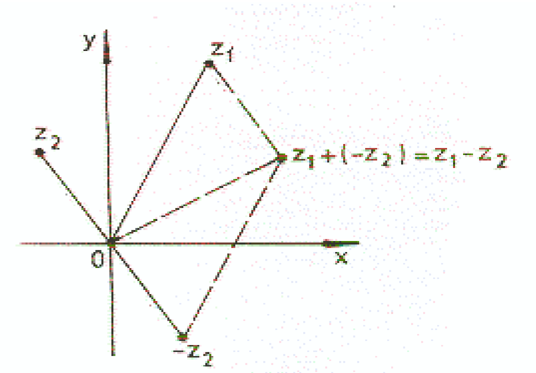
3. Veľkosti komplexného čísla z a komplexne združeného čísla z* sa rovnajú.

Grafické sčítanie komplexných čísiel je znázornené na obr. 1.7 a vyplýva z definície 1.6 pre sčítania komplexných čísiel a realizuje sa doplnením na rovnobežník. Detailnejšie sa možno oboznámiť s grafickým sčítaním v kapitole Vektorový počet, časti sčítanie vektorov, nakoľko komplexné číslo tvorí vektor v rovine.



Obrázok 1.7: Sčítanie dvoch komplexných čísiel

Grafické odčítanie dvoch komplexných čísiel – vychádza z pripočítania čísla opačného (pozri obrázok 1.8). Detailnejšie sa čitateľ môže s problematikou oboznámiť v kapitole venovanej vektorovému počtu – odčítanie vektorov.



Obrázok 1.8: Grafické odčítanie dvoch komplexných čísiel

Príklad 1.1: Určite reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla: $z = \frac{2+9i}{7-3i}$

Riešenie:

$$z = \frac{2+9i}{7-3i} = \frac{(2+9i)}{(7-3i)}\frac{(7+3i)}{(7+3i)} = \frac{14+6i+63i+27i^2}{49-9i^2} = \frac{-13+69i}{58} = \underline{\underline{-\frac{13}{58}+\frac{69}{58}i}}.$$

Poznámka:

Zlomok sme rozšírili jednotkou v tvare komplexne združeného čísla v menovateli.

PDDA

Úloha 1: Sú dané komplexné čísla $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1+5\,i$. Vypočítajte:

a) $z_1 + z_2$, b) $z_1 - z_2$, c) Určite reálnu a imaginárnu časť komplexného čísla $\frac{z_1}{z_2}$.

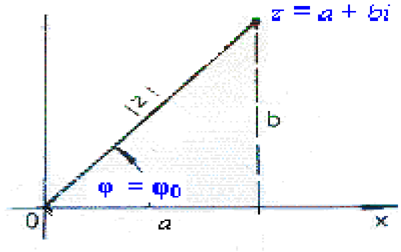
Úloha 2: Vyjadrite matematickým zápisom absolútnu hodnotu komplexného čísla $z = (z_1, z_2)$ z Úlohy 1.

Definícia 1.12 - Goniometrický tvar komplexného čísla

Komplexné číslo $z = a + bi$ možno vyjadriť v goniometrickom tvare:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (1.4)$$

kde $|z|$ je absolútna hodnota komplexného čísla (veľkosť) a φ je uhol, ktorý zviera os x s komplexným číslom z (obr. 1.9).



Obrázok 1.9: K objasneniu goniometrického tvaru komplexného čísla

Goniometrický tvar komplexného čísla možno získať nasledovným postupom: Vyjadrime si na základe obr. 1.9

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow a = |z|\cos\varphi \tag{1.5}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow b = \sin\varphi$$

$z = a + bi = |z| \cos \varphi + |z|\, i \sin \varphi = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Uhol φ , ktorý zviera komplexné číslo z s osou *x* určíme z jedného zo vzťahov:

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{1.6}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{1.7}$$

Poznámka:

1. Funkcia arccos φ (arkuskosínus) je inverzná funkcia k funkcii kosínus a arcsin φ je inverzná funkcia k funkcii sínus;
2. Uľahčenie výpočtu uhlu φ, vystupujúcom pri goniometrickom tvare komplexného čísla napomôže, ak si ho zakreslíme do roviny a uvedomíme si, v ktorom kvadrante sa komplexné číslo $z = a + bi$ nachádza.

Nech φ_0 je ostrý uhol, ktorý zviera komplexné číslo s osou *x*. (obr. 1.9). Pri výpočte uhla φ platí pomôcka: Ak číslo $z = a + bi$ sa nachádza v:

I. kvadrante: $\varphi = \varphi_0$; (obr. 1.9)
II. kvadrante: $\varphi = \pi - \varphi_0$; (obr. 1.10)
III. kvadrante: $\varphi = \pi + \varphi_0$;
IV. kvadrante: $\varphi = 2\pi - \varphi_0$.

Obrázky pre III. a IV. kvadrant odporúčam čitateľovi samostatne nakresliť.

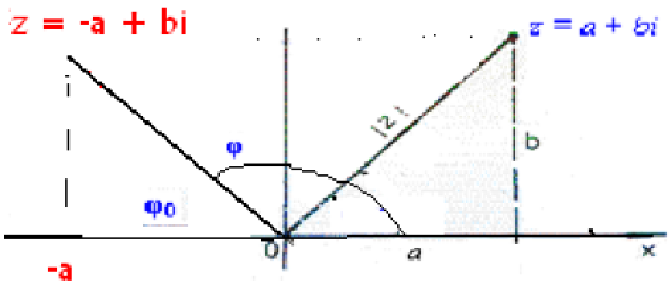
Poznámka:
Miesto zápisu $|z|\,e^{i\varphi}$ sa používa i často zápis $|z|\exp i\varphi$.

Exponenciálny tvar komplexného čísla dostaneme použitím **Moivrovej vety,** ktorú vyjadruje vzťah

$$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.8)$$

Z Moivrovej vety vyplýva rovnosť

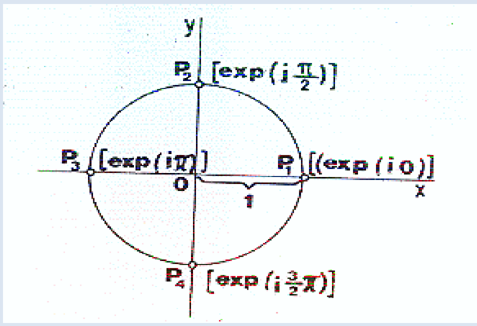
$$e^{in\varphi} = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1.9)$$



Obrázok 1.10: K objasneniu určenia uhla

Definícia 1.13 - Exponenciálny tvar komplexného čísla
Každé komplexné číslo z možno zapísať s využitím veľkosti $|z|$ a uhla φ
v exponenciálnom tvare $z = |z|\,e^{i\varphi}$. (1.10)

Príklad 1.2: Znázornite na jednotkovej kružnici a popíšte v exponenciálnom tvare čísla $P_2 = (0,i)$, $P_3 = (-1, 0)$, $P_4 = (0,-i)$ a určte príslušný uhol φ.
Riešenie: Obrázok 1.11 prezentuje riešenie pre zadanú úlohu.



Obrázok 1.11: Grafické znázornenie čísiel na jednotkovej kružnici

PDDA:

Úloha 3:

Sú zadané komplexné čísla $a = 1 + 2i$, $b = 2 - i$.

a) Určite: graficky a výpočtom číslo $z_1 = a + b^*$

b) Vypočítajte veľkosť komplexného čísla z_1

c) Určite reálnu a imaginárnu časť čísla $z_2 = \frac{a}{b}$.

d) Napíšte čísla a a $-a$ v goniometrickom tvare.

Príklad 1.3: Sú dané dve komplexné čísla z_1 a z_2. Vyjadrite ich súčin v exponenciálnom a goniometrickom tvare.

Riešenie:

Nech komplexné číslo z_1 je určené uhlom φ_1 a z_2 uhlom φ_2. Zápis čísiel z_1 a z_2 bude: $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1} = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$

$$z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Z vlastností súčinu exponenciálnych funkcií vyplýva, že súčin dvoch komplexných čísiel je komplexné číslo, ktorého absolútna hodnota sa rovná súčinu absolútnych hodnôt a argument sa rovná súčtu argumentov činiteľov

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Z toho vyplýva rovnosť: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} . |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + i\varphi_2)}.$$

KAPITOLA 2
RIEŠENIE VYBRANÝCH ROVNÍC A NEROVNÍC

Učebné ciele:

- Zvládnuť operácie s úpravou výrazov;
- Zopakovať si časté operácie pri riešení vybraných rovníc a nerovníc;
- Zvládnuť bezproblémové riešenie lineárnych, kvadratických rovníc a nerovníc;
- Precvičiť si riešenie lineárnych a kvadratických rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou;
- Riešenie vybraných typov rovníc – opakovanie a ich využitie v praxi.

Kľúčové slová: koreň lineárnej rovnice, diskriminant, kvadratická rovnica, iracionálna rovnica, nerovnica, nerovnice s absolútnou hodnotou.

Požadované vedomosti: znalosť stredoškolskej matematiky z oblasti úpravy výrazov, riešenia rovníc a nerovníc.

Na strednej škole ste pracovali s operáciami, ktoré používame pri úprave algebrických výrazov a riešení rovníc rôzneho typu. Ak tomu nie je tak (v dostatočnom rozsahu, určenom sylabom gymnaziálneho učiva), bolo by žiaduce, aby ste siahli po vhodnom študijnom materiáli, minimálne formy „Repetitórium stredoškolskej matematiky" a doplnili si tieto medzery, ak sú. Nie je totiž možné, aby sme stihli všetko zopakovať a aj preberať novú látku.

Nakoľko problematika úpravy algebrických výrazov a hľadanie koreňov rovníc je tak závažná pri riešení aplikačných problémoch, nie je možné ju podceniť a nezvládnuť ju. Preto som sa rozhodla, že tejto problematike venujem samostatnú kapitolu, v ktorej si zopakujeme najčastejšie vzťahy, ktoré využívame pri úprave algebrických vzťahov a pri riešení vybraných typov rovníc a nerovníc, v ktorých sa môže a nemusí nachádzať absolútna hodnota. Teóriu si ukážeme vo forme riešených príkladov. Začneme od najjednoduchšieho: zjednodušovania výrazov a následne prejdeme k rovniciam: lineárnej a kvadratickej, ako i nerovniciam daného typu. Ukážeme si tiež, ako riešiť logaritmické rovnice.

2.1 Úprava algebrických výrazov

Úvodom tejto kapitoly si zopakujeme užitočné vzťahy zo stredoškolskej matematiky, ktoré študent bude často používať pri riešení rôznych problémov. Prepočítaním príkladov zameraných na úpravu výrazov, študent nadobudne nevyhnutné zručnosti, ktoré využije neskôr pri rôznych aplikáciách matematiky. Odporúčame si svoje vedomosti upevniť, resp. preveriť.

Na úvod by sme predložili najdôležitejšie vzťahy – identické rovnosti, ktoré je vhodné si zapamätať a ktoré prezentujeme v tabuľke 2.1 a tabuľke 2.2.

Tabuľka 2.1: Identické rovnosti

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Návodom pre ľahšie zapamätanie vzťahov v tab. 2.1 môže byť schéma, známa pod názvom **Pascalov trojuholník**, ktorá určuje koeficienty pri umocnení dvojčlenu $(a+b)^n$, ktoré sú pre n:

$n = 0$	1	pretože	$(a+b)^n = 1$
$n = 1$	1 1	pretože	$(a+b)^1 = a + b$
$n = 2$	1 2 1	pretože	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$n = 3$	1 3 3 1	pretože	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pre n platí **binomická veta**, ktorá umožňuje vyjadrenie n-tej mocniny dvojčlena pomocou kombinačných čísiel:

Veta 2.1: Binomická veta

Nech a a b sú ľubovoľné komplexné čísla a n je prirodzené číslo. Potom platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

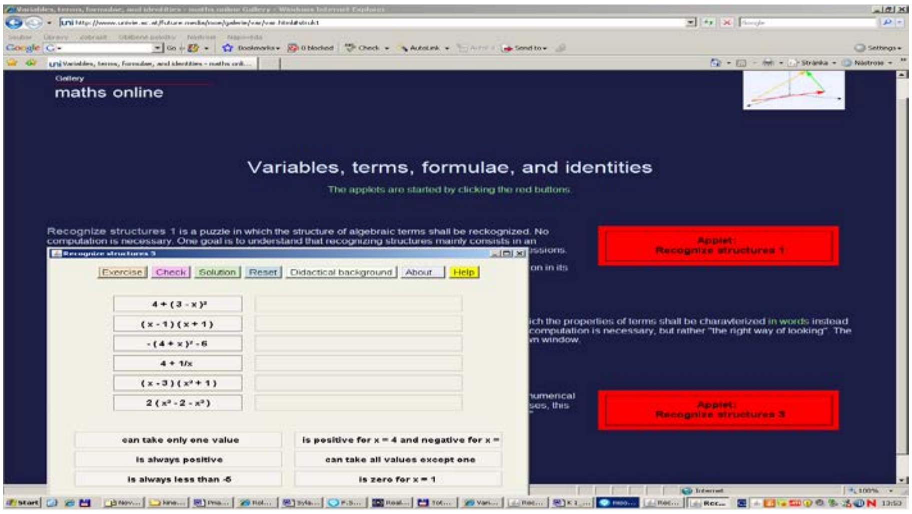
Tabuľka 2.2: Vzťahy pre mocniny a odmocniny

$(a^r)^s = a^{rs}$	$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
$(a^r)(a^s) = a^{r+s}$	$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$, pre $a \rangle 0$
$a^{-1/r} = \dfrac{1}{\sqrt[r]{a}}$, $a \rangle 0$	$(ab)^r = a^r b^r$
$\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$	
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$, *Ak* n je párne $\dfrac{a}{b} \geq 0 \rightarrow (a \geq 0 \cap b \rangle 0) \cup (a \leq 0 \cap b < 0)$	
$a^0 = 1$, $a^1 = a$, $0! = 1$.	

Presvedčiť sa o svojich dobrých základoch je vhodné napríklad aj na stránke math online, ktorú pripravila Viedenská univerzita. Pozrite si viaceré interaktívne animácie, kde si môžete preveriť Vašu správnu identifikáciu výrazov (typov algebrických štruktúr) (obr. 2.1):

http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/var/var.html#struk1 resp.

http://www.univie.ac.at/future.media/moe/mathelinks.html.



Obrázok 2.1: Pohľad na www stránku „math online"

http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/var/var.html#struk1

Pretože úprava výrazov mnohokrát brzdí v riešení náročnejších príkladov, prepočítaním príkladov si overte svoje zručnosti v technike úprav, ako i v rýchlosti ich vyriešenia.

Príklad 2.1: Upravte výrazy: a) $7-x+3-4x$; b) $2(1-3x)+2x$;

c) $4(-x).2x^3.5ax$.

Riešenie:

a) $7-x+3-4x=10-5x$; b) $2(1-3x)+2x=2-6x+2x=2-4x$;

c) $4(-x).2x^3.5ax=-40ax^5$.

Príklad 2.2: Upravte výrazy: $(-2x)^3.y^2.3(-y)^4.(-y)^6$.

Riešenie:

$(-2x)^3.y^2.3(-y)^4.(-y)^6=-8x^3 3y^{2+4+6}=-24x^3y^{12}$.

Príklad 2.3: Upravte výrazy a určite podmienky existencie: a) $3(2-(2x+1))+5x$,

b) $\frac{1}{4}(-x)^3.(2x)^3.(-5)ax$, c) $(-x)^2.\left(\frac{2}{-x}\right)^5.\left(\frac{-x}{2}\right)^3$, d) $\frac{1}{24}(-2x)^3.y^2.3(-y)^4.(-y)^6$,

e) $\frac{x^2y^3z}{x^3yz^2}$, f) $6x^{-7}.4x^{-3}$, g) $\frac{x^3y^{-4}}{x^{-2}y^5}$.

Riešenie:

a) $3(2-(2x+1))+5x = 3(2-2x-1)+5x = 6-6x-3+5x = 3-x$, $x \in R$

b) $\frac{1}{4}(-x)^3.(2x)^3.(-5)ax = 10ax^7$, $x \in R$

c) $(-x)^2.\left(\frac{2}{-x}\right)^5.\left(\frac{-x}{2}\right)^3 = x^2 \frac{2^5}{\left(-x^5\right)^x} \frac{\left(-x^3\right)}{2^{3^x}} = 4$, $x \in \{R-0\}$

d) $\frac{1}{24}(-2x)^3.y^2.3(-y)^4.(-y)^6 = -x^3y^{12}$, $x \in R$

e) $\frac{x^2y^3z}{x^3yz^2} = \frac{y^2}{xz}$, $x, y, z \in \{R-0\}$

f) $6x^{-7}.4x^{-3} = 24x^{-10}$, $x \in \{R-0\}$

g) $\frac{x^3y^{-4}}{x^{-2}y^5} = x^{3+2}y^{-4-5} = x^5y^{-9}$, $x, y \in R-\{0\}$;

Iný spôsob riešenia:

$$\frac{x^3y^{-4}}{x^{-2}y^5} = \frac{x^3\frac{1}{y^4}}{\frac{1}{x^2}y^5} = \frac{\frac{x^3}{y^4}}{\frac{y^5}{x^2}} = \frac{x^3}{y^4}\frac{x^2}{y^5} = \frac{x^5}{y^9}.$$

Príklad 2.4: Upravte výraz a určite podmienky existencie: $\frac{1}{3-x^{-4}}$.

Riešenie: Podmienka: $x \neq \{0, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\}$

$$\frac{1}{3-x^{-4}} = \frac{1}{3-\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{\frac{3x^4-1}{x^4}} = \frac{x^4}{3x^4-1}.$$

Príklad 2.5: Umocnite $(x^3 - 2x + 1)^2$.

Riešenie:

$(x^3 - 2x + 1)^2 = (x^3 - 2x + 1).\ (x^3 - 2x + 1) = x^6 - 2x + x^3 - 2x^4 + 4x^2 - 2x + x^3 - 2x + 1$

$= x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1.$

Príklad 2.6: Upravte výraz a určite podmienky existencie:

$$\left(\frac{1}{n-1} - \frac{3}{n^3-1} - \frac{3}{n^2+n+1}\right)\cdot\left(n + \frac{2n+1}{n-1}\right)$$

Riešenie: Podmienka riešiteľnosti: $n \neq 1$

$$\left(\frac{1}{n-1} - \frac{3}{n^3-1} - \frac{3}{n^2+n+1}\right)\cdot\left(n + \frac{2n+1}{n-1}\right) = \frac{n^2+n+1-3-3(n-1)}{(n-1)(n^2+n+1)}\frac{n^2-n+2n+1}{n-1} =$$

$$\frac{n^2-2n+1}{(n-1)(n^2+n+1)}\frac{n^2+n+1}{n-1} = 1.$$

Príklad 2.7: Zjednodušte výraz $\frac{a}{a-2b} + \frac{2b}{2b-a}$ a uveďte podmienky existencie:

Riešenie: Podmienky existencie: $a - 2b \neq 0 \cap 2b - a = -(a-2b) \neq 0 \Rightarrow a \neq 2b$

$$\frac{a}{a-2b} + \frac{2b}{2b-a} = \frac{a}{a-2b} + \frac{2b}{(-1).(a-2b)} = \frac{a}{a-2b} - \frac{2b}{a-2b} = \frac{a-2b}{a-2b} = 1.$$

Príklad 2.8: Zjednodušte výraz $\frac{2y+1}{y^2-2y} - \frac{1}{y^2-4}$ a určite podmienky existencie.

Riešenie:

Podmienky existencie:

$y^2 - 2y = y(y-2) \neq 0 \cap (y-2)(y+2) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0,\ \ y \neq \pm 2 \quad y \in R - \{0, \pm 2\}$

$$\frac{2y+1}{y^2-2y} - \frac{1}{y^2-4} = \frac{2y+1}{y.(y-2)} - \frac{1}{(y-2).(y+2)} = \frac{2y+1}{y.(y-2)}.\frac{y+2}{y+2} - \frac{1}{(y-2).(y+2)}.\frac{y}{y} =$$

$$= \frac{(2y+1).(y+2)-y}{y.(y-2).(y+2)} = \frac{2y^2+4y+y+2-y}{y.(y-2).(y+2)} = \frac{(2y^2+4y+2)}{y(y^2-4)} = \frac{2.(y^2+2y+1)}{y(y^2-4)} = \frac{2.(y+1)^2}{y(y^2-4)}.$$

Príklad 2.9: Upravte výraz: $\dfrac{(1-y^{-2})^{-1}}{1-y^{-2}}$.

Riešenie: Podmienky riešiteľnosti: $1-y^{-2}\neq 0 \rightarrow y\neq\ 0, \pm 1$

$$\frac{(1-y^{-2})^{-1}}{1-y^{-2}}=\frac{1}{1-y^{-2}}\,\frac{1}{1-y^{-2}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{y^2}}.\frac{1}{1-\dfrac{1}{y^2}}=\frac{1}{\dfrac{y^2-1}{y^2}}\,\frac{1}{\dfrac{y^2-1}{y^2}}=$$

$$=\left(\frac{y^2}{y^2-1}\right)^2=\left(\frac{y^4}{y^4-2y^2+1}\right)$$

Iný spôsob riešenia:

$$\frac{(1-y^{-2})^{-1}}{1-y^{-2}}=\frac{1}{1-y^{-2}}\,\frac{1}{1-y^{-2}}=(\frac{1}{1-y^{-2}})^2=$$

$$=\frac{1}{(1-y^{-2})^2}=\frac{1}{(1-2y^{-2}+y^{-4})}$$

Príklad 2.10: Upravte výraz: $\sqrt[5]{\dfrac{9}{\sqrt[3]{3}}}:\sqrt[3]{\dfrac{3}{\sqrt[5]{27}}}$.

Riešenie:

$$\sqrt[5]{\frac{9}{\sqrt[3]{3}}}:\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt[5]{27}}}=\frac{9^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{15}}}:\frac{3^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{15}}}=\frac{3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{15}}}.\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{6}{15}}}=\frac{3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{2}{5}}}=3^{\frac{3}{5}}.3^{\frac{-2}{5}}=3^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{3}\,.$$

Príklad 2.11: Upravte výraz: $\dfrac{6y-12-5xy+10x}{3y^2-12}.(2+y)$.

Riešenie:

Podmienka riešiteľnosti: $3y^2-12=3(y^2-4)\neq 0 \qquad y\in R-\{\pm 2\}$

$$\frac{6y-12-5xy+10x}{3y^2-12}.(2+y)=\frac{6(y-2)-5x(y-2)}{3(y^2-4)}.(2+y)=\frac{(y-2)(6-5x)}{3(y-2)(y+2)}.(y+2)=$$

$$=\frac{6-5x}{3}$$

Príklad 2.12: Zjednodušte výraz a uveďte podmienky existencie:

$$\left(\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{b}+1\right):\left(\frac{a}{b^2-ab}\right).$$

Riešenie:

Podmienky existencie: $a \neq \pm b \quad b \neq 0,$

$$\left(\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{b}+1\right):\left(\frac{a}{b^2-ab}\right)=\left(\frac{(a+b)^2.b-a.(a^2-b^2)+b.(a^2-b^2)}{(a^2-b^2).b}\right).\left(\frac{b(b-a)}{a}\right)=$$

$$=-\left(\frac{(a+b)^2.b-a.(a^2-b^2)+b.(a^2-b^2)}{(a+b)a.}\right)=-\frac{(a^2b+2ab^2+b^3-a^3+ab^2+ba^2-}{(a+b)a}$$

$$=-\frac{a(ab+2b^2)-a(a^2+b^2+ba))}{(a+b)a}=\frac{(2ab+3b^2-a^2)(-1)}{(a+b)}=\frac{a^2-2ab-3b^2}{a+b}=a-3b.$$

Poznámka: Jednoduchšie bolo vykrátiť (a+b) v prvom člene. Počítajte takto.

Príklad 2.13: Upravte výraz a určite podmienky existencie:

$$\frac{c-2}{c}-\frac{c}{2+c}+\frac{c+6}{c^2+2c}.$$

Riešenie: Podmienka riešiteľnosti: $c^2+2c=c(c+2)\neq 0 \Rightarrow c\neq 0 \cup c\neq -2$,

$$\frac{c-2}{c}-\frac{c}{2+c}+\frac{c+6}{c^2+2c}=\frac{c-2}{c}-\frac{c}{2+c}+\frac{c+6}{c(c+2)}=\frac{(c+2)(c-2)-c(c)+c+6}{c(c+2)}=$$

$$=\frac{c^2-2c+2c-4-c^2+c+6}{c(c+2)}=\frac{c+2}{c(c+2)}=\frac{1}{c}.$$

Príklad 2.14: Upravte výraz $\sqrt[3]{a^{-2}.\sqrt{b^3}}:\sqrt{b^3.\sqrt[3]{a^2}}$.

Riešenie:

Podmienky riešiteľnosti: $a\neq 0 \ \wedge b > 0$.

$$\sqrt[3]{a^{-2}.\sqrt{b^3}}:\sqrt{b^3.\sqrt[3]{a^2}}=\left(a^{\frac{-2}{3}}.b^{\frac{3}{6}}\right):\left(b^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{2}{6}}\right)=a^{\frac{-2}{3}}.a^{\frac{-2}{6}}.b^{\frac{3}{6}}.b^{\frac{-3}{2}}==a^{\frac{-4-2}{6}}.b^{\frac{3-9}{6}}=\frac{1}{ab}.$$

Príklad 2.15: Upravte výraz a určite podmienky existencie: $\dfrac{x.\sqrt{x}-y.\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Riešenie:

Podmienka riešiteľnosti: $\sqrt{x}-\sqrt{y}\neq 0 \rightarrow x\neq y,\ x>0,\ y>0,$

$$\frac{x\sqrt{x}-y.\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\left(x.\sqrt{x}-y.\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}=\frac{x^2-y.\sqrt{x.y}-y^2+x.\sqrt{xy}}{x-y}=$$

$$=\frac{x^2-y^2+x\sqrt{xy}-y\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{x^2-y^2+\sqrt{xy}(x-y)}{x-y}=\frac{(x+y).(x-y)+\sqrt{xy}.(x-y)}{x-y}=\frac{.(x-y)((x+y)+\sqrt{xy})}{x-y}$$

$$=x+y+\sqrt{xy}.$$

Príklad 2.16: Upravte výraz a určite podmienky existencie: $\dfrac{12}{a^2-4}-\dfrac{3}{a-2}+\dfrac{4}{2+a}$.

Riešenie: Podmienka riešiteľnosti: $a^2-4\neq 0 \Rightarrow a\neq \pm 2$

$$\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a-2}+\frac{4}{2+a}=\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a-2}+\frac{4}{a+2}=\frac{12-3a-6+4a-8}{a^2-4}=$$

$$=\frac{(a-2)}{(a+2)(a-2)}=\frac{1}{a+2}.$$

Príklad 2.17: Upravte: $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\ (a-b)^{-1}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Riešenie: Podmienka riešiteľnosti: $a>0,\ b>0$

$$\left(\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-\sqrt{a}\sqrt{ab}-\sqrt{b}\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).\frac{1}{a-b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\ \frac{1}{a-b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})-b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

2.2 Lineárna a kvadratická rovnica

Definícia 2.1- Lineárna rovnica

Lineárnou rovnicou s neznámou *x* nazývame každú rovnicu tvaru $a\,x + b = 0$, kde a, b sú reálne čísla a $a \neq 0$.

Pri riešení môžu nastať 3 prípady:

- ak $a \neq 0$, potom $a\,x = -b$ a rovnica má práve jeden koreň $x = -b/a$;
- ak $a = b = 0$, po úprave dostaneme $0 = 0$ a to je pravdivý výrok (rovnosť), takže pôvodná rovnica má nekonečne veľa riešení resp. koreňom tejto rovnice je každé reálne číslo;
- ak $a = 0$, $b \neq 0$, po úprave dostaneme $0 = -b$, a keďže $b \neq 0$, tak sme dostali nepravdivú rovnosť - pôvodná rovnica nemá žiadne riešenie.

Príklad 2.18: Riešte rovnicu $(8-3x)^2 + (5-4x)^2 - 6 = (9-5x)^2 + 20x - 4$.

Riešenie:

$$(8-3x)^2 + (5-4x)^2 - 6 = (9-5x)^2 + 20x - 4$$

$$64 - 48x + 9x^2 + 25 - 40x + 16x^2 - 6 = 81 - 90x + 25x^2 + 20x - 4$$

$$-88x + 83 = -70x + 77$$

$$-18x = -6$$

$$x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

O správnosti riešenia sa presvedčíme vždy skúškou správnosti!

ĽS: $\left(8 - 3.\frac{1}{3}\right)^2 + \left(5 - 4.\frac{1}{3}\right)^2 - 6 = 7^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 - 6 = 49 - 6 + \frac{121}{9} = \frac{387 + 121}{9} = 56{,}44$

PS: $\left(9 - 5.\frac{1}{3}\right)^2 + 20.\frac{1}{3} - 4 = \left(\frac{22}{3}\right)^2 + \frac{20-12}{3} = \frac{484}{9} + \frac{20-12}{3} = 56{,}44 \quad \rightarrow$ ĽS = PS.

Definícia 2.2 – Kvadratická rovnica

Kvadratickou rovnicou s neznámou x nazývame každú rovnicu tvaru $a x^2 + b x + c = 0$, kde a, b, c sú reálne čísla, $a \neq 0$. Pri riešení môžu nastať prípady:

- ak $a \neq 0$, a $b = c = 0$ a rovnica má práve jeden dvojnásobný koreň $x = 0$;
- ak $a \neq 0$ $b \neq 0$ a $c = 0$, riešime tzv. rýdzo kvadratickú rovnicu $ax^2 + c = 0$, ktorej riešenie je v tvare $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ a to buď reálne alebo komplexné, podľa znamienka a konkrétnej hodnoty c;
- ak $a, b \in R - \{0\}$, a $c = 0$, po úprave dostaneme $a x^2 + b x = x(a x + b) = 0$, rovnica má dva jednoduché reálne korene: $x_1 = 0$ a $x_2 = -b/a$;
- ak $a, b, c \in R - \{0\}$ potom všeobecný tvar má riešenie $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde D = $b^2 - 4ac$ nazývame diskriminant.

  Ak:
  D > 0, tak daná kvadratická rovnica má 2 rôzne reálne korene;

  D = 0, tak daná kvadratická rovnica má dva rovnaké reálne korene, čiže dvojnásobný reálny koreň;

  D < 0, tak daná kvadratická rovnica nemá riešenie v obore reálnych čísel, v obore komplexných čísel má dva imaginárne komplexne združené korene.

Príklad 2.19: Riešte rovnicu v R doplnením na štvorec:

a) $2x^2 + 8x + 10 = 0$, b) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Riešenie:

a) $2x^2 + 8x + 10 = 0 /(\,½)$

$x^2 + 4x + 5 = 0$

$x^2 + 2.2x + (2^2) - (2^2) + 5 = 0$

$(x+2)^2 - (4) + 5 = 0$

$(x+2)^2 + 1 = 0$

$(x+2)^2 \neq -1$

Nemá riešenie v R

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x^2 - 2.(3/2)x + (3/2)^2 - (3/2)^2 + 2 = 0$

$(x-(3/2))^2 + \frac{8-9}{4} = 0$

$(x-(3/2))^2 - \frac{1}{4} = 0$

$(x-(3/2))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x - (3/2) = \pm\frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1$

Skúška: $4 - 3\,(2) + 2 = 0$, $1 - 3 + 2 = 0$ ĽS = PS.

Príklad 2.20: Riešte rovnicu: $-3x^2 - 27 = 0$.

Riešenie:

Rovnicu zjednodušíme tak, že obidve strany rovnice vynásobíme (-⅓), čím dostaneme:

$$x^2 + 9 = 0.$$

Jej riešenie je $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-9}{1}} = \pm\sqrt{(i)^2 9} = \pm 3i$, pretože $\sqrt{-1} = i$, resp. $i^2 = -1$.

Skúška správnosti: ĽS: $-3(3i)^2 - 27 = -3(-9) - 27 = 0 \rightarrow$ ĽS = PS.

Príklad 2.21: Riešte rovnicu v obore R: $\sqrt{3x+1} - (x-4) = 1$

Riešenie:

Riešime tzv. iracionálnu rovnicu. Upravíme rovnicu tak, aby sme mali odmocninu na jednej strane (aby nám po umocnení rovnice nezostal člen s odmocninou). Ešte predtým si určíme, kedy je táto rovnica definovaná:

$$\Rightarrow 3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{3} \cap x \geq 3 \rightarrow x \geq 3$$

$$\sqrt{3x+1} = 1 + (x-4) \qquad /^2$$

$$3x+1 = (x-3)^2$$

$$3x+1 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.8}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \rightarrow x_1 = 8, \quad x_2 = 1,$$

Skúška správnosti: pre $x_1 = 8$: ĽS: $\sqrt{24+1} - (8-4) = 5 - 4 = 1 \rightarrow$ ĽS = PS.

pre $x_1 = 1$: ĽS: $\sqrt{3+1} - (1-4) = 2 - (-3) = 5 \rightarrow$ ĽS $\neq$ PS.

Vyhovuje len riešenie: $x_1 = 8$, pretože $x \geq 3$.

2.3 Rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou

Prostredníctvom nasledujúcich príkladov si zopakujeme riešenie rovníc s absolútnou hodnotou. Využijeme Definíciu 1.5, ktorá nám určuje, že absolútna hodnota z kladného výrazu, je ten istý výraz, zo záporného výrazu, je výraz opačný. Preto si určíme vždy intervaly, kedy je absolútna hodnota kladná. Pri riešení rovníc s absolútnou hodnotou možno voliť dva spôsoby riešenia:

1. Odstránenie absolútnej hodnoty umocňovaním obidvoch strán rovnice.
2. Rozdelením oboru rovnice na také podmnožiny, v ktorých každých z výrazov v absolútnej hodnote nemení znamienko a pre každú z týchto podmnožín riešime rovnicu, ktorá je ekvivalentná s pôvodnou rovnicou a neobsahuje už absolútne hodnoty.

Obidva spôsoby prezentujeme v nasledovnom príklade:

Príklad 2.22: Riešte rovnicu: $|2x-1| = 3x-9$.

Riešenie:

1. spôsob: umocníme obidve strany rovnice:

$$|2x-1| = 3x-9 \qquad (1)$$

$$|2x-1| = 3x-9 \quad /^2$$

$$(2x-1)^2 = (3x-9)^2$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \qquad (2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = 2$$

Skúška správnosti: pre x_1= 8: ĽS: $|2.8-1| = 15$ PS: $3.8 - 9 = 15 \to$ ĽS = PS.

pre x_2 = 3: ĽS: $|2.3-1| = 5$ PS: $3.3 - 9 = 0 \to$ ĽS $\neq$ PS.

Rovnice (1) a (2) nie sú ekvivalentné. Riešením je len $\boldsymbol{x_1}$ **= 8.**

2. spôsob: Určíme kedy je výraz $2x-1 \geq 0 \to x \geq \frac{1}{2}$. Rovnicu budeme riešiť zvlášť pre interval: A) $x \geq \frac{1}{2}$, kedy $|2x-1| = 2x-1$, takže budeme riešiť rovnicu:

$$2x-1 = 3x-9 \to x = 8 \qquad x = 8 \cap \langle 1/2, \infty) = 8$$

B) $x < \frac{1}{2}$ $\quad 2x-1 < 0$, takže $|2x-1| = -(2x-1)$ a riešime rovnicu:

$$-(2x-1) = 3x-9 \to 5x = 10 \quad x = 2 \cap x < \frac{1}{2} \to \text{nevyhovuje.}$$

Prienik je prázdna množina. Riešením je len x_1 = 8, ako sme ukázali prvým spôsobom.

Príklad 2.23: Riešte rovnicu: $|2x+1|-|x-5|+|-4x|=1$

Riešenie:

Nakoľko riešením prvým spôsobom, by sme sa jednoducho nevyhli mocninám, riešme príklad pomocou nulových bodov:

$2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1/2,$

$x-5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5,$

$4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0.$

	(- ∞, -½)	**‹ -½, 0›**	**(0, 5)**	**‹ 5, ∞)**
znamienko $\|2x+1\|$	– $-(2x+1)$	+ $(2x+1)$	+ $(2x+1)$	+ $(2x+1)$
znamienko $(-1)\|x-5\|$	– $(-1)(-(x-5))$	– $(-1)(-(x-5))$	– $(-1)(-(x-5))$	+ $(-1)(x-5)$
znamienko $\|-4x\|$	+ $(-4x)$	+ $(-4x)$	– $-(-4x)$	– $-(-4x)$
	$-2x-1+(x-5)-4x=1$ $-5x-6=1$ $x=-7/5 \in I_1$	$2x+1+x-5-4x=1$ $-x-4=1$ $x=-5 \notin I_2$	$2x+1+x-5+4x=1$ $7x-4=1$ $x=5/7 \in I_3$	$2x+1-x+5+4x=1$ $5x=-5$ $x=-1 \notin I_4$

Obor pravdivosti rovnice: $P=\left\{\frac{-7}{5}, \frac{5}{7}\right\}.$

Skúška správnosti: pre $x_1 = -7/5$:

$$ĽS: \left|2.(-\frac{7}{5})+1\right|-\left|-\frac{7}{5}-5\right|+\left|-4(-\frac{7}{5})\right|=\left|\frac{-14+5}{5}\right|-\left|\frac{-7-25}{5}\right|+\left|\frac{-28}{5}\right|=\frac{9}{5}-\frac{32}{5}+\frac{28}{5}=\frac{5}{5}=1$$

PS: 1 $\rightarrow$ ĽS = PS.

Skúška správnosti: pre $x_2 = 5/7$

$$ĽS: \left|2.(\frac{5}{7})+1\right|-\left|\frac{5}{7}-5\right|+\left|-4(-\frac{5}{7})\right|=\left|\frac{10+7}{7}\right|-\left|\frac{5-35}{7}\right|+\left|\frac{20}{7}\right|=\frac{17-30+20}{7}=1$$

PS: 1 $\rightarrow$ ĽS = PS.

Riešenie kvadratických nerovností sa často vyskytuje pri skúmaní priebehu funkcie. Preto si ho zopakujeme príkladom:

Príklad 2.24: Riešte nerovnicu: $\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x+1}\leq 1$, ak $x\in$ Z .

Riešenie:

Určíme, pre ktoré $x\in$ Z má daná nerovnica zmysel: Menovateľ bude nenulový ak $x \neq \pm 1$.

Budeme postupovať tak, aby na pravej strane sme si vytvorili nulu:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x+1}-1\leq 0\,.$$

Upravíme na spoločného menovateľa a urobíme naznačené operácie:

$$\frac{(x+1)(x+1)-2(x-1)-(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}\leq 0$$

$$\frac{4}{(x-1)(x+1)}\leq 0\,.$$

Čitateľ zlomku je vždy kladný pre všetky $x \in D_f$, takže celý zlomok bude záporný, keď menovateľ bude záporný. t.j. schematicky zapísané : $\frac{+}{-}$. Môžu nastať dva prípady:

$$\frac{+}{(-)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{+}{(+)(-)}\cup\frac{+}{(-)(+)}$$

a) Uvažujme $\frac{+}{(+)(-)}$, vtedy platí: $(x-1)>0 \;\; \cap (x+1)<0$

$x>1\cap(x<-1)$ P_1 - prázdna množina.

b) Uvažujme $\frac{+}{(-)(+)}$, vtedy platí: $(x-1)<0 \;\; \cap (x+1)>0$

$x<1 \;\; \cap x>-1$

$P_2 = \{0\}$ – jednoprvková množina.

Riešením je ich zjednotenie, s rešpektovaním D_f t.j. má riešenie len pre $x = 0$.

Riešenie kvadratickej nerovnosti si ukážeme na príklade určovania definičného oboru.

Príklad 2.25: Nájdite D_f funkcie: $f(x) = \log(2x^2 + 4x - 6)$.

Riešenie:

Vieme, že logaritmická funkcia je definovaná len pre argument, ktorý nadobúda kladné hodnoty, t.j. keď platí: $2x^2 + 4x - 6 > 0$.

$x^2 + 2x - 3 > 0$

Keďže ide o tzv. normovanú kvadratickú nerovnosť s celými koeficientmi (a =1), možno okrem riešenia pomocou diskriminantu, riešiť ju aj rozkladom na koreňových činiteľov. Napíšeme si kvadratický výraz $x^2 + px + q = 0$. Pre koeficienty platia vzťahy:

$x_1 \cdot x_2 = q$

$x_1 + x_2 = -p$

Vieme odhadnúť, že súčin čísiel $3 .(-1) = -3$ resp. $(-3) .(1) = -3$

$3 + (-1) = 2 \neq -p$, resp. $(-3) + (1) = -2 = -p$

Takže rozklad bude: $(x-1)(x+3) > 0$. Presvedčíme sa o správnosti výpočtom:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$$

$$(x-1)(x+3) > 0 \Rightarrow$$

Súčin činiteľov bude kladný, ak obidva činitele budú kladné, alebo obidva záporné:

Čo možno si zapísať $(+.+) \cup (-,-) \Rightarrow$

a) $x > 1 \cap x > -3 \Rightarrow x > 1$

b) $x < 1 \cap x < -3 \Rightarrow x < -3 \quad \Rightarrow (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

Príklad 2.26: Ekvivalentnými úpravami riešte rovnicu: $\dfrac{\log(2x+6)}{\log(x+2)} = 1$

Riešenie:

Určíme, kedy sú výrazy definované:

$2x + 6 > 0 \cap x + 2 > 0 \to x > -3 \cap x > -2 \to x > -2$

$$\frac{\log(2x+6)}{\log(x+2)} = 1$$

$$\log(2x+6) = \log(x+2)$$

$$(2x+6) = (x+2)$$

$x = -4 \cap x > -2 \to$ nemá riešenie.

2.4 Aplikácia využitia rovníc vo fyzike

Vo fyzike sa veľmi často stretávame pri riešení fyzikálnych zadaní s využívaním rôznych typov rovníc. Postupne sa s nimi v základnom kurze fyziky oboznámime. Uveďme si aspoň dva príklady.

Príklad 2.27: Dvaja turisti vyšli súčasne z nocľahárne tým istým smerom po priamej ceste a pohybovali sa rovnomerným pohybom. Prvý turista šiel o 0,5 km/h rýchlejšie ako druhý. Preto prvý turista došiel do cieľa vzdialeného 28 km skôr o jednu hodinu. Vypočítajte rýchlosť chôdze obidvoch turistov a čas, za ktorý každý turista došiel do cieľa.

Riešenie:

Postup: 1. Zapíšeme si zadané údaje a zvolíme si neznámu.
2. Nakreslíme si obrázok.
3. Zostavíme rovnice na základe zadania.
4. Nájdeme riešenie a urobíme skúšku správnosti

Označíme si neznáme: rýchlosť prvého turistu v_1 a čas, za ktorý prešiel dráhu s ako t_1,
rýchlosť druhého turistu v_2 a čas, za ktorý prešiel dráhu s ako t_2.

Zo zadania príkladu vyplýva že platí:

$v_1 = (v_2 + 0{,}5)\ \text{km.h}^{-1}$ (1)

$t_1 = (t_2 - 1)\ \text{h}$ (2).

Nakoľko turisti sa pohybujú rovnomerným pohybom, avšak rôznou rýchlosťou, do cieľa dôjdu za rôzny čas, takže možno napísať vzťahy (3) a (4):

$s = v_1 t_1$ (3) $\rightarrow$ $t_1 = \frac{s}{v_1}$ (3a)

$s = v_2 t_2$ (4) $\rightarrow$ $t_2 = \frac{s}{v_2}$ (4a)

Predelením rovníc (3) a (4) dostaneme:

$$\frac{s}{s} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2} \rightarrow 1 = \frac{(v_2 + 0{,}5)(t_2 - 1)}{v_2 t_2}$$

$$v_2 t_2 = (v_2 + 0{,}5)(t_2 - 1)$$

$$v_2 t_2 = v_2 t_2 + t_2 . 0{,}5 - 0{,}5 - v_2$$

$$v_2 = (t_2 - 1)/2 \qquad (5)$$

Po dosadení vzťahu (4a) do poslednej rovnice (5) vylúčime neznámu t_2 a dostaneme:

Príklad 2.27: pokračovanie príkladu

$$v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{v_2} - 1\right)$$

Rovnicu vynásobíme v_2 a pre jednoduchšie riešenie vzniknutej kvadratickej rovnice dosadíme hodnotu za s (jednotky, v ktorých počítame uvediem až za výsledok):

$$2(v_2)^2 + v_2 - 28 = 0 \rightarrow \qquad v_2 = \frac{-1 \pm 15}{4} = \quad 3{,}5 \quad \text{km.h}^{-1}\ .$$

Druhý koreň v_2 = - 4 km.h^{-1} nevyhovuje podmienkam fyzikálneho zadania príkladu.

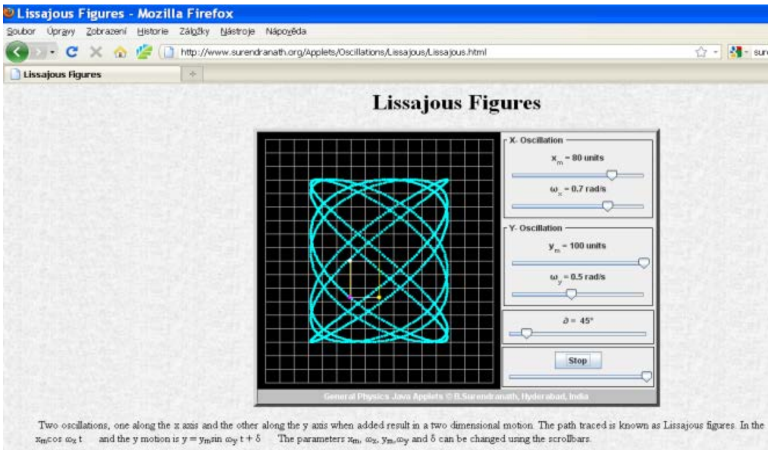
$v_1 = (v_2 + 0{,}5)$ km.h^{-1} = 4 km.h^{-1} $\qquad t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{28}{4} = 7$ h.

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{28}{3{,}5} = 8 \text{ h}$$

Odpoveď:

Prvý turista, ktorý šiel rýchlejšie mal rýchlosť 4 km.h^{-1} a do cieľa prišiel za 7 h, kým druhý mal rýchlosť 3,5 km.h^{-1} a do cieľa prišiel za 8 h.

Druhý príklad prezentuje využitie goniometrických rovníc, keďže sme sa im osobitne v opakovacej časti nevenovali. Ukážeme si ich na príklade Lissajousových kriviek (obr. 2.2), s ktorými sa možno oboznámiť na stránke http://www.surendranath.org/Applets/Oscillations/Lissajous/Lissajous.htm. (Je možné ísť aj cez: http://surendranath.tripod.com/Applets.html Applets Menu, Oscilation.)



Obrázok: 2.2: Lissajousove krivky

Na obr. 2.2 vidíme naprogramovanú aplikáciu, ktorá demonštruje skladanie dvoch navzájom kolmých oscilátorov (jeden kmitá v smere osi *x* a druhý v smere osi *y*).

Nakoľko kmity harmonického jednorozmerného oscilátora možno graficky znázorniť pohybom po priamke a odpovedá mu vektor, ktorého amplitúda (maximálna výchylka) nech je A a okamžitá výchylka je určená harmonickou funkciou (sínus alebo kosínus).

Pre pohyb v smere osi x platí: $x(t) = A\cos\omega t$, kde ω je uhlová rýchlosť otáčania. Pre pohyb v smere osi y platí: $y(t) = B\cos(\omega t+\delta)$, kde B je amplitúda a δ fázová konštanta. (uhol vektora s osou x na začiatku pohybu, t.j. v čase $t = 0$ s. Vidíme, že ω je u obidvoch rovnaká. Sledujme časový vývoj pohybu . Vedeli by ste zvážiť, ako bola naprogramovaná takáto aplikácia? Všetko vychádza z matematického popisu: Ukážeme si ho:

$$x(t) = A\cos\omega t \quad \rightarrow \quad \frac{x}{A} = \cos\omega t \tag{2.1}$$

$$y(t) = B\cos(\omega t+\delta) \quad \rightarrow \quad \frac{y}{B} = \cos(\omega t+\delta) \tag{2.2}$$

Poznáme známy súčtový vzorec:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

ktorý využijeme pre rovnicu (2.2)

$$\frac{y}{B} = \cos\omega t\cos\delta - \sin\omega t\sin\delta \tag{2.3 a}$$

Dosaďme (2.3 a) do (2. 2) vzťahu a dostaneme:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\delta - \sqrt{1-(\cos\omega t)^2}\,\sin\delta \tag{2.3 b}$$

kde sme využili identitu : $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ na vyjadrenie $\cos x$. Opäť využijeme vzťah (2.1) ktorý dosadíme do vzťahu (2.4):

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\delta - \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\,\sin\delta \tag{2.4}$$

Dostali sme iracionálnu rovnicu (s odmocninou, ktorú upravíme tak aby odmocnina ostala samostatne na pravej strane a rovnicu umocníme na druhú:

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\delta\right)^2 = \left(-\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\,\sin\delta\right)^2$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\delta = \left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)\sin^2\delta$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta + \frac{x^2}{A^2}\sin^2\delta + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\delta = \sin^2\delta$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta + \frac{x^2}{A^2}\left(\sin^2\delta + \cos^2\delta\right) = \sin^2\delta$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\delta \tag{2.5}$$

Otázka 1:

Čo nám určuje vzťah (2.5) a aké možnosti poskytuje? Analýzu vzťahu (2.5) si urobíme na príklade**:**

Príklad 2.28: Odvoďte, pri akých hodnotách δ dostaneme z rovnice (2.5):

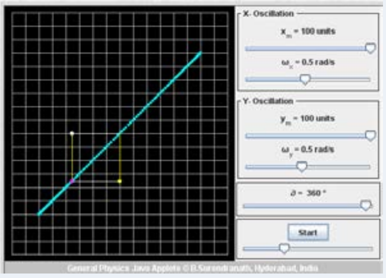
a) priamku s kladnou smernicou
b) elipsu
c) elipsu sklonenú doľava
d) elipsu sklonenú doprava
e) kružnicu
f) priamku so zápornou smernicou

a napíšte odpovedajúce rovnice pre jednotlivé prípady. Presvedčte sa o správnosti na interaktívnom applete na adrese:

http://www.surendranath.org/Applets/Oscillations/Lissajous/Lissajous.htm

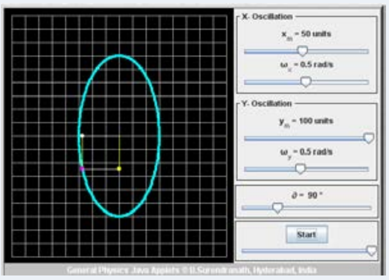
Riešenie:

a) priamku s kladnou smernicou



Obrázok: 2.3 Skladanie kmitov priamka

b) elipsa



Obrázok: 2.4 Skladanie kmitov elipsa

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\delta$$

a)

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos 0 + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2 0$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{x^2}{A^2} = 0$$

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

$$\left|\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\right)\right| = 0$$

b)

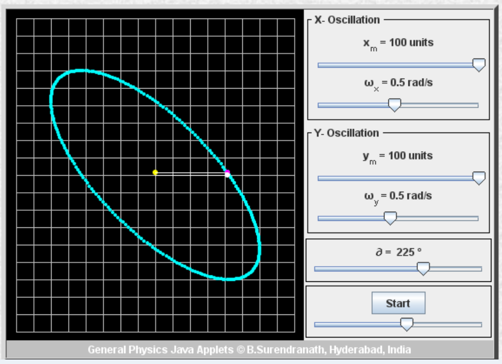
$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos 90 + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2 90$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}.0 + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1 \rightarrow$$ rovnica elipsy

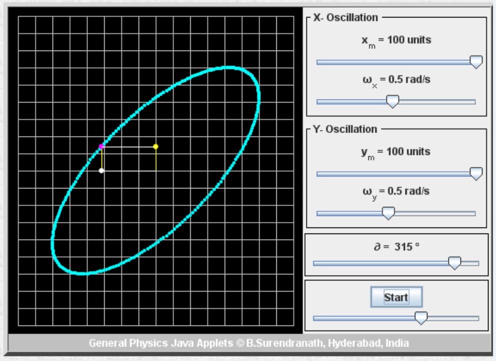
$y = \pm\frac{B}{A}x$ čo je rovnica priamky. V prípade a) platí kladná smernica $y = \frac{B}{A}x$.

c) d)



Obrázok: 2.5 Skladanie kmitov
elipsa sklonená doľava

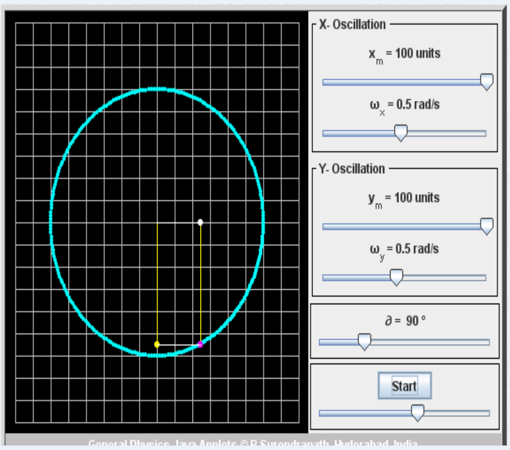
$\delta = 135^0$, $\delta = 225^0$



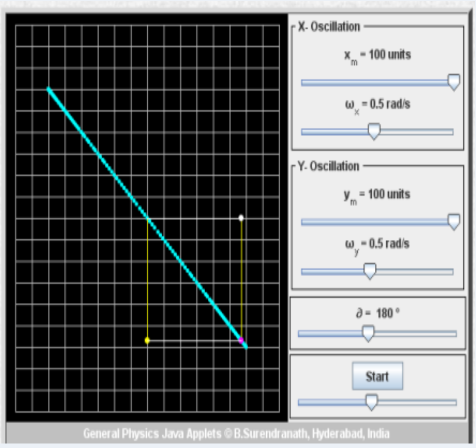
Obrázok: 2.6 Skladanie kmitov
elipsa sklonená doprava

$\delta = 45^0$ $\delta = 315^0$

Elipsu mám určenú $\delta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}$, kde $k = 1, 2, 3 \ldots$



Obrázok: 2.7 Skladanie kmitov
kružnica



Obrázok: 2.8 Skladanie kmitov
priamku so zápornou smernicou

e)

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos 90 + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2 90$$

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}.0 + \frac{x^2}{A^2} = 1 \quad \text{pre } A = B$$

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = A^2$$

$\delta = 90^0$ $\delta = 270^0$

f)

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{x^2}{A^2} = 0$$

$$\left|\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\right)\right| = 0$$

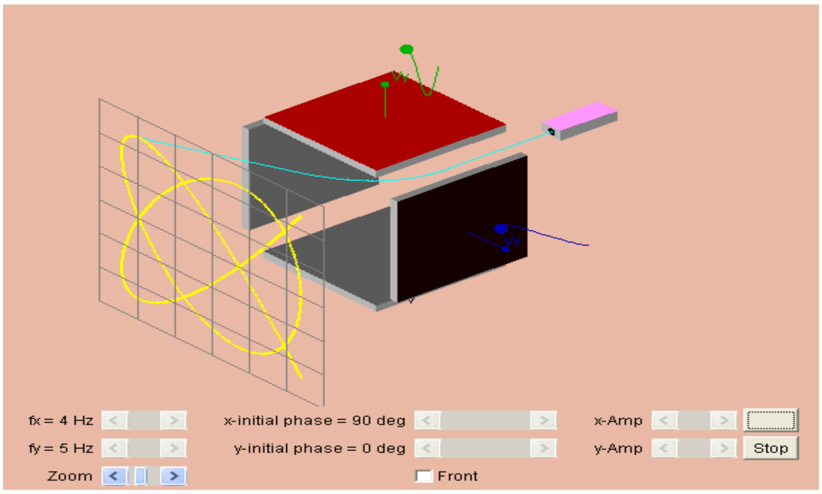
V prípade d) platí záporná smernica $y = -\frac{B}{A}x$.

$\delta = 180^0$

Elipsu mám určenú $\delta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}$, kde k $= 1, 2, 3 \ldots$

Poznámka: Využite možnosť určiť hodnoty uhlov napríklad na http://matematika-online-a.kvalitne.cz/kalkulacka-online.htm.

Priestorové zobrazenie možno nájsť na: http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Lissajous.htm.



Obrázok: 2.9: Lissajousove krivky v 3 D animácii
http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Lissajous.htm

Kontrolné otázky

1. Viete objasniť, kedy lineárna rovnica nemá riešenie?
2. Objasnite pojem diskriminant a kde ho využívame. Zapíšte kvantitatívne jeho vyjadrenie.
3. Napíšte aké vzťahy platia pre koeficienty a korene normovanej kvadratickej rovnice.
4. Objasnite postup pri riešení lineárnej rovnice ak rovnica obsahuje jeden člen s absolútnou hodnotou.
5. Objasnite postup pri riešení lineárnej rovnice ak rovnica obsahuje viac ako jeden člen s absolútnou hodnotou.
6. Ako riešime kvadratické nerovnosti?
7. Ak riešime iracionálnu rovnicu, akú úpravu je vhodné urobiť najskôr?
8. Ak máme racionálnu funkciu v tvare podielu dvoch lineárnych polynómov, ako postupujeme pri určovaní, kedy je zlomok kladný a kedy záporný?
9. Ak máme racionálnu funkciu v tvare podielu dvoch polynómov: v čitateli polynóm nultého stupňa, v menovateli kvadratický polynóm s reálnymi koreňmi. Ako postupujeme pri určovaní, kedy je zlomok kladný a kedy záporný?
10. Vymenujte desať identických vzťahov, s ktorými pracujeme pri úpravách výrazov a rovníc (tab. 2.1 a tab. 2.2).

PDDA:

Úloha 1: Pre ktoré hodnoty parametra p má rovnica: $9x^2 - 6px + 9p = 0$ jediný koreň?

Úloha 2: Určte číslo a tak, aby rovnica $x^2 - 2(1+3a)x + 7(3 + 2a) = 0$ mala dvojnásobný koreň?

Úloha 3: Riešte rovnicu: $x + 1 = \sqrt{5x+1}$.

Úloha 4: Riešte rovnicu: $\log(x^3 + 1) - \log 7 - \log x = \log(x + 1) - \log 6$.

Úloha 5: Riešte rovnicu: $10.2^x - 4^x = 16$.

Úloha 6: Riešte rovnicu: $5^{2x} - 7^x - 35.\, 5^{2x} + 35.\, 7^x = 0$.

Úloha 7: Riešte nerovnicu: $\frac{3-2x}{5} + 8 \geq \frac{5x+2}{2} - x$ a výsledok zobrazte na číselnej osi.

Úloha 8: Ktoré x vyhovujú nerovnici: $(x - 3)(x - 7) < 5(x - 3)$.

Úloha 9: Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú nerovniciam: a) $1 < | x + 2 | \leq 3$,

b) $3x - 1 < | x | \leq 3x + 3$.

Kapitola 3
POLYNÓMY A ALGEBRICKÉ ROVNICE

Učebné ciele:

- Zvládnuť operácie s úpravou výrazov, polynómami a algebrickými rovnicami;
- Vedieť určiť jednoduché a viacnásobné korene algebrických rovníc;
- Naučiť sa hľadať korene pomocou Hornerovej schémy a WZ grapheru.

Kľúčové slová: polynóm, algebrická rovnica, koreň algebrickej rovnice, koreňový činiteľ.
Požadované vedomosti: znalosť stredoškolskej matematiky z oblasti rovníc a delenie polynómu polynómom.

3.1 Úvod do polynómov

Úvodom začneme s definíciou binomického jednočlenu tvaru a_0x^n.

Definícia 3.1 – Binomický jednočlen
Výraz tvaru a_0x^n, kde x je premenná, a_0 je konštanta a n je celé nezáporné číslo, nazývame jednočlen (binomický).

Ako príklad možno uviesť jednočleny nasledovné výrazy:

1. $2x^2$
2. $-5x$
3. $(3/2)\, x^7$

Definícia 3.2 – Binomický dvojčlen
Pod binomickým dvojčlenom rozumieme súčet dvoch binomických jednočlenov; pod binomickým trojčlenom súčet troch jednočlenov; pod polynómom budeme rozumieť súčet ľubovoľného počtu jednočlenov:

Definícia 3.3 – Polynóm
Nech n je nezáporné celé číslo a $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nech sú komplexné čísla. Funkcia f definovaná na množine K všetkých komplexných čísiel rovnicou

$$P_n(x)= f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (3.1)$$

sa nazýva **polynóm.** Čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa nazývajú **koeficienty** polynómu $P_n(x) = f(x)$ a n určuje stupeň polynómu, ak $a_0 \neq 0$.

Poznámka:

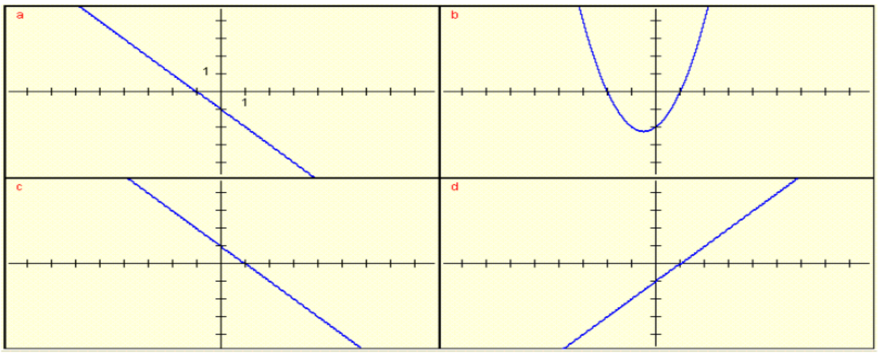
1. Z dôvodov zjednodušenia namiesto toho, aby sme hovorili „je daný polynóm f, ktorý číslu x priradí číslo $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$" hovoríme krátko výraz $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ nazývame polynómom n-tého stupňa a označujeme $P_n(x)$.

2. Ak $n = 0$, máme nenulový konštantný polynóm, ktorý každému číslu $x \in K$ priradí to isté číslo $a_0 \neq 0$, jeho stupeň je teda 0.

3. Ak $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, hovoríme o **nulovom polynóme** (t.j. funkciu, ktorá pre každé $x \in K$ nadobúda hodnotu 0. Nulovému polynómu neprisúdime žiaden stupeň.

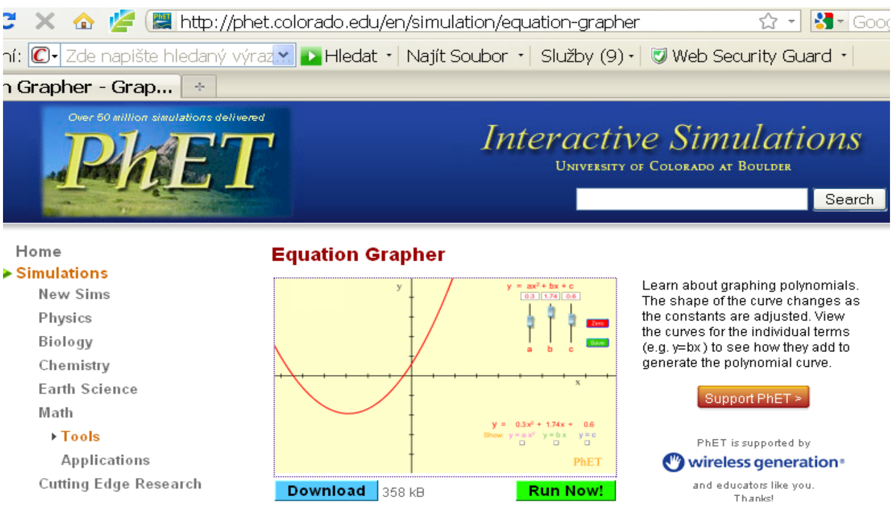
Na stránke http://www.analyzemath.com/polynomials/polynomials.htm je dostupný interaktívny aplet pre lepšie porozumenie významu koeficientov polynómu a stupňa polynómu, kde nájdete i test na overenie si svojich vedomostí. Precvičme si lineárny a kvadratický člen v podobe funkcie, s ktorou ste sa stretli na strednej škole.

Otázka 1: Určite, ktorý z grafov a) – d) na obr. 3.1 odpovedá grafu funkcie $f(x) = x$-1.



Obrázok 3.1: K otázke 1 - grafy funkcií

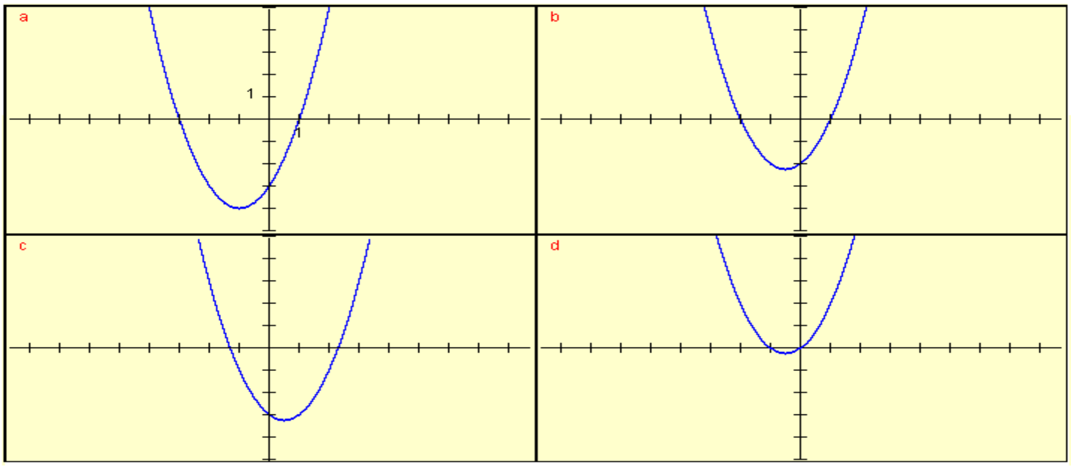
V prípade potreby a presvedčenia sa o správnosti svojej odpovede, odpoveď nájdete nastavením si hodnôt koeficientov na simulácii „Equation grafer" voľne prístupnej na www http://phet.colorado.edu/sims/equation-grapher/equation-grapher_en.html, (obr. 3.2), kde i nájdete množstvo ďalších zaujímavých simulácií a podnetných myšlienok.



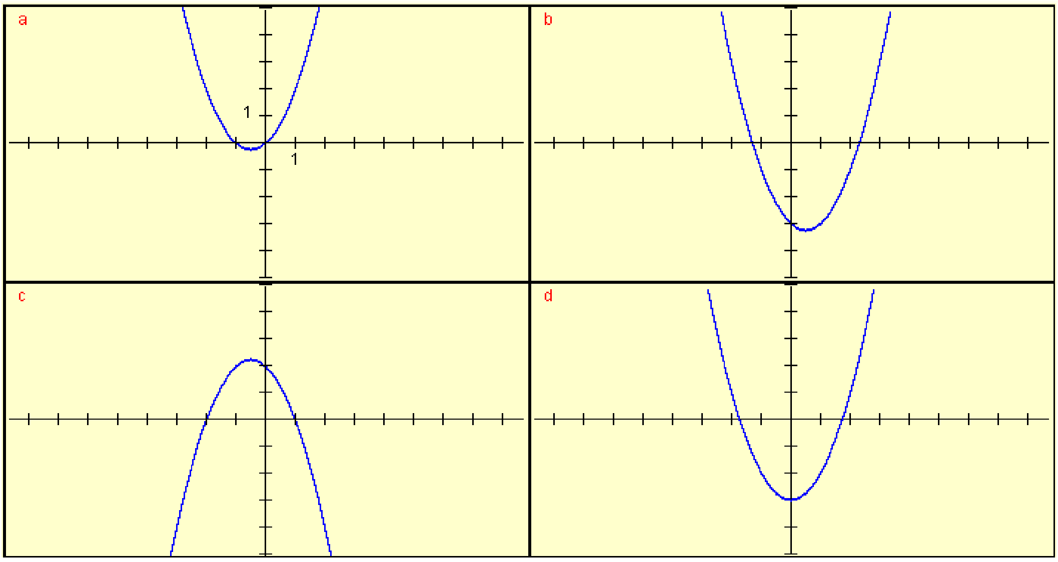
Obrázok 3.2: Vstupná stránka interaktívnych simulácií University of Colorado at Boulder

Pre záujemcov môže byť užitočnou i ďalšia zaujímavá stránka WIMS (WWW Interactive Multipurpose Server): http://wims.unice.fr/, konkrétne z nej pre riešenú problematiku: http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=8HA210CA4F.2&+lang=en&+module=tool%2Fanalysis%2Ffunction.en.
Čitateľ na zopakovanie si stredoškolských znalostí môže využiť www stránku na adrese: http://www.analyzemath.com/PolyGraphTest/PolyGraphTest.html

Otázka 2 : Priraď správny graf funkciám: a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = x^2 - 3$ na obrázkoch 3.3 a 3.4.



Obrázok 3.3: K úlohe, ktorý z grafov prináleží funkcii $x^2 + 2x - 3$



Obrázok 3.4: K úlohe, ktorý z grafov prináleží funkcii $x^2 - 3$

Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú dva polynómy a nech pre každé $x \in K$ je

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \tag{3.2}$$
$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n \tag{3.3}$$

Definícia 3.4 – Rovnosť dvoch polynómov

Polynómy $f(x)$ a $g(x)$ určené vzťahmi (3.2) a (3.3) sa rovnajú vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in K$ platí t.j.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \text{ a teda}$$
$$(a_0 - b_0)\, x^n + (a_1 - b_1)\, x^{n-1} + \ldots + (a_n - b_n) = 0$$

t.j. platí $a_0 - b_0 = 0, a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_n - b_n = 0$

$$\rightarrow \quad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \ldots, \quad a_n = b_n. \tag{3.4}$$

Otázka 3: Pre aké hodnoty koeficientov a_0, a_2, a_3 sa rovnajú polynómy $f(x)$ a $g(x)$?
$f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 5$ a $g(x) = a_0x^3 + 4x^2 + a_2x + a_3$

Odpoveď: $a_0 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -5$.

Poznámka:

Kvôli zjednodušeniu formulácie sme napísali obidva polynómy $f(x)$ a $g(x)$ určené vzťahmi (3.2) a (3.3) v takom tvare, že v obidvoch vystupujú rovnaké mocniny x^n, x^{n-1},..., x, 1. To môžeme dosiahnuť vždy tým, že k jednému z výrazov na pravých stranách rovností (3.2), (3.3) pripíšeme vhodne zvolený výraz tvaru $0.x^{k+1} + 0.x^{k+2} + \ldots + 0.x^n$.

Veta 3.1: Dva polynómy $f(x)$ a $g(x)$ určené predpismi (3.2) a (3.3) sú totožné, (t.j. nadobúdajú tie isté hodnoty pre každé komplexné číslo x) vtedy a len vtedy, ak $a_i = b_i$ pre každé $i = 0, 1, 2, .., n$.

Možnosť delenia dvoch polynómov je založená na nasledujúcej vete:

Veta 3.2: Nech f a g sú dva polynómy stupňov m, resp. n. Nech je $m \geq n$. Potom existujú také jednoznačne určené polynómy $q(x)$ a $r(x)$, že platí:

a) $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ pre každé $x \in K$, (3.5)

b) $r(x)$ je buď nulový polynóm, alebo polynóm stupňa menšieho ako n.

Poznámka:

1. Veta 3.2 hovorí, že každý polynóm je jednoznačne určený svojimi koeficientmi. To znamená, že sa nemôže stať, aby dva polynómy f a g, ktoré majú v (3.2) a (3.3) rôzne koeficienty, mohli byť totožnými funkciami.

2. Možno ukázať, že:

a) Súčet (rozdiel) dvoch polynómov stupňov n, m je polynóm stupňa $s \leq max\{m, n\}$

b) Súčin dvoch polynómov stupňov n, m je polynóm stupňa $n + m$.

c) Podiel dvoch polynómov nemusí byť polynóm.

3. Vety budeme uvádzať bez dôkazov. Čitateľ má možnosť dôkazy naštudovať v prípade záujmu vo vybraných odborných publikáciách, ako napr. Ivan J.: Matematika 1, ...

Definícia 3.5 – Podiel polynómov
Ak platí vzťah (3.5): $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ pre každé $x \in K$, potom polynóm $q(x)$ sa nazýva **čiastočný podiel** polynómov f a g a polynóm $r(x)$ sa nazýva **zvyšok**.

Ak $r(x)$ je nulový polynóm, hovoríme, že polynóm $f(x)$ je deliteľný polynómom $g(x)$, alebo že **polynóm $g(x)$ delí polynóm $f(x)$ (bezo zvyšku)**.

Delenia polynómu polynómom

Otázka 4:
Je polynóm $P_n(x) = x - 1$ zvyškom po delení polynómu $f(x) = 4x^4 - x^3 + 2x + 4$ polynómom $g(x) = 2x^2 - x$? Ak nie, určite zvyšok po delení.

Odpoveď: $P_n(x) = x - 1$ nie je zvyškom. Zvyšok: $r(x) = 4 + 9x/4$.

Dva polynómy delíme podľa známej schémy, ktorú poznáme zo strednej školy. Zopakujeme si to na nasledujúcich dvoch príkladoch:

Príklad 3.1:
Nech $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Potom počítame podiel $f(x)/ g(x)$:
Riešenie:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x + 1 \\
-(x^3 - 3x^2 + 2x) \\
\qquad x^2 - \quad x - 1 \\
\quad - (x^2 - 3x + 2) \\
\qquad\quad 2x - 3
\end{array}
$$

Postup spočíva teda v tom, že vydelíme prvý člen polynómu $f(x)$ s prvým členom polynómu $g(x)$, t.j. $x^3/x^2 = x$ a s týmto členom vynásobíme polynóm $g(x)$ a zmeníme znamienka! Postup opakujeme. Vidíme, že v tomto príklade je teda $q(x) = x + 1$ a $r(x) = 2x - 3$.
Preto môžeme napísať:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(x^3 - 2x^2 + x - 1) & = & (x^2 - 3x + 2) & . & (x + 1) & + & (2x - 3), \\
f(x) & = & g(x) & . & q(x) & + & r(x).
\end{array}
$$

Príklad 3.2: Vydeľte mnohočleny: $(3x^3 - 2x^2 + 1) : (2x^2 + x + 1)$

Riešenie:

$$(3x^3 - 2x^2 + 1) : (2x^2 + x + 1) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\frac{x + 11}{2x^2 + x + 1}$$

$$\underline{-3x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x}$$

$$-\frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

$$\underline{\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{7}{4}}$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

PDDA:

Ukážte delením dvojčlena:

a) $a^3 + b^3$ dvojčlenom $(a + b)$, že platí rovnosť: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

b) $a^3 - b^3$ dvojčlenom $(a - b)$, že platí rovnosť $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Príklad 3.3:

Nech $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$, $g(x) = x^2 + 4x + 5$. Vydeľte polynóm $f(x)$ polynómom $g(x)$.

Riešenie:

$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5) : (x^2 + 4x + 5) = x^2 - x + 1$

$-(x^4 + 4x^3 + 5x^2)$

$-x^3 - 3x^2 - x + 5$

$-(-x^3 - 4x^2 - 5x)$

$x^2 + 4x + 5$

$-(x^2 + 4x + 5)$

0

V príklade 3.3 je teda $q(x) = x^2 - x + 1$ a $r(x) = 0$. Preto môžeme napísať:

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5) = (x^2 + 4x + 5) . (x^2 - x + 1) + 0$$

$$f(x) = g(x) \quad . \quad q(x) \quad + \ r(x).$$

Zvlášť dôležité bude pre nás delenie polynómu $f(x)$ stupňa $n \geq 1$ lineárnym polynómom tvaru $x - \alpha$. Podľa Vety 3.2 a vzťahu (3.5) dostaneme: $f(x) = (x - \alpha) . q(x) + r(x)$, kde $r(x)$ je polynóm stupňa nižšieho ako 1, teda konštanta rôzna od nuly, alebo nulový polynóm.

Príklad 3.4:
Vydeľte mnohočleny $\left(x^5-3x^4+2x^3-x^2+6x-3\right):\left(x+2\right)$.

Riešenie:

$$(x^5-3x^4+2x^3-x^2+6x-3):(x+2)=x^4-5x^3+12x^2-25x+56-\frac{115}{x+2}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(x^5+2x^4)} \\
-5x^4+2x^3-x^2+6x-3 \\
\underline{-(-5x^4-10x^3)} \\
\qquad 12x^3-x^2+6x-3 \\
\underline{\qquad -(12x^3+24x^2)} \\
\qquad\qquad -25x^2+6x-3 \\
\underline{\qquad\qquad -(-25x^2-50x)} \\
\qquad\qquad\qquad 56x-3 \\
\underline{\qquad\qquad\quad -(56x+112)} \\
\qquad\qquad\qquad -115
\end{array}$$

3.2 Algebrické rovnice a ich zápis v tvare koreňových činiteľov

Definícia 3.6 – Algebrická rovnica
Výrokovú formu $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, kde n je prirodzené číslo, a_0, a_1, a_2, ..., a_n sú komplexné čísla, $a_0 \neq 0$, definovanú na množine komplexných čísiel, nazývame algebrickou rovnicou n-tého stupňa, t.j. zapisujeme $P_n(x)=0$.
Koeficienty a_0, a_1, a_2,..., a_n sa nazývajú koeficienty algebrickej rovnice**.**

Poznámka:
1. Algebrickú rovnicu $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, budeme kratšie zapisovať v tvare $P_n(x) = 0$.

Definícia 3.7 – Riešenie algebrickej rovnice
Riešením alebo koreňom algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$, resp.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

je každé také komplexné číslo α, ktorého dosadením do algebrickej rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

za x dostaneme pravdivý výrok, t.j. také číslo α, pre ktoré platí

$$P_n(\alpha) = 0.$$

Poznámka:

1. Koreň (riešenie) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ nazývame tiež **nulovým bodom** polynómu $P_n(x)$.
2. Termínom „riešenie rovnice“ často označujeme aj postup, ktorým koreň (riešenie) rovnice určujeme. Riešiť algebrickú rovnicu, znamená **nájsť všetky jej riešenia.**

Otázka 5:

Vedeli by sme riešiť algebrické rovnice vyššieho stupňa ako dve na základe stredoškolských znalostí? Čiže bez akýchkoľvek nových znalostí či teórie, ak nepoužijeme výpočtovú techniku.

Odpoveď:

Kladná odpoveď závisí to od typu rovnice. Napríklad pri riešení rovnice $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = 0$ možno postupovať „sedliackym rozumom“:

Riešenie:

1. krok: Zvážime, že niektoré členy v rovnice chýbajú a skúsime ju vhodne upraviť:

$x^7 - x^4 - x^3 + 1 = 0$
$x^4(x^3 - 1) - (x^3 - 1) = 0$
$(x^3 - 1)(x^4 - 1) = 0$

2. krok: Uvedomíme si dve skutočnosti pri súčine činiteľov: $(x^3 - 1)(x^4 - 1) = 0$

a) hodnota polynómu $(x^3 - 1)$ v bode 1 je rovná nule, takže vieme predeliť polynóm $x^3 - 1$ polynómom $x - 1$:

$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$
$x^3 - x^2$
$\underline{-\quad +}$
$x^2 - 1$
$x^2 - x$
$\underline{-\quad +}$
$x - 1$
$x - 1$
$\underline{-\quad +}$
$0 \quad \rightarrow (x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Vidíme, že jeden koreň je teda $\alpha_1 = 1$ a ďalšie dva korene $\alpha_{2,3}$ nájdeme riešením kvadratickej rovnice: $x^2 + x + 1 = 0$, ktoré je:

$$\alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

a) Upravme výraz $(x^4 - 1) = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$

a pokračujme vo využití známych vzťahov:

$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

Z poslednej rovnice vidíme, že $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = -1$ a

$$\alpha_{6,7} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$$

Krok 3: Analyzujme získaný výsledok:
Na základe známych vzťahov zo strednej školy sme našli sedem koreňov zadanej algebrickej rovnice.

Poznámka:

Uvedený postup, aplikovaný pri príklade $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = 0$, možno zvážiť pri vhodných algebrických rovniciach. Avšak vždy s ním nevystačíme.

V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať riešením algebrickej rovnice, vzájomným vzťahom rovnice $P_n(x) = 0$, koreňa α tejto rovnice a polynómom 1. stupňa tvaru $(x-\alpha)$. Taktiež nájdeme odpoveď na otázky: Kedy má rovnica $P_n(x) = 0$ riešenie? Ako nájdeme korene rovnice $P_n(x) = 0$ a koľko ich je?

Veta 3.3:
Číslo α je koreňom algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$ vtedy a len vtedy, ak polynóm $x-\alpha$ delí polynóm $P_n(x)$ bez zvyšku, t.j. ak platí: $P_n(x) = (x-\alpha).P_{n-1}(x)$.

Poznámka:

Predchádzajúca veta hovorí, že ak číslo α je koreňom polynómu $P_n(x)$, potom sa tento polynóm dá napísať v tvare $P_n(x) = (x-\alpha).P_{n-1}(x)$. Tento výsledok možno zovšeobecniť:

Definícia 3.8 – Koreňový činiteľ
Ak číslo α je koreňom algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$, potom polynóm 1. stupňa tvaru $(x-\alpha)$ nazývame **koreňovým činiteľom** polynómu $P_n(x)$.

Dôležitou vetou, ktorú mnohokrát budeme využívať, je veta o rozklade algebrickej rovnice na koreňových činiteľov. Všimnime si, že koeficient a_0 pri najvyššej mocnine x^n vystupuje aj v rozklade vo vzťahu (3.6). Nakoľko sa často počítajú príklady, kde $a_0 = 1$, potom v prípade ak $a_0 \neq 1$ sa na tento koeficient v rozklade zabudne.

Veta 3.4:
Ak algebrická rovnica $\mathbf{a_0}x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ (resp. $P_n(x) = 0$) má práve n rôznych koreňov $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$),potom ju možno napísať v tvare koreňových činiteľov:

$$P_n(x) = \mathbf{a_0}.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2).(x-\alpha_3). \dots .(x-\alpha_n) \qquad (3.6).$$

Veta 3.5: Algebrická rovnica $P_n(x) = 0$, $n \geq 1$ má najviac n rôznych koreňov.

Bezprostredným dôsledkom tejto vety je:

Veta 3.6:

1. Algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ má viac než n rôznych koreňov vtedy a len vtedy, ak je $P_n(x)$ nulový polynóm.
2. Ak polynómy $P_n(x)$ a $Q_n(x)$ stupňa $n \geq 1$ majú rovnaké hodnoty vo viac ako n rôznych bodoch, potom tieto polynómy majú rovnaké koeficienty, t.j. $P_n(x) = Q_n(x)$.

V predchádzajúcich úvahách sme vždy predpokladali, že daná algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ koreň skutočne má. Nevieme však zatiaľ, či každá algebrická rovnica má aspoň jeden koreň. Tieto obavy rozptýli nasledujúca dôležitá veta.

Veta 3.7: Fundamentálna veta algebry
Každá algebrická rovnica stupňa $n \geq 1$ má v množine komplexných čísel aspoň jeden koreň.
Iné znenie tejto vety možno formulovať
Každá algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ stupňa n má v množine komplexných čísel práve ***n* koreňov.**

Vo Vete 3.4 sme predpokladali, že algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ má n rôznych koreňov $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Teraz sa budeme zaoberať prípadom, keď algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ má prvých k koreňov rovnakých a zvyšných $n-k$ navzájom rôznych, t.j. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$, čo možno vyjadriť:

$$P_n(x) = a_0.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2).(x-\alpha_3).\ \ldots\ .(x-\alpha_n) = a_0.(x-\alpha_1).(x-\alpha_1).(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_1).(x-\alpha_{k+1})\ldots(x-\alpha_n) =$$
$$= a_0.(x-\alpha_1)^k.(x-\alpha_{k+1}).\ \ldots\ .(x-\alpha_n).$$

Týmto sa dostávame k pojmu **násobnosť koreňa** algebrickej rovnice.

Definícia 3.9 – *k*-násobný koreň
Číslo α sa nazýva ***k*-násobný koreň** algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$ ak platí:

1) $P_n(\alpha) = 0$,
2) $P_n(x) = (x-\alpha)^k.P_{n-k}(x)$, pričom $P_{n-k}(\alpha) \neq 0$.

Ak $k = 1$ namiesto jednonásobný koreň hovoríme jednoduchý. Koreň, ktorý nie je jednoduchý, sa nazýva **viacnásobný** (v našom prípade k-násobný).

Na základe Vety 3.4 a predchádzajúcej definície môžeme vysloviť dôležitú vetu:

Veta 3.8:
Nech všetky rôzne korene algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$ sú $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$. Nech pre $i = 1, 2, \ldots, r$ α_i je k_i-násobný koreň. Potom platí:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$$

$$P_n(x) = \mathbf{a_0}(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r} \qquad (3.7)$$

Definícia 3.10 – Rozklad na koreňových činiteľov pri *k*-násobných koreň
Súčin na pravej strane rovnice (3.7) t.j. $P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}$ sa nazýva rozklad polynómu $P_n(x)$ na koreňových činiteľov.

Poznámka:
Je zvykom považovať *k*-násobný koreň za *k* koreňov.

Otázka 6:
Na základe vyššie uvedeného riešenia v predchádzajúcej otázke 2.6 viete napísať rovnicu $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = 0$ v tvare rozkladu na koreňové činitele? Koľko násobným koreňom je číslo 1? Koľko komplexných koreňov má algebrická rovnica?
Odpoveď:

$$(x-1)^2(x+1)(x-i)(x+i)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Číslo 1 je dvojnásobným koreňom, číslo -1 je jednoduchým koreňom a algebrická rovnica má 4 komplexné jednoduché korene. Pre kontrolu možno spočítať: 2+1+4 = 7, čo odpovedá stupňu algebrickej rovnice $n = 7$.

Na základe vyššie uvedených skutočností možno vysloviť nasledujúcu vetu:

Veta 3.9:
Každá algebrická rovnica $P_n(x) = 0$ stupňa $n \geq 1$ má práve n koreňov, ak *k*-násobný koreň považujeme za *k* koreňov.

Príklad 3.5:
Napíšte algebrickú rovnicu v tvare súčinu koreňových činiteľov, ktorej jednoduchými koreňmi sú čísla: $-i$, 2 a číslo 3 je trojnásobným koreňom. Určite, koľko komplexných koeficientov má algebrická rovnica.
Riešenie:
$(x + i)(x-2)(x-3)^3 = 0.$
Po roznásobením jednotlivých činiteľov zistíte, že päť zo šiestich koeficientov je komplexných. Presvedčte sa o správnosti výroku!

3.3 Algebrické rovnice s reálnymi koeficientmi

V doterajších úvahách koeficienty polynómu $P_n(x)$, a teda aj algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$, boli vo všeobecnosti komplexné čísla. Teraz budeme predpokladať, že koeficienty polynómu $P_n(x)$, a teda aj algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$, sú reálne čísla.

Nech komplexné číslo $\alpha = a + bi$ je koreňom algebrickej rovnice s reálnymi koeficientmi stupňa $n \geq 1$. Teda platí: $P_n(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$. Utvorme k číslu $P_n(\alpha)$ komplexne združené číslo $\overline{P_n(\alpha)}$. Pretože $P_n(\alpha) = 0$, je $\overline{P_n(\alpha)} = 0$.

Na základe vlastností komplexne združených čísiel dostaneme:

$$0 = \overline{P_n(\alpha)} = \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n} = \overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1}\alpha} + \overline{a_n} =$$
$$= a_0\,\overline{\alpha^n} + a_1\,\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\,\overline{\alpha} + a_n = P(\overline{\alpha}),$$

pretože pre $k = 1,2,.., n$ je $\overline{\alpha}^n = \overline{\alpha^n}$, a pretože a_k sú reálne čísla, je $\overline{a_k} = a_k$. Dostali sme teda, že $P(\overline{\alpha}) = 0$, čo znamená, že komplexné číslo $\overline{\alpha} = a - bi$ je tiež koreňom algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$. Tým sme ukázali platnosť nasledovnej vety:

Veta 3.10:
Nech $P_n(x) = 0$ je algebrická rovnica stupňa $n \geq 1$ s reálnymi koeficientmi. Ak komplexné číslo $\alpha = a + bi$ je jej koreňom, potom aj číslo komplexne združené k číslu α, t.j. komplexné číslo $\overline{\alpha} = a - bi$ je jej koreňom.

Poznámka:

1. Dá sa dokázať, že ak α je k-násobný koreň algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$, potom aj komplexne združený koreň $\overline{\alpha}$ je k-násobný koreň tejto rovnice,
2. Z predchádzajúcej Vety 3.10 vyplýva, že počet komplexných koreňov algebrickej rovnice s reálnymi koeficientmi je vždy párny. Dôsledkom tejto skutočnosti je nasledujúca veta:

Veta 3.11:
Každá algebrická rovnica nepárneho stupňa s reálnymi koeficientmi má aspoň jeden reálny koreň.

Ďalej sa budeme zaoberať algebrickou rovnicou $P_n(x) = 0$ stupňa $n \geq 1$ s reálnymi koeficientmi, ktorej rozklad polynómu $P_n(x)$ na súčin koreňových činiteľov je určený vzťahom (3.7):

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}$$

Korene $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$ sú vo všeobecnosti komplexné čísla, niektoré z nich môžu byť reálne čísla. Podľa Vety 3.10 ku každému komplexnému koreňu

$\alpha_k = a_k + ib_k$ existuje aj koreň $\overline{\alpha_k} = a_k - b_k i$, a to v rovnakej násobnosti. Urobíme súčin k nim prislúchajúcich koreňových činiteľov:

$$(x - \alpha_k).(x - \overline{\alpha_k}) = [x - (a_k + b_k i)].[x - (a_k - b_k i)] = [(x - a_k) + b_k i].[(x - a_k) - b_k i] =$$

$$(x - a_k)^2 - (b_k i)^2 = x^2 - 2a_k x + (a_k)^2 + (b_k)^2.$$

Dostali sme polynóm 2. stupňa s reálnymi koeficientmi. Tento polynóm sa už nedá rozložiť na súčin polynómov 1. stupňa s reálnymi koeficientmi. Ak rovnakú úpravu urobíme so všetkými koreňovými činiteľmi patriacimi k nereálnym koreňom a koreňové činitele patriace k reálnym koreňom necháme bezo zmeny, dostaneme rozklad polynómu $P_n(x)$ na súčin polynómov 1. a 2. stupňa s reálnymi koeficientmi, čo potvrdzuje veta:

Veta 3.12:
Každý polynóm s reálnymi koeficientmi $P_n(x)$ stupňa $n \geq 1$ sa dá rozložiť na súčin polynómov 1. a 2. stupňa s reálnymi koeficientmi.

Poznámka

Tvrdenie Vety 3.12 si môžeme ukázať na príklade už vyriešenej rovnice $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = 0$, v tvare koreňových činiteľov. Stačí keď si vynásobíme činitele s komplexne združenými koreňmi a dostaneme súčin polynómov prvého a druhého stupňa:

$$(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Záverom tejto časti vyslovíme vetu o racionálnych koreňoch algebrickej rovnice s celočíselnými koeficientmi, ktorú budeme často používať pri hľadaní koreňov.

Veta 3.13:
Nech $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ je algebrická rovnica stupňa $n \geq 1$ s celočíselnými koeficientmi. Nech racionálne číslo $\alpha = p/q$, kde p a q sú nesúdeliteľné čísla, je koreňom tejto rovnice. Potom koeficient a_0 je deliteľný číslom q a koeficient a_n je deliteľný číslom p.

Poznámka:

Tvrdenie Vety 3.13 možno dokázať. Keďže všetky vety doteraz sme uviedli bez dôkazov, predkladáme čitateľovi, ktorý má záujem aspoň dôkaz vety 3.13:

1. Podľa predpokladu číslo $\alpha = \dfrac{p}{q}$ je koreňom algebrickej rovnice

   $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, to znamená, že musí platiť:

   $a_0\left(\dfrac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\dfrac{p}{q}\right) + a_n = 0$, t.j.

   $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$ z čoho dostaneme:

   $p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}) = -a_nq^n$.

   Teda číslo a_nq^n je deliteľné číslom p, pretože výraz v zátvorke je celé číslo. Keďže však

   podľa predpokladu p a q sú nesúdeliteľné čísla, musí byť nutne koeficient a_n deliteľný číslom p.

2. Podobne z rovnosti $a_0p^n = -q(a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}pq^{n-2} + a_n q^{n-1})$ vyplýva, že koeficient a_0 je deliteľný číslom q.

Uvedené skutočnosti o racionálnych koreňoch algebrických rovníc s reálnymi koeficientmi si zosumarizujeme v nasledovnom postupe. Pri hľadaní racionálnych koreňov algebrickej rovnice s celočíselnými koeficientmi je postup nasledovný:

1. Nájdeme všetkých deliteľov $q_1, q_2, ..., q_s$ čísla a_0 (koeficient pri najvyššej mocnine).

2. Nájdeme všetkých deliteľov $p_1, p_2, ..., p_t$ čísla a_n. (koeficient pri nultej mocnine, t.j. absolútny člen).

3. Určíme možné racionálne korene rovnice $P_n(x) = 0$. Každé racionálne číslo α, ktoré je koreňom danej rovnice musí byť tvaru $\alpha = \dfrac{p_i}{q_j}$ pre nejaké $i = 1, 2, .., $ t.j. $i = 1, 2, ..., s$.

4. Dosadením koreňa α do danej rovnice sa presvedčíme, ktorý z týchto zlomkov je skutočne jej koreňom, t.j. či platí $P_n(\alpha) = 0$. Týmto spôsobom zistíme všetky racionálne korene danej rovnice.

Príklad 3.6:
Nájdite potenciálne racionálne korene algebrickej rovnice $P_5(x) = 0$ a overte, ktoré z nich sú koreňmi algebrickej rovnice $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

Riešenie:

Zo zadania rovnice vidíme, že $a_n = -8$, $a_0 = 1$. Hľadáme korene v tvare $\alpha = \dfrac{p_i}{q_j}$ postupom:

1. Nájdeme všetkých deliteľov p_i čísla $a_n = -8$: p_i: $\{+1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8\}$,

2. Nájdeme všetkých deliteľov q_i čísla $a_0 = 1$: q_i: $\{+1, -1\}$,

3. Určíme potenciálne racionálne korene $\alpha i = p_i/q_i$:$\{+1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8\}$,

4. Overíme dosadením postupne, pre ktoré možné αi je splnené $P_5(\alpha i) = 0$:

$P_5(1) = 1^5 - 5.1^4 + 7.1^3 - 2.1^2 + 4.1 - 8 = 1-5+7-2+4-8 = -1 \neq 0 \rightarrow$ číslo 1 nie je koreňom,

$P_5(-1) = (-1)^5 - 5.(-\,-1)^4 + 7.(-1)^3 - 2.(-1)^2 + 4.(-1) - 8 = -1-5-7-2-4-8 = -27$
$-27 \neq 0 \rightarrow$ číslo -1 nie je koreňom,

$P_5(2) = (2)^5 - 5.1(2)^4 + 7.(2)^3 - 2.(2)^2 + 4.(2) - 8 = 32-80+56-8+8-8 = 0 \rightarrow$ číslo 2 je koreňom,

Postupne by sme týmto spôsobom ukázali, že:

$P_5(-2) = -192 \neq 0 \rightarrow$ číslo -2 nie je koreňom,

$P_5(4) \neq 0 \rightarrow$ číslo 4 nie je koreňom,

$P_5(-4) \neq 0 \rightarrow$ číslo -4 nie je koreňom,

$P_5(-8) \neq 0 \rightarrow$ číslo -8 nie je koreňom,

$P_5(8) \neq 0 \rightarrow$ číslo 8 nie je koreňom.

Presvedčte sa o správnosti vlastným výpočtom. Takže výsledkom našich výpočtov je, že

Príklad 3.6 – pokračovanie riešenia

jediným racionálnym koreňom je číslo 2. Je tento koreň jednoduchý, alebo viacnásobný? Odpoveď môžeme získať viacerými spôsobmi. Ukážme si spôsob s využitím vety 2.4 a definície 2.8, t.j. delením polynómu

$(x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8) : (x-2)$ bezo zvyšku:

$(x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8) : (x - 2) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

$-(x^5 - 2x^4)$

$-3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$-(-3x^4 + 6x^3)$

$x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$-(x^3 - 2x^2)$

$4x - 8$

$-(4x - 8)$

$0 \rightarrow$ číslo 2 je minimálne jednoduchým koreňom.

O tom, či je dvojnásobným koreňom sa presvedčíme, ak polynóm $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$ predelíme opäť polynómom $(x-2)$ bezo zvyšku:

$(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4) : (x-2) = x^3 - x^2 - x - 2$

$-(x^4 - 2x^3)$

$-x^3 + x^2 + 4$

$-(-x^3 + 2x^2)$

$-x^2 + 4$

$-(-x^2 + 2x)$

$-2x + 4$

$-(-2x + 4)$

$0 \rightarrow$ číslo 2 je minimálne dvojnásobným koreňom.

O tom, či je trojnásobným koreňom sa presvedčíme, ak polynóm $x^3 - x^2 - x - 2$ predelíme opäť polynómom $(x-2)$ bezo zvyšku:

$(x^3 - x^2 - x - 2):(x-2) = x^2 + x + 1$

$-(x^3 - 2x^2)$

$x^2 - x - 2$

$-(x^2 - 2x)$

$x - 2$

$-(x - 2)$

$0 \rightarrow$ číslo 2 je minimálne trojnásobným koreňom.

O tom, či je štvornásobným koreňom sa presvedčíme, ak polynóm $x^2 + x + 1$predelíme opäť polynómom $(x-2)$ bezo zvyšku:

$(x^2 + x + 1):(x - 2) = x + 3$

$-(x^2 - 2x)$

$3x + 1 \neq 0 \rightarrow$ nie je štvornásobný koreň.

$-(3x - 6)$

$7 \neq 0$ číslo 2 nie je štvornásobným koreňom, je len trojnásobným koreňom rovnice. Keďže posledný zvyšok po delení bol polynóm druhého stupňa $(x^2 + x + 1)$, mohli sme riešiť kvadratickú rovnicu a dospieť hneď ku všetkým koreňom rovnice. Keďže diskriminant tejto rovnice $D = -3$, rovnica mám dva komplexne združené korene:

$x_{1,2} = [-1 \pm i\,(3)^{1/2}]/2$. Vidíme, že sme našli všetkých päť koreňov rovnice.

3.4 Hornerova schéma

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali otázkou existencie a počtu koreňov algebrickej rovnice. Vlastnosti koreňov algebrickej rovnice nám v mnohých prípadoch umožnili nájsť niektoré korene. Otázka nájdenia všetkých koreňov je vo všeobecnosti veľmi zložitá.

Z príkladu 3.6 vidíme, že v tomto prípade sme boli schopní nájsť nielen všetky racionálne korene, ale i dva komplexne združené korene. Tento postup je jednoduchý, avšak časovo náročný a zdĺhavý. Takže bolo by žiaduce vedieť nejaký iný algoritmus.

Súčasné poznatky možno sumarizovať:

- Poznáme vzorec, pomocou ktorého vieme nájsť korene kvadratickej rovnice.
- Vzorce pre korene kubických rovníc existujú (Cardanove vzorce), rovnako ako aj pre rovnice 4. stupňa. Tieto sú však oveľa zložitejšie a ich praktická použiteľnosť je veľmi malá, takže ich neuvádzame.
- Podobné vzorce pre algebrické rovnice stupňa $n \geq 5$ neexistujú a je známe, že sa ani nedajú odvodiť.
- Na výpočet koreňov možno použiť i prostriedky informačných komunikačných prostriedkov, ako je napríklad WZ grapher a iné interaktívne www stránky ako napríklad http://wims.unice.fr/wims/en_home.html.
- Existuje algoritmus, zvaný Hornerova schéma, na určovanie koreňov algebrických rovníc a vypočítanie hodnoty polynómu $P_n(x)$ v čísle α, kde stupeň $n > 1$ jednoduchším spôsobom, ako je dosadzovaním do rovnice. http://dash.nazory.cz/data/horner Ukážeme si ju v nasledujúcej časti:

Hornerova schéma (Hornerov algoritmus) je názov algoritmu pre efektívne vyhodnocovanie polynómov. Tento algoritmus bol pomenovaný po britskom matematikovi Williamovi Georgovi Hornerovi.

Hornerova schéma prezentuje delenie polynómu $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ lineárnym polynómom $(x-\alpha)$. Bude nám umožňovať jednoduchším spôsobom určiť:

1. hodnotu polynómu $f(x)$ v ľubovoľnom čísle α;
2. rozhodnúť, či dané číslo je, alebo nie je koreňom algebrickej rovnice;
3. násobnosť koreňa;
4. delenie polynómu $f(x)$ polynómom $(x-\alpha)$;
5. rozklad na súčin koreňových činiteľov.

Priblížime si použitie Hornerovej schémy. Označme koeficienty polynómu, ktorý vznikne po delení polynómom $(x-\alpha)$ ako b_i . Ich spôsob určenia prezentuje tabuľka 3.1.

Tabuľka 3.1: Určenie koeficientov pri Hornerovej schéme

Koeficienty /koreň α	a_0	a_1 $\alpha.b_0$	....	a_{n-1} $\alpha.b_{n-2}$	a_n $\alpha.b_{n-1}$
	$a_0 = b_0$	$b_1 = a_1 + \alpha.b_0$	...	$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha.b_{n-2}$	$a_n + \alpha.b_{n-1} = f(\alpha)$

Algoritmus Hornerovej schémy možno vyjadriť skrátene:

1. $b_0 = a_0$ $\qquad b_1 = \alpha b_0 + a_0$
2. $b_i = \alpha b_{i-1} + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Použitie Hornerovej schémy si objasníme na konkrétnych príkladoch.

Príklad 3.7:

Nech $f(x) = 1x^3 - 2x^2 + 7x - 1$. Vypočítajte hodnotu polynómu $f(x)$ v čísle $x = 4$, t.j. $f(4) = ?$

Riešenie:

Podľa vyššie uvedenej schémy hodnotu $f(4)$ počítame pomocou tabuľky pre $\alpha = 4$:

	i / $\alpha = 4$ i = 0, .., n	0	1	2	3
a_i		1	-2	7	-1
αa_i	1	4.1	4.1 = 4	4.2 = 8	4.15 = 60
b_i		1	4-2 = 2	8+7 = 15	60-1 = 59
		b_0	b_1	b_2	$b_3 = f(4)$

Hľadaná hodnota $f(4) = 59$.

Postup si možno ozrejmiť aj graficky na nasledujúcom príklade:

Príklad 3.8:

Zistite hodnotu polynómu $f(x) = x^3 - 7x - 6$ v čísle $\alpha = 1$.

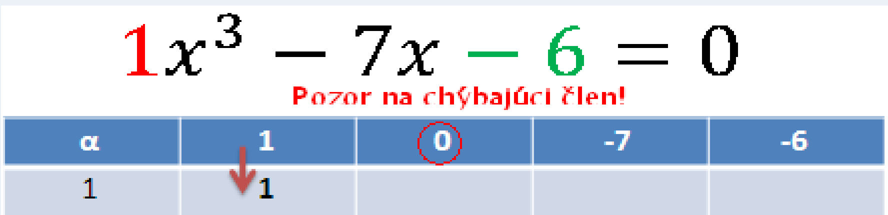
Riešenie:

Podľa vyššie uvedenej schémy uvedomíme si hodnoty koeficientov a zapíšeme do tabuľky pre $\alpha = 1$: Pozor, tie mocniny, ktoré nám chýbajú dáme koeficient 0!

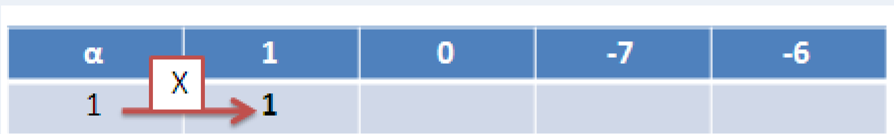
$f(x) = 1x^3 + 0x^2 - 7x - 6$. Postup prezentujme dvomi spôsobmi:

A) graficky, kde využijeme obrázky z prezentácie spracované v projekte študentom Milanom Hlinákom, čím prezentujeme jednotlivé kroky Hornerovej schémy a operácie, ktoré robíme:

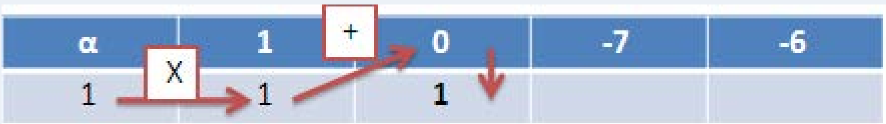
1. krok: Zapíšeme do tabuľky koeficienty a koreň $\alpha = 1$:



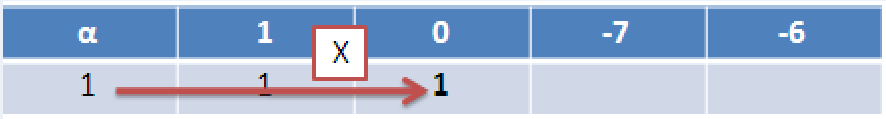
2. krok:



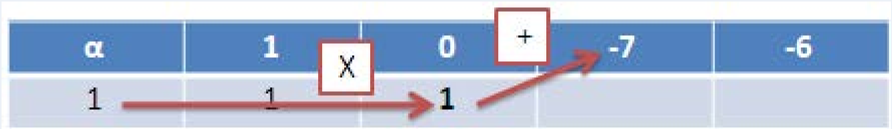
3. krok:



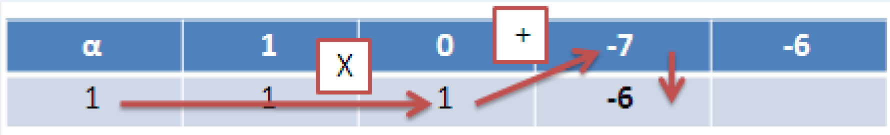
4. krok:



5. krok:

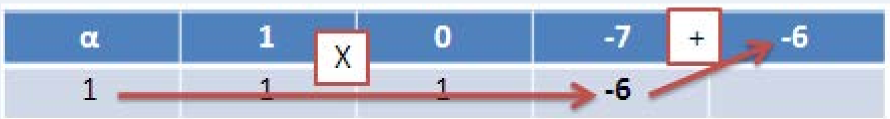


6. krok:

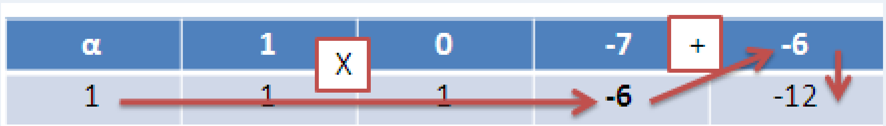


7. krok:

8. krok:



9. krok:



V poslednom okienku nám vyšlo číslo -12, ktoré udáva $f(1) = -12$.

B) skrátenou tabuľkou:

a_i	1	0	-7	-6
a_i	1	1.1+0=1	1.1 -7 = -6	1.(-6) + (-6) = -12
	b_0	b_1	b_2	$b_3 = f(1) = -12$
	$a_0 = b_0$	$b_1 = \alpha.\, b_0 + a_1$	$b_2 = \alpha.\, b_1 + a_2$	$b_3 = \alpha.\, b_2 + a_3 = f(\alpha)$

Príklad 3.9:

Napíšte rozklad algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$ na koreňových činiteľov:
a) v obore reálnych čísiel, b) v obore komplexných čísiel, kde $P_n(x) = x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 30x - 36$.

Riešenie:
Podľa vety o racionálnych koreňoch potenciálnymi koreňmi algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$ sú čísla $\alpha_i = \dfrac{p}{q}$, kde p a q sú nesúdeliteľné čísla také, že:

1: $p/a_n = p/(-36)$, t.j. p je deliteľom čísla 36:
[1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36, -36]

2: $q/a_0 = q/1$: [1, -1]

3. Takže množina možných koreňov α je:

$$[\alpha_i] = \frac{p}{q}\ [1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36, -36],$$

ktoré overíme Hornerovou schémou:

Koeficient / Koreň	$a_0 = 1$	$a_1 = 2$	$a_2 = -9$	$a_3 = -4$	$a_4 = 30$	$a_5 = -36$
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = \alpha b_0 + a_1$	$b_2 = \alpha b_1 + a_2$	$b_3 = \alpha b_2 + a_3$	$b_4 = \alpha b_3 + a_4$	$P_n(\alpha)$
$\alpha = 1$	1	3	-6	-10	20	$-16 \neq 0$ 1 nie je koreň
$\alpha = -1$	1	1	-10	6	24	-60 -1 nie je koreň
$\alpha_1 = 2$	1	4	-1	-6	18	0 číslo 2 je koreň
$\alpha_1 = 2$	1	6	11	16	$50 \neq 0$	→ číslo 2 je jednoduchý
-2	1	2	-5	4	$10 \neq 0$	→ -2 nie je
3	1	7	20	54	$180 \neq 0$	→ 3 nie je koreň
$\alpha_2 = -3$	1	1	-4	6	0	→ -3 je koreň
$\alpha_2 = -3$	1	-2	2	0		-3 je koreň dvojnásobný
$\alpha_2 = -3$	1	-5	$17 \neq 0$			→ 3 nie je trojnásobný koreň

Príklad 3.9: - pokračovanie

V delení polynómu nemusíme pokračovať, pretože polynóm v predposlednom riadku nám už určuje koeficienty kvadratickej rovnice $x^2 - 2x + 2 = 0$, ktorú vieme riešiť ($x_{4,5} = \pm i$).Takže rozklad na koreňové činitele je:

a) v obore R:

$$x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 30x - 36 = (x-2)(x^4 + 4x^3 - x^2 - 6x + 18) =$$
$$= (x-2)(x+3)(x^3 + x^2 - 4x + 6) = (x-2)(x+3)^2(x^2 - 2x + 2)$$

b) v obore K komplexných čísiel:

$$x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 30x - 36 = (x-2)(x+3)^2(x-i)(x+i)$$

Príklad 3.10:

Nájdite rozklad polynómu $P_4(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ na súčin koreňových činiteľov.

Riešenie:

Rozklad daného polynómu nájdeme tak, že nájdeme najskôr všetky korene daného polynómu podľa Vety 2.14 o racionálnych koreňoch algebrickej rovnice (a teda aj polynómu) s celočíselnými koeficientmi. Ako korene prichádzajú do úvahy čísla: α ={1, -1, 2, -2}. Pomocou Hornerovej schémy zistíme, ktoré z uvedených čísel je koreňom a koľkonásobným:

	1	-3	1	3	-2	
b_i	$a_0 = b_0$	$b_1 = \alpha\, b_0 + a_1$	$b_2 = \alpha . b_1 + a_2$	$b_3 = \alpha . b_2 + a_3$	$b_4 = \alpha . b_3 + a_4$	
α = 1	**1**	1.1-3=**-2**	1.(-2) +1= **-1**	1.(-1) +3= **2**	1.2-2= 0	1 je koreň
α = 1	1	1.1 + (-2) = -1	-1-1= -2	-2+2 = 0	1 je dvojnásobným koreň	
α = 1	1	1-1= 0	1.0-2 = -2≠0	1 nie je trojnásobným koreň		
	1	**-1**	**-2**	Pokračujeme s koeficientmi, kde je posledná 0. Keďže je to kvadratická rovnica, vyriešime ju!		

Z tabuľky vieme určiť rozklad polynómu na koreňové súčiny. Tretí riadok nám hovorí: $P_4(x) = (x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2) = (x - 1).(1x^3 - 2x^2 - 1x + 2) =$

Štvrtý riadok tabuľky nám určuje:

$P_4(x) = (x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2) = (x - 1).(1x^3 - 2x^2 - 1x + 2) =$
$(x - 1). (x - 1) (1x^2 - 1x - 2) = (x - 1)^2. (x + 1).(x - 2).$

Poznámka: Posledné dva korene: $\alpha_3 = -1$ a $\alpha_4 = 2$ sme určili riešením kvadratickej rovnice.

Príklad 3.11:

Nájdite algebrickú rovnicu, ktorá má všetky korene jednoduché a rovnaké ako rovnica:
$x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 8x - 4 = 0$.

Riešenie:

Najprv nájdeme všetky potenciálne racionálne korene uvedenej rovnice. Je to algebrická rovnica s celočíselnými koeficientmi, možné racionálne korene preto sú: $\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ďalej riešime pomocou Hornerovej schémy:

	1	-2	-2	6	-7	8	-4	
$\alpha = 1$	1	-1	-3	3	-4	4	0	$\alpha = 1$ je koreňom
$\alpha = 1$	1	0	-3	0	-4	0		$\alpha_{1,2} = 1$ je dvojnásobným koreňom
$\alpha = 1$	1	1	-2	-2	$-6 \neq 0$			$\alpha = 1$ nie je trojnásobným koreňom
$\alpha = 2$	1	2	1	2	0			$\alpha_3 = 2$ je koreňom
$\alpha = 2$	1	4	9	$20 \neq 0$				$\alpha_3 = 2$ je jednoduchým koreňom
$\alpha = -2$	1	0	1	0				$\alpha_4 = -2$ je koreňom

Z posledného riadku vidíme, že sa jedná o kvadratický dvojčlen: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = i, \alpha_6 = -i$.
Jednoduché korene hľadanej rovnice teda budú: $1, 2, -2, i, -i$, a hľadaná rovnica bude mať tvar:
$(x-1).(x-2).(x+2).(x-i).(x+i) = 0$, t.j. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4 = 0$.

Poznámka:

Farebné označenie riadkov v Hornerovej schéme Príkladu 2.29 naznačuje, z ktorého riadku je výhodné overovať ďalší vybraný koreň.

Príklad 3.12:

Riešte algebrickú rovnicu $x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4 = 0$, ak viete, že jeden jej koreň je číslo 1+ i. Napíšte rozklad a) polynómu $P_n(x)$ na súčin koreňových činiteľov, b) polynómu $P_n(x)$ na súčin polynómov 1. a 2. stupňa s reálnymi koeficientmi.

Riešenie:

Označme si $P_5(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4$. $\alpha_1 = 1+i$ je koreň algebrickej rovnice s reálnymi koeficientmi. Potom, podľa Vety 3.10, je aj komplexne združené číslo
$\alpha_2 = \alpha_1^* = 1 - i$ tiež koreňom tejto algebrickej rovnice. Potom polynóm $P_5(x)$ je deliteľný koreňovými činiteľmi $(x - 1 - i),(x - 1+i)$ a teda polynóm $P_5(x)$ musí byť deliteľný aj súčinom koreňových činiteľov:

$$(x-1-i).(x-1+i) = (x-1)^2 - i^2 = (x-1)^2 + 1 = (x^2 - 2x + 2) \quad \Rightarrow$$

$$(x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4) : (x^2 - 2x + 2) = x^3 + x^2 - 2x - 2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l}
-\underline{(x^5 - 2x^4 + 2x^3)} \\
\quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 \\
\quad -\underline{(x^4 - 2x^3 + 2x^2)} \\
\qquad -2x^3 + 2x^2 - 4 \\
\qquad -\underline{(-2x^3 + 4x^2 - 4x)} \\
\qquad\quad -2x^2 + 4x - 4 \\
\qquad\quad -\underline{(-2x^2 + 4x - 4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Príklad 3.12: - pokračovanie riešenia

Na základe výpočtu možno zapísať $P_5(x) = (x^2 - 2x + 2).(x^3 + x^2 - 2x - 2) = 0$, takže stačí riešiť algebrickú rovnicu s celočíselnými koeficientmi $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$. Možné racionálne korene sú $\alpha = \{\pm 1, \pm 2\}$. Použijeme Hornerovu schému:

	1	1	-2	-2	
$\alpha = 1$	1	2	0	$-2 \neq 0$	$\alpha = 1$ nie je koreňom
$\alpha = -1$	1	0	-2	0	$\alpha_1 = -1$ je jednoduchým koreňom
$\alpha = -1$	1	-1	$-1 \neq 0$		$\alpha = -1$ nie je koreňom
$\alpha = 2$	1	2	$2 \neq 0$		$\alpha = 2$ nie je koreňom
$\alpha = -2$	1	-2	$2 \neq 0$		$\alpha = -2$ nie je koreňom

Úkony v posledných dvoch riadkoch sme nemuseli robiť, pretože z tretieho riadku tabuľky vidíme, že nám ostal kvadratický dvojčlen $x^2 + 2$, ktorý vieme riešiť: $\alpha_{2,3} = i\sqrt{2}$.

Odpoveď:

a) Rozklad polynómu $P_n(x)$ na súčin koreňových činiteľov bude:
$P_n(x) = (x^2 - 2x + 2).(x^3 + x^2 - 2x - 2) = (x^2 - 2x + 2)((x+1)(x - i\sqrt{2}).(x + i\sqrt{2})$.

b) Rozklad polynómu $P_n(x)$ na súčin polynómov 1. a 2. stupňa s reálnymi koeficientmi možno zapísať: $P_n(x) = (x^2 - 2x + 2)((x+1)(x^2 + 2)$.

Príklad 3.13:

Ak vieme, že koreňmi algebrickej rovnice s reálnymi koeficientmi (AR) sú čísla: $2 - i$, $1\text{-}2i$ - jednoduché korene, dvojnásobnými sú čísla $1, -1$, a čísla $3, -3$ sú trojnásobné korene AR. Napíšte: a) algebrickú rovnicu v tvare súčinu koreňových činiteľov,

b) aký je stupeň n AR,

c) akú hodnotu má koeficient a_0,

d) akú hodnotu má koeficient a_n.

Riešenie:

Rozklad polynómu $P(x)$ na súčin koreňových činiteľov je:

a) $P_n(x) = (x - 2 - i).(x - 2 + i).(x - 1 - 2i).(x - 1 + 2i).(x - 1)^2.(x+1)^2 (x - 3)^3.(x + 3)^3 = 0$

b) Stupeň AR $n = 14$;

c) Koeficient $a_0 = 1$;

d) Koeficient a_n určíme, ak si napíšeme $P(x)$ v tvare súčinu činiteľov s reálnymi koeficientmi:

$$P(x) = \{(x-2)^2 + 1\}\{(x-1)^2 - 4i^2\}(x-1)^2 \cdot (x+1)^2 (x-3)^3.(x+3)^3 = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 2x + 5)(x-1)^2 (x+1)^2 (x-3)^3 (x+3)^3$$

$$a_n = 5.5.(-1)^2.1^2.(-3)^3.(3)^3 = -25.(3)^6 = -18\,225.$$

Príklad 3.14:
Napíšte algebrickú rovnicu $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.v tvare súčin polynómov 1. a 2. stupňa s reálnymi koeficientmi a v tvare súčinu koreňových činiteľov v obore K.:

Riešenie:
Označme si $P_4(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ je algebrická rovnica s celočíselnými koeficientmi. Hľadáme racionálne korene v tvare $\alpha = p/q$, kde $p/(-1)$ a $q/2$, teda: $p = \pm 1$, a $q = \pm 1, \pm 2$, $\Rightarrow \alpha = \{\pm 1, \pm 1/2\}$. Pomocou Hornerovej schémy zistíme, ktoré z čísiel sú koreňmi:

α	2	1	1	1	-1	
1	2	3	4	5	$4 \neq 0$	1 nie je koreňom
-1	2	-1	2	-1	0	-1 je jednoduchý koreň
-1	2	-3	5	$-6 \neq 0$		
1/2	2	0	2	0		½ je koreňom

Keďže $\alpha_1 = -1$ je koreň, na základe tretieho riadku schémy možno písať:

a) $P_4(x) = (x + 1).(2x^3 - x^2 + 2x - 1) = (x + 1).\,(x - 1/2).(\,(2x^2 + 2) =$
$= 2(x + 1).\,(x - 1/2).\,(x^2 + 1)$, čo je rozklad v tvare súčin polynómov 1. a 2. stupňa s reálnymi koeficientmi;

b) $P_4(x) = 2\,(x+1).\,(x - \frac{1}{2}).(x - i).(x + i)$, čo je rozklad v množine komplexných čísiel K.

Špeciálnym prípadom algebrickej rovnice je binomická rovnica, riešenie ktorej si ukážeme.

Definícia 3.11 - Binomická rovnica
Rovnica $ax^n + b = 0$, kde $a \neq 0$, sa nazýva binomická rovnica. Rovnicu možno upraviť na tvar $x^n = -b/a$, takže budeme uvažovať za základný tvar binomickej rovnice

$$x^n = c, \text{ kde } c \neq 0,$$

ktorá má n rôznych koreňov, ktoré vypočítame zo vzťahu

$$\alpha_k = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i.\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (3.7)$$

kde $\varphi = 0$, ak $c > 0$ a $\varphi = \pi$, ak $c < 0$, i je imaginárna jednotka a za k dosadíme postupne čísla 0, 1, 2, ..., n-1.

Príklad 3.15:
Nájdite korene rovnice $2x^4 + 8 = 0$.

Riešenie:

Máme riešiť rovnicu $x^4 = -4$. Pretože $-8 < 0$, $\varphi = \pi$, čo čitateľ ľahko zistí, ak si číslo - 4 nakreslí do systému xy. Podľa vzťahu (3.7) určíme štyri korene pre $k = 0, 1, 2$ a 3:

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{|-4|}\left(\cos\frac{\pi + 2.0.\pi}{4} + \mathrm{i}.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \mathrm{i}\,,\quad \alpha_2 = 2^{\frac{2}{4}}\left(\cos\frac{\pi + 2.1\pi}{4} + \mathrm{i}.\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + \mathrm{i}\,,$$

$$\alpha_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2.2\pi}{4} + \mathrm{i}.\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - \mathrm{i}\,,\quad \alpha_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2.3\pi}{4} + \mathrm{i}.\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - \mathrm{i}\,.$$

3.5 Využitie interaktívnych simulácií na riešenie algebrických rovníc

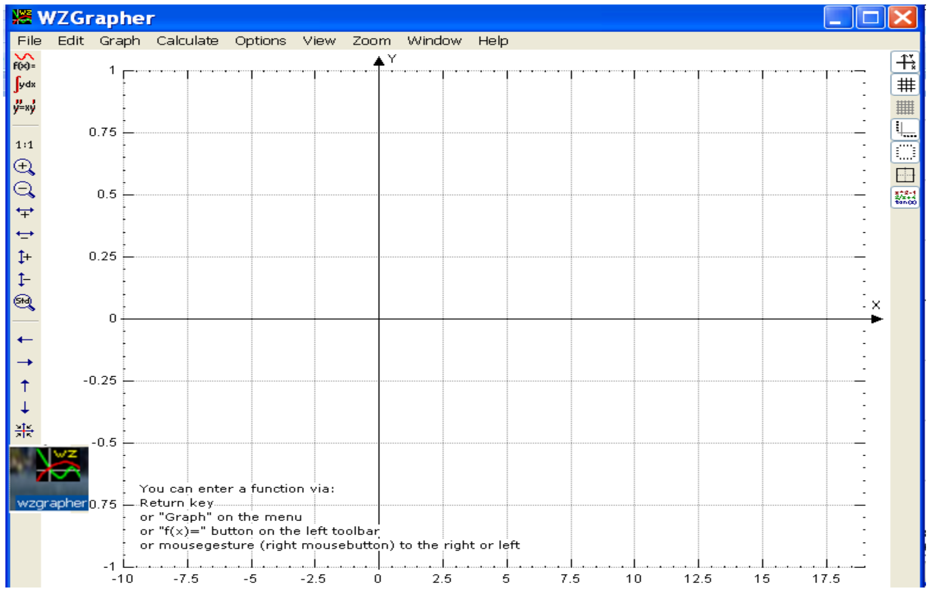
V súčasnej informačnej spoločnosti nie je možné, nevyužívať to čo nám informačné technológie ponúkajú. Keďže ich vývoj je neustály a rýchly, objavuje sa na internete množstvo rôznych produktov, či už ako „open source“, t.j. voľne prístupné zdroje, alebo za úhradu. Je na zručnosti čitateľa, ktorý si vyberie a ako sa s ním naučí pracovať. Je ale dôležité, jednak aby sme sledovali tieto trendy, ale vždy pri ich použití mali logické uvažovanie.

Jedným z voľne dostupných programov je **WZgrapher,** ktorý si možno stiahnuť na: http://www.stahuj.centrum.cz/podnikani_a_domacnost/vyukove_programy/wzgrapher/
Túto aplikáciu je možno využiť na:

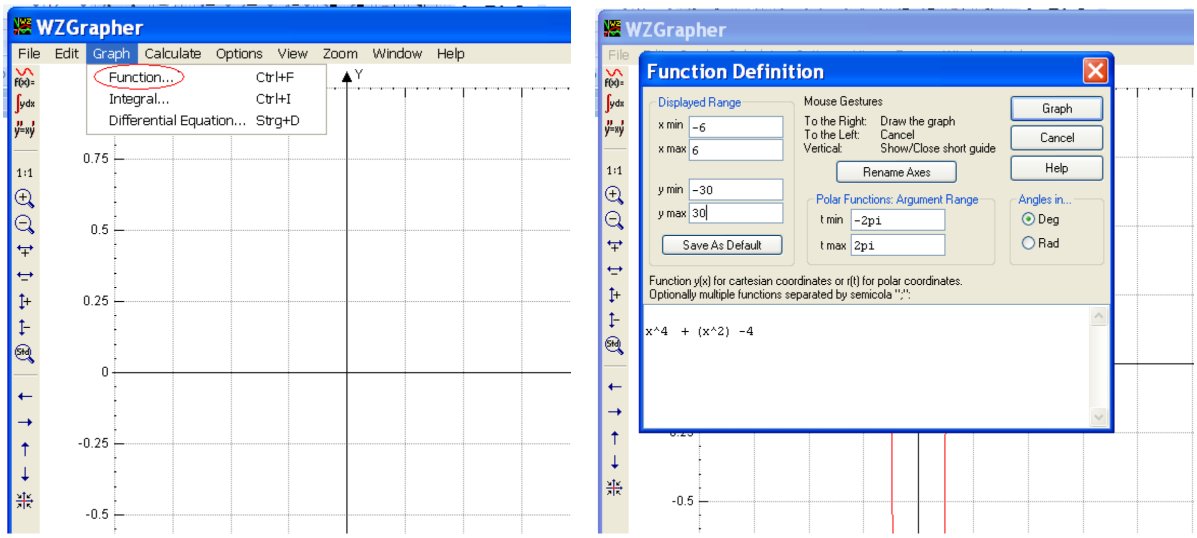
- kreslenie grafov funkcií v karteziánskej a polárnej súradnicovej sústave;
- numerické a grafické riešenie integrálov a derivácií (až do piateho rádu) funkcií;
- výpočet diferenciálnych a integrálnych rovníc;
- prácu s tabuľkami.

Po stiahnutí a otvorení programu postupujte (pozri obr. 3.5):

- kliknete políčko funkcia $f(x)$ na ľavej strane hore, resp. v hornej lište: graph a funkcia (obr. 3.5b);
- vpíšete skúmanú funkciu dolu do voľného priestoru, všimnite si, aký je požadovaný matematický zápis, definujte intervaly pre funkciu (obr. 3.5c) a kliknete na graph, vpravo hore. Získate graf danej funkcie.
- Odčítate priesečníky s osou x – kliknutím na priesečník sa zobrazí hodnota koreňa (obr. 3.6).



Obrázok 3.5a: WZgrapher – otvorenie



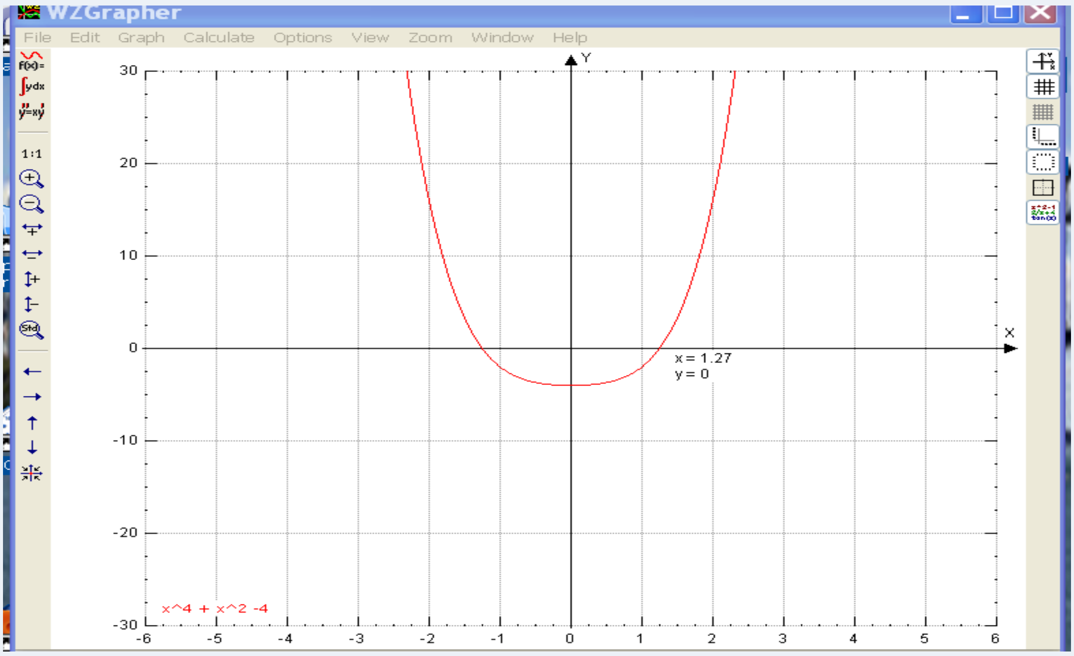
Obrázok 3.5b, c: WZgrapher – postup zadania funkcie

Postup si ukážeme na konkrétnom riešenom príklade:

Príklad 3.16:

Riešte graficky algebrickú rovnicu $P_4(x) = x^4 + x^2 - 4 = 0$ použitím WZgrapheru.

Riešenie:

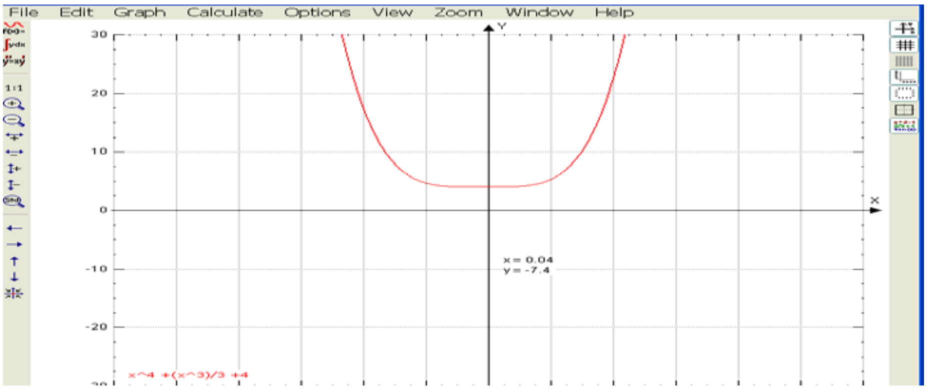


Obrázok 3.6: Grafické riešenie rovnice $x^4 + x^2 - 4 = 0$ použitím WZgrapheru

Jeden koreň sme našli použitím $x = 1{,}27$. Aký bude druhý koreň? Určite ho!

Otázka 7:

Čo vieme povedať na základe obr. 3.7 o riešení algebrickej rovnice $x^4 + x^2/3 + 4 = 0$?



Obrázok: 3.7: Grafické riešenie $x^4 + x^2/3 + 4 = 0$

Odpoveď: V obore reálnych čísiel nemá riešenie.

Ďalšie zdroje na riešenie rovníc čitateľ nájde na: http://wims.unice.fr, resp. www.phet.colorado.edu.

Kontrolné otázky

1. Objasnite pojem „polynóm stupňa *n*“. Čo je to algebrická rovnica stupňa *n*?
2. Čo nazývame koreňom (resp. riešením) algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$?
3. Čo nazývame rozklad polynómu na koreňových činiteľom? Zapíšte ho pre vami zvolený prípad.
4. Čo vieme povedať o výraze $P_n(x)$, ak číslo α je koreňom algebrickej rovnice?
5. Objasnite, čo to znamená, že číslo α je k-násobný koreň algebrickej rovnice $P_n(x) = 0$, resp. polynómu $P_n(x)$? Zapíšte tento výrok.
6. Čo vyjadruje fundamentálna veta algebry? Vyslovte znenie fundamentálna veta algebry.
7. Aký je počet koreňov (riešení) algebrickej rovnice stupňa $n \geq 1$?
8. Čo je to rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov?
9. Aký je maximálny počet komplexných koreňov algebrickej rovnice piateho stupňa s reálnymi koeficientmi?
10. Ako možno rozložiť každý polynóm s reálnymi koeficientmi?
11. Aké racionálne a celočíselné korene môže mať algebrická rovnica s celočíselnými koeficientmi? Vyslovte postup pri hľadaní možných koreňoch AR.
12. Objasnite význam Hornerovej schémy. Môžeme ju využiť na určovanie rozkladu na koreňové činitele? Vyslovte, čo všetko je možné pomocou nej určiť.
13. Má algebrická rovnica nepárneho stupňa s reálnymi koeficientmi aspoň jeden reálny koreň? Svoje tvrdenie zdôvodnite.
14. Objasnite rozdiel medzi pojmami: polynóm a algebrická rovnica.

KAPITOLA 4
ZÁKLADY VEKTOROVEJ ALGEBRY

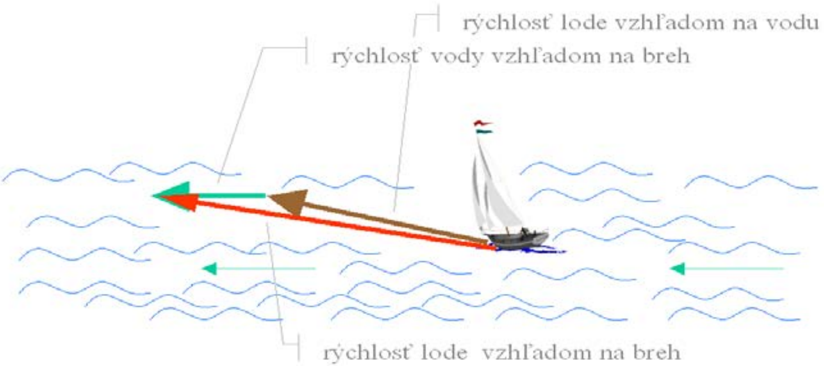
Učebné ciele:

- Naučiť sa pracovať s vektorovými veličinami na základe pravidiel vektorovej algebry platnej vo vektorovom priestore;
- Zvládnuť aplikáciu nadobudnutých poznatkov v podmienkach reálneho sveta;
- Naučiť sa pracovať s vektorovými rovnicami;
- Vedieť objasniť rozdiel medzi skalárnym a vektorovým súčinom dvoch vektorov, ich význam, ako vedieť vypočítať zmiešaný súčin medzi tromi vektormi.

Kľúčové slová: Vektory, vektorový priestor, operácie s vektormi: sčitovanie, násobenie vektora skalárom, skalárny a vektorový súčin dvoch vektorov, zmiešaný súčin troch vektorov.

Požadované vedomosti: znalosť stredoškolskej matematiky z oblasti úpravy a riešenia rovníc.

Motivácia



Obrázok 4.1: Príklad využitia vektorovej algebry

4.1 Fyzikálne vektorové veličiny

Reálny svet okolo nás nám ponúka široké spektrum veličín, napríklad technických, či fyzikálnych a iných. Na určenie niektorých veličín postačuje jeden údaj, kým na určenie iných veličín jeden údaj nestačí. Vo všeobecnosti podľa počtu údajov potrebných na ich úplné určenie definujeme tri kategórie fyzikálnych veličín: skalárne, vektorové a tenzorové.

Definícia 4.1 - Skalárne veličiny

Veličiny, ktoré sú jednoznačne určené jedinou číselnou hodnotou nazývame ***skalárne veličiny*** (resp. ***skaláry***).

Ako príklad skalárnych fyzikálnych veličín možno uviesť: teplota, tlak, hmotnosť, čas, ...

Definícia 4.2 - Vektorové veličiny

Veličiny, ktoré charakterizujeme nielen ich veľkosťou, ale aj smerom a orientáciou v priestore nazývame ***vektorové veličiny*** (resp. ***vektory***).

Ako príklad vektorových fyzikálnych veličín možno uviesť rýchlosť, zrýchlenie, silu, intenzita elektrického poľa,...

Potrebu vzniku vektorovej algebry si vynútil reálny život a najmä mechanika, ktorá sa zaoberala aj skladaním síl. V dennom živote nás obklopuje trojrozmerný priestor, ktorého matematickou abstrakciou je Euklidovský trojrozmerný priestor. Priestor, v ktorom pracujeme s vektorovými veličinami nazývame vektorový priestor. Aby sme si uvedomili, že pracujeme s vektorovými veličinami, všetky fyzikálne vektorové veličiny označujeme písmenom so šípkou nad písmenom: $\vec{v}, \vec{a}$, resp. tučnou kurzívou: ***v, a***.[1]

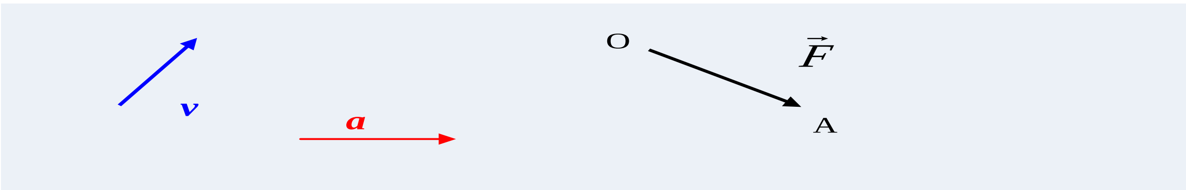
Treťou kategóriou veličín sú také veličiny, ktoré súvisia s rôznymi vlastnosťami vybraných materiálov v rôznych smeroch.

Definícia 4.3 - Tenzorové veličiny

Veličiny, ktoré sú jednoznačne určené v trojrozmernom priestore viac ako tromi údajmi nazývame **tenzorové veličiny** .

Ako príklad možno uviesť tenzor napätia, tenzor deformácie a iné. Materiály, vykazujúce anizotrópne vlastnosti (rôzne vlastnosti v rôznych smeroch) majú mnohoraké využitie v reálnom živote: napr. v zapaľovačoch, ... Popisovať ich budeme pomocou matíc (typu 3x3), ktorým sa budeme detailnejšie venovať v kapitole päť.

V tejto časti sa sústredíme na vektorové veličiny, pre ktoré si definujeme základné operácie, ktoré vychádzajú zo skladania vektorov, *teda orientovaných úsečiek, ktoré majú definovaný začiatok a veľkosť* (obr. 4.2).



Obrázok 4.2: Znázorňovanie a označovanie vektorov

Definícia 4.4 - Viazaná vektorová veličina

Viazaná vektorová veličina je taká vektorová fyzikálna veličina, ktorá je viazaná na nejaký bod v priestore (pôsobisko), napr. sila pôsobiaca na deformovateľné teleso. Pri zmene pôsobiska tejto sily sa zmenia aj účinky na dané teleso.

[1] Norma STN ISO 31-0 ukladá písať všetky fyzikálne veličiny, napríklad vektor sily ***F*** -ležatým písmom – kurzívou hrubo (boldom), alebo s vektorom nad fyzikálnou veličinou napísanou kurzívou $\vec{F}$. V texte budú používané obidva typy označení vektorov.

Poznámka:

Pripomeňme si, že:

a) fyzikálne vektorové veličiny možno, po vynechaní rozmeru, charakterizovať číslom udávajúcim ich veľkosť, smer a orientáciu alebo ich zakresliť orientovanou úsečkou;
b) vektorové fyzikálne veličiny delíme na **viazané, kĺzavé** (alebo posuvné) a **voľné**.
c) ako prvý s vektormi začal pracovať holandský fyzik Stein, ktorý znázorňoval sily pomocou orientovaných úsečiek.

Definícia 4.5 - Kĺzavá vektorová veličina

Vektorová fyzikálna veličina pôsobiaca pozdĺž nejakej priamky, ktorá nemá určité pevné pôsobisko sa nazýva **kĺzavá** – napr. sila pôsobiaca na absolútne tuhé teleso.

Definícia 4.6 - Voľná vektorová veličina

Vektorová veličina ktorá nie je viazaná na určité pôsobisko sa nazýva **voľná vektorová veličina** – napr. moment dvojice síl pôsobiacich na tuhé teleso.

S ohľadom na reálny svet okolo nás vieme vytvoriť dva matematické modely vektora:

1. **Aritmetický model vektora**
   – v trojrozmernom priestore určený trojicou čísiel $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, resp. v n-rozmernom priestore n-ticou čísel, ktoré nazývame súradnicami vektora vo zvolenej súradnicovej sústave $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{n-1}, x_n)$.
2. **Geometrický model vektora**
   – v priestore graficky znázornený orientovanou úsečkou – vektorom, ktorý má začiatočný bod a koncový bod označený šípkou – pozri obr. 4.2, kde bod O je začiatočný bod a bod A koncový bod vektora $\vec{F}$.

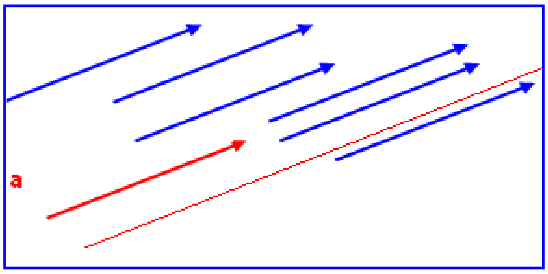
Definícia 4.7 - Veľkosť vektora

Veľkosť vektora (resp. ***absolútna hodnota* vektora**) je vždy nezáporná hodnota, ktorú označujeme $|\vec{F}|$ a určíme ju ako vzdialenosť začiatočného bodu so súradnicami O = (x_0, y_0, z_0) a koncového bodu vektora A = (x_A, y_A, z_A) podľa vzťahu

$$d = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2} \qquad (4.1)$$

Definícia 4.8 - Smer vektora a rovnosť vektorov

Pod **smerom vektora** rozumieme množinu všetkých priamok rovnobežných s priamkou „a“, hovoríme o *smere* a (obr. 4.3). Dva vektory považujeme za **rovnaké (resp. ekvivalentné),** ak majú rovnaký smer a rovnakú veľkosť (sú teda kolineárne), pretože sa rovnobežným posunutím jedného z nich dajú stotožniť.



Obrázok 4.3: Smer vektora – rovnaké vektory

Poznámka:

1. Je zrejmé, že smer je spoločná vlastnosť všetkých navzájom rovnobežných priamok a je jednoznačne určený hociktorou z týchto priamok.
2. Orientovanou priamkou nazývame množinu všetkých bodov na priamke usporiadaných podľa jedného z dvoch možných usporiadaní dvoch rôznych bodov A a B tejto priamky:
   a) bod A je pred bodom O (píšeme A < O);
   b) bod 0 je pred bodom A (píšeme O > A).
3. Orientovanú úsečku OA budeme nazývať viazaným geometrickým vektorom (stručne viazaným vektorom), kde bod O je začiatočný bod, v ktorom je pôsobisko, a bod A je koncový bod vektora. Pri skúmaní vlastností tuhého telesa sa stretneme s viazaným vektorom sily na priamku, ktorého pôsobisko možno posunúť do ľubovoľného bodu priamky.
4. Vektor **a** na obr. 4.3 nazývame reprezentantom voľného vektora.

Otázka 1:

Možno považovať dva nesúhlasne orientované vektory rovnakej veľkosti za rovnaké?

Odpoveď: Nie

Definícia 4.9 - Nulový vektor

Pod nulovým viazaným vektorom rozumieme bod 0 ako orientovaná úsečka 00, ktorej koncový bod splýva so začiatočným bodom a označíme ho **0** resp. $\vec{0}$. Je zrejmé, že nulový vektor neurčuje nijaký smer ani orientáciu.

Definícia 4.10 - Jednotkový vektor

Jednotkový vektor je taký vektor, ktorého veľkosť sa rovná jednej. V karteziánskej súradnicovej sústave označujeme jednotkové vektory: $\vec{i}$ = (1, 0, 0) - vektor v smer osi *x*, $\vec{j}$ = (0, 1, 0) – vektor v smer osi *y* a $\vec{k}$ = (0, 0,1) - vektor v smer osi z.

Otázka 2:

Je vektor $\vec{a}$ = (1, 1, 1) jednotkový vektor?

Odpoveď: Nie, lebo jeho veľkosť $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \neq 1$

Poznámka:

1. Dĺžka nulového vektora je 0.

2. Ak dĺžka nenulového vektora $\vec{a}$ je $|\vec{a}|$ a jednotkový vektor s ním súhlasne rovnobežný je $\vec{a}_0$, tak platí:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0 \text{ , (resp. sa používa i zápis } \vec{a} = a\,\vec{a}_0 \text{)} \tag{4.2}$$

z čoho úpravou dostávame pre jednotkový vektor vzťah

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{resp. v tvare} \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a} \tag{4.2a}$$

3. Vzťah (4.2) nám vyjadruje, že každú fyzikálnu vektorovú veličinu možno zapísať ako súčin jej veľkosti a smeru, určeným jednotkovým vektorom. Často sa stretneme so zápisom vzťahu (4.2) v tvare

$$\vec{a} = a\,\vec{a}_0 ,$$

najmä v mechanike, napríklad pri určení vektora rýchlostí $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{v}_0$, resp. $\vec{v} = v\vec{v}_0$, kde v je veľkosť vektora $\vec{v}$ a $\vec{v}_0$ je jednotkový vektor.

Kontrolné otázky

1. Ako rozdeľujeme veličiny podľa počtu údajov potrebných na ich presné určenie?
2. Ako označujeme vektory, resp. vektorové fyzikálne veličiny a ako ich veľkosti?
3. Ako je definovaný smer vektora?
4. Ako je určená orientácia vektora?
5. Čo je absolútna hodnota vektora? Vyjadrite všeobecným matematickým vzťahom veľkosť vektora, určeného bodmi OA, keď bod O leží v začiatku súradnicového systému a koncový bod A leží: a) v rovine *x z*, b) v priestore so súradnicami (*x*, *y*, *z*).
6. Považujeme za rovnaké dva vektory, ktoré majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer, ale nemajú spoločný začiatočný bod ?
7. Vysvetlite pojem reprezentant voľného vektora.
8. Sú dva ekvivalentné vektory rovnaké vektory?
9. Objasnite pojem viazaného a voľného geometrického vektora.
10. Zapíšte vektor pomocou jeho veľkosti a smeru vektorovou rovnicou. Objasnite význam jednotlivých veličín.
11. Ako je definovaný jednotkový a nulový vektor?

4.2 Vektorový priestor

Fyzikálne vektorové veličiny popisujú reálne objekty v reálnom svete okolo nás (3D). Prenik vektorového počtu do prírodných a technických vied bol daný možnosťou formulovať množstvo fyzikálnych a technických pojmov a výsledkov nezávisle na voľbe súradnicovej sústavy. Preto pri riešení mnohých fyzikálnych a technických úloh bolo a je výhodné používať vyjadrenie vektorov v tvare usporiadaných dvojíc, alebo trojíc, podľa toho či skúmame, resp. pracujeme s vektormi v rovine alebo v priestore. Matematika však zovšeobecňuje poznatky tohto sveta na *n*-rozmerný priestor. Ako sa pracuje v takomto priestore a kedy vytvorí vektorový priestor, bude predmetom nasledovných častí.

Definícia 4.11 - Operácie s aritmetickým vektorom

Definujme na množine všetkých usporiadaných *n*-tíc reálnych čísiel $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, ktoré nazývame aritmetickým modelom vektora, rovnosť, sčítanie a násobenie reálnym číslom α takto:

1. rovnosť $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n), \qquad (4.3)$$

práve vtedy, ak

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots\dots\ a_n = b_n$$

2. súčet $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \qquad (4.4)$$

3. násobenie reálnym číslom α –t.j. skalárom

$$\alpha \boldsymbol{a} = \alpha (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)\ . \qquad (4.5)$$

Aritmetické vektory sa nachádzajú v aritmetickom priestore, ktorý je definovaný nasledovne:

Definícia 4.12 - Vektorový aritmetický priestor V_n

Pod *n*-rozmerným aritmetickým vektorovým priestorom V_n rozumieme priestor, ktorého prvkami sú vektory (t.j. množina usporiadaných n-tíc reálnych čísiel), v ktorom je definovaná rovnosť, sčítanie a násobenie reálnym číslom α vzťahmi (4.3 až 4.5). To znamená, že V_n obsahuje:

- nulový vektor: $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.
- jednotkový vektor, ktorého dĺžka sa rovná 1. Ako príklad jednotkových vektorov možno uviesť $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, ... $(0, 0, \dots, 1)$.
- vektor opačný k vektoru $\boldsymbol{a}$, t.j. $-\boldsymbol{a}$, kde $\alpha = -1$

$$-\boldsymbol{a} = -(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n). \qquad (4.6)$$

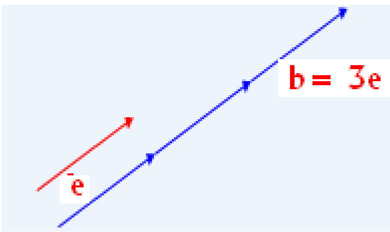
Poznámka:

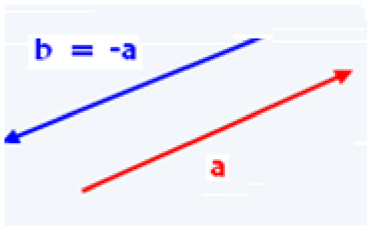
Zo zápisu rovností, určených vzťahmi 4.3 a 4.4 neskôr uvidíme, že aritmetický vektor v *n*-rozmernom priestore môžeme teda nahradiť maticou typu 1 x *n*, t.j. jednoriadkovou maticou s *n*- stĺpcami, resp. obrátene – maticou typu *n* x 1 (*n* - riadkovou jedno stĺpcovou maticou).

Takže k definovaniu operácií vo vektorovom priestore sme využili znalosti s operáciami s maticami: násobenie matice číslom α rôznym od nuly ako i sčítanie matíc.

Pri zavádzaní základných operácií s vektormi sa vychádzalo zo všeobecne známeho princípu skladania síl pomocou silového rovnobežníka a skladanie rýchlostí, ktoré si bližšie ozrejmíme v geometrickom modeli vektora, t.j. v modeli orientovanej úsečky:

Vzťah (4.5) predstavuje súčet α rovnakých vektorov. Súčet pre dvojrozmerný priestor s α = 3 ukazuje obr. 4.4. Vektor opačný k vektoru ***a*** pre dvojrozmerný priestor prezentuje obr. 4.5.

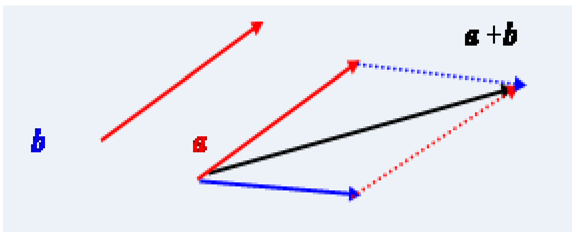




Obrázok 4.4: Súčet troch rovnakých vektorov   Obrázok 4.5: K pojmu vektor opačný

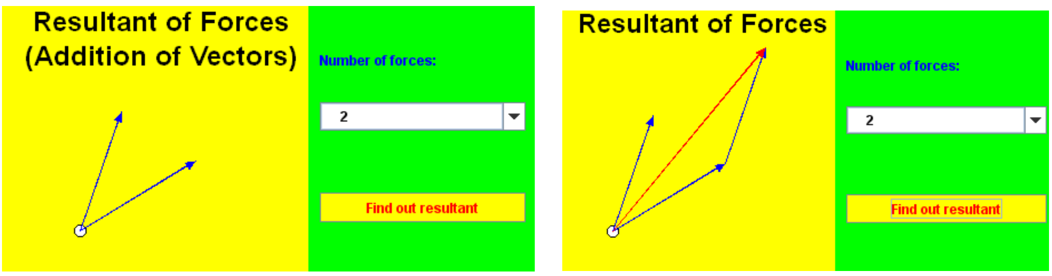
Definícia 4.13 – Súčet geometrických vektorov

Súčtom vektora $\vec{a}$ s vektorom $\vec{b}$ nazývame vektor $\vec{c}$ $(\vec{c} = \vec{a} + \vec{b})$, ktorý je určený doplnením na rovnobežník (obr. 4.6).



Obrázok 4.6: K objasneniu konštrukcie súčtu dvoch vektorov

Pre názornejšie pochopenie si pozrite interaktívnu animáciu Waltera Fendta (http://www.walter-fendt.de/ph14e/resultant.htm), ktorú približujú obrázky 4.7a a 4.7b



Obrázok 4.7: a) K objasneniu súčtu dvoch vektorov b) doplnenie na rovnobežník – uhlopriečka je súčet vektorov (http://www.walter-fendt.de/ph14e/resultant.htm)

Je zrejmé, že v obidvoch modeloch vektora platia pre každé ***a***, ***b*** a ***c*** $\in$ $\mathbf{V}_n$ zákony, vyjadrujúce vlastnosti súčtu vektorov: komutatívny a asociatívny zákon, ktoré vyjadrujú vzťahy:

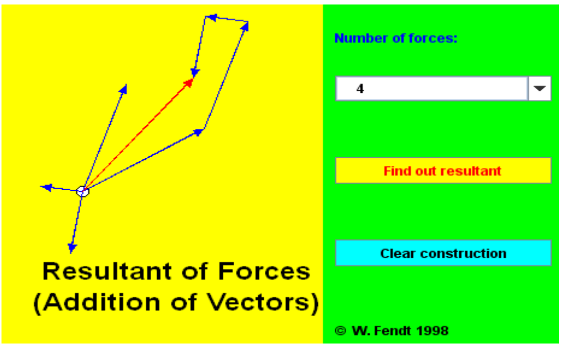
Veta 4.1: Pre každé ***a***, ***b*** *a* ***c*** $\in$ $\mathbf{V}_n$ platí komutatívny a asociatívny zákon:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *k o m ou'st a*

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *a s o **o** t'ı*

Komutatívny a asociatívny zákon hovorí, že nezáleží na poradí, v akom vektory sčítame. Sčítanie štyroch vektorov prezentuje obr. 4.8 z Fendtovej animácie http://www.walter-fendt.de/ph14e/resultant.htm .



Obrázok 4.8: Súčet štyroch vektorov

Otázka 3:

Viete popísať konštrukciu súčtu štyroch vektorov, ktorých vidíte na obrázku 4.7?

Odčítanie vektorov sa zavádza ako inverzná operácia k sčítaniu vektorov:

Definícia 4.14 – Odčítanie vektorov

Odčítať vektor $\vec{a}$ od vektora $\vec{b}$ znamená nájsť taký vektor $\vec{x}$, pre ktorý platí

$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$.

Vektor $\vec{x}$ sa nazýva rozdiel vektorov $\vec{b}$ a $\vec{a}$ a označuje sa $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$ (4.7) .

Z definície 4.13 vyplýva nasledovná konštrukcia vektora $\vec{x}$:

$$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b} \qquad / -\vec{a}$$

$$\vec{a}-\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}+(-\vec{a})$$

$$\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$$

Definícia 4.15 – Násobenie vektora skalárom

Nech $\vec{a}$ je nenulový vektor a α je reálne číslo (skalár). Súčinom čísla α a vektora $\vec{a}$ rozumieme vektor, ktorého dĺžka sa rovná $\alpha\,\vec{a}$, ktorý je súhlasne rovnobežný (kolineárny) resp. (nesúhlasne rovnobežný) s vektorom $\vec{a}$, podľa toho či α > 0 (α < 0). Pre α = 0, alebo $\vec{a} = \vec{0}$ kladieme $\alpha\,\vec{a} = \vec{0}$. Hovoríme o násobení vektora skalárom.

Pre súčin čísiel a vektorov platí asociatívny a distributívny zákon:

Veta 4.2: Pre každé ***a***, ***b*** a ***c*** ∈ $\mathbf{V}_n$ a pre ľubovoľné čísla α a β platí pre násobenie asociatívny a distributívny zákon:

$$\alpha\left(\beta\,\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a} \qquad \textit{asociatívnosť}$$
$$\left(\alpha+\beta\right)\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a} \qquad \textit{distributívnosť}$$
$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$$

Často sa v rôznych situáciách stretávame s pojmami lineárna závislosť a nezávislosť vektorov a lineárna kombinácia vektorov. Ich objasnenie podávajú nasledovné tri definície.

Definícia 4.16 - Lineárna nezávislosť vektorov, báza Vn

Hovoríme, že množina vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_k$ (k >1) vektorového priestoru **V**n je lineárne nezávislá, ak vektorová rovnica

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (4.8)$$

je splnená pre čísla $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$.

Množinu n - lineárne nezávislých vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_n \in \boldsymbol{V}n$ nazývame **bázou** ***Vn***. Ak vektory bázy sú navzájom kolmé, hovoríme o ortogonálnej báze. Ak vektory, ktoré tvoria bázu, sú jednotkové a navzájom kolmé, báza sa nazýva ortonormálna.

Definícia 4.17 - Lineárna závislosť vektorov

Hovoríme, že vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_k$ (k >1) vektorového priestoru **V**n sú lineárne závislé, ak vektorová rovnica

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (4.8)$$

je splnená pre čísla α_1, α_2, ..., α_k, z ktorých aspoň jedno číslo je rôzne od nuly.

Definícia 4.18 - Lineárna kombinácia vektorov

Hovoríme, že vektor $\vec{a}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_k$ (k >1), ak vektorová rovnica

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k \qquad (4.9)$$

je splnená pre čísla α_1, α_2, ..., α_k, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly.

Poznámka:

1. Z definície lineárnej závislosti 4.17 vyplýva, že ak medzi vektormi je s -vektorov (s ≤ *k*) lineárne závislých, tak sú všetky vektory lineárne závislé.

2. Ľubovoľne vybrané vektory spomedzi lineárne nezávislých vektorov sú lineárne nezávislé.

Veta 4.3: Pre vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_k$ (k >1) platia nasledujúce vlastnosti:

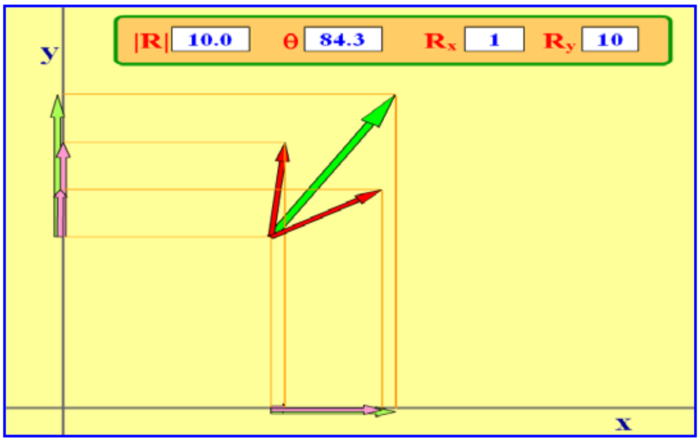
1. sú lineárne závislé, vtedy a len vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných vektorov,
2. Dva nenulové vektory sú lineárne závislé, vtedy a len vtedy ak sú rovnobežné (kolineárne).
3. Tri nenulové vektory sú lineárne závislé, vtedy a len vtedy ak ležia v rovine (hovoríme, že sú komplanárne).
4. Ľubovoľné štyri vektory v trojrozmernom (3D) priestore sú lineárne závislé.
5. Každý vektor ***Vn*** môžeme jednoznačne vyjadriť ako kombináciu bázy ***Vn***.

Definícia 4.19 – Súradnice a zložky vektora
Čísla α_1, α_2, ... , α_k vo vektorovej rovnici

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_k \vec{a}_k \tag{4.9}$$

sa nazývajú súradnice vektora v báze vytvorenej vektormi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_k$ (k >1), pričom člen $\alpha_1 \vec{a}_1 = \vec{a}_1$ nazývame zložkou vektora $\vec{a}$.

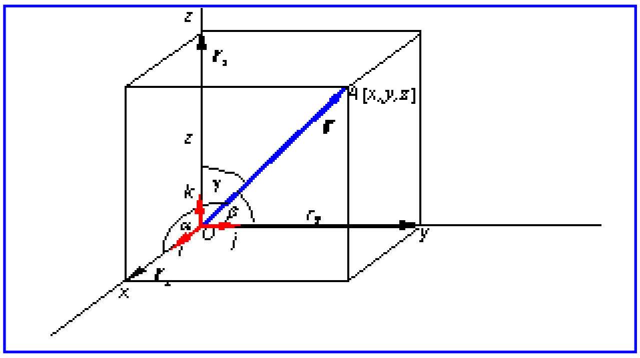
Rozklad vektora v dvojrozmernom priestore V_2, ktorého bázou sú vektory $\vec{i}$ = (1, 0) - vektor v smer osi x a $\vec{j}$ = (0, 1) – vektor v smer osi y, prezentuje obrázok 4.9. Čitateľ si môže interaktívne vyskúšať rozklad ľubovoľného vektora na www stránke: http://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_en.html.



Obrázok 4.9: Rozklad vektora do zložiek a jeho súradnice
http://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_en.html

S rozkladom vektorov sa stretneme napríklad v mechanike. Pri skúmaní pohybu je nevyhnutné si zvoliť vzťažnú sústavu. V praxi často sa stretávame so vzťažnou sústavou, ktorú tvorí určitá súradnicová sústava. Veľmi často využívame tzv. karteziánsku pravouhlú súradnicovú sústavu (SS), určenú začiatkom O (vzťažným bodom), do ktorého sú umiestnené tri navzájom kolmé jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ v smere súradnicových osí *x, y, z,* respektíve. Vzhľadom na takúto súradnicovú sústavu polohu skúmaného bodu A (obr. 4.10) máme určenú vtedy, ak poznáme všetky tri jeho súradnice: *x, y,* a *z* (*x* je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami *y* a *z* , ...).

Na určenie polohy hmotného bodu v priestore vzhľadom na vzťažný bod možno použiť polohový vektor $\boldsymbol{r}$. Polohový vektor bodu A je vektor, ktorého začiatok je vo vzťažnom bode O a koncový bod je v bode A .



Obrázok 4.10: Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ bodu v karteziánskej súradnicovej sústave

Definícia 4.20 – Polohový vektor, jeho rozklad na zložky a veľkosť

V karteziánskej súradnicovej sústave polohový vektor $\boldsymbol{r}$ možno určiť vzťahom

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (4.10)$$

kde čísla *x, y, z* sa nazývajú súradnice vektora $\boldsymbol{r}$ v báze určenej vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Rovnica

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_x + \boldsymbol{r}_y + \boldsymbol{r}_z \qquad (4.11)$$

určuje rozklad vektora $\boldsymbol{r}$ na zložky v smere súradnicových osí, kde $\boldsymbol{r}_x = x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}_y = y\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{r}_z = z\boldsymbol{k}$.

Veľkosť polohového vektora | $\boldsymbol{r}$ | je určená vzťahom:

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (4.12)$$

Poznámka:

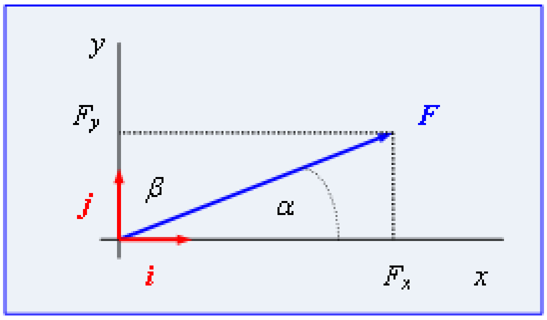
Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ bodu A zviera so súradnicovými osami *x, y* a *z* uhly α, β, γ, ktoré nazývame smerové uhly (obr. 4.11). Pre smerové kosínusy týchto uhlov platia vzťahy:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \quad \cos\beta = \frac{y}{r}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}; \qquad (4.13)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4.14)$$

Možno ich využiť, pri znalosti veľkosti vektora $\boldsymbol{r}$, na určenie súradníc bodu A.

V mechanike sa často stretneme s rozkladom vektora sily $\boldsymbol{F}$ v rovine do osí $\boldsymbol{F} = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j}$, ktorý prezentuje obrázok 4.11.



Obrázok 4.11: Rozklad vektora ***F*** v rovine *xy*

Príklad 4.1: Vektor sily ***F*** má v karteziánskej súradnicovej sústave súradnice: ***F*** = (3, 4, 0). Určite jeho veľkosť a smerové kosínusy.

Riešenie:

Veľkosť polohového vektora | ***F***| je určená vzťahom:

$$|\boldsymbol{F}| = F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0_z{}^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Smerové kosínusy sú určené vzťahmi:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}; \quad \cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{r} = \frac{0}{5} = 0.$$

Príklad 4.2: Určite vektor ***a*** a jeho veľkosť, ktorý je rovný päťnásobku vektora ***r***, ak viete, že súradnice sú ***r*** = [–1, 2, –4] a vektor ***a*** má opačný smer ako vektor ***r***. Aký je uhol týchto vektorov? Sú tieto vektory nesúhlasne kolineárne?

Riešenie:

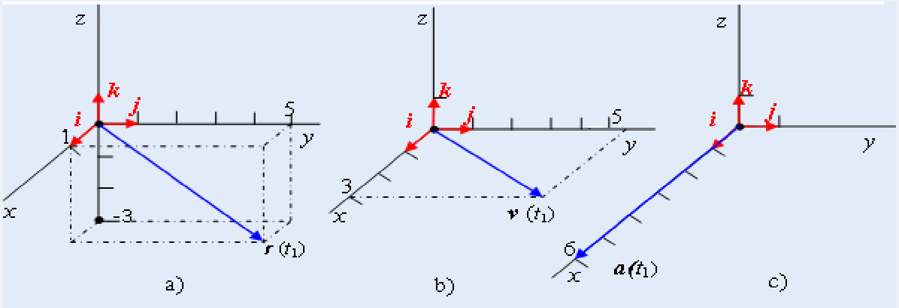
a) Zo zadania vieme, že platí: ***a*** = –5 ***r*** = –5(–***i*** + 2***j*** –4***k***) = (+5***i*** –10***j*** + 20***k***).
   Veľkosť vektora | ***a***| je určená vzťahom:

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{5^2 + (-10)^2 + (20)^2} = \sqrt{25 + 100 + 400} = \sqrt{525} = 22{,}91.$$

b) Nakoľko sú vektory ***r*** a ***a*** opačné a ležiace na tej istej priamke, ich uhol je 180^0.

c) Áno, tieto dva vektory sú nesúhlasne kolineárne (t.j. nesúhlasne rovnobežné).

Príklad 4.3: Na obrázku 4.12 sú znázornené tri vektory ***r***, ***v*** a ***a*** v určitom časovom okamihu t_1. Určite:
a) bázu trojrozmerného priestoru, b) z grafu ich súradnice a zapíšte vyjadrenie vektorov, c) ich veľkosti.



Obrázok 4.12: Znázornenie vektorov v karteziánskej súradnicovej sústave

Riešenie:

a) Ako vidíme z obrázku, bázu tvoria tri jednotkové kolmé vektory ***i***, ***j*** a ***k***, pomocou ktorých vyjadríme vektory ***r***, ***v*** a ***a***.

b) $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}(t_1) = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}(t_1) = 6\boldsymbol{i}$

c) $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$, $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$, $|\boldsymbol{a}| = 6$

Príklad 4.4: V aritmetickom modeli vypočítajte súčet vektorov ***a*** + ***b***, ak viete, že $\boldsymbol{a} = (-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{b} = (3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$. b) Nakreslite v karteziánskej SS tieto vektory a sčítajte ich graficky.

Riešenie:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) + (3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k})$. Grafické sčítanie ponecháme na čitateľa, pričom odporúčame naštudovať predchádzajúci príklad 4.3.

Kontrolné otázky

1. Objasnite rozdiel medzi zložkou vektora a súradnicou vektora. Zapíšte tieto skutočnosti.
2. Objasnite význam komutatívneho a asociatívneho zákona pri sčítaní vektorov.
3. Objasnite sčítanie dvoch vektorov v aritmetickom modeli a geometrickom modeli.
4. Uveďte, čo rozumieme pod lineárnou kombináciou vektorov!
5. Definujte vektorový priestor a objasnite pojem ortonormálna báza vektorov!
6. Ako vyjadríme veľkosť vektora, keď sú známe jeho súradnice?
7. Ako sa zmenia zložky a súradnice vektora, keď ho vynásobíme skalárom?
8. Uveďte, ako vypočítate uhol, ktorý vektor zviera s osou y, keď poznáte jeho súradnice!
9. Získame súčtom dvoch vzájomne kolmých jednotkových vektorov jednotkový vektor?

4.3 Súčiny medzi vektormi

V definícii 4.15 sme si objasnili násobenie vektora skalárom, čiže číslom, ktoré nám určuje vektor rovnobežný s pôvodným vektorom, ale rôznej veľkosti. Ak skalár je záporné číslo, tak aj opačnej orientácie.
Medzi dvomi vektormi sú definované: skalárny a vektorový súčin. Medzi tromi vektormi sú definované: dvojnásobný vektorový súčin a zmiešaný súčin.

A/ Skalárny súčin dvoch vektorov

Definícia 4.21 Skalárny súčin dvoch vektorov

Skalárny súčin dvoch vektorov je definovaný ako operácia, ktorej výsledkom je skalárna veličina. Hodnota tejto skalárnej veličiny je určená súčinom veľkostí príslušných vektorov a kosínusu uhla, ktorý tieto vektory zvierajú:

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = ab \cos\alpha \tag{4.15}$$

Poznámka:

1. Skalárny súčin sa označuje bodkou medzi vektormi, v strede výšky písmen.
2. Uhol medzi dvoma vektormi sa určuje tak, aby nebol väčší ako π radiánov (180°).

Niektoré vlastnosti skalárneho súčinu uvedieme vo forme vety:

Veta 4.4:

- Skalárny súčin dvoch vektorov je komutatívny: $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}$
- Ak je uhol medzi vektormi menší ako π /2, skalárny súčin je kladný, lebo kosínus ostrého uhla je kladný.
- Ak je uhol medzi vektormi väčší ako π /2, je kosínus uhla, a teda aj skalárny súčin, záporný.
- Skalárny súčin dvoch kolmých vektorov sa rovná nule, pričom ani jeden z vektorov nemá nulovú veľkosť, pretože cos (π/2) = 0.
- Pre skalárne súčiny jednotkových vektorov platí: $\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{i} = 1$, $\boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{j} = 1$, $\boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{k} = 1$, $\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{k} = 0$.
- Pre skalárny súčin platí distributívny zákon: $\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}$
- Skalárny súčin možno vyjadriť pomocou súradníc:
  $$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \bullet (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b \tag{4.16}$$
- Uhol dvoch vektorov možno vyjadriť pomocou skalárneho súčinu:
  $$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)}} \tag{4.17}$$
- Skalárny súčin vektora a jednotkového vektora určuje veľkosť jeho priemetu do osi:
  $a_x = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{i}$, $a_y = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{j}$, $a_z = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{k}$.

Poznámka:

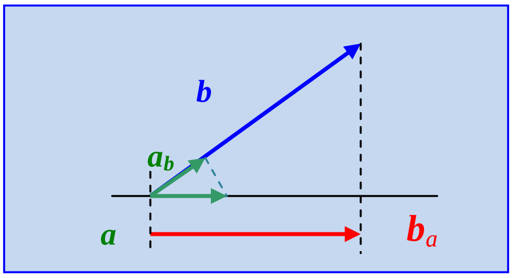
Zložky polohového vektor $\boldsymbol{r}$ možno vyjadriť pomocou zápisu: $\boldsymbol{r}_x = r_x \boldsymbol{i} = (\boldsymbol{r} \bullet \boldsymbol{i})\, \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}_y = r_y \boldsymbol{j} = (\boldsymbol{r} \bullet \boldsymbol{j})\, \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r}_z = r_z \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{r} \bullet \boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k}$.

Význam skalárneho súčinu:

Ozrejmime si význam skalárneho súčinu vektorov $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ pomocou obrázka 4.13. Výsledkom skalárneho súčinu dvoch vektorov je číslo (skalár), ktoré je určené veľkosťou jedného vektora $|\boldsymbol{a}| = a$ vynásobeného veľkosťou druhého vektora do smeru prvého vektora, t.j. b_a (resp. naopak $b\ a_b$).

Možno povedať, že výsledkom skalárneho súčinu je číslo, ktoré určuje plochu obdĺžnika s rozmermi $a\ b_a = b\ a_b$. Toto tvrdenie vychádza z definície 4.21 a vzťahu (4.15), ktorý možno zapísať:

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = ab \cos\alpha = a[b \cos\alpha] = a\, b_a = b\, [a \cos\alpha] = b\, a_b$$



Obrázok 4.13: Význam skalárneho súčinu

Otázka 4:

Aký význam má: a) skalárny súčin dvoch vektorov b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}$ c) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i})\, \boldsymbol{i}$ d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$?

Odpoveď: a) výsledok je skalár – číslo určené plochou obdĺžnika s rozmermi $a\ b_a$ alebo $b\ a_b$.
b) a_x – x-ová súradnica vektora $\boldsymbol{a}$,
c) zložku vektora $\boldsymbol{a}_x$
d) vyjadruje komutatívnosť skalárneho súčinu.

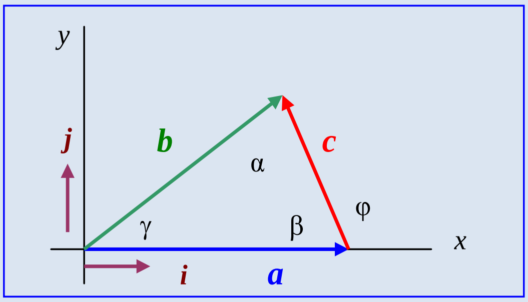
Príklad 4.5: Určite uhol vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{a}$ = (3, -2, -1), $\boldsymbol{b}$ = (0, -2, 4).

Riešenie:

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{3.0 + (-2)(-2) + (-1).4}{\sqrt{9+4+1}\sqrt{4+16}} = \frac{0}{\sqrt{14.20}} = 0$$

$\gamma = 90\,°$ → Vektory sú navzájom kolmé.

Príklad 4.6: Na obrázku 4.14 je znázornený trojuholník určený vektormi ***a*** = 5***i***, ***b*** = 4***i*** +3. Určite vnútorné uhly trojuholníka.



Obrázok 4.14: K výpočtu uhlov trojuholníka

Riešenie:

Keď máme vypočítať vnútorné uhly, budeme počítať uhly medzi vektormi ***a***, ***b*** a vektormi ***a c.*** Využijeme poznatok, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°.

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)}} = \frac{20}{\sqrt{25}\sqrt{16+9}} = \frac{20}{5.5} = \frac{4}{5}$$

γ = 36,9°.

Na výpočet uhla β vyjadríme vektor ***c***, pričom platí: ***a*** +***c*** –***b*** = **0**→ ***c*** = ***b*** –***a*** = -***i*** + 3***j***. Opäť použijeme vzťah (4.17), pričom uhol medzi ***a*** a ***c*** označíme φ. β =180° – φ

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|} = \frac{-5}{\sqrt{25}\sqrt{(-1)^2+3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \quad\rightarrow\quad \varphi = 108{,}43^\circ$$

β =180° – φ = 180° – 108,43° = 71,57°.

Príklad 4.7: Určite, aké musí byť číslo λ aby vektory $\vec r$ a $\vec p$ boli navzájom kolmé, ak je dané: $\vec r = 3\vec a - 2\vec b$, $\vec p = \vec b + \lambda\vec a$, $|\vec a| = 2$, $|\vec b| = 3$ a uhol medzi vektormi $\vec a$ a $\vec b$ je 4π/3.

Riešenie:

Aby vektory ***r*** a ***p*** boli navzájom kolmé, ich skalárny súčin musí byť rovný nule, t.j. platí: ***r*** • ***p*** = 0.

Počítajme:

$$\vec r\bullet\vec p = (3\vec a - 2\vec b)\bullet(\vec b + \lambda\vec a) = 3\vec a\bullet\vec b + 3\lambda\vec a\bullet\vec a - 2\vec b\bullet\vec b - 2\lambda\vec b\bullet\vec a = 3|\vec a|\,|\vec b|\cos\varphi + 3\lambda|\vec a|\,|\vec a|\cos 0$$

$$-\ 2|\vec b||\vec b|\cos 0 - 2\lambda|\vec b||\vec a|\cos\varphi = 3.2.3\cos 240^\circ + 3\lambda\, 2.2.1 - 2.3.3.1 - 2\lambda\, 3.2\cos 240^\circ = 0$$

9.2. (–0,5) + 12 λ – 18 +6 λ = 0→18λ = 27→ λ = 3/2.

Poznámka: Využili sme poznatok, že cos 240^0 = – cos 60^0 = – 0,5.

B/ Vektorový súčin dvoch a troch vektorov

Vektorový súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je vektor. Preto musíme definovať veľkosť výsledného vektora, jeho smer a orientáciu. Vektorový súčin sa označuje krížikom medzi vektormi. Stretávame sa s ním napríklad v mechanike pri definícii momentu sily $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ (obr. 4.10):

Definícia 4.22 - Vektorový súčin dvoch vektorov

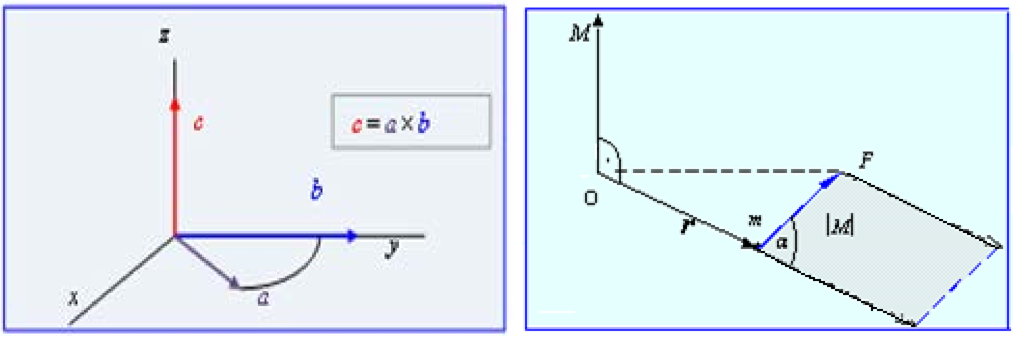
Vektorový súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je definovaný ako operácia, ktorej výsledkom je vektor $\boldsymbol{c}$ (obr. 4.10 vľavo), ktorého

1. veľkosť je $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\alpha$; (4.17)

kde α je uhol vektorov – odpovedá ploche rovnobežníka určeného vektormi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

2. smer: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je kolmý na $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{c} \perp$ na rovinu, v ktorej ležia vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

3. orientácia: vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ smeruje do toho polpriestoru, z ktorého vidíme stotožnenie prvého vektora $\boldsymbol{a}$ do smeru druhého vektora $\boldsymbol{b}$ po kratšej uhlovej dráhe proti smeru hodinových ručičiek. t.j. vektory v poradí $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ tvoria pravotočivý systém (obr. 4.15).



Obrázok 4.15: K objasneniu vektorového súčinu: a) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, b) $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

Vybrané vlastnosti vektorového súčinu prezentuje veta 4.4:

Veta 4.4:

1. Vektorový súčin dvoch vektorov nie je komutatívny, t.j. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$,

2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$,

3. vektorový súčin dvoch rovnobežných (kolineárnych) vektorov sa rovná nule (je nulový vektor).

4. Pre jednotkové vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, ktoré sú navzájom na seba kolmé, platia vzťahy:

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}.$$

5. Na určenie vektorového súčinu možno využiť determinant (pozri kapitolu Determinanty)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \boldsymbol{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \boldsymbol{k}(a_x b_y - a_y b_x) \quad (4.17)$$

Poznámka:

Pri vektorovom súčine musíme dodržiavať poradie vektorov! To dokumentujú i dve formy distributívneho zákona:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$
$$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$$

Pri určovaní výsledného vektora zadaného dvojnásobným vektorovým súčinom rozlišujeme dva prípady, ktoré nám dávajú dva rôzne výsledky: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$. Sú definované nasledovne:

Definícia 4.23 Vektorový súčin troch vektorov

Nech ***a, b***, ***c*** sú nenulové vektory, dvojnásobný vektorový súčin definujeme vzťahmi:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) \qquad (4.18)$$
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c}) \qquad (4.19)$$

Poznámka:

O platnosti vzťahov (4.18) a (4.19) sa čitateľ môže presvedčiť výpočtom, keď si zadá konkrétne tri vektory.

Príklad 4.8:

Vypočítajte moment sily ***M***, ak sila je daná predpisom $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ a pôsobí v bode B, ktorý má súradnice B = (–1, 2, 1).

Riešenie:

Vyjdeme z definície momentu sily, ktorý je určený vektorovým súčinom ramena pôsobiacej sily $\vec{r}$ a vektora sily $\vec{F}$: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} - (6\vec{k} - 2\vec{i} - \vec{j}) = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Príklad 4.9: Vypočítajte plošný obsah trojuholníka určeného vektormi $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ a $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Riešenie:

$$P = \left|\frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+16+25} = \frac{1}{2}\sqrt{42} = 3{,}24 \text{ p.j.}$$

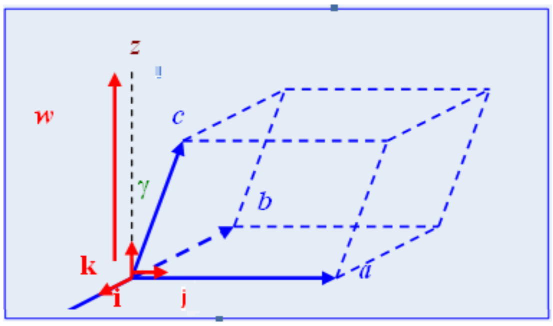
Poznámka: Skratky d.j., p.j.resp. o.j znamenajú: dĺžková/ plošná/ objemová jednotka.

C/ Zmiešaný súčin troch vektorov

Definícia 4.24 - Zmiešaný súčin troch vektorov

Nech ***a, b***, ***c*** sú nenulové vektory. Skalárny súčin vektora ***c*** s vektorovým súčinom ***a*** × ***b*** sa volá zmiešaný súčin troch vektorov a označujeme ho [***c a b***], výsledkom ktorého je vždy skalárna veličina, udávajúca veľkosť objemu rovnobežnostena, ktorého tri hrany sú vektory ***a, b***, ***c*** umiestnené do spoločného bodu (obr. 4.16).

$$[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{c} \bullet (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \qquad (4.20)$$



Obrázok 4.16: K objasneniu významu zmiešaného súčinu vektorov

Niektoré vlastnosti zmiešaného súčinu prezentuje veta 4.5

Veta 4.5:

1. Zmiešaný súčin troch vektorov je skalár, ktorý môže byť kladný, nulový, alebo i záporný. Znamienko určuje poradie vektorov, preto objem rovnobežnostena určíme ako absolútnu hodnotu z výrazu |***c*** • (***a*** × ***b***)|, pretože objem *V* je vždy kladná veličina.
2. Výraz *c* cos γ predstavuje výšku rovnobežnostena, pričom veľkosť vektorového súčinu *absinα* je plošný obsah jeho základne, takže máme určený objem ako súčin podstavy krát výška.
3. Keďže platí komutatívnosť skalárneho súčinu, môžeme napísať pre zmiešaný súčin rovnosť (***a*** × ***b***) • c = ***c*** • (***a*** × ***b***) .
4. Pre zmiešaný súčin platí identita : |[***c a b***]| = |[***a b c***]| = |[***b c a***]|.
5. Na určenie zmiešaného súčinu troch vektorov možno využiť determinant (pozri K 5).

$$\left|\boldsymbol{c} \bullet (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\right| = \left\| \begin{matrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\| , \qquad (4.21)$$

   kde výsledkom je vždy kladné číslo, čo určuje absolútna hodnota z determinantu.
6. Zmiešaný súčin troch vektorov je rovný nule, ak vektory sú lineárne závislé, t.j. ležia v jednej rovine.
7. Objem štvorstena V_4, ktorého tri hrany sú vektory ***a, b***, ***c*** umiestnené do spoločného bodu je určený vzťahom: $V_4 = \frac{1}{6}\,|[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]|$. (4.22)

Otázka 5:

Záleží v zmiešanom súčine troch vektorov na poradí, v ktorom realizujeme jednotlivé operácie?

Odpoveď: Áno, zmiešaný súčin je operácia, v ktorej sa nachádza ako skalárny, tak vektorový súčin, pričom sa realizuje najprv vektorový súčin a po ňom skalárny súčin a je definovaný poradím vektorov v hranatej zátvorke vzťahom (4.20).

PDDA

Úloha 1:

Aplikovaním vektorového a následne skalárneho súčinu na vami zvolené vektory ukážte, že platí

$$\boldsymbol{c} \bullet (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Návod : Možno použiť i postup

$$\boldsymbol{c} \bullet (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{c} \bullet \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{c} \bullet \left\{ \boldsymbol{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \boldsymbol{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \boldsymbol{k}(a_x b_y - a_y b_x) \right\}$$

Úloha 2:

Zistite v akom vzťahu sú výrazy $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}$ a $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \bullet \boldsymbol{a}$. Zapíšte. Overte na konkrétne zvolených vektoroch.

Úloha 3:

Nech α je reálne číslo a **a, b** sú nenulové vektory**.** Zistite, ktorý/(é) zo vzťahov je (sú) správne?

A) $\alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

B) $\alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b}$

C) $\alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b}$

D) $\alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -\alpha\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ **.**

Otázka 6:

Je možných viacero variantov zmiešaného súčinu troch vektorov? Ak áno, objasnite ich význam:

Odpoveď: Áno: 1. $\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, 2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}$, 3. $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \bullet \boldsymbol{a}$. Jednotlivé vzťahy nám hovoria, že podstava rovnobežnostena je určená vektormi: v prípade 1: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, v prípade 2: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, v prípade 3: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$. Názorne si to môžeme predstaviť pomocou škatuľky od zápaliek. Jej objem bude rovnaký, nezáležiac ako ju položíme, t.j. ktorú z troch možností podstavy zvolíme.

Vektorový a zmiešaný súčinu možno využiť pri výpočte objemu a plochy kvádra a štvorstena, ktorého podstava je trojuholník. Ukážeme si jeho využitie na príkladoch.

Príklad 4.10: Sú dané štyri body O = (1, 0, 0), A = (2, 0, 3), B = (0, -2, -2), C = (1, -1, 0).
Vypočítajte a) objem rovnobežnostena určeného bodmi O, A, B a C,
b) veľkosť podstavy určenej bodmi O, A a B,
c) výšku rovnobežnostena s podstavou určenej bodmi O, A a B.

Riešenie:

Ako prvé si určíme tri nekomplanárne (vektory neležiacej v jednej rovine) vektory, ktoré sú umiestnené v spoločnom bode. Zvolíme si bod O, ktorý bude počiatkom všetkých troch vektorov: $\boldsymbol{a}$ = A − O = (1, 0, 3), $\boldsymbol{b}$ = B − O = (−1, −2, −2), $\boldsymbol{c}$ = C − O = (0, −1, 0). Objem určíme zo vzťahu (4.21):

a) $$V = |\boldsymbol{c} \bullet (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})| = \left\| \begin{matrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{matrix} \right\| = |1| = 1 \text{ o.j.}$$

b) Vypočítame plochu podstavy s využitím vektorového súčinu: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \Rightarrow P = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{41} \text{ p.j.}$$

c) Výšku v vypočítame zo známeho vzťahu: objem V je súčinom podstavy P a výšky v, takže platí:

$$V = Pv \Rightarrow v = \frac{V}{P} = \frac{1}{\sqrt{41}} \text{d.j.}$$

Príklad 4.11: Sú dané štyri body O = (1, 0, 0), A = (2, 0, 3), B = (0, -2, -2), C = (1, -1, 0). Vypočítajte objem štvorstena určeného bodmi O, A, B a C a veľkosť podstavy určenej bodmi O, A a B.

Riešenie:

Nakoľko štvorsten vznikne z bodov rovnobežnostena z príkladu 4.9, využijeme skutočnosť, že objem V_4 je určený vzťahom (4.22) a podstava sa rovná polovici plochy rovnobežníka určenej vektormi **a** a **b**:

$$V_4 = \frac{1}{6}\,|[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]| = \frac{1}{6} \text{ o.j. },\ P = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \frac{\sqrt{41}}{2} \text{p.j.}$$

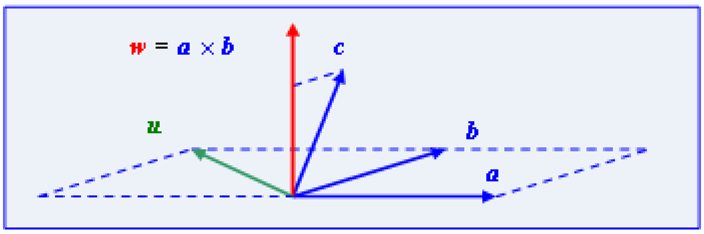
Otázka 7:

Je výraz ($\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$) × $\boldsymbol{c}$ zmiešaný súčin troch vektorov?

Odpoveď: Nie, lebo výraz v zátvorke je skalárna veličina, ktorou nemožno vektor $\boldsymbol{c}$ násobiť vektorovo.

PDDA

Úloha 4: Vyjadrite dvojnásobným súčinom troch vektorov, ktorých výsledok vidíte na obrázku 4.17, keď za výsledný vektor považujeme vektor $\boldsymbol{u}$.

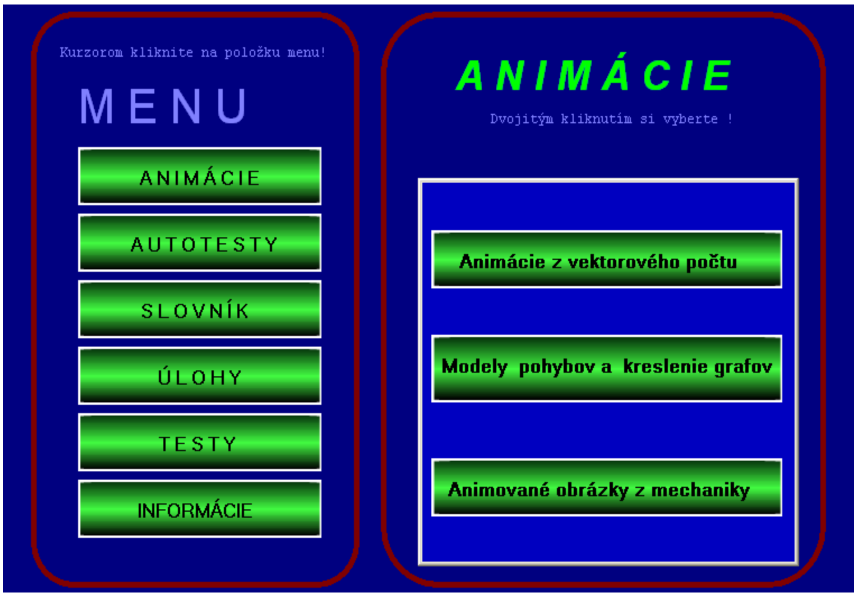


Obrázok 4.17: K zadaniu úlohy Dvojnásobný

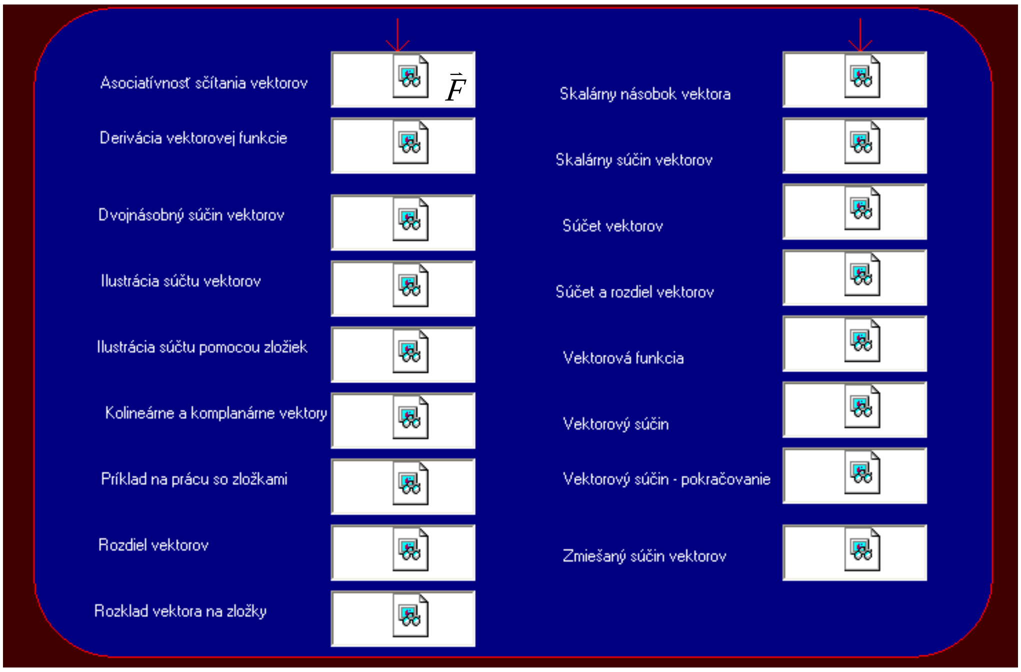
Kontrolné otázky

1. Definujte aké druhy súčinov poznáme v prípade jedného, dvoch a troch vektorov.
2. Objasnite význam skalárneho súčinu dvoch vektorov a uveďte, ako z neho vyjadríme vzťah pre určovanie uhlu dvoch vektorov.
3. Definujte vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov. Objasnite význam vektorového súčinu vektorov.
4. Pre ktorý zo súčinov dvoch vektorov platí komutatívny zákon?
5. Platí rovnosť pre vzťah: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$? Odôvodnite svoje tvrdenie!
6. Ktorý zo súčinov troch vektorov nám určuje objem rovnobežnostena , ktorého tri hrany sú dané tri vektory? Ako je tento súčin definovaný?
7. Majme tri nenulové vektory umiestnené do spoločného počiatku. Platí rovnosť pre tieto vektory $\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}$? Aká je interpretácia tohto vzťahu?
8. Vyjadrite graficky súčet dvoch vektorov pomocou ich súradníc!
9. Uveďte, ako vypočítate uhol, ktorý vektor zviera s osou y, keď poznáte jeho súradnice!
10. Graficky znázornite dva vektory a tretí vektor, ktorý vznikne ako výsledok ich vektorového súčinu.
11. Graficky znázornite dva vektory a tretí vektor, ktorý vznikne ako výsledok ich vektorového súčtu.
12. Vzniknú z otázky 11 a 12 vo všeobecnosti rovnaké vektory? Objasnite na konkrétnom zvolenom príklade graficky.

Čitateľ, ktorý sa chce bližšie zoznámiť s animáciami zaoberajúcimi sa vektorovým počtom má možnosť ich naštudovať prostredníctvom CD nosiča: OŽVOLDOVÁ M., BUDINSKÝ J., ČERVEŇ, I. sen. ČERVEŇ, I. jun: *Doplnok k Úvodu do vysokoškolskej fyziky*, interaktívne CD – CD, STU Bratislava, Bratislava, 2006, ktoré bude v krátkej budúcnosti zverejnené na www stránke Katedry fyziky Pedagogickej fakulty Trnavskej univerzity v Trnave. Menu CD nosiča predstavujú obr. 4.18 a obr. 4.19.



Obrázok 4.18: Menu interaktívneho CD *„Doplnok k Úvodu do vysokoškolskej fyziky"*



Obrázok 4.19: Menu animácií z vektorového počtu z interaktívneho CD *„Doplnok k Úvodu do vysokoškolskej fyziky"*

Kapitola 5
MATICE

Učebné ciele:

- Naučiť sa základné pojmy súvisiace s maticami, ako i nadobudnúť zručnosti týkajúce sa operácií s maticami: súčet, násobenie matice číslom;
- Rozlišovať, či je pre zvolené matice definovaný súčin matíc a vedieť vypočítať súčin matíc;
- Naučiť sa význam pojmu hodnosť matice a vypočítať ju pomocou Gaussovej eliminačnej metódy;
- Určiť na základe Gaussovho algoritmu inverznú maticu;
- Naučiť sa využívať interaktívne www stránky na kontrolu svojich výpočtov a na zrýchlenie výpočtov.

Kľúčové slová: matica, trojuholníková matica, štvorcová matica, jednotková matica, transponovaná matica, riadkové elementárne operácie, Gaussov algoritmus, inverzná matica, hodnosť matice, súčet matíc, násobenie matice číslom, násobenie matíc, submatica.

Požadované vedomosti: znalosť úpravy algebrických výrazov, riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc dosadzovanou metódou, pojmy a operácie z predchádzajúcich kapitol.

Motivácia

V reálnom svete okolo nás na popis vybraných objektov je vhodné použiť usporiadanú n-ticu čísiel, ktorým sme priradili názov n–rozmerný vektor, ktorým sme sa venovali vo štvrtej kapitole. Ak zoskupíme pod seba viac takýchto n–rozmerných vektorov, napríklad m, môžeme vytvoriť systém prvkov usporiadaných do tzv. matice. V trojrozmernom priestore sa s takýmito objektmi možno stretnúť napríklad vo fyzike pri popise vlastností nehomogénnych materiálov, u ktorých na ich úplné určenie potrebujeme viac ako tri údaje. Hovoríme v tomto prípade o tenzorových veličinách.

5.1 Pojem matice

Definícia 5.1 - Matica

Nech m, n sú prirodzené čísla. Systém a_{mn} prvkov množiny M usporiadaných do m riadkov a n stĺpcov sa nazýva matica typu $m \times n$, čo označujeme $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ a zapíšeme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

Reálne číslo a_{ij} nazývame prvkom matice, jeho umiestnenie je v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Definícia 5.2 –Štvorcová matica, diagonálne prvky

Maticu typu $n \times n$ nazývame štvorcovou maticou stupňa n. Prvky $a_{ii}, i = 1, 2,...., n$ nazývame diagonálne prvky a vytvárajú hlavnú diagonálu matice.

Definícia 5.3 – Typy matíc

- Maticu $1 \times n$ nazývame riadkovým vektorom (jednoriadková matica);
- Maticu typu $m \times 1$ nazývame m stĺpcovým vektorom (jednostĺpcová matica);
- **Nulová matica -** nazývame maticu typu $m \times n$, ktorej všetky prvky sa rovnajú nule. Zvyčajne sa označuje symbolom $\mathbf{O}$;
- **Diagonálna štvorcová matica –** nazývame štvorcovú maticu, ktorej všetky prvky a_{ii} pre $i \neq j$ $i, j = 1, 2,...., n$ sú nulové;
  Jednotková matica stupňa *n* – nazývame maticu typu $n \times n$ (štvorcovú maticu), ktorej všetky prvky hlavnej diagonály sa rovnajú číslu 1, t.j. prvky $a_{ii} = 1$ pre $i = j = 1, 2,...., n$ a všetky ostatné prvky sú nulové, t.j. prvky $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$ $i, j = 1, 2,...., n$. Označujeme ju symbolom $\mathbf{E}_n$;
- **Transponovanou maticou $\mathbf{A}^T$** k matici $A = (a_{ij})$, typu $m \times n$, kde $i = 1,2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., n$ nazývame maticu $\mathbf{A}^T = (b_{ij})$ typu $n \times m$ s prvkami $b_{ij} = a_{ji}$ $i = 1,2, ..., n$; $j = 1,2, ..., m$;
- **Matica trojuholníkového tvaru –** nazývame maticu, ktorej všetky prvky hlavnej diagonály sú nenulové a prvky pod hlavnou diagonálou sú nulové, ktorú tiež nazývame Gaussova matica.
- **Gaussova redukovaná matica –** je matica, ktorá má všetky diagonálne prvky nenulové a nediagonálne prvky sú všetky nulové.

Poznámka:

1. Prvok a_{23} sa nachádza (má umiestnenie) v druhom riadku a treťom stĺpci.
2. Transponovanú maticu k štvorcovej matici získame preklopením prvkov matice $\mathbf{A}$ okolo hlavnej diagonály.
3. Maticu transponovanú $\mathbf{A}^T$ získame z matice $\mathbf{A}$ zámenou riadkov za stĺpce, pričom musíme dodržať ich poradie.
4. Transponovaná matica k riadkovému vektoru (stĺpcovému vektoru) je stĺpcový (riadkový) vektor.

Maticu možno upraviť na trojuholníkový tvar aplikáciou Gaussovho algoritmu pomocou elementárnych riadkových úprav (ERO).

Definícia 5. 4 - Gaussova matica a elementárne riadkové operácie

Pod Gaussovým algoritmom postupných úprav na Gaussovu maticu, t.j. maticu trojuholníkového tvaru, rozumieme postupnú aplikáciu nasledovných troch elementárnych riadkových operácií (ERO) v matici:

ERO 1: Vzájomná výmena dvoch riadkov matice.

ERO 2: Násobenie niektorého riadku matice nenulovým číslom.

ERO 3: Pričítanie násobku istého riadku matice k inému riadku matice.

Na výpočet Gaussovho tvaru matice možno aplikovať Gaussov algoritmus (GA) postupných úprav:

0. Krok GA: V matici vyberieme taký riadok, ktorý má prvok v prvom stĺpci najnižšiu hodnotu, avšak rôznu od nuly (najlepšie jednotku). Pomocou ERO 1 tento riadok presunieme na prvé miesto.

1. Krok GA: Použitím ERO 2 vytvoríme v prvom riadku prvok a_{11} =1. Prvok a_{11} nazývame *vedúcim prvkom prvého kroku* GA.

Postupným aplikovaním ERO 3 dosiahneme, aby v prvom stĺpci pod vedúcim prvkom prvého kroku a_{11} všetky prvky boli nulové.

2. Krok GA: Pomocou ERO 1 a ERO 2 urobíme takú zámenu riadkov v matici, aby vedúci prvok druhého kroku a_{22} =1 (resp. iné vhodné číslo).

Druhý riadok násobíme postupne takými číslami a pripočítame postupne k ostatným riadkom matice tak, aby všetky prvky v druhom stĺpci pod prvkom a_{22} boli nulové.

Pre maticu s n riadkami postup opakujeme až do n–tého kroku, kým nezískame maticu trojuholníkového tvaru, ktorej všetky prvky v hlavnej diagonále sú nenulové a všetky prvky pod hlavnou diagonálou sú nulové.

Postup úprav na Gaussov tvar matice si ukážeme na konkrétnom príklade:

Príklad 5.1: Upravte maticu **A** na trojuholníkový tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Úpravu budeme robiť pomocou Gaussovho algoritmu postupných elementárnych riadkových operácií:
0. Krok GA: najmenšiu hodnotu má prvok $a_{31} = 1$, takže na základe ERO 1 vymeníme tretí riadok s prvým riadkom.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. krok GA: a_{11} =1 zvolíme za vedúci prvok. Znamená to, že prvý riadok ponecháme nezmenený a začneme ERO:
Vynásobíme prvý riadok číslom (2) a pripočítame k druhému riadku a získame ekvivalentnú maticu, čo naznačuje znak ~ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ + \\ . \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad 5.1: - pokračovanie riešenia

Vynásobíme prvý riadok číslom (-3) a pripočítame k tretiemu riadku:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} (-3) \\ . \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Keďže pod vedúcim prvkom 1. kroku a_{11} máme samé nuly pokračujeme úpravami s druhým riadkom (prvý riadok ostáva nezmenený počas úprav):

2. krok GA: Vynásobíme druhý riadok (5) a pripočítame k tretiemu riadku:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 11 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} . \\ (5) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -19 \end{pmatrix}$$

Tretí riadok vymeníme s druhým riadkom a dostali sme vedúci prvok druhého kroku $a_{22} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Druhý riadok vynásobíme (2) a pripočítame k tretiemu riadku:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} . \\ (2) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -43 \end{pmatrix},$$ čo je trojuholníková matica.

Poznámka: Po nadobudnutí zručností s ERO vynulovanie pod vodiacim prvkom možno zrealizovať naraz v danom stĺpci matice, čo prezentuje nasledovný príklad.

Príklad 5.2: Upravte maticu $\mathbf{A}$ na trojuholníkový tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

0. krok GA: Pozrieme, či niektorý prvok v prvom stĺpci matice sa rovná jedna – vidíme, že $a_{31} = 1$.Vymeníme tretí riadok s prvým riadkom:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad 5.2: pokračovanie riešenia

1. krok GA: $a_{11} = 1$ zvolíme za vedúci prvok. Znamená to, že prvý riadok ponecháme nezmenený a postupujeme: Vynásobíme prvý riadok číslom (1) a pripočítame k druhému riadku a zapíšeme; vynásobíme prvý riadok číslom (-2) a pripočítame k tretiemu riadku a zapíšeme; následne vynásobíme prvý riadok číslom (2) a pripočítame k štvrtému riadku, čím sme získali pod vodiacim prvkom a_{11} samé nuly a tým sme ukončili 1. krok GA:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. krok GA: Pozrieme, ktorý prvok v druhom stĺpci je rovný jedna. Nakoľko máme dva $a_{32} = a_{42} = 1$ zvolíme za vedúci prvok a_{42}. To znamená, že vymeníme druhý riadok so štvrtým riadkom matice a získame vodiaci prvok druhého kroku $a_{22} = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pozor, v druhom kroku najprv opíšeme prvé dva riadky a potom robíme operácie s druhým riadkom, t.j. vynásobíme druhý riadok (-1) a pripočítame k tretiemu riadku, následne druhý riadok (-3) a pripočítame k štvrtému riadku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

3. krok GA:

Nakoľko nemáme v treťom stĺpci tretieho a štvrtého riadku žiadnu jednotku vynulovať prvok a_{43} môžeme postupom: opíšeme prvé tri riadky a následné aplikujeme ERO: tretí riadok vynásobíme (-9) a pripočítame k 6-násobku štvrtého riadku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} . \\ . \\ (-9)+ \\ (6) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Získali sme maticu trojuholníkového tvaru, ktorej všetky štyri diagonálne prvky sú $\neq 0$.

Poznámka: Gaussov algoritmus budeme používať pri určovaní hodnosti matice, ktorá hrá dôležitú úlohu pri riešení systému rovníc.

Definícia 5.5 – Hodnosť matice
Hodnosťou matice určenej vzťahom (5.1) rozumieme nezáporné číslo h, ktoré udáva maximálny počet lineárne nezávislých riadkov (stĺpcov) v matici. Ak upravíme maticu na trojuholníkový tvar, **počet nenulových prvkov v hlavnej diagonále určuje hodnosť matice**. Hodnosť matice označujeme $h_{\mathbf{A}}$.

Vlastnosti hodnosti matice prezentuje nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu:

Veta 5.1:

Vlastnosť 5.1: V matici môžeme nájsť h lineárne nezávislých stĺpcov (riadkov).

Vlastnosť 5.2: Ak vyberiem ľubovoľne $h+1$ stĺpcov (riadkov) v matici, tak tieto stĺpce (riadky) budú lineárne závislé.

Vlastnosť 5.3: Dve matice majú rovnakú hodnosť, ak sa líšia iba poradím riadkov alebo stĺpcov.

Vlastnosť 5.4: Hodnosť matice sa nezmení, ak vynásobíme všetky prvky matice jedného riadku (stĺpca) tým istým reálnym číslom $\alpha \neq 0$.

Vlastnosť 5.5: Hodnosť matice sa nezmení, ak pridáme v matici ďalší riadok (stĺpec), ktorý je lineárnou kombináciou iných riadkov (stĺpcov) matice.

Vlastnosť 5.6: Hodnosť matice sa nezmení, ak vynecháme v matici riadok (stĺpec), ktorý je lineárnou kombináciou iných riadkov (stĺpcov), alebo nulový riadok.

Vlastnosť 5.7: Hodnosť matice sa nezmení, ak zameníme riadky za stĺpce a stĺpce za riadky.

Príklad 5.3: Vypočítajte hodnosť matice **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:
Hodnosť vypočítame ako **počet nenulových diagonálnych prvkov** matice trojuholníkového tvaru. Využijeme výsledok príkladu 5.2, kde sme upravili maticu na ekvivalentnú maticu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \,\ldots\ldots\, \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow h_{\mathbf{A}} = 4.$$

Príklad 5.4: Vypočítajte hodnosť matice **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Postupujme úpravou na trojuholníkový tvar a následne hodnosť vypočítame ako **počet nenulových diagonálnych prvkov** matice trojuholníkového tvaru:
0. krok GA nemusíme robiť, pretože $a_{11} = 1$ a pristúpime k 1. kroku GA: prvý riadok opíšeme, následne prvý riadok vynásobíme postupne číslami (2), resp. (−1), resp. (2) a pripočítame k druhému, resp. tretiemu, resp. štvrtému riadku matice a dostaneme ekvivalentnú maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. krok GA: vymeníme štvrtý a druhý riadok, aby sme dostali vodiaci prvok druhého kroku $a_{22} = 1$ a následne k štvrtému riadku odpočítame trojnásobok druhého riadku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \text{hodnosť je } h_A = 4.$$

Príklad 5.5: Určite hodnosť matice **A** v závislosti na parametri α, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vyberte správny výrok/výroky: Hodnosť matice je:

a) $h_{\mathbf{A}} = 1$ pre α = ...; b) $h_{\mathbf{A}} = 2$ pre α ....; c) $h_{\mathbf{A}} = 3$ nezávisle na α;

d) $h_{\mathbf{A}} = 3$ pre α = ...; e) $h_{\mathbf{A}} = 4$ pre α ....; f) $h_{\mathbf{A}}$ = ... nezávisle na α;

Riešenie:

Maticu Gaussovým algoritmom elementárnych úprav upravíme na trojuholníkový tvar:
0. krok: vymeníme prvý a štvrtý riadok, aby sme mali $a_{11} = 1$.

Príklad 5.5: – pokračovanie riešenia

1. krok: Vynulujeme prvky pod prvkom a_{11}:

Aby sme minimalizovali prácu s parametrom vymeníme druhý riadok so štvrtým riadkom:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{pmatrix}$$

V 2. kroku sme vynásobili druhý riadok (-2) a pripočítali k tretiemu riadku, následne druhý riadok sme vynásobili (-1) a pripočítali k štvrtému riadku. V 3. Kroku GA tretí riadok pripočítame ku štvrtému riadku, následne tretí riadok vynásobíme $(-\alpha)$ a pripočítame opäť k štvrtému riadku:

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha \end{pmatrix}$$

Dosiahli sme trojuholníkový tvar a následne urobíme diskusiu:

Ak $2-2\alpha = 0$, t.j. ak $\alpha = 1 \rightarrow h = 3$

ak $\alpha \neq 1 \rightarrow h = 4$.

Takže z daných výrokov sú pravdivé výroky: d) $h_{\mathbf{A}} = 3$ pre $\alpha = 1$.

Definícia 5.6 - Rovnosť matíc

Dve matice **A** a **B** sa rovnajú (čo zapisujeme **A** = **B**) práve vtedy, keď sú rovnakého typu a platí: $a_{ij} = b_{ij}$ pre $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ v prípade matíc typu $m \times n$.

**Otázka 1:**

Akého typu sú matice **A** a **B**, ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Odpoveď: **A** je obdĺžniková matica typu 3 × 5; **B** je štvorcová matica typu 3 × 3.

Definícia 5.7 – Submatica matice

Štvorcová matica, ktorá vznikne z matice **A** vynechaním niektorých jej riadkov a stĺpcov, sa nazýva submatica matice **A**. Submaticu štvorcovej matice, ktorá vznikne vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca matice **A**, označujeme symbolom $\mathbf{A}_{ij}$.

Poznámka: Ak matica **A** je štvorcová matica, tak každá jej submatica, ktorá vznikne vynechaním rovnakého počet riadkov a stĺpcov bude opäť štvorcová matica.

Otázka 2:

Ako nazývame a označujeme maticu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Odpoveď: Jedná sa o jednotkovú maticu stupňa 3, ktorú označujeme $\mathbf{E}_3$.

Príklad 5.6: Je daná matica **A**, určite submatice $\mathbf{A}_{23}$ a $\mathbf{A}_{42}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$\mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Otázka 3:

Je matica **B** transponovanou maticou k matici **A**, ak sú zadané:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}?$$

Odpoveď: Áno, pretože matica **B** vznikla z **A** vymenením riadkov za stĺpce t.j. platí $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Otázka 4:

Platí rovnosť medzi maticami **A** a **B**, ak:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Odpoveď: Nie, pretože nespĺňajú podmienku rovnakého typu (**A** typ 3×3, **B** typ 4×4).

Otázka 5:

Je matica **A** z otázky 3 diagonálnou maticou?

Odpoveď: Nie, pretože nediagonálne prvky matice sú rôzne od nuly.

Otázka 6:

Za akých podmienok bude platiť rovnosť matíc, t.j. **A** = **B**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & 0 & x+y \\ y & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}$$

Odpoveď: Rovnosť matíc nastane pre $a_{11} = x = 1$, $x + y = -3 \longrightarrow y = -4$ a $z = -2$.

PDDA

Je daná matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Úloha 1: Existuje k matici **A** transponovaná matica? Ak áno, určite ju.

Úloha 2: Nájdite maticu **B**, ktorá je daná predpisom $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{23} + \mathbf{A}^{T}$. Je vo všeobecnosti táto operácia definovaná?

Úloha 3: Pre danú maticu **A** určite hodnosť matice. Aký je najvhodnejší vodiaci prvok prvého kroku v Gaussovom algoritme postupných úprav?

Kontrolné otázky

1. Definujte pojem matice a určite aké rôzne typy poznáme.
2. Napíšte jednotkovú maticu stupňa jedna a tri. Rovnajú sa tieto dve matice?
3. Je transponovaná matica k matici štvorcového typu opäť štvorcová matica?
4. Akého typu bude transponovaná matica k matici **A**, ktorá je 3×4?
5. Definujte pojem hodnosť matice.
6. Je totožná hodnosť s počtom prvkov diagonálnej matice?
7. Vymenujete elementárne riadkové operácie a ich význam.
8. Vyslovte postup pri uplatňovaná Gaussovho algoritmu. K čomu ho používame?

5.2 Operácie s maticami

Rovnako ako pre vektory vo vektorovom priestore, tak aj pre matice je žiaduce si definovať operácie s maticami:

Definícia 5.8 - Súčet matíc

Súčtom matíc $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ typu $m \times n$ nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, ktorej prvky sú definované:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{pre } i = 1, 2, ..., m \;\; j = 1, 2, ..., n\,.$$

Poznámka:

1. Súčet dvoch matíc, ktoré nie sú rovnakého typu sa nedefinuje.
2. Pre súčet matíc platí komutatívny a asociatívny zákon. Teda
   $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
   $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
   $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$
   kde $\mathbf{O}$ je nulová matica rovnakého typu ako matica $\mathbf{A}$.

Otázka 7:

Je matica $\mathbf{C}$ súčtom matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, ak sú zadané predpismi:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Odpoveď: Áno, pretože pre každý prvok matice $\mathbf{C}$ platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, t.j. platí $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Definícia 5.9 – Násobenie matice číslom

Súčinom reálneho čísla α a matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ rovnakého typu $m \times n$, pre prvky ktorej platí:

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij} \qquad \text{pre } i = 1, 2, ..., m; \;\; j = 1, 2, ..., n.$$

Operáciu zapíšeme $\mathbf{C} = \alpha\, \mathbf{A}$.

Poznámka:

1. Vynásobiť maticu číslom znamená vynásobiť každý jej prvok číslom α.
2. Pre súčin čísla a matice platí:
   $\alpha\, (\beta\, \mathbf{A}) = (\alpha\, \beta)\, \mathbf{A}$
   $(\alpha + \beta)\, \mathbf{A} = \alpha\, \mathbf{A} + \beta\, \mathbf{A}$
   $\alpha\, (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\, \mathbf{A} + \alpha\, \mathbf{B}$
   $1.\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Príklad 5.7: Určte maticu $\mathbf{C}$, ktorá je **daná** predpisom $\mathbf{C} = 2\,\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$\mathbf{C} = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & -4 & 10 \\ -4 & 10 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -21 & 9 & -6 & 15 \\ 6 & -15 & 3 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & -9 & -3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -21 & 15 & -10 & 25 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -15 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Definícia 5.10 - Súčin matíc

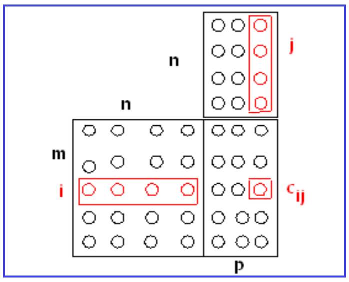
Súčinom matíc $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ typu $n \times p$ v tomto poradí nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times p$, ktorej prvky sú definované:

$$c_{ij} = a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \dots + a_{in}\,b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, p\,,$$

čo zapíšeme $\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B}$.

Poznámka:

1. Schematické znázornenie operácie súčinu dvoch matíc prezentuje obr. 5.1.



Obrázok 5.1: Grafické znázornenie operácie súčinu dvoch matíc

2. Pri súčine matíc **A**.**B** matica **A** musí mať rovnaký počet stĺpcov ako má matica **B** riadkov.
3. Prvok c_{ij} matice **C**, pre ktorú platí **C** = **A**.**B**, je **skalárnym súčinom** *i*-teho riadku matice **A** a *j*-teho stĺpca matice **B** (Obr. 5.1).
4. Pre súčin matíc platí asociatívny a distributívny zákon:

$(\mathbf{A}.\mathbf{B}).\mathbf{C} = \mathbf{A}.(\mathbf{B}.\mathbf{C})$

$(\mathbf{A} + \mathbf{B}).\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{C} + \mathbf{B}.\mathbf{C}$

kde matice **A**, **B**, **C** sú matice vyhovujúcich typov pre uvedené operácie.
5. Pre každú štvorcovú maticu typu $n \times n$ platí:

$\mathbf{A}.\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n.\mathbf{A}$

6. Pozor súčin matíc nie je komutatívny: $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$ (vo všeobecnosti) !!

Príklad 5.8: Vypočítajte súčin matíc **A**.**B**, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Súčin matíc je definovaný, pretože matica **A** je typu: 2×3 a matica **B** je typu 3×3, takže výsledná matica **C** bude typu 2×3. (Predstavme si zápis $\frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$)

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

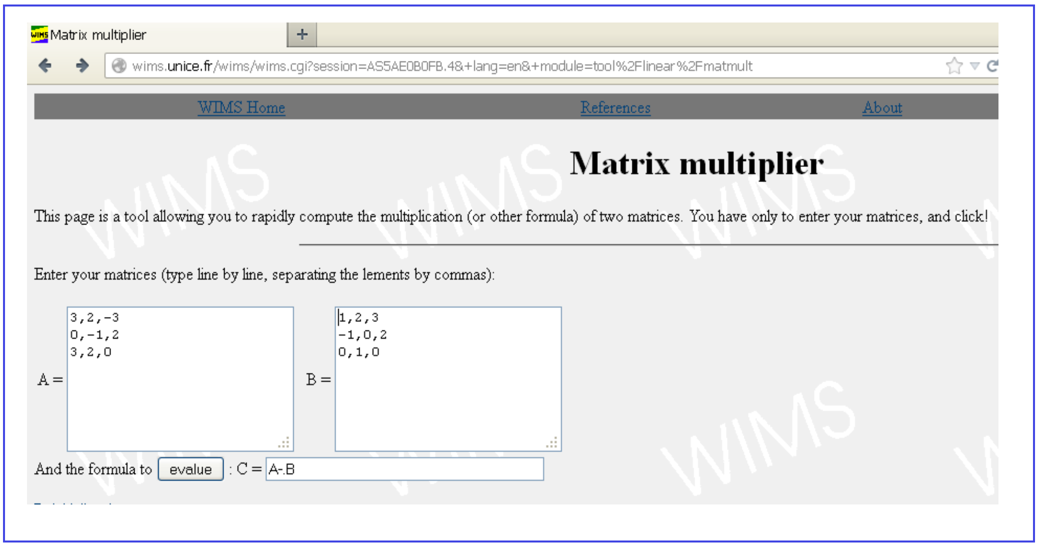
$$\begin{pmatrix} 1.2 + (-1).0 + 2.(-2), & 1.1 + (-1).(-1) + 2.0, & 1.(-1) + (-1).3 + 2.1 \\ 0.2 + 3.0 + (-2).(-2), & 0.1 + 3.(-1) + (-2).0, & 0.(-1) + 3.3 + (-2).1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Otázka 8:

Ak matica **A** je typu 3×4 a matica **B** je typu 2×3 je definovaný súčin matíc **A**.**B** a **B**.**A**? Ak áno, akého typu bude výsledná matica?

Odpoveď: Súčin **A**.**B** nie je definovaný, pretože počet stĺpcov prvej matice sa nerovná počtu riadkov druhej matice. Súčin **B**.**A** je definovaný, pretože počet stĺpcov prvej matice sa rovná počtu riadkov druhej matice, výsledná matica bude typu 2×4.

Poznámka: Správnosť Vášho výpočtu si skontrolujte prostredníctvom www stránky (obr. 5.2) Matrix calculator, ktorý je voľne dostupný na adrese: http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=1J7940BED7.4&+lang=en&+module=tool%2Flinear%2Fmatmult.



Obrázok 5.2: Interaktívna maticová kalkulačka http://wims.unice.fr/wims

PDDA

Úloha 4: Zadajte si maticu **A.** Nájdite maticu **B**, ktorá je daná predpisom **B** = **A** + **A**^{T}. Je vo všeobecnosti táto operácia definovaná?

Úloha 5: Zadajte si dve matice **A** a **B.** Vypočítajte ich súčin, zvážte koľko možností existuje. O správnosti sa presvedčte použitím kalkulátoru na http://wims.unice.fr/wims.

Kontrolné otázky

1. Je definovaná operácia sčítania pre ľubovoľné dve matice?
2. Existuje súčet matice a k nej transponovanej ak matica je: a) štvorcového typu, b) $m \times n$?
3. Objasnite asociatívny a distributívny zákon pre matice.
4. Ako je zadefinované násobenie matice číslom?
5. Platí komutatívny zákon pre matice pri operácii: a) sčítania, b) násobenia matíc, c) ak matice sú definované tak, že daná operácia existuje.
6. Platí vo všeobecnosti rovnosť **A**.**B** = **B**.**A**?
7. Platí vo všeobecnosti rovnosť **E**.**B** = **B**.**E**, keď matice sú definované, že operácia súčinu existuje? Objasnite význam matice **E**.
8. Ako je definovaný súčin dvoch matíc, objasnite slovne i zápisom.
9. Musí mať matica **A** rovnaký počet stĺpcov ako má matica **B** riadkov aby bol súčin matíc **A**.**B** definovaný?
10. Nech α a β sú reálne čísla, platí rovnosť (α + β) **A** = α **A** + β **A**?
11. Nech α je reálne číslo a matice **A** a **B** sú rovnakého typu, platí rovnosť: α(**A** + **B**) = α**A** + α**B** ?

5.3 Výpočet inverznej matice pomocou Gaussovho algoritmu

V úvode § 5.1 sme si definíciou 5.4 objasnili pojem Gaussovej matice, tri základné elementárne riadkové operácie (ERO) a postup, tzv. Gaussov algoritmus, ktorý umožňuje prepis matice na ekvivalentnú maticu trojuholníkového tvaru. Táto skutočnosť sa využíva aj pri určovaní inverznej matice. Postup je nasledovný:

1. Napíšeme maticu **A** typu $n \times n$,
2. K matici **A** zostrojíme novú maticu **B** = (**A** | **E**$_n$) tak, že k nej na pravú stranu pripíšeme jednotkovú maticu rovnakého stupňa akého je matica **A**.

Pre takúto maticu použitím elementárnych riadkových operácií ERO 1 – ERO 3 robíme Gaussov algoritmus úprav na **B** ´= (**E**$_n$|**C**) , t.j. na ľavej strane sme dostali jednotkovú maticu. Na pravej strane získame inverznú maticu **A**$^{-1}$ = **C**. Postup si ozrejmíme na konkrétnych príkladoch:

Príklad 5.9: Pomocou Gaussovho algoritmu postupných úprav určite inverznú maticu k matici **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Zapíšeme si zadanú maticu a k nej na pravú stranu pripíšeme jednotkovú maticu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Postup vo všeobecnosti možno popísať: Pomocou Gaussovho algoritmu budeme robiť také riadkové operácie aby prvky pôvodnej matice **A** sme zmenili na jednotkovú maticu **E**. Potom prvky na pravej strane sú prvkami hľadanej inverznej matice **A**$^{-1}$, t.j.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\mathbf{A}\,.\,\mathbf{E}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cong \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{array}\right)}_{\mathbf{E}\,.\,\mathbf{A}^{-1}}$$

Konkrétna aplikácia Gaussovho algoritmu úprav (GA) na trojuholníkovú maticu je:

0. krok GA - Vymením tretí riadok s prvým riadkom, aby sme získali vodiaci prvok prvého kroku $a_{11} = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Príklad 5.9: pokračovanie riešenia

1. krok GA: cieľ vynulovať všetky prvky v prvom stĺpci pod prvkom a_{11}: Prvý riadok vynásobíme (-2) a pripočítame ho k druhému riadku. (Pozor prvý riadok opíšeme nezmenený!) Následne prvý riadok vynásobíme (2) a pripočítame ho k tretiemu riadku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{(-2)(2)} \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \cong$$

2. krok GA: Opíšeme prvý riadok a k druhému pripočítame tretí riadok, čím získame vodiaci prvok a_{22} = 1: Následne k tretiemu riadku pripočítame (-5) násobok druhého riadku; k prvému riadku pripočítame (-2) násobok druhého:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 & 2 \end{array}\right) \cong$$

3. krok GA: Tretí riadok vynásobíme (1/3),čím dosiahneme aby a_{33} = 1. Následne k prvému riadku pripočítame (-1) násobok tretieho riadku:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \cong$$

Na ľavej strane čiary sme získali jednotkovú maticu a na pravej strane je hľadaná inverzná matica:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

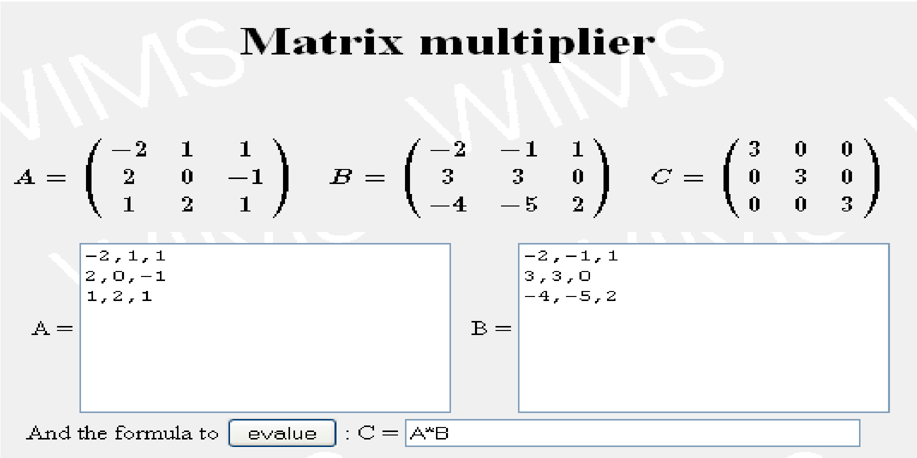
Skúška správnosti riešenie:

Ak sme počítali správne musí platiť $\mathbf{A}^{-1}.\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}.\ \mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde je jednotková matica:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4+3-4 & 2+3-5 & -2+0+2 \\ (-2).2+4 & 2.(-1)+5 & 2-2 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4+3-4 & 2+3-5 & -2+0+2 \\ (-2).2+4 & 2.(-1)+5 & 2-2 \\ -2+6-4 & -1+5-6 & 1+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledok obdobne potvrdzuje aj výpočet cez IKT (obr. 5.3).



. Obrázok 5.3: Výpočet súčinu **A**.**B** cez kalkulátor http://wims.unice.fr/wims

Príklad 5.10: Riešte rovnicu pre neznámu maticu **X** a urobte skúšku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - 2\mathbf{X}$$

Riešenie:

Rovnica je maticová rovnica. Postupujeme rovnako ako pri klasickej rovnici: členy s neznámou maticou dáme na jednu stranu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + 2\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vyberieme **X** pred zátvorku, pričom musíme dodržať pozíciu matice **X** na pravej strane a zapíšeme jednotkovú maticu!

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathbf{E}\right] .\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] .\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$$ čo možno zapísať v tvare

A.X = B $\rightarrow$ **A^{-1}A.X = A^{-1}.B** $\rightarrow$ **X= A^{-1}.B.** Pozor !! násobím **zľava** maticu **B** aj maticu **A** maticou **A^{-1}**,

kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Najprv určíme **A^{-1}** Gaussovým algoritmom**:**

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Príklad 5.10: pokračovanie riešenia

Urobíme skúšku či platí $\mathbf{A}^{-1}.\ \mathbf{A} = \mathbf{E}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Skúšku správnosti urobíme opäť tým, že dosadíme do zadanej rovnice :

$$\text{ĽS: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 25 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{PS: } \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - 2\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -6 \\ 18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ ĽS = PS.

Príklad 5.11: Riešte rovnicu $\mathbf{X}.(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ (1) pre neznámu maticu $\mathbf{X}$, kde

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Urobte skúšku:

Riešenie:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Schematicky znázorníme operácie pri zvolenom označení:

$$\mathbf{X.C} = \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{X.C.C}^{-1} = \mathbf{D.C}^{-1} \rightarrow \mathbf{X.E} = \mathbf{D.C}^{-1} \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{D.C}^{-1}$$

Pozor !! násobím sprava maticu $\mathbf{C}$ aj $\mathbf{D}$ maticou $\mathbf{C}^{-1}$! Vypočítajme inverznú maticu $\mathbf{C}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

C.E =.. **E.C**$^{-1}$

Príklad 5.11: pokračovanie riešenia

Urobíme skúšku priebežne, či sme správne určili inverznú maticu, pretože pre musí platiť:

$$\mathbf{C}.\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{C}.\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Skúška správnosti do vstupnej rovnice (1):

$$\text{ĽS:}\;\; \mathbf{X}.(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{PS:}\;\; \mathbf{A} + \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ĽS} = \text{PS}.$$

PDDA

Úloha 6:

Pre matice **A** a **B** z príkladu 5.10 riešte maticovú rovnicu $(\mathbf{A}-\mathbf{B}).\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ pre neznámu maticu **X.**

Úloha 7:

Pre matice **A** a **B** z príkladu 5.10 riešte maticovú rovnicu $\mathbf{A}.\mathbf{X} = 2\,\mathbf{B}\,\mathbf{X} + \mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ pre neznámu maticu **X.**

Kontrolné otázky

1. Aký postup riešenia poznáme na určenie inverznej matice? Vyslovte postup.
2. Akú rovnosť možno napísať pre súčin matice a k nej inverznej matice (pokiaľ existuje)?
3. Ktoré zásady musíme dodržiavať pri riešení maticovej rovnice?
4. Odhadnite, či dostaneme rovnaký výsledok v úlohe 6 ako v príklade 5.10. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
5. Čo schematicky znázorňuje:
   $\mathbf{C}.\mathbf{E}$ =.. $\mathbf{E}.\mathbf{C}^{-1}$?

Kapitola 6
DETERMINANT MATICE

Učebné ciele:

- Oboznámiť sa so základnými pojmami súvisiacimi s determinantmi štvorcovej matice a vedieť ich definovať;
- Naučiť sa základné operácie s determinantmi: súčet, násobenie determinantu číslom, subdeterminant;
- Vedieť určiť hodnotu determinantu štvorcovej matice stupňa *n*, kde *n* = 1, 2, 3, ... rôznymi spôsobmi (pre *n* = 3 Sarrusove pravidlo; pre $n \geq 4$ rozvojom podľa ľubovoľného riadku, alebo úpravou na trojuholníkový tvar);
- Vypočítať inverznú maticu pomocou determinantov;
- Vedieť pracovať s interaktívnymi apletmi (www stránky na internete a rôzne softvéry na výpočet), ktoré ponúkajú riešenie determinantov pre kontrolu, alebo urýchlenie výpočtu.

Kľúčové slová: determinant štvorcovej matica, Sarrusove pravidlo, Laplaceov rozvoj determinantu, algebrický doplnok, subdeterminant, adjungovaná matica.

Požadované vedomosti: znalosť úpravy algebrických výrazov, pojmov a operácií s maticami. Zručnosť v aplikovaní Gaussovho algoritmu a ostatných poznatkov z predchádzajúcich kapitol.

Motivácia

V reálnom svete potrebujeme riešiť reálne problémy, ktoré formulujeme podľa ich náročnosti do systémov rovníc. S nimi súvisí aj pojem determinant matice a jeho výpočet. Táto kapitola je prípravou na riešenie systému lineárnych rovníc.

6.1 Determinant matice a výpočet determinantu matice druhého a tretieho stupňa

K pojmu determinantu nás privedie úvaha, týkajúca sa riešenia systému rovníc o dvoch neznámych, ktorú si zapíšeme v tvare:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (6.1)$$

Hľadajme riešenie systému (6.1) spôsobmi, ktoré sme sa naučili na strednej škole, t.j. budeme sa snažiť eliminovať jednu neznámu úpravami rovnice postupom:

1. krok: Vynásobme prvú rovnicu a_{22} a druhú rovnicu $(-a_{12})$ a rovnice sčítame:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \,/\, a_{22} \quad +$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \,/\, (-a_{12})$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 + (a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22})\,x_2 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (6.2)$$

2. krok: Vynásobme prvú rovnicu a_{21} a druhú rovnicu ($-a_{11}$) a rovnice sčítame:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \;/\; a_{21}$$

$$+$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \;/\; (-a_{11})$$

$$(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21})\,x_1 + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})\,x_2 = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}$$

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})\,x_2 = b_1 a_{21} - b_2 a_{11} \quad /(-1)$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (6.3)$$

Definícia 6.1 – Matica systému

Pod maticou systému dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych, určenými rovnicami (6.1) rozumiem maticu typu 2×2, ktorej prvky sú koeficienty pri neznámych, pri dodržaní poradia:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

Definícia 6.2 - Determinant štvorcovej matice prvého a druhého stupňa

Determinant štvorcovej matice **A** typu $n \times n$ definujeme ako **číslo**, určené predpisom:

1. **pre $n = 1$** , t.j. jednoprvkovú maticu **A** $= (a_{11})$ det **A** $= a_{11}$, čo môžeme zapísať aj: $|a_{11}| = a_{11}$. (Determinant matice **A** označujeme aj symbolom | **A** |.)

2. **pre $n = 2$,** t.j. pre maticu sústavu $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ako:

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (6.5)$$

t.j. ako rozdiel súčinu prvkov v hlavnej diagonále so súčinom prvkov vo vedľajšej diagonále.

Vidíme, že tento výraz sa nachádza v menovateli obidvoch výrazov, určujúcich riešenie systému dvoch rovníc (6.1). Možno si položiť otázku: Ako získame výraz, ktorý sa nachádza v čitateli zlomku v rovniciach (6.2) a (6.3)?

Vytvorme maticu $\mathbf{A}_1$, ktorá vznikne tak, že v matici systému **A** nahradíme prvý stĺpec, stĺpcom pravých strán, t.j. získame maticu

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (6.6)$$

K nej prislúcha D_1 = det $\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}$. (6.7)

Rovnako vytvorme maticu $\mathbf{A}_2$, ktorá vznikne tak, že v matici systému $\mathbf{A}$ nahradíme druhý stĺpec, stĺpcom pravých strán, t.j. získame maticu

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

K nej prislúcha D_2 = det $\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{12}$. (6.9)

Takže hľadané riešenie R, ak $D \neq 0$ môžeme zapísať v tvare:

$$R = \{x_1, x_2\} \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D},\; x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{6.10}$$

Vidíme, že riešenie sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych tvaru (6.1) môžeme namiesto zápisov tvaru (6.2) a (6.3) zapísať pomocou determinantu a to v tvare určenom vzťahmi (6.10). Túto skutočnosť zovšeobecňuje tzv. Cramerova veta, v ktorej pojednáme pri riešení systému rovníc v nasledujúcej kapitole 7.

Otázka 1 :

Je determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ rovný 23?

Odpoveď:

O správnosti výroku sa presvedčíme výpočtom $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3.5 - \{4.(-2)\} = 15 + 8 = 23$

$\Longrightarrow$ odpoveď áno.

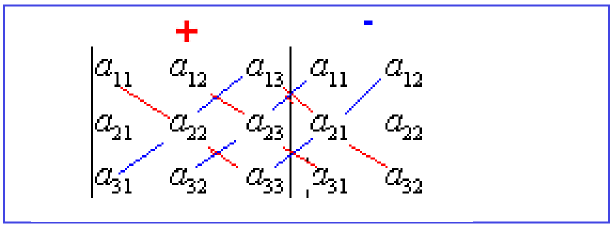
Definícia 6.3 - Determinant štvorcovej matice tretieho stupňa

Determinant štvorcovej matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ typu 3 × 3 definujeme ako číslo, určené vzťahom (6.11), ktoré nazýva sa Sarrusovým pravidlom:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

(6.11).

Poznámka: Sarrusove pravidlo schematicky znázorňuje postup na obr. 6.1. K determinantu z pravej strany pripíšeme prvé dva stĺpce a urobíme súčiny trojíc prvkov pospájaných čiarami v postupnosti: súčiny idúce „zľava doprava“ (označené červenými čiarami) majú kladné znamienko, súčiny idúce „sprava doľava“ (označené modrými čiarami) znamienko záporné.



Obrázok 6.1: K výpočtu determinantu tretieho stupňa

1. Tak isto možno postupovať ak si pod determinant matice podpíšeme prvé dva riadky a urobíme súčet súčinov v smere hlavnej diagonály a odčítame súčet súčinov v smere vedľajšej diagonály.
2. Na výpočet determinantu matice vyššieho stupňa ako tri, už neexistuje pravidlo ako pre tretí stupeň (n = 3), ktoré by sme mohli použiť. S výpočtom sa oboznámime neskôr.

Prostredníctvom nasledujúcich viet uvedieme vybrané vlastnosti determinantov:

Nech **A** je štvorcová matica.

Veta 6.1 Determinant matice **A** a k nej transponovanej matice sa rovnajú, t.j.

$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$

Veta 6.2 Determinant matice sa nezmení keď v matici k niektorému jej riadku (stĺpcu) pripočítame násobok iného jej riadku.

Veta 6.3 Ak v matici **A** je jeden riadok (stĺpec) nulový, $|\mathbf{A}| = 0$.

Veta 6.4 Ak v matici **A** sú dva riadky (stĺpce) rovnaké, $|\mathbf{A}| = 0$.

Veta 6.5 Ak v matici **A** vymeníme navzájom dva riadky (stĺpce), determinant matice zmení znamienko.

Veta 6.6 Ak v matici **A** je jeden riadok (stĺpec) matice lineárnou kombináciou vybraných riadkov (stĺpcov), $|\mathbf{A}| = 0$.

Veta 6.7 Ak v matici **A** vynásobíme ľubovoľný riadok (stĺpec) číslom α rôznym od nuly, tak determinant matice, ktorú dostaneme, sa rovná α – násobku determinantu matice **A**.

Poznámka:
Vety 6.1 – 6.7 nám umožňujú zjednodušiť výpočet determinantu tak, že riadky (stĺpce) vynásobíme vhodnými číslami a pripočítame ich k iným riadkom (stĺpcom) za účelom, aby sme dostali čo najviac núl v riadku a následne použijeme rozklad determinantu podľa tohto riadku (stĺpca), čo využijeme pri výpočtoch determinantov vyššieho stupňa. Tento algoritmus využíva Gaussovu eliminačnú metódu, s ktorou sme sa oboznámili v kapitole 5.

Príklad 6.1: Vypočítajte determinant matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{matrix} =$$

$$[1.2.5 + 2.3.(-1) + (-1).0.0] - [(-1).2.(-1) + 1.3.0 + 2.0.5] = [10 - 6] - 2 = 2 .$$

Príklad 6.2: Riešte rovnicu pre neznámu x: $|3| + \begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Riešenie:

Výpočtom determinantov získame kvadratickú rovnicu

$3 + (x^2 - 4) = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x_1 = 1 \text{ , } x_2 = -1.$

Skúška správnosti:

pre $x_1 = 1$: ĽS : $|3| + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + (1 - 4) = 0,$

pre $x_2 = -1$: ĽS : $|3| + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + (1 - 4) = 0 \longrightarrow$ ĽS = PS.

Príklad 6.3: Vypočítajte determinant matice $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie: $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \\ 8 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 8 & -9 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & -9 \end{matrix} =$

$$\{1.0.10 + (-3).4.8 + 2.0.(-9)\} - \{2.0.8 + 1.4.(-9) + (-3).0.1\} = 2.(-60) = -120.$$

Úpravy, ktoré sme urobili: - z prvého riadku sme vyňali číslo 2;
- k druhému riadku sme pripočítali tretí riadok;
- od druhého riadku sme odčítali prvý riadok;
- použili sme Sarrusove pravidlo.

Poznámka:

Sarrusove pravidlo môžeme samozrejme ihneď použiť na zadaný determinant príkladu 6.3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -6 \\ -7 & 6 \\ 8 & -9 \end{matrix} = [2.6.1+(-6).5.8+4.(-7).(-9)]-[4.6.8+2.5.(-9)+(-6).(-7).1]=$$

$12-240+252-(192-90+42)=-120.$

Otázka 2:

Ktorý postup v príklade 6.2 je pre Vás vhodnejší? Zdôvodnite si!

Príklad 6.4: Vypočítajte moment sily $\vec{F}$ pôsobiacej v bode A vzhľadom na bod O, keď $\vec{F} = 3\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ $[N]$, $A = (3,1,0)$, $O = (0,0,0)$. Súradnice bodov A, O sú dané v metroch.

Riešenie:

Nakoľko moment sily je definovaný ako vektorový súčin ramena sily a pôsobiacej sily, vyjadríme ho: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Opäť možno využijeme výpočet prostredníctvom determinantu a Sarrusovho pravidla:

Vyjadrime si polohový vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = (A-0) = (3,1,0)$ a

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} = (2\vec{\imath} + 12\,\vec{k}) - (3\vec{k} + 6\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 9\vec{k}.$$

Príklad 6.5: Rozhodnite, či vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{z}$ sú lineárne závislé alebo lineárne nezávislé, ak $\vec{u} = (0,2,1)$, $\vec{v} = (0,-3,1)$ $\vec{z} = (2,3,-1)$.

Riešenie:

Pri rozhodovaní o lineárnej závislosti môžeme využiť Vetu 6.6, t.j. určíme hodnotu determinantu a podľa výsledku rozhodneme. V prípade ak $|\,\mathbf{A}\,| = 0$, vektory sú lineárne závislé, lebo hodnota determinantu je nulová ak dva riadky sú závislé.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2.(2+3) = 10 \neq 0 \Longrightarrow$$ vektory sú lineárne nezávislé.

Príklad by sa samozrejme mohol riešiť i cez hodnosť matice. V prípade, že vyjde $h = 3$, tri zadané vektory sú lineárne nezávislé.

Príklad 6.6: Stanovte výsledný moment $\vec{M}$ síl vzhľadom na bod $O = (1,1,1)$, keď: $\vec{F_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}\ [N]$, pôsobisko je v bode $A_1 = (2,-1,3)$ a sily $\vec{F_2} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}\ [N]$ s pôsobiskom v bode $A_2 = (3,5,1)$. Súradnice bodov A_1, A_2, O sú dané v metroch.

Riešenie:

Nakoľko moment sily je definovaný ako vektorový súčin ramena sily a pôsobiacej sily, vyjadríme ho: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Výsledný moment je určený vektorovým súčtom momentov obidvoch síl, t.j. $\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2}$ .Vyjadrime $\vec{M_1} = \vec{r_1} \times \vec{F_1}$ a $\vec{M_2} = \vec{r_2} \times \vec{F_2}$:

$$\vec{r_1} = OA_1 = (2-1, -1-1, 3-1) = (1,-2,2)$$

$$\vec{r_2} = OA_2 = (3-1, 5-1, 1-1) = (2,4,0)$$

$$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 4\vec{k}\,) + (4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 14\vec{k}\,) =$$

$$\vec{M} = (6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 10\vec{k}\,).$$

Príklad 6.7: Určite vektor okamžitej rýchlosti $\vec{v}$, ktorý je daný predpisom $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, kde vektor uhlovej rýchlosti má súradnice $\vec{\omega} = (0,0,2\pi)$ v jednotkách [s^{-1}]. Časová závislosť polohového vektora $\vec{r}$, určeného v metroch, je v karteziánskej súradnicovej sústave daný predpisom $\vec{r} = 2At\vec{\imath} + Bt^2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Vypočítajte veľkosť okamžitej rýchlosti pre časový okamih t = 3 s. Napíšte v akých jednotkách sú určené konštanty A a B, vystupujúce v polohovom vektore.

Riešenie:

Vzťah medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou je určený vzťahom $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Využijeme výpočet prostredníctvom determinantu a jeho rozvoja podľa druhého riadku:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2\pi \\ 2At & Bt^2 & 1 \end{vmatrix} = 2\pi\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 2At & Bt^2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = Bt^2\vec{\imath} - 2At\vec{\jmath}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(Bt^2)^2 + (-2At)^2}$$

$$v(t = 3\text{ s}) = \sqrt{(B3^2)^2 + (-2A.3)^2} = \sqrt{(B3^2)^2 + (2A.3)^2} = 3\sqrt{9B^2 + 4A^2}\ \text{ms}^{-1}.$$

Rozmer konštánt: [B] = [m.s^{-2}], [A [= [m.s^{-1}].

Príklad 6.8: Určite ako sa zmení determinant matice $\mathbf{A}$, ak maticu vynásobíme číslom $\alpha \neq 0$ a vieme, že matica $\mathbf{A}$, je štvorcová matica stupňa *n*.

Riešenie:

Vynásobiť maticu číslom znamená každý jej prvok vynásobiť číslom α. Na základe V 5.7 si uvedomíme opačný postup, z každého riadku determinantu matice α $\mathbf{A}$ v zmysle vlastnosti determinantov si vyjmeme číslo α. Postup ukážeme na konkrétnej matici 3×3.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)[-3-1] = 4$$

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \alpha \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 3\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha\alpha \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -\alpha & 2\alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha\alpha\alpha \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^3 \det A.$$

Príklad 6.9: Sú dané body A = (0, 1, -1), B = (2, -1, 0), C = (1, 2, 1), O = (0, 0, 0).
Určite a) objem rovnobežnostena určeného vektormi **OA**, **OB, OC**.
b) uhol vektorov **OB** a **OC**,
c) plochu podstavy určenej vektormi **OB** a **OC**.

Riešenie:

Využijeme fyzikálny význam zmiešaného súčinu a jeho zápisu v tvare determinantu, ktorý určuje objem rovnobežnostena. Vektory umiestnime do spoločného bodu O, takže ich súradnice sú totožné so súradnicami bodov:

$$\text{a) } V = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\| = \left| \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = |(0+0-4)-(1+2)| = |-7| = 7 \text{ obj. j.}$$

$$\text{b) } \cos\alpha = \frac{\vec{b} \bullet \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{2.1 + (-1).2 + 0.1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 1}} = 0 \Longrightarrow$$ vektory sú kolmé

$$\text{c) } P = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\| = |-\vec{i} + 4\vec{k} - (-\vec{k} + 2\vec{j})| = |-\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (5)^2} = 5{,}4 \text{ p.j.}$$

Iný spôsob výpočtu: nakoľko sú vektory kolmé, jedná sa o plochu obdĺžnika $P = ab$.

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}, \quad |\vec{c}| = \sqrt{1 + 2^2 + 1} = \sqrt{6} \Longrightarrow P = \sqrt{30} = 5{,}47 \text{ p.j.}$$

Kontrolné otázky

1. Je správny výrok „Determinant je určený skalárom, ak prvky matice sú reálne čísla“?

2. K akým maticiam existuje determinant?

3. Čo vieme povedať o stupni determinantu štvorcovej matice a determinantu k nej transponovanej matice?

4. Možno využiť Gaussov algoritmus elementárnych riadkových operácií na výpočet determinantu matice?

5. Čo znamená násobiť determinant číslom? Ako sa zmení jeho hodnota?

6. Majme štvorcovú maticu stupňa dva. Ako sa zmení determinant matice, ak maticu vynásobíme číslom dva?

7. Majme štvorcovú maticu stupňa štyri. Ako sa zmení determinant matice, ak maticu vynásobíme číslom dva?

8. Na aký výpočet používame Sarrusove pravidlo? Objasnite ho!

9. Je správny výrok „Ak v matici vymeníme dva riadky, determinant tejto matice nezmení hodnotu“?

10. Viem použiť determinanty na určovanie lineárnej závislosti, resp. lineárnej nezávislosti troch vektorov v 3D? Ak áno, vysvetlite postup.

11. Vysvetlite pojem regulárna matica.

PDDA

Úloha 1: Vypočítajte determinant $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Úloha 2: Riešte rovnicu $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Úloha 3: Vypočítajte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Úloha 4: Vypočítajte determinant matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 5: Riešte rovnicu pre neznámu *x*: $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x \\ 3x-2 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & x-3 \\ x-5 & x-7 \end{vmatrix} = 0$.

6. 2 Výpočet determinantu stupňa *n*, pre *n* > 3

Determinant *n* -tého stupňa vo všeobecnosti môžeme počítať dvomi spôsobmi:

a) rozvojom podľa ľubovoľného riadku alebo stĺpca,

b) úpravou na trojuholníkový tvar, kedy hodnota determinantu sa rovná súčinu prvkov hlavnej diagonály determinantu.

Ukážme si obidva spôsoby:

A) Rozvoj determinantu štvorcovej matice podľa riadku (stĺpca)

Determinant štvorcovej matice stupňa n › 3 možno vypočítať tak, že ho rozviniem podľa ľubovoľného riadku alebo stĺpca. K tomu si potrebujeme zadefinovať determinant A_{11} , resp. A_{ij}, s ktorým pri výpočte determinantov vyšších rádov budeme pracovať.

Definícia 6.4 - Determinant A_{ij} resp. A_{11}

Nech A je determinant prislúchajúci k štvorcovej matice **A** stupňa *n*, t.j.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Pod determinantom A_{ij} budeme rozumieť determinant, ktorý vznikne z determinantu A vynechaním *i*-teho riadku a *j*-teho stĺpca, t.j. pre i =1 a j =1 (obr. 6.2).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Obrázok: 6.2 K tvorbe determinantu A_{ij}

Napríklad pre determinant A_{11} dostaneme

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{32} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6.12).$$

Poznámka: Determinant A_{ij} je stupňa n-1, t.j. o stupeň nižší ako stupeň determinantu A.

Rozvoj determinantu podľa prvého riadku určuje veta 6.8:

Veta 6.8 Laplaceov rozvoj determinantu štvorcovej matice **A** podľa:

prvého riadku je určený:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(-1)^{1+1}|\mathbf{A}_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|\mathbf{A}_{13}| + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}|\mathbf{A}_{1n}|, \qquad (6.13)$$

alebo ľubovoľného i-teho riadku:

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}(-1)^{i+1}|\mathbf{A}_{i1}| + a_{i2}(-1)^{i+2}|\mathbf{A}_{i2}| + a_{i3}(-1)^{i+3}|\mathbf{A}_{13}| + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}|\mathbf{A}_{in}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|\mathrm{A}_{ij}|$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$

resp. ľubovoľného j-teho stĺpca:

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}(-1)^{1+j}|\mathbf{A}_{1j}| + a_{2j}(-1)^{2+j}|\mathbf{A}_{2j}| + a_{3j}(-1)^{3+j}|\mathbf{A}_{3j}| + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}|\mathbf{A}_{nj}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|\mathrm{A}_{ij}|,$$

kde $j = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka: Nech **A** je štvorcová matica tretieho stupňa. Determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ možno určiť rozkladom :

$$|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}|\mathbf{A}_{13}| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Príklad 6.10: Vypočítajte determinant matice **A** na základe rozvoja podľa vybraného riadku (stĺpca) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

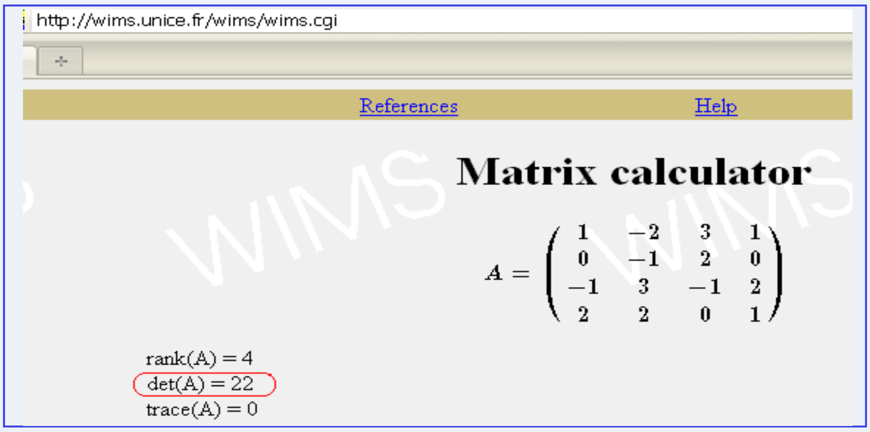
Vyberieme si rozvoj podľa prvého stĺpca, napriek tomu, že šikovnejšie by bolo podľa druhého riadku. Viete prečo?

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(2)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - (-5) - 2.(-7) = 22.$$

Príklad 6.10: pokračovanie riešenia

Skúška: O tom, či sme správne počítali sa môžeme presvedčiť využitím IKT. Vyberieme si kalkulačku na http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi. Výsledok potvrdzuje nami vypočítanú hodnotu (obr. 6.3).



Obrázok: 6.3 Výpočet determinantu pomocou IKT

Otázka 3: Prečo v Príklade 6.10 je vhodnejšie robiť rozklad podľa druhého riadku?

Odpoveď: Pretože dva prvky sú nulové a teda musíme počítať len dva determinanty.

Príklad 6.11: Vypočítajte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Riešenie:

Budeme postupovať v zmysle pravidiel viet 6.1 – 6.7 aplikáciou ERO na dosiahnutie determinantu, v ktorom získame jeden stĺpec (prvý) pod vodiacim prvkom a_{11} samé nulové prvky. Po týchto úkonoch môžeme použiť poznatok vety 6.8 a rozvinúť determinant podľa prvého stĺpca, kedy dostaneme determinant tretieho stupňa. Ten vypočítame použitím Sarrusovho pravidla. Použili sme nasledovné úpravy:

1. krok GA

- 1. riadok (R) vynásobíme číslom (-2) a pripočítame k 2. R;
- 1. R vynásobíme číslom 2 a pripočítame k 3. R;
- 1. R vynásobíme číslom (-3) a pripočítame k 4. R, kedy sme ukončili 1. krok GA a vynulovali prvky v prvom stĺpci determinantu pod prvkom a_{11};
- rozvinuli sme determinant podľa prvého stĺpca a použili Sarrusove pravidlo pre výpočet determinantu tretieho stupňa:

Príklad 6.11: pokračovanie riešenia

$$\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}(-2)\\ +\\ .\\ .\end{matrix} = \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}(2)\\ .\\ +\\ .\end{matrix} = \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 4 & 7 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}(-3)\\ .\\ .\\ +\end{matrix} =$$

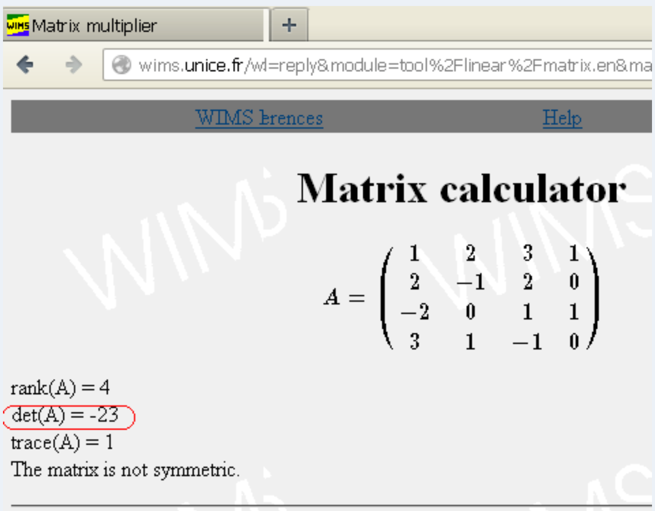
$$= \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 4 & 7 & 3\\ 0 & -5 & -10 & -3\end{matrix}\right| = (1)(-1)^{1+1}.\left|\begin{matrix}-5 & -4 & -2\\ 4 & 7 & 3\\ -5 & -10 & -3\end{matrix}\right|\begin{matrix}-5 & -4\\ 4 & 7\\ -5 & -10\end{matrix} =$$

$$= [(-5).7.(-3) + (-4).3.(-5) + (-2).(4).(-10)] - [(-2).7.(-5) + (-5).3.(-10) + (-4).(4).(-3)]$$

$$= (105 + 60 + 80) - (70 + 150 + 48) = 245 - 268 = -23 .$$

Skúška:

Zadajte hodnoty determinantu do kalkulačky na http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi- pozri Obr. 6.4. hodnota determinantu.



Obrázok 6.4: Skúška výpočtu determinantu prostredníctvom interaktívnej kalkulačky

Otázka 4: Akú operáciu sme pri výpočte mohli ešte urobiť, aby sme počítali pri Sarrusovom pravidle s menšími číslami?

Odpoveď: Napríklad odčítať od tretieho riadku prvý. Získali by sme jednu nulu.

B) Výpočet determinantov vyššieho stupňa úpravou na trojuholníkový tvar

Veľmi šikovným spôsob počítania hodnoty determinantu, najmä pre tých, čo zvládli elementárne riadkové operácie, je upraviť determinant na trojuholníkový tvar. O výpočte hovorí nasledujúce veta:

Veta 6.9: Hodnota determinantu štvorcovej matice n-tého stupňa, upravená na trojuholníkový tvar, v ktorom každý z prvkov $a_{ii} \neq 0$ (kde $i = 1, 2, \ldots, n$) sa rovná súčinu prvkov hlavnej diagonály, t.j. det $\mathbf{A} = a_{11} . a_{22} . a_{33} . \ldots . a_{nn}$.

spôsobe využijeme Vety 6.1 – 6.7. Upravíme determinant pomocou Gaussovho algoritmu (GA) a elementárnych riadkových operácií (ERO). Postup prezentuje riešený príklad:

Príklad 6.12: Vypočítajte determinant úpravou na trojuholníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Riešenie:

Využijeme 1. krok GA rovnaký ako v príklade 6.5:

1. krok GA
- 1. R vynásobíme číslom (-2) a pripočítame k 2. R;
- 1. R vynásobíme číslom 2 a pripočítame k 3. R;
- 1. R vynásobíme číslom (-3) a pripočítame k 4. R, kedy sme ukončili 1. krok GA a vynulovali prvky v prvom stĺpci determinantu pod prvkom a_{11};

2. krok GA
- 2. R pripočítame k 3. R;
- 2. R vynásobíme číslom (-1) a pripočítame k 4. R;
- Vymeníme druhý a tretí riadok v determinante, čím sme dostali vodiaci prvok 2. kroku GA $a_{22} = -1$. Pozor pri výmene riadkov podľa Vety 6. 3 determinant zmení znamienko;
- 2. R vynásobíme číslom (-5) a pripočítame k 3. R, kedy sme ukončili 2. krok GA a vynulovali prvky v druhom stĺpci determinantu pod prvkom a_{22};

3. krok GA
- aby sa prvok $a_{33} = -1$ vynásobíme 4. R číslom (-3) a pripočítame ho k 3. R;
- 3. R vynásobíme číslom (-6) a pripočítame ho k 3. R, tým sme ukončili 3. krok GA a máme determinant upravený na trojuholníkový tvar;
- Hodnotu determinantu vypočítame podľa V. 6.9 ako súčin diagonálnych prvkov:
  det $\mathbf{A} = a_{11} . a_{22} . a_{33} . a_{44}$.

Príklad 6.12: pokračovanie riešenia

$$\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}(-2)\\ +\\ .\\ .\end{matrix} = \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}(2)\\ .\\ +\\ .\end{matrix} = \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 4 & 7 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}(-3)\\ .\\ .\\ +\end{matrix} =$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 4 & 7 & 3\\ 0 & -5 & -10 & -3\end{matrix}\right|\begin{matrix}(-3)\\ .\\ .\\ +\end{matrix} = \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 4 & 7 & 3\\ 0 & -5 & -10 & -3\end{matrix}\right|\begin{matrix}.\\ (1)\\ +\\ .\end{matrix} = \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -10 & -3\end{matrix}\right|\begin{matrix}.\\ (-1)\\ .\\ +\end{matrix} =$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -6 & -1\end{matrix}\right| = -\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -6 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}.\\ (-5)\\ +\\ .\end{matrix} = -\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -19 & -7\\ 0 & 0 & -6 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}.\\ .\\ +\\ (-3)\end{matrix} =$$

$$-\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -6 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}.\\ .\\ (-6)\\ +\end{matrix} = -\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 23\end{matrix}\right| = -(1.(-1)(-1).23) = -23$$

Samozrejme dostali sme rovnaký výsledok ako pri výpočte predchádzajúcim spôsobom (pozri obr. 6.4).

Príklad 6.13: Vypočítajte determinant rozkladom podľa určitého riadku:

$$\left|\begin{matrix}2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 5 & -7 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{matrix}\right|.$$

Riešenie: Zvolíme si rozklad podľa prvého riadku, lebo je tam jedna nula:

$$|A| = \left|\begin{matrix}2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 5 & -7 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 1 & -1\end{matrix}\right| = 2.(-1)^{1+1}.\left|\begin{matrix}5 & -7 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{matrix}\right| + 1.(-1)^{1+2}.\left|\begin{matrix}3 & -7 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -1\end{matrix}\right| + 2.(-1)^{1+4}.\left|\begin{matrix}3 & 5 & -7\\ 4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}\right| =$$

$$= 2.(-32) + 14 + 66 = 16.$$

Príklad 6.14: Vypočítajte determinant D a nájdite všetky *x*, pre ktoré platí D(*x*) > 0:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Riešenie:

Rozvinieme si determinant podľa piateho riadku a následne podľa prvého stĺpca:

$$D = 1.(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & x \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} + x.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} - x.x(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 1 - x^4 > 0$$

$1 - x^4 = (1 - x^2)\,(1 + x^2) > 0$, $(1 + x^2) > 0$ pre všetky x

$(1 - x)\,(1 + x) > 0 \Longrightarrow x > -1 \cap x < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$

$+\,+ \cup -\,- \quad 1 - x < 0 \cap 1 + x < 0 \Longrightarrow x > 1 \cap x < -1 \Longrightarrow \emptyset$ množina

$\Longrightarrow D > 0$ pre $-1 < x < 1$

PDDA

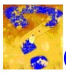
Úloha 6: Vypočítajte determinant a nájdite všetky *x*, pre ktoré platí D(*x*) = 0

$$D = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Úloha 7: Vypočítajte determinant D z úlohy 6 a nájdite všetky *x*, pre ktoré platí D(*x*) ≤ 0.

6.3 Inverzná matica

Ako je známe, každému číslu z množiny R, resp. K rôznemu od nuly existuje také číslo reálne, resp. komplexné, že ich súčin dáva číslo jedna. Je na mieste položiť si otázku:



Otázka 5: Existuje ku každej matici **A** taká matica **X**, že platí **A.X** = **X.A** = **E**?
Po naštudovaní teórie si na ňu odpoviete.

Definícia 6.5 – Regulárna a singulárna matica

Štvorcovú maticu **A** typu $n \times n$ nazývame regulárnou, ak determinant matice je nenulový, t.j.| **A** | ≠ 0, čo je ekvivalentné výroku, že hodnoť matice **A** je *n*. Štvorcovú maticu **A** nazývame singulárnou, ak | **A** | = 0.

Príklad 6.15: Zistite za akej podmienky matica je regulárna, ak *a, b, c, d* sú reálne čísla a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}.$$

Riešenie:
Vyjdeme z Definície 6.5 – ak je matica regulárna | **A** | ≠ 0. Upravíme maticu pomocou ERO na tvar odpovedajúci ukončenému 1. kroku GA:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} . \sim \begin{pmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & ab & a & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} . \sim \begin{pmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & ab & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & ab & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = (-1).(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & c & 1 \\ ab & a & 0 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & c \\ ab & a \\ 0 & -1 \end{matrix} = -\left\{ [-ad + 0 - ab] - [abcd] \right\} \neq 0$$

$$a(d-b) \neq abcd \quad \Longrightarrow \quad (d-b) \neq bcd \, .$$

Definícia 6.6 - Inverzná matica

Nech **A** je štvorcová matica. Maticu **X**, pre ktorú platí: **A.X** = **X.A** = **E** nazývame **inverznou maticou k matici** **A** a označujeme ju **X** = $\mathbf{A}^{-1}$**.** Takže platí:

$$\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{E} \qquad (6.14)$$

Stretneme sa s dvomi spôsobmi výpočtov inverznej matice pomocou determinantov lebo jednotkovej matice s GA. K prvej z nich je nutné poznať pojem adjungovaná matica, ktorý objasňuje definícia 6.7.

Definícia 6.7 - Adjungovaná matica

Nech **A** je štvorcová matica n-tého stupňa. Maticu **D** nazývame **adjungovanou** maticou k matici **A**

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & . & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & . & D_{n2} \\ . & . & . & . \\ D_{1n} & D_{2n} & . & D_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (6.15)$$

kde $D_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ pre $i, j = 1, 2, .. n$ sa nazývame algebrické doplnky k prvku a_{ij} matice **A**.

Poznámka: Pozor na usporiadanie algebrických doplnkov!!! Doplnky prvku i-teho riadku píšeme do stĺpca!

Príklad 6.16: Nájdite adjungovanú maticu k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & -2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Vyjdeme z definície 6.7. Vypočítajme si najprv všetky algebrické doplnky D_{ij} k matici:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & -2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, pre ktoré platí $D_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -21 + 16 = -5 \qquad D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -(12-8) = -4$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(-12+12) = 0 \qquad D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -32 + 42 = 10 \qquad D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -(24-24) = 0$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = -21 + +16 = -5 \qquad D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 7 = -1$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+4) = 2 \Longrightarrow \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Poznámka:

1. Pozor na usporiadanie algebrických doplnkov - nastáva zámena poradia indexov!
2. Pre praktické počítanie je výpočet inverznej matice $\mathbf{A}^{-1}$ cez determinanty vhodné len pre matice typu najviac 3×3. Pri vyšších stupňoch využívame IKT.

Definícia 6.8 - Výpočet inverznej matice

Nech **A** je regulárna štvorcová matica, potom inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ k matici **A** je určená predpisom:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \operatorname{adj} \mathbf{A}, \tag{6.16}$$

kde $(D_{ij})_{nxn}$ sú prvky **adjungovanej** matice k matici **A** určené predpisom $D_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$, ktoré nazývame algebrické doplnky. Takže inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ možno vyjadriť:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{23} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}, \text{ resp. } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{23}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Príklad 6.17: Riešte rovnicu pre neznámu maticu **X** a urobte skúšku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - 2\mathbf{X}$$

Riešenie:

Rovnica je maticová rovnica. Postupujeme rovnako – členy s neznámou maticou dáme na jednu stranu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} + 2\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vyberieme **X** pred zátvorku, pričom musíme dodržať pozíciu matice X na pravej strane a zapíšeme jednotkovú maticu!

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathbf{E}\right] \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$ čo zapíšeme: $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B}$.

Príklad 6.17: pokračovanie riešenia

kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Teraz určíme $\mathbf{A}^{-1}$ Gaussovým algoritmom**:**

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Urobíme si priebežnú skúšku: Ak sme správne počítali, musí platiť $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{E}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skúšku správnosti urobíme opäť tým, že dosadíme do pôvodnej rovnice:

$$\text{ĽS:} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 25 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{PS:} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - 2\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -6 \\ 18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}.$$

PDDA

Sú dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & -2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Úloha 8: Rozhodnite: a) či k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzná matica. Ak áno určite ju.

Úloha 9: Pre maticu $\mathbf{A}$ rozhodnite o platnosti výrokov a) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, b) $\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T$, c) $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}$.

Úloha 10: Riešte rovnicu pre neznámu maticu **X** a urobte skúšku:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \mathbf{X} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{X}.$$

Kontrolné otázky

1. Vyslovte podmienku pre existenciu inverznej matice a ako ju možno vypočítať.
2. Definujte adjungovanú maticu a jej súvis s inverznou maticou.
3. Kde pracujeme s algebrickými doplnkami D_{ij} k matici a ako sú definované?

Kapitola 7
SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

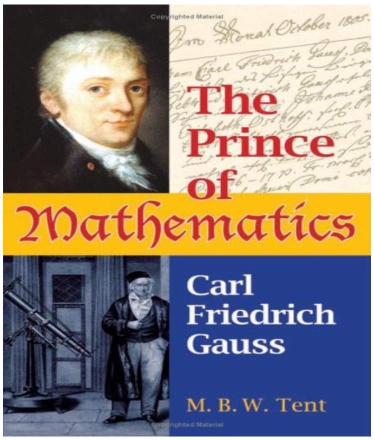
Učebné ciele:

- Oboznámiť sa so základnými pojmami súvisiacimi so sústavou lineárnych rovníc;
- Naučiť sa riešiť systém lineárnych rovníc viacerými spôsobmi: s využitím Cramerovej vety, pomocou inverznej matice a Gaussovým algoritmom postupných elementárnych úprav na základe Frobeniovej vety;
- Vedieť pracovať s interaktívnymi www stránkami na výpočet sústavy rovníc.

Kľúčové slová: systém lineárnych rovníc (SLR), matica systému, matica rozšírená, riešenie SLR, Cramerova veta, riešenie systému, triviálne riešenie, inverzná matica, Frobeniova veta.

Požadované vedomosti: znalosť úpravy rovníc, riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc pojmy a operácie z predchádzajúcich kapitol.

Motivácia



Obrázok 7.1: Carl Fridrich Gauss *
(1777 – 1855)

Sotva by sme našli v histórii matematiky významnejšie meno. V našom povedomí sa vybavuje jeho krivka znázorňujúca rozloženie pravdepodobnosti, s ktorou nastane určitý jav. Nám však odkázal oveľa viac:

„Nerátajte, ale rozmýšľajte.“

O jeho talente svedčí príhoda z ľudovej školy:

Učiteľ chcel žiakov na dlhšie zabaviť, a tak im dal zrátať čísla od jednej do sto. Všetci začali počítať, len deväťročný syn miestneho murára sa zamyslel. Všimol si, že súčet dvojice čísel od začiatku a od konca je vždy rovnaký (1+100 =101, 2+99 =101). Keďže tieto súčty sa opakujú 50-krát, namiesto úmorného výpočtu stačilo vynásobiť 101 x 50 = 5050 a výsledok bol na svete.

V tejto časti si ukážeme, ako rozhodneme, či systém rovníc má riešenie, prípadne koľko má riešení. Na základe znalostí riešenia sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych, s ktorými ste sa stretli už na strednej škole, vieme, že môže nastať jeden z troch prípadov:

- systém má práve jedno riešenie;
- systém má nekonečne veľa riešení;
- systém nemá riešenie.

Tieto skutočnosti možno zovšeobecniť aj na systém m-rovníc o n-neznámych. Úlohou bude rozhodnúť, či systém má alebo nemá riešenie. Ak áno, tak ďalšou úlohou bude nájsť všetky riešenia systému. Postupne preberieme štyri možné spôsoby riešenia SLAR, a to pomocou:

1. matíc,
2. determinantov, ak $m = n$,
3. inverznej matice, ak $m = n$ a det $\mathbf{A} \neq 0$,
4. informačných systémov.

---

* zdroj obrázka: http://www.amazon.com/Prince-Mathematics-Carl-Friedrich-Gauss/dp/1568814550#reader_1568814550

7.1 Sústava lineárnych rovníc – definícia, pojmy

Je daná sústava *m* lineárnych rovníc o *n* neznámych ($x_1, x_2, ..., x_n$), kde a_{ij}, $i = 1, 2, ...m$, $j = 1, 2, ...n$, sú koeficienty pri neznámych a b_i, kde $i = 1, 2, ...m$ sú koeficienty na pravej strane sústavy rovníc (7.1):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ .... \ + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ .... \qquad + a_{2n}x_n &= b_2 \\ .. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ .... \qquad + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Zadefinujme si pojmy maticový zápis SLR, matica systému a matica rozšírená:

Definícia 7.1 – Maticový zápis SLR
Systém *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych, určenými rovnicami (7.1) možno zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{A.X = B}, \qquad (7.2)$$

kde maticu **A** typu $m \times n$ nazývame maticou systému, ktorej prvkami sú koeficienty a_{ij}, $i = 1, 2, ...m$, $j = 1, 2, ...n$) sú reálne čísla pre pri neznámych **X,** pri dodržanom poradí a **B** je jednostĺpcová matica typu $m \times 1$, vytvorená z koeficientov b_i (pre $i = 1, 2, ...m$) na pravej strane sústavy, ktoré nazývame absolútne členy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definícia 7.2 – Rozšírená matica systému
Maticu **C,** ktorá vznikne pridaním stĺpca pravých strán k matici systému **A,** nazývame rozšírenou maticou systému lineárnych rovníc, určenými rovnicami (7.1).

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & b_j \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (7.3)$$

Príklad 7.1: Napíšte maticu systému **A** a maticu rozšírenú **B** systému lineárnych rovníc vo všeobecnom tvare, ak $m = n = 4$.

Riešenie: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right).$

Poznámka: Pre systém m-lineárnych rovníc o n-neznámych je matica systému $\mathbf{A}$ matica typu $m \times n$ a matica vytvorená z neznámych $\mathbf{X}$ typu $m \times 1$, t.j. m-riadková jednostĺpcová matica, ako aj matica $\mathbf{B}$, vytvorená z koeficientov na pravých stranách rovníc.

Definícia 7.3 – Homogénny systém rovníc

Systém m-lineárnych rovníc o n-neznámych, určenými rovnicami (7.1) nazývame homogénnym systémom, ak matica $\mathbf{B}$, určená stĺpcom absolútnych členov sústavy (t.j. koeficienty na pravých stranách) je nulová matica, t.j. $b_i = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots \qquad + a_{2n}x_n &= 0 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots \qquad + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Poznámka: Pre homogénny systém m-lineárnych rovníc o n-neznámych sa rovná matica systému matici rozšírenej.

Definícia 7.4 – Riešenie systému, matica systému

Riešením (koreňom) systému m-lineárnych rovníc o n-neznámych, určenými rovnicami (7.1) resp. v maticovom zápise v tvare (7.2), rozumieme usporiadanú n-ticu čísiel, čiže jednoriadkovú $\boldsymbol{R} = (r_1, r_2, \ldots r_n)$, (resp. jednostĺpcovú) maticu, ktorá po dosadení do ľavej strany rovníc systému (7.1) dáva rovnosť Ak riešením je nulová matica, t.j. $\boldsymbol{R} = (0, 0, ..0)$ hovoríme, že sústava má **triviálne** riešenie.

Príklad 7.2: Pre danú sústavu lineárnych rovníc napíšte maticu systému $\mathbf{A}$ a maticu rozšírenú $\mathbf{B}$ systému lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\
2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -3 \\
3x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 1
\end{aligned}$$

Riešenie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

PDDA

Úloha 1: Pre daný systém rovníc z príkladu 7.2 určite hodnosť matice systému a hodnosť matice rozšírenej.

7.2 Riešenie sústavy *n*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych

Otázka 1: Ako nájdeme riešenie systému rovníc (7.1) a koľko má systém riešení? Na túto otázku budeme vedieť odpovedať po prebratí nasledovných dvoch podkapitol.

Najprv si ukážeme riešenie systému rovníc, ktorých matica systému **A** je štvorcová matica typu $n \times n$. Pre takúto sústavu môžeme použiť tri spôsoby, ktoré si postupne ukážeme.

A) Riešenie sústavy $n \times n$ pomocou determinantov s využitím Cramerovej vety

S riešením dvoch rovníc o dvoch neznámych, určených rovnicami (6.1), sme si už hovorili pri prezentovaní zavedenia pojmu determinant. Jednalo sa o rovnice

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Pre riešenie sme si odvodili vzťahy (6.2) a (6.3)

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

K týmto vzťahom možno dospieť s využitím determinantov:

$$\{x_1, x_2\} \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D},$$

kde si definujeme determinant matice sústavy D a determinant D_1 resp. D_2, v ktorých prvý/resp. druhý stĺpec v determinante sústavy nahradíme stĺpcom pravých strán: Tento poznatok pre systém s vyšším počtom neznámych zovšeobecňuje Cramerova veta.

Veta 7.1 – Cramerova veta

Systém n-lineárnych rovníc o n-neznámych, určený rovnicami

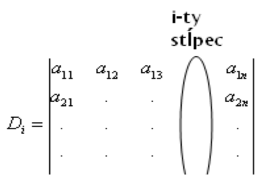
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \qquad (7.5)$$

ktorej determinant regulárnej matice sústavy $D \neq 0$, má práve jedno riešenie $R\{x_1, x_2, .., x_n\}$

$$R = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}, \text{ kde}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & b_2 & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & b_n. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D_i, pre $i = 1, 2, \ldots n$, je determinant matice, ktorý vznikne z matice sústavy nahradením i-teho stĺpca stĺpcom pravých strán sústavy (obr. 7.2).



Obrázok 7.2: K objasneniu pojmu D_i

Veta 7.2 Sústava *n*-homogénnych lineárnych rovníc o *n*-neznámych má jediné riešenie – totiž nulové (triviálne riešenie) práve vtedy, ak determinant sústavy je rôzny od nuly.

Príklad 7.3: Riešte systém rovníc:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Riešenie:

Ukážeme si výpočet pomocou Cramerovej vety. Vypočítame determinant matice sústavy D a presvedčíme sa, či je rôzny od nuly.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{D} = \det \mathrm{A} = \left| \begin{matrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= 2 + (-6) + (-12) - [(-8) + 2 - 9] = -16 + 15 = -1 \neq 0\,.$$

Vypočítame si D_1 až D_3 v zmysle vety 7.1:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 4 - (12 - 3) = -4 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 36 - (-8 - 6) = 52$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 - (-2 - 27) = 41$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-1} = 4, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{52}{-1} = -52, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{41}{-1} = -41.$$

Pre čitateľnosť zapíšeme riešenie v tvare usporiadanej trojici R={4, −52, −41}.

Skúška správnosti:

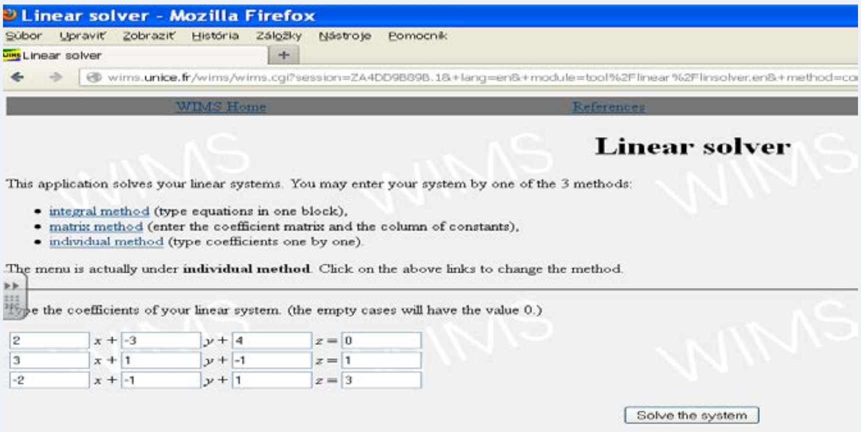
Opäť môžeme si zvoliť dva spôsoby: 1. dosadením, alebo 2. skúškou cez IKT na http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=8494D0A307.4&+lang=en&+module=tool%2Flinear%2Flinsolver.en&+method=coef&+cmd=resume

1.spôsob: (Vhodný spôsob skúšky, ktorý použite na skúške!)

ĽS1: 2.4 – 3(-52) + 4.(-41) = 8 +156 -164 = 0 ⇒ ĽS1 = PS1
ĽS2: 3.4 + (-52) - (-41) = 12 – 52 + 41= 1 ⇒ ĽS2 = PS2
ĽS3: -2 .4 - (-52) - 41 = -8 + 52 - 41 =3 ⇒ ĽS3 = PS3

2. spôsob: Otvoríme si niektorú z interaktívnych stránok na internete a urobíme si skúšku. Pre daný príklad výsledky zo stránky http://wims.unice.fr prezentujú obrázky 7.3 a 7.4.

Príklad 7.3: pokračovanie príkladu



Obrázok 7.3: Zadanie systému rovníc do systému na http://wims.unice.fr

Obrázok 7.4: Riešenie systému rovníc zo systému na http://wims.unice.fr

Otázka 2: Je možné riešiť pomocou Cramerovej vety (t.j. pomocou determinantov) zadanú sústavu rovníc?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Odpoveď: Nie, lebo matica systému nie je štvorcová matica a teda nie je definovaný pre ňu determinant sústavy D.

Otázka 3: Je sústava homogénnym systémom rovníc?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -3 \\ 3x_1 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Odpoveď: Nie, pretože koeficienty na pravej strane matice nie sú nulové.

Poznámka!!!: Ak zistíme, že matica systému je singulárna, t.j. determinant sústavy je rovný nule, na výpočet použijeme Gaussov algoritmus a Frobeniovu vetu, s ktorou sa oboznámime neskôr.

Príklad 7.4: Riešte sústavu pomocou determinantov:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Riešenie.
Použijeme Cramerovu vetu 7.1. Najprv zistíme, či matica systému je regulárna:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2.3.2 + (-1).(-1).3 + 4.1.1) - (4.3.3 + 2.(-1).1 + (-1).1.2) =$$

$$= 12 + 3 + 4 - (36 - 2 - 2) = -13 \neq 0 \Rightarrow \textbf{systém má jediné riešenie}$$

Vypočítame D_1 až D_3:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \; D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -26$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{-13} = -1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-13} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-26}{-13} = 2\,.$$

Hľadané riešenie je $R = \{-1, 0, 2\}$.

Skúška:

ĽS: $2.(-1).0 + 4.2 = 6 \Rightarrow$ ĽS = PS
ĽS: $(-1) + 3.0 - 2 = -3 \Rightarrow$ ĽS = PS
ĽS: $3(-1) + 0 + 2.2 = 1 \Rightarrow$ ĽS = PS .

B) Riešenie sústavy $n \times n$ pomocou determinantov s využitím inverznej matice

Nech je daná sústava rovníc (7.5) s rovnakým počtom neznámych ako rovníc:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{7.5}$$

V zmysle definície 7.1 vieme, že sústavu (7.5) môžeme vyjadriť v maticovom zápise pomocou matíc:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix},$$

kde sme maticu *n*-tice neznámych a absolútnych členov sústavy vyjadrili ako *n*-rozmerné jednostĺpcové matice.

Pri riešení budeme postupovať v nasledovných krokoch:

1. Zapíšeme si systém rovníc v maticovom tvare (vzťah 7.2), t.j. $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{C}$;

2. Vyjadríme si hľadanú maticu v tvare (vzťah 7.6) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}$;

3. Určíme si inverznú maticu postupom:

a) napíšeme si definíciu inverznej matice (vzťah 6.16) $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\operatorname{adj}\mathbf{A}$;

b) vypočítame det $\mathbf{A}$ (ak je $\neq 0 \rightarrow$ existuje inverzná matica a pokračujeme);

c) vypočítame si algebrické doplnky matice $\mathbf{A}$ potrebné pre adjungovanú maticu;

d) v správnom poradí zoradíme prvky adjungovanej matice;

e) adjungovanú maticu vynásobíme číslom 1/det $\mathbf{A}$;

f) urobíme skúšku správnosti, t.j. či platí $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$;

4. Určíme neznámu maticu $\mathbf{X}$ tak, že maticu $\mathbf{C}$ vynásobíme zľava maticou $\mathbf{A}^{-1}$;

5. Urobíme skúšku správnosti dosadením do zadaného systému rovníc.

Postup si ukážeme na príkladoch:

Príklad 7.5: Riešte pomocou inverznej matice systém rovníc:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad - x_3 &= 1 \\ x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Presvedčte sa o správnosti riešenia.

Riešenie:

Budeme postupovať podľa vyššie uvedených krokov 1 – 5.

Krok 1: $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{C}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Krok 2: Vyjadríme si neznámu maticu $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}$

Krok 3: Určíme si inverznú maticu:

3a) $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\operatorname{adj}\mathbf{A}$

3b) $$\mathbf{A} = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -1-(-2) = 1 \neq 0$$

3c) vypočítame si algebrické doplnky, pre ktoré platí $D_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ pre $i, j = 1, 2, 3$

Príklad 7.5: pokračovanie riešenia

$D_{11}= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.[0-(-1)] = 1$ $\qquad$ $D_{21}= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)[0-(-1)] = -1$

$D_{12}= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(3-0) = -3$ $\qquad$ $D_{22}= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$D_{13}= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad$ $D_{23}= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2-0) = -2$

$D_{33}= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $D_{31}= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

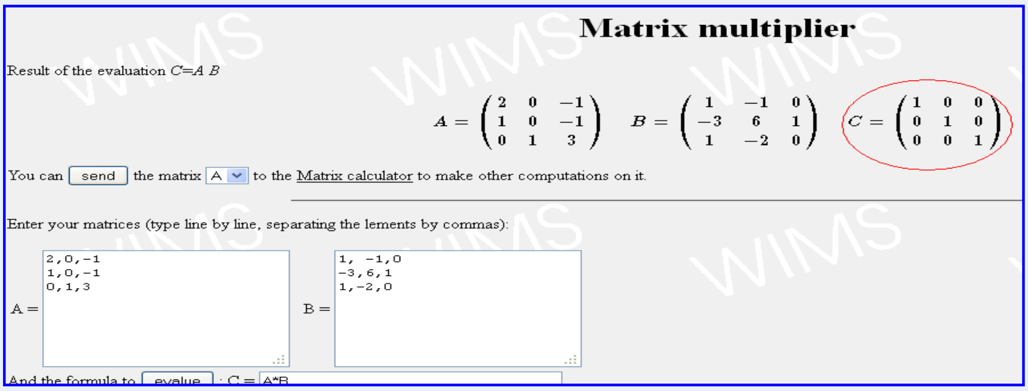
$D_{32}= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -[-2-(-1)] = 1$

3d) v správnom poradí zoradíme prvky adjungovanej matice pomocou vzťahu (6.15)

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{213} & D_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3e) adjungovanú maticu vynásobíme číslom 1/det **A** $\quad \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$

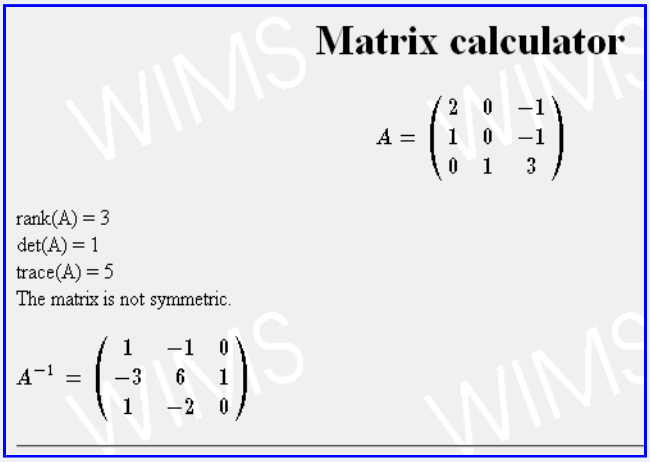
3f) urobíme skúšku správnosti, t.j. či platí $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ (buď samostatne výpočtom v prípade skúšky, alebo s využitím IKT, ako prezentujú obr. 7.5 a obr. 7.6);



Obrázok 7.5: Súčin matíc na kalkulačke WIMS http://wims.unice.fr

Taký istý výsledok dostaneme, keď si dáme vypočítať priamo inverznú maticu (obr. 7.6).

Príklad 7.5: pokračovanie riešenia



Obrázok 7.6: WIMS výpočet inverznej matice
http://wims.unice

Krok 4: Určíme neznámu maticu **X** tak, že maticu **C** vynásobíme zľava maticou $\mathbf{A}^{-1}$, t.j.

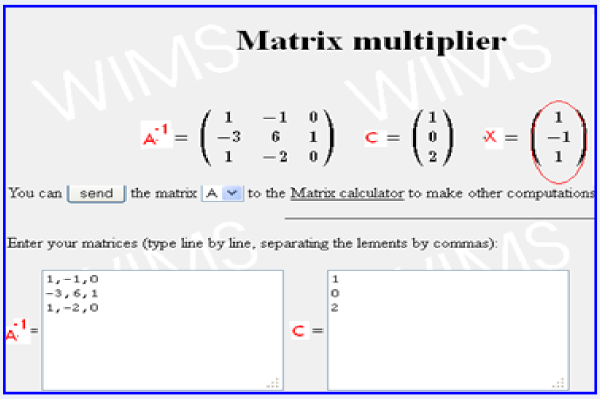
$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ Hľadané riešenie R: $\{ x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1 \}$.

Krok 5: 1. Spôsob : Urobíme skúšku správnosti dosadením do zadaného systému rovníc

$2x_1 + \quad - x_3 = 1$	ĽS: 2.1-1 = 1	$\rightarrow$ platí	ĽS = PS
$x_1 \quad - x_3 = 0$	ĽS: 1-1 = 0	$\rightarrow$ platí	ĽS = PS
$x_2 + 3x_3 = 2$	ĽS: -1 +3.1 = 2	$\rightarrow$ platí	ĽS = PS

2. spôsob – cez IKT:



Obrázok 7.7: WIMS výpočet súčinu matíc

http://wims.unice

Poznámka: Riešenie systémov lineárnych rovníc pomocou inverznej matice sa najmä využíva, keď riešime viacej systémov, ktorých matica systému je rovnaká a mení sa len matica rozšírená.

Príklad 7.6: Zistite, či existuje inverzná matica k matici daného systému rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11\,. \end{aligned}$$

Ak áno, riešte daný systém rovníc pomocou inverznej matice.

Riešenie: Matica systému je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

Na základe definície 6.8 budeme počítať inverznú maticu zo vzťahu

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\operatorname{adj}\mathbf{A} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{23}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}$$

Vypočítajme si najprv determinant k matici sústavy a následne všetky algebrické doplnky D_{ij} k matici, pre ktoré platí $D_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\text{-}8\text{-}8\text{-}(4+4+4) = -27.$$

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.(1-4) = -3 \qquad D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(2+4)) = -6$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2+4) = -6 \qquad D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4-2 = -6 \qquad D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3 \qquad D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-2 = -6$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6$$

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Príklad 7.6 pokračovanie riešenia Nakoľko existuje inverzná matica riešenie vyjadríme

v tvare (7.6)

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 27 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad R = \{3, -2, 1\}$$

Skúška správnosti riešenia:

ĽS 1: $1.3 + 2.(-2) + 2.1 = 1 \quad \Rightarrow$ ĽS 1 = PS 1

ĽS 2: $2.3 + (-2) - 2.1 = 2 \quad \Rightarrow$ ĽS 2 = PS 2

ĽS 3: $2.3 - 2.(-2) + 1 = 11 \quad \Rightarrow$ ĽS 3 = PS 3

Kontrolné otázky

1. Čo rozumieme pod pojmom maticový zápis sústavy *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych?
2. Kedy môžeme systém *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych riešiť pomocou inverznej matice?
3. Ako zapíšeme riešenie *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych pomocou inverznej matice vo všeobecnom tvare? Definujte jednotlivé prvky zápisu.
4. Kedy zvolíme postup riešenia systému lineárnych rovníc pomocou determinantov?
5. Vyslovte jednotlivé body postupu pri riešení systému rovníc pomocou inverznej matice.

PDDA

Úloha 2: Riešte systém rovníc pomocou Cramerovej vety:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Úloha 3: Riešte systém rovníc pomocou inverznej matici:

$$\begin{aligned} -6x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= -11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 4: Rozhodnite, či daný systém má riešenie. Ak áno, určite všetky riešenia. Presvedčte sa o správnosti vášho riešenia:

$$\begin{array}{lllll} 6x_1 & +2x_2 & -x_3 & +7x_4 & =0 \\ 4x_1 & 2x_2 & -3x_3 & +5x_4 & =-4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & & +x_3 & & =5 \end{array}$$

7.3 Riešenie sústavy *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych - Frobeniova veta

Vyjdeme zo všeobecného systému *m*-rovníc o *n*-neznámych, určeného rovnicami (7.1)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Úlohou bude teda rozhodnúť, či systém má alebo nemá riešenie. Ak áno, tak nájsť všetky riešenia systému. Ukážeme si riešenie pomocou Gaussovho algoritmu postupných úprav, kde využívame elementárne riadkové operácie s maticou rozšíreného systému na úpravu tejto matice na trojuholníkový tvar. K tomu si potrebujeme zopakovať Definíciu 5.5 – Hodnosť matice, ktorá definuje hodnosť ako číslo, udávajúce maximálny počet lineárne nezávislých riadkov alebo stĺpcov v matici. Takže hodnosť matice upravenej na trojuholníkový tvar je počet nenulových diagonálnych prvkov v matici.

Podmienku riešiteľnosti systému *m*-rovníc o *n*-neznámych (7.1) vyjadruje nasledovná veta:

Veta 7.3 - Frobeniova veta:

Nech **A** je matica systému a **B** je rozšírená matica systému lineárnych rovníc (7.1). Potom tento systém:

1. má riešenie, práve keď hodnosť matice systému sa rovná hodnosti rozšírenej matice, t.j. platí $h_{\mathbf{A}} = h_{\mathbf{B}}$.

   a) Ak $h_{\mathbf{A}} = h_{\mathbf{B}} = n$ počtu neznámych, systém má **práve jedno** riešenie;

   b) Ak $h_{\mathbf{A}} = h_{\mathbf{B}} < n$ počtu neznámych systém má **nekonečne veľa riešení** a počet n-h neznámych volíme za parameter.

2. nemá riešenie, ak $h_{\mathbf{A}} \neq h_{\mathbf{B}}$, t.j. ak hodnosť matice systému (7.2) sa nerovná hodnosti rozšírenej matice (7.3).

Praktickú aplikáciu použitia Frobeniovej vety prezentujú riešené príklady:

Príklad 7.7: Pre danú sústavu vyberte pravdivý výrok/y:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -3 \\ 3x_1 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Sústava: a) nemá riešenie
b) má nekonečne veľa riešení
c) má jedno riešenie
d) má triviálne riešenie

Riešenie:

Napíšme maticu rozšíreného systému s oddelením matice systému zvislou čiarou. Určíme súčasne hodnosť matice a hodnosť rozšírenej matice pomocou Gaussovho algoritmu:

1. krok GA $a_{11} = 1$. Prvý riadok vynásobíme postupne (-2), resp. (-1), resp. (-3) a pripočítame k druhému, tretiemu a štvrtému riadku:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \end{array}\right) \approx$$

Príklad 7.7: pokračovanie riešenia

2. krok GA - k tretiemu a štvrtému riadku pripočítame (-1) násobok druhého riadku

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow h_A = 2 \text{ a } \quad h_B = 2.$$

Po vynechaní nulových riadkov vidíme, že hodnosť $h_A = h_B = 2 < 4$ - systém má nekonečne veľa riešení. **Výrok b) je pravdivý** – systém rovníc má nekonečne veľa riešení

Príklad 7.8: Riešte systém rovníc:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Presvedčte sa o správnosti Vášho riešenia.

Riešenie:

Napíšeme rozšírenú maticu systému:

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow h_A = 3 \ a \quad h_B = 3 = n \ \Rightarrow$$ sústava má práve jedno riešenie.

Na základe Frobeniovej vety 7.3, možno deklarovať, že systém má práve jedno riešenie, ktoré určíme nasledovným postupom:

Tretí riadok matice, vzhľadom k tomu, že a_{33} je koeficient pri neznámej x_3 možno zapísať:

$$2x_3 = 4 \quad \Rightarrow \; x_3 = 2$$

Druhý riadok zapíšeme:

$$-x_2 + x_3 = 3 \quad \Rightarrow \; x_2 = x_3 - 3 = -1$$

Prvý riadok zapíšeme:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \quad \Rightarrow \; x_1 &= -2 - x_2 + x_3 \\ x_1 &= -2 + 1 + 2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Riešenie: $R = \{1, -1, 2\}$,

Skúška správnosti: Postupne dosadíme do jednotlivých rovníc:

ĽS1: $2(1) - (-1) + 2 = 5 \quad \Rightarrow$ ĽS1 = PS1

ĽS2: $1 + (-1) - 2 = -2 \quad \Rightarrow$ ĽS2 = PS2

ĽS3: $-1 + 2 = 1 \quad \Rightarrow$ ĽS3 = PS3.

Príklad 7.9: Riešte systém rovníc a presvedčte sa o správnosti riešenia:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 10 \\ 7x_1 - x_2 + 7x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Riešenie:

Napíšme rozšírenú maticu systému **B**. Súčasne určíme hodnosť ako matice systému **A**, tak matice rozšírenej:

0. krok GA – vytvoríme vodiaci prvok prvého kroku a_{11}= 1: od druhého riadku odčítame prvý riadok a vymeníme druhý za prvý riadok:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 10 \\ 7 & -1 & 7 & 15 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & -5 & 2 \\ 7 & -1 & 7 & 15 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 7 & -1 & 7 & 15 \end{array}\right) \approx$$

1. krok GA – vynulujeme všetky prvky pod a_{11} – prvý riadok vynásobíme postupne (-2) a (-7) a pripočítame k druhému a tretiemu riadku:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & -19 & 14 & 4 \\ 0 & -57 & 42 & 1 \end{array}\right) \approx$$

2. krok GA – Druhý riadok vynásobíme (-3) a pripočítame k tretiemu riadku:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & -19 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right) \Rightarrow h_A = 2 \ \ a \ \ \ h_B = 3 \ .$$

Nakoľko hodnosť matice sa nerovná hodnosti rozšírenej matice systému ($2 \neq 3$) $\Rightarrow$ systém nemá riešenie.

Príklad 7.10: Riešte systém rovníc, urobte skúšku správnosti a určite, ktoré výroky sú správne (doplňte, ak bude treba):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -3 \\ 3x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Sústava: a) nemá riešenie
b) má nekonečne veľa riešení
c) má jedno riešenie
d) má triviálne riešenie
e) má nekonečne veľa riešení pre parametre ....
f) pre parametre $x_3 = x_4 = 1$ má riešenie $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Riešenie:

Napíšeme rozšírenú maticu a určíme hodnoť matice systému a rozšírenej matice:

1. krok GA – a_{11} =1, vynulujeme všetky prvky pod $a_{11;}$ prvým riadok vynásobíme postupne (-2), (-1) a (-3) a pripočítame k druhému, tretiemu a štvrtému riadku, resp.

Príklad 7.10: pokračovanie riešenia

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \end{array}\right) \approx$$

2. krok GA – prvé dva riadky opíšeme, druhý riadok vynásobíme (-1) a pripočítame k tretiemu a štvrtému:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow h_A = h_B = 2 < n = 4$$

Systém má nekonečne veľa riešení, $(n - h) = 4 - 2 = 2$ –neznáme volíme za parameter. Zvolíme si premennú $x_4 = t$ a $x_3 = u$. Z posledného riadku matice vyplýva, že platí:

$$-3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -5 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{-5 - 3x_3 - 4x_4}{-3} = \frac{5}{3} + u + \frac{4}{3}t$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \quad \Rightarrow x_1 = 2 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 - \left(\frac{5}{3} + u + \frac{4}{3}t\right) + u + t \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t$$

$$R = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, \frac{5}{3} + u + \frac{4}{3}t, u, t\right]$$

Pre $u = t = 1$ R: $\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}, \frac{5}{3} + 1 + \frac{4}{3}, 1, 1\right] = [0, 4, 1, 1]$

Skúška správnosti:

ĽS1: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t + \frac{5}{3} + u + \frac{4}{3}t - u - t = 2 \qquad \Rightarrow$ ĽS1 = PS1

ĽS2: $2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t\right) - \left(\frac{5}{3} + u + \frac{4}{3}t\right) + u + 2t = -1 \qquad \Rightarrow$ ĽS2 = PS2

ĽS3: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t - 2\left(\frac{5}{3} + u + \frac{4}{3}t\right) + 2u + 3t = -3 \qquad \Rightarrow$ ĽS3 = PS3

ĽS4: $3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t\right) + t = 1 \qquad \Rightarrow$ ĽS4 = PS4.

Odpoveď: Správne výroky sú: Sústava:

b) má nekonečne veľa riešení,

e) má nekonečne veľa riešení pre dva parametre: t, u

f) pre parametre $x_3 = x_4 = 1$ má riešenie $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Príklad 7.11: Zistite, či systém má netriviálne riešenie:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie:

Príklad 7.11: pokračovanie riešenia:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow h_A = h_B = 4 = n\,.$$

Vieme že, homogénny systém rovníc má vždy riešenie, keďže hodnosť rozšírenej matice sa rovná hodnosti matice systému. Zistili sme, že netriviálne riešenie nemá, keďže počet neznámych sa rovná hodnosti. Jediné riešenie systému je triviálne $R = \{0, 0, 0, 0\}$.

Príklad 7.12: Rozhodnite, či daný systém má riešenie. Ak áno, určite všetky riešenia. Presvedčte sa o správnosti riešenia.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Riešenie:

Napíšeme rozšírenú maticu systému:

0. krok GA – vytvoríme vodiaci prvok prvého kroku $a_{11} = 1$, tak, že vymeníme štvrtý riadok za prvý:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

1. krok GA – vynulujeme všetky prvky pod $a_{11;}$ prvý riadok vynásobíme postupne (-4), (-1) a (-6) a pripočítame k druhému, tretiemu a štvrtému riadku resp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{pmatrix}$$

2. krok GA – výmenou druhého a tretieho riadku vytvoríme vodiaci prvok $a_{22} = 1$ a vynulujeme všetky prvky pod $a_{22,}$ tým, že druhý riadok násobíme (-2) a pripočítame postupne k tretiemu a štvrtému riadku:

Príklad 7.12: pokračovanie riešenia

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -12 \end{array}\right) \approx$$

3. **krok GA –** k štvrtému riadku pripočítame (-1) násobok tretieho riadku:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \quad h_A = h_B = 4 = n\,.$$

Získali sme maticu trojuholníkového tvaru, hodnosť matice systému aj rozšírenej matice sa rovná počtu prvkov v hlavnej diagonále, t.j. systém má práve jedno riešenie:
Štvrtý riadok matice, keďže a_{44} je koeficient pri neznámej x_4 možno zapísať:

$$2x_4 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1$$

Tretí riadok zapíšeme:

$$3x_3 + 7\,x_4 = -10 \quad \Rightarrow \quad -3x_3 = -10 - 7\,x_4 \Rightarrow \quad x_3 = \frac{10 + 7.(-1)}{3} = 1$$

Druhý riadok zapíšeme:

$$x_2 - 2\,x_3 - x_4 = -3 \Rightarrow \quad x_2 = -3 + 2\,x_3 + x_4 \quad \Rightarrow x_2 = -3 + 2.1 - 1 = -2$$

Prvý riadok zapíšeme:

$$x_1 + x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 - x_3 \Rightarrow x_1 = 3 - 1 = 2$$

Riešenie zapíšeme v tvare jednoriadkovej: $R = \{2, -2, 1, -1\}$.

Skúška správnosti:

$$\begin{array}{lllllll} \text{ĽS1:} & 6.2 + & 2.(-2) & -1 & +7(-1) & = 0 & \Rightarrow \text{ĽS1} = \text{PS1} \\ \text{ĽS2:} & 4.2 + & 2.(-2) & -3.1 & +5.(-1) & = -4 & \Rightarrow \text{ĽS2} = \text{PS2} \\ \text{ĽS3:} & 2 + & (-2) & -1 & -(-1) & = 0 & \Rightarrow \text{ĽS3} = \text{PS3} \\ \text{ĽS4:} & 2 + & . & +1 & . & = 3 & \Rightarrow \text{ĽS4} = \text{PS4} \end{array}$$

PDDA

Úloha 5: Riešte systém rovníc. Nájdite všetky riešenia systému a tiež parciálne riešenie, ktorého druhá súradnica $x_2 = 1$.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5\,x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Úloha 6: Riešte systém rovníc:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 4x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5\,x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3$

Úloha 7: Riešte systém rovníc a urobte skúšku:

$$\begin{aligned} x - y + z + u &= 0 \\ x + y - z - u &= 2 \\ 2x - y + u &= 3 \\ 3x + z - u &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 8: Rozhodnite, či daný systém má riešenie. Ak áno, určite všetky riešenia. Presvedčte sa o správnosti vášho riešenia.

$$\begin{array}{ccccc} 6x_1 & +2x_2 & -x_3 & +7x_4 & = 0 \\ 4x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +5x_4 & = -4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & . & +x_3 & . & = 5 \end{array}$$

Úloha 9: Sú dané vektory $\vec{a} = (2, -1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$, $\vec{c} = (-1, -4, -1)$, $\vec{d} = (2, 3, 0)$. Na základe vášho výpočtu vyberte správne tvrdenie:

A) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}, \vec{d}$ – systém vektorov je lineárne závislý a jeho hodnosť h = 3

B) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ – systém vektorov je lineárne nezávislý a jeho hodnosť h = 3

C) $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – systém vektorov je lineárne nezávislý a jeho hodnosť h = 3

D) $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – systém vektorov je lineárne závislý a jeho hodnosť h = 2.

Kontrolné otázky

1. Kedy má systém *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych riešenie a ktorá veličina túto skutočnosť podľa Frobeniusa určuje?
2. Ak má systém *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych riešenie, čo vypovedá o počte jeho riešení?
3. Objasnite slovne ako nájdeme riešenie SLAR.
4. Kedy má homogénny systém rovníc netriviálne riešenie?
5. Vyslovte a napíšte úplné znenie Frobeniovej vety. Skontrolujte si ju!
6. Kedy systém lineárnych rovníc nemá riešenie?
7. Čo vieme povedať o systéme *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych, ak hodnosť matice systému a hodnosť rozšírenej matice sa rovnajú, ale je menšia ako počet neznámych?
8. Môže nastať prípad pre systém *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych, kedy hodnosť matice systému je väčšia ako a hodnosť rozšírenej matice?
9. Čo vieme povedať o systéme *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych, ak hodnosť matice systému a hodnosť rozšírenej matice sa rovnajú?
10. Aká musí byť hodnosť homogénneho systému *m*-lineárnych rovníc o *n*-neznámych, aby mal netriviálne riešenie?

7.4 Riešenie sústavy lineárnych rovníc s parametrom

O sústave rovníc s parametrom, hovoríme vtedy ak sústava lineárnych rovníc (7.1) obsahuje miesto niektorého koeficienta (koeficientov) parameter, v našom prípade ho budeme označovať α. Parameter je reálne číslo, ktorého hodnota nie je jednoznačne zadaná, ale rozhoduje o riešiteľnosti a riešení daného systému. Tieto úlohy rozvíjajú logické myslenie a ukazujú, ako čitateľ porozumel látke a vie svoje vedomosti aplikovať v konkrétnej situácii.

Príklad 7.13: Určite: a) pre ktoré α má systém rovníc riešenie:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \alpha \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

b) ktorý/é) výrok/y) je (sú) pravdivý/é a doplňte:

Sústava: a) nemá riešenie pre α ……….. ;

b) má nekonečne veľa riešení nezávisle na parametri α;

c) má jedno riešenie pre α = …..;

d) má triviálne riešenie;

e) má nekonečne veľa riešení pre parameter α = ……

c) Pre dané α nájdite riešenie, ktorého štvrtá súradnica je nula. R = {…., …, …,….,}.

Riešenie:

a) Vymeníme riadky tak, aby sme vodiaci prvok 1. kroku Gaussovho algoritmy mali jednotku. Pokiaľ je to možné, volíme taký riadok, kde sa parameter nevyskytuje a riadok s parametrom presunieme ako posledný riadok :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \alpha \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \alpha \end{array}\right)$$

Uskutočníme elementárne operácie: prvý riadok vynásobíme (-2) a pripočítame k druhému riadku a následne prvý riadok (-1) a pripočítame k tretiemu riadku:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-5 \end{array}\right) \qquad (*)$$

V 2. kroku Gaussovho algoritmu pričítame druhý riadok k tretiemu riadku: Dostali sme trojuholníkovú maticu s parametrom v rozšírenej matici: Urobme diskusiu poslednej matice (*) v zmysle Frobeniovej vety: Nakoľko v matici systému **A** posledný riadok je nulový, $h_A = 2$.

Hodnosť rozšírenej matice závisí od parametra:

Ak $\alpha \neq 5$ $h_B = 3 \Rightarrow h_A \neq h_B \Rightarrow$ systém nemá riešenie pre $\alpha \neq 5$.

Aby systém mal riešenie musí platiť, že $h_B = 2 \Leftrightarrow \alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha = 5$.

Príklad 7.13: pokračovanie riešenia:

Keďže $h < n$, systém má nekonečne veľa riešení, počet neznámych $n - h = 4 - 2 = 2$, volíme za parameter, t.j. dve neznáme – napríklad $x_3 = t$ a $x_4 = u$ môžu nadobúdať ľubovoľné hodnoty.

Z druhého riadku matice (*) po dosadení dostaneme:

$$-5\,x_2 = -3 - 3x_3 + 7x_4$$

$$x_2 = \frac{3+3t-7u}{5}$$

Z prvého riadku vyjadrime neznámu x_1:

$$x_1 = 2 - 2\,x_2 + x_3 - 4\,x_4$$

$$x_1 = 2 - \frac{2(3+3t-7u)}{5} + t - 4u = \frac{10-6-6t+14u+5t-20u}{5}$$

$$x_1 = \frac{4-t-6u}{5}$$

Riešenie zapíšeme v tvare jednoriadkovej matice: $R = \{\frac{4-t-6u}{5}, \frac{3+3t-7u}{5}, t, u\}$.

Urobíme skúšku: Dosadíme do prvej rovnice:

ĽS1: $\frac{4-t-6u}{5} + 2.\frac{3+3t-7u}{5} - t + 4u = \frac{10}{5} = 2 \Longrightarrow$ ĽS1= PS1

b) Sústava: a) nemá riešenie pre $\alpha \neq 5$ – správny výrok;

b) má nekonečne veľa riešení nezávisle na parametri α;– *nesprávny výrok*;

c) má jedno riešenie pre α = …..– *nesprávny výrok*;

d) má triviálne riešenie – *nesprávny výrok*;

e) má nekonečne veľa riešení pre parameter $\alpha = 5$ – správny výrok.

c) Pre dané α nájdite riešenie, ktorého štvrtá súradnica je nula. Do vypočítaného všeobecného riešenia zvolíme za $x_4 = u = 0$ a dostaneme hľadané riešenie:

Zistili sme, že systém má riešenie má len pre α = 5, a to: $R = \{\frac{4-t}{5}, \frac{3+3t}{5}, t, 0\}$.

Príklad 7.14: Zistite, pre ktoré α má systém netriviálne riešenie

$$\begin{aligned} (1-\alpha)x_1 \qquad\qquad + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + (2+\alpha)\,x_2 \qquad &= 0 \\ 2\,x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

A nájdite také riešenie, ktorého $x_3 = 0$.

Riešenie:

Možný spôsob riešenia sústavy je s využitím vlastností determinantov a pomocou Gausssovho algoritmu. Ako prvé zvolíme riešenie s využitím vlastností determinantov: Aby homogénny systém mal netriviálne riešenie riadky (stĺpce) musia byť lineárne závislé, t.j. determinant sa musí rovnať nule:

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 0 & 1 \\ 2 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (1-\alpha)(2+\alpha) + 4 = 0$$

$$2 + \alpha - 2\alpha - \alpha^2 + 4 = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \alpha_1 = 2 \text{ a } \alpha_2 = -3.$$

Príklad 7.14: pokračovanie riešenia:

Hodnosť $h = 2$ pretože subdeterminant druhého rádu je $\neq 0$, pretože

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 2 & 2+\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \text{pre } \alpha = 2$$

$n - h = 3 - 2 = 1$ neznámu volíme ľubovoľne, t.j. $x_3 = t$.
Pre $\alpha = 2$ dostaneme z prvej rovnice $(1-\alpha)\,x_1 \qquad + x_3 = 0$

$$-x_1 = -x_3 \;\Rightarrow\; x_1 = x_3 \;\Rightarrow\; x_1 = t.$$

Z druhej rovnice po dosadení za $\alpha = 2$:

$$2x_1 + (2+2)\,x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{-2x_1}{4} = \frac{-x_1}{2} = -\frac{t}{2}$$

Všeobecné riešenie I : $R = \{t, \dfrac{-t}{2}, t\}$

Riešenie, ktorého $x_3 = 0$ bude: $R = \{0, 0, 0\}$- triviálne

Pre $\alpha_2 = -3$ dostaneme $(1+3)\,x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-x_3}{4} = -\dfrac{t}{4}$

$$2x_1 + (2-3)\,x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 2x_1 = 2.(-\frac{t}{4}) = -\frac{t}{2}$$

Všeobecné riešenie II : $R = \{-\dfrac{t}{4}, -\dfrac{t}{2}, t\}$

Riešenie, ktorého $x_3 = 0$ bude: $R = \{0, 0, 0\}$ - triviálne riešenie. Netriviálne riešenie s treťou nulovou súradnicou neexistuje.

Iný spôsob riešenia je pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 1 \\ 2 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1+\dfrac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\alpha & -1-\dfrac{\alpha}{2} & 1 \\ 1 & 1+\dfrac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{\alpha} \\ 1 & 1+\dfrac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{\alpha} \\ 0 & \dfrac{\alpha+\alpha^2-2}{2\alpha} & \dfrac{1}{\alpha} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{\alpha} \\ 0 & \dfrac{\alpha+\alpha^2-2}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aby hodnosť $h = 2$ musí sa rovnať prvky $a_{22} = a_{32}$ $\quad \dfrac{\alpha+\alpha^2-2}{2} = 2$

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \;\Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 2 \; a \; \alpha_2 = -3.$$

Dostali sme rovnaký výsledok, čo sme očakávali.

Príklad 7.15: Zistite, pre ktoré α má systém netriviálne riešenie

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad\quad &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + \alpha x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & \alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & \alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -5+3\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow h_A = 3 \text{ ak } -5+3\alpha \neq 0$$

a systém má triviálne riešenie;

Keď $h_{\mathbf{A}} = 3$, ale $-5+3\alpha \neq 0 \Longrightarrow \alpha \neq \dfrac{5}{3}$

Ak $\alpha = \dfrac{5}{3}$ $h_{\mathbf{A}} = 2 \Longrightarrow$ systém má nekonečne veľa riešení.

Príklad 7.16: Riešte systém rovníc v závislosti od parametra *a*:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 7a - 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3a - 6 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -a - 8 \end{aligned}$$

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 7a-4 \\ 3 & 3 & 4 & 3a-6 \\ 4 & -6 & 2 & -a-8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 7a-4 \\ 0 & -21 & 2 & -15a \\ 0 & -24 & -2 & -15a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 7a-4 \\ 0 & -21 & 2 & -15a \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 7a-4 \\ 0 & 0 & 30 & -15a \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 7a-4 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -15a \end{pmatrix} \Rightarrow h_{\mathbf{A}} = h_{\mathbf{B}} = 3 \text{ práve jedno riešenie}$$

$30\,x_3 = -15\,a \Longrightarrow x_3 = -a/2$ $\quad 3x_2 + 4x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = -4x_3/3 = 2a/3$

$2x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 7\,a - 4$

$2x_1 = -9x_2 - 2x_3 + 7\,a - 4$

$x_1 = (-9.(2a/3) - 2(-a/2) + 7\,a - 4)/2$

$x_1 = (-6a + a + 7\,a - 4)/2 = a - 2$

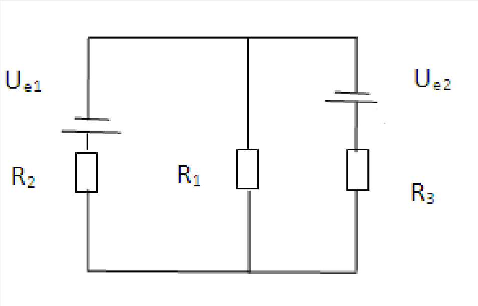
Systém má riešenie usporiadanú trojicu: R: $\{a-2,\ 2a/3,\ -a/2\}$ pre všetky hodnoty parametra $a \in$ R.

Skúška:

ĽS1: $2(a-2) + 9(2a/3) + 2(-a/2) = 2a - 4 + 6a - a = 7a - 4 \Longrightarrow$ ĽS1 = PS1
ĽS2: $3(a-2) + 3(2a/3) + 4(-a/2) = 3a - 6 \Longrightarrow$ ĽS2 = PS2
ĽS3: $4(a-2) - 6(2a/3) + 2(-a/2) = -a - 8 \Longrightarrow$ ĽS3 = PS3.

Využitie sústavy rovníc na riešenie problémov reálneho sveta je mnohoraké. Ukážeme si aspoň jeden príklad, s ktorým sa stretnete v základnom kurze fyziky.

Príklad 7.17: Vypočítajte prúdy vo všetkých troch vetvách zapojenia podľa obrázku 7.8, keď $U_{e1} = 2{,}1$ V, $U_{e2} = 1{,}9$ V, $R_1 = 45\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$.

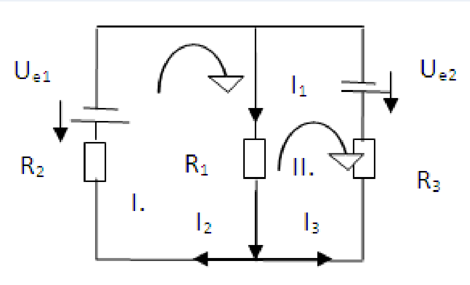


Obrázok 7.8: Schéma zapojenia

Riešenie:

Využijeme platnosť Kirchhoffových zákonov pre obvody. Predtým ako si napíšeme rovnice, musíme si:

1. Uvedomiť koľko neznámych prúdov máme – teda aký systém lineárnych rovníc budeme riešiť. V zadanom príklade $n = 3$;
2. Určiť polaritu zdrojov: smer elektromotorického napätia jednotlivých zdrojov – konvencia vo fyzike: smer bude kladný v symbolike od zápornej elektródy ku kladnej, t.j. od menšej k väčšej;
3. Určiť počet n – 1 okruhov, pretože jednu rovnicu využijeme rovnicu platnú pre prúdy $\sum_1^n I_k = 0$; To znamená že pri troch neznámych prúdoch zvolíme dva obvody a v nich smer postupu; voľba je nezávislá. My sme zvolili postup v smere hodinových ručičiek, ako ukazuje obr. 7.9 v obidvoch vybraných obvodoch rovnako.
4. Uvedomiť, že ak je smer postupu totožný so smerom elektromotorického napätia – bude mať U_e znamienko kladné, proti smeru – záporné;
5. Ak je smer postupu totožný so smerom prúdu bude znamienko ohmického napätia kladné, proti smeru – záporné;
6. Napíšeme rovnice na základe I. a II. Kirchhoffového zákona.



Obrázok 7.9: Určenie polarity zdrojov, výber okruhov a smer postupu v nich

Pri zvolenom označení na obr. 7.9 nám pre dva obvody platia prvé dve rovnice, tretia vychádza z prvého Kirchhoffového zákona: súčet prúdov v uzle je nulový:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_2 + &= -U_{e1} \\ -R_1 I_1 + - R_3 I_3 &= U_{e2} \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Príklad 7.17: pokračovanie riešenia

Sústavu budeme riešiť pomocou determinantov cez Cramerove pravidlo:

$$\Rightarrow I_1 = \frac{D_1}{D},\ I_2 = \frac{D_2}{D},\ I_3 = \frac{D_3}{D},$$

kde

$$D = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ -R_1 & 0 & -R_3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 10 & 0 \\ -45 & 0 & -10 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -100-(450+450) = -1000$$

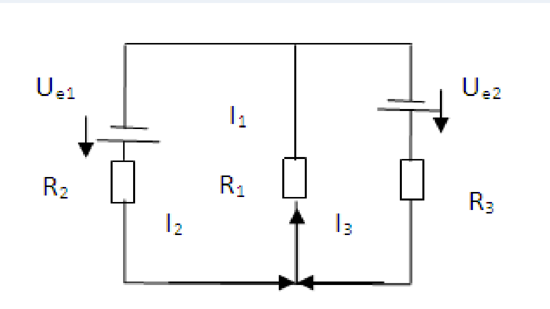
$$D_1 = \begin{vmatrix} -U_{\varepsilon 1} & R_2 & 0 \\ U_{\varepsilon 2} & 0 & -R_3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2{,}1 & 10 & 0 \\ 1{,}9 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-21-19) = 40$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} R_1 & -U_{\varepsilon 1} & 0 \\ -R_1 & U_{\varepsilon 2} & -R_3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & -2{,}1 & 0 \\ -45 & 1{,}9 & -10 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-4{,}5.1{,}9)+21-(-4{,}5.2{,}1) = 30$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & -U_{\varepsilon 1} \\ -R_1 & 0 & U_{\varepsilon 2} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 10 & -2{,}1 \\ -45 & 0 & 1{,}9 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 19-2{,}1.4{,}5-(-1{,}9.45) = 10$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{40}{-1000} = -0{,}04\,\mathrm{A},\ I_2 = \frac{30}{-1000} = -0{,}03\,\mathrm{A};\ I_3 = \frac{10}{-1000} = -0{,}01\,\mathrm{A}$$

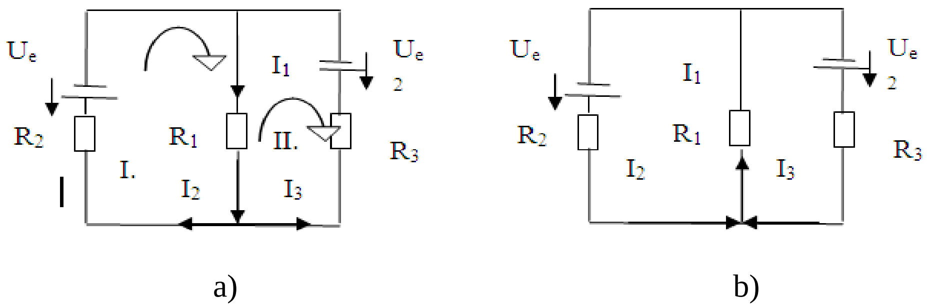
Záporné znamienka znamenajú, že smer prúdu je opačný ako sme si ho zvolili na obr. 7.9. Správny smer prúdov prezentuje obr. 7.10.



Obrázok 7.10: Správna orientácia prúdov v obvodoch na základe výpočtu

Otázka 4: Bola možnosť zvoliť si iné okruhy v príklade 7.17? Ak áno, napíšte aké.

Odpoveď: áno:



Obrázok 7.11: Voľba iných možných okruhov z príkladu 7.17

Kontrolné otázky

1. Aplikujeme Frobeniovu vetu na systém rovníc s parametrom?
2. Prečo riadok matice s parametrom dávame vždy na pozíciu najnižšieho riadku?
3. Je úprava popísaná v bode 2 vždy nevyhnutná?
4. Ak máme v diagonálnom prvku výraz s parametrom, ako prebieha diskusia týkajúca sa hodnosti matice?

Kapitola 8
REÁLNA FUNKCIA JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

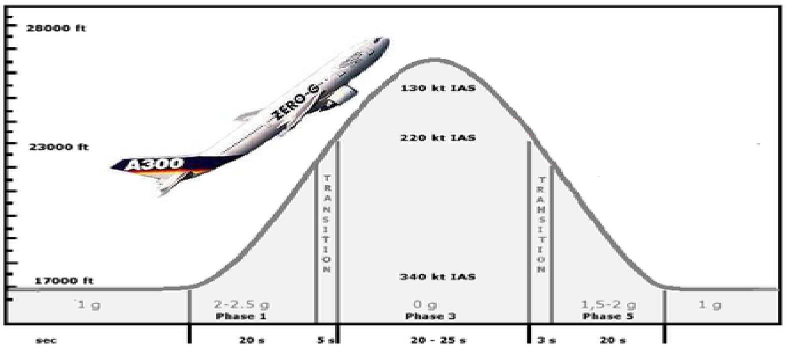
Učebné ciele:

- Zvládnuť pojmy súvisiace so základnými elementárnymi funkciami jednej reálnej premennej,
- Zopakovať si určovanie definičného oboru, oboru hodnôt funkcií, ich vlastnosti a zostrojenie grafu funkcií: lineárnej funkcie (priamka), parabola, hyperbola, exponenciálna funkcia, logaritmická funkcia a goniometrické funkcie a iné;
- Pochopiť pojem limita a spojitosť funkcie, ich význam a vedieť vypočítať limity vybraných funkcií a vedieť sa vysporiadať s problémom nekonečno.

Kľúčové slová: funkcia, graf funkcie, prostá funkcia, zložená funkcia, typy funkcií: lineárna, racionálna, kvadratická, lomená lineárna, goniometrické, cyklometrické, funkcia určená parametricky, explicitne a implicitne; inverzná funkcia, spojitosť a limita funkcie.

Požadované vedomosti: stredoškolská matematika z oblasti funkcie jednej premennej.

Motivácia



Obrázok 8.1: Parabolický let (http://cs.wikipedia.org/wiki/Parabolick%C3%BD_let)

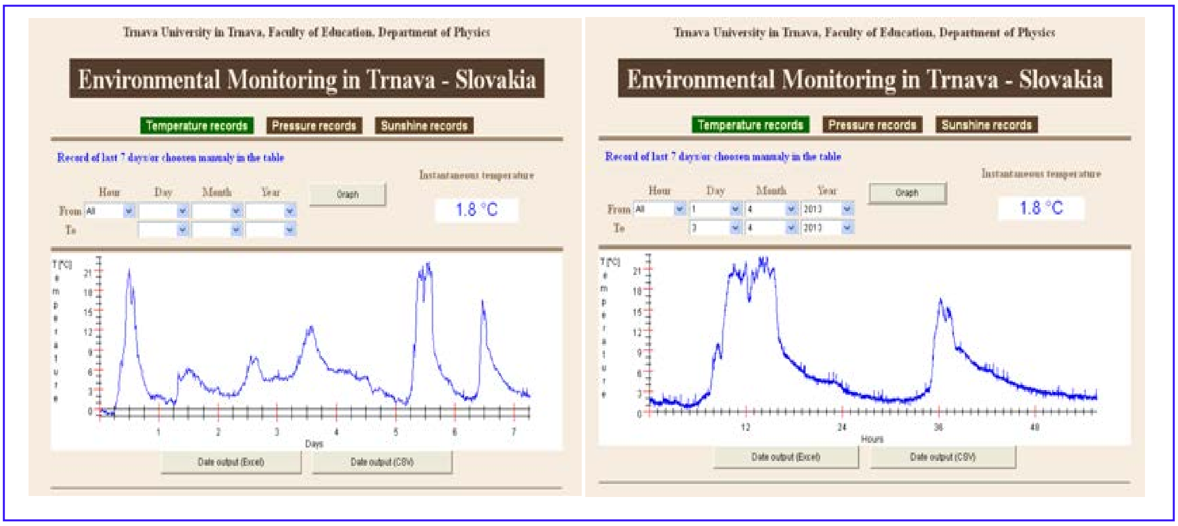
Slúži k vytváraniu beztiažového stavu najmä pre výcvik kozmonautov, vedecký výskum alebo v poslednej dobe na rôzne efekty do filmov. Myšlienku parabolického letu ako prví publikovali aviatici Heinz a Fritz Haberovci v roku 1950. Princíp parabolického letu spočíva v tom, že účastníci letu sa pohybujú po rovnakej dráhe ako lietadlo a vznášajú sa v útrobách lietadla v beztiažovom stave. Ak sa lietadlo pohybuje po inej ako parabolickej krivke, nenastane stav beztiaže, ale môže nastať zníženie gravitácie. Takto sa dá simulovať gravitácia napr. na Marse (gravitačné zrýchlenie g = 3,7 m/s^2), či na Venuši (g = 8,6 m/s^2), alebo na Mesiaci, kde je g = 1,62 m/s^2 , čo je približne jedna šestina zemského tiažového zrýchlenia. Parabolický let začína stúpaním pod uhlom 47°, pri ktorom je preťaženie 1,8 g. Po dosiahnutí určitej letovej hladiny sa začne lietadlo pohybovať po krivke odpovedajúcej šikmému vrhu, kedy začína beztiažový stav, resp. mikrogravitácia, resp. znížená gravitácia počas 25 s. Klesanie sa realizuje pod uhlom 45° alebo menším a trvá obvykle 20 s. Tento proces sa mnohokrát zopakuje.

8.1 Základné pojmy

Pri skúmaní prírodných javov hľadáme súvislosti medzi premenlivými veličinami, ktoré tieto javy charakterizujú. Štúdium pozorovaných zákonitostí, najmä pri fyzikálnych procesoch, či ekonomických závislostiach, malo vplyv na utvorenie pojmu funkcie, ako jedného z najdôležitejších pojmov matematickej analýzy. V bežnom živote skúmame teplotu ovzdušia ako funkcia času. Hovoríme o reálnej funkcii jednej reálnej premennej (obr. 8.2).

Otázka 1: Ktorú z premenných na obr. 8.2 nazývame nezávisle premennú a ktorú závisle premennou? V akých jednotkách sú dané veličiny v pravom a ľavom grafe uvedené?

Otázka 2: V čom sa líšia uvedené dva grafy na obr. 8.2? Vieme, čo je to zúženie funkcie?



Obrázok 8.2: Závislosť teploty ako funkcia času http://remotelab1.truni.sk/

Poznámka:

Operácia zúženia funkcie spočíva len v ohraničení jej definičného oboru. Z tohto pohľadu obr. 8.2 nám predstavuje tú istú funkciu – závislosť teploty T ako funkciu času t, t.j. $T = T(t)$, ale na zúženom intervale, t.j. na posledné dva dni z meraných siedmych dní – graf pravo na obr. 8.2, čo potvrdzuje i priebeh teploty.

PDDA

Úloha 1: Objasnite slovne v čom sa líšia grafy na obr. 8.2. Popíšte ich slovne čo najdetailnejšie.

Definícia 8.1 - Funkcia, definičný obor a obor hodnôt

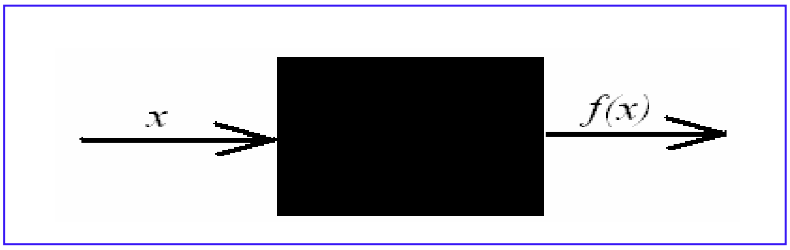
Reálna funkcia jednej reálnej premennej definovaná na množine *D* (podmnožine reálnych čísel) **je pravidlo (predpis), ktorým každému prvku *x* z množiny D priradíme jediný prvok *y* z množiny H** (hodnota funkcie v bode *x*). Zapisujeme $y = f(x)$, resp. $f: D \rightarrow H$.

Množina ***D*** sa nazýva **definičný obor** funkcie. Množina všetkých **hodnôt funkcie H** sa nazýva **obor hodnôt** funkcie.

Zo skúsenosti vieme, že existuje niekoľko spôsobov ako vyjadriť vzťahy (závislosti) medzi veličinami (premennými):

- ilustrácia tabuľkou,
- algebricky (vzťahom),
- grafom,
- slovne.

Poznámka: Funkciu f môžeme považovať za čiernu skrinku, do ktorej vchádza x a vychádza z nej niečo iné dané predpisom $f(x)$.



Obrázok 8.3: K výkladu pojmu funkcia

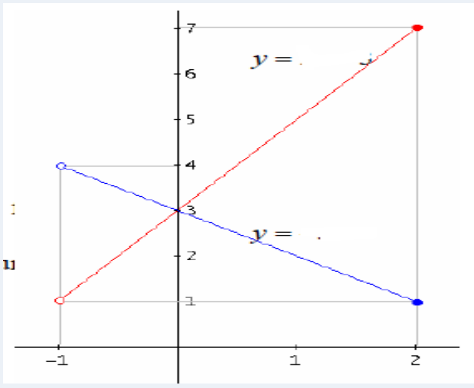
Poznámka: Ak nie je definičný obor daný a funkcia je daná vzťahom, tak jej definičným oborom rozumieme **„prirodzený“** definičný obor, t.j. množinu všetkých čísel, pre ktoré má daný vzťah zmysel.

Definícia 8.2 - Graf funkcie

Geometrická interpretácia funkcie $y = f(x)$, kde $x \in M$ je množina usporiadaných dvojíc čísiel, t.j. množina bodov $[x, y]$ v rovine, pre ktoré platí $y = f(x)$. Túto množinu bodov nazývame grafom funkcie $y = f(x)$ (obr. 8.4).

Poznámka: Grafy nám dovoľujú rýchlu vizuálnu prezentáciu údajov alebo vzťahov medzi dvomi premennými. Taktiež nám grafy mnohonásobne uľahčujú pochopiť zložitejšie veci. Napríklad fyzika, matematika, či ekonomika by bola bez grafov a tabuliek omnoho zložitejšia na pochopenie. Mnoho slov možno nahradiť jedným grafom. Ale aby tomu tak skutočne bolo, musíme grafu porozumieť a pochopiť ho.

Príklad 8.1: Napíšte predpisy funkcií, ktorých grafy sú zobrazené na obrázku 8.4.



Obrázok 8.4: a) Grafy neznámych funkcií

Riešenie:

Označme si červený graf ako f_1 a modrý ako f_2 a odčítame z grafu:

$f_1(x)$: pre $x_1 = 0$ $f_1(0) = 3$

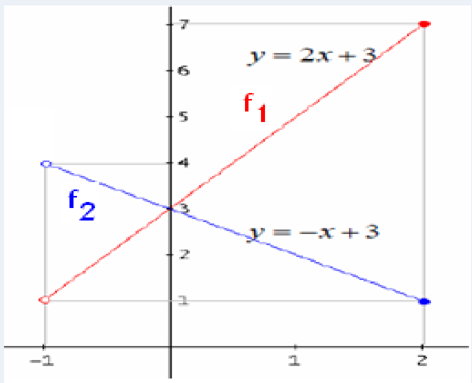
pre $x_2 = 2$ $y_2 = f_1(2) = 7$.

Nakoľko sa jedná o lineárnu funkciu jej explicitné vyjadrenie je $y = kx + q$

Pre dva body platí: $y_1 = kx_1 + q \rightarrow$ $k.0 + q = 3 \rightarrow q = 3$

$y_2 = kx_2 + q \rightarrow$ $k.2 + q = 7 \rightarrow 2k + 3 = 7 \rightarrow k = 2$

Hľadané explicitné vyjadrenie funkcie je $f_1(x) = 2x+3$.



Obrázok 8.4: b) Určenie explicitného vyjadrenia grafov zadaných funkcií

Rovnako určíme rovnicu priamky pre funkciu $f_2(x)$. Riešenie nechám na čitateľovi.

Definícia 8.3 - Rovnosť dvoch funkcií

O rovnosti dvoch funkcií f a g hovoríme vtedy, keď: a) obidve funkcie majú rovnaký obor definície, t.j. platí $D_f = D_g$ a b) pre každé $x \in D_f$ platí

$$f(x) = g(x). \qquad (8.1)$$

Definícia 8.4 - Zložená funkcia

Nech $f(z)$ a $u(x)$ sú funkcie. Ak funkcia u priradí každému $x \in D(u) = \langle a, b\rangle$ hodnotu funkcie $u(x) = z \in \langle \alpha, \beta \rangle$, v ktorom je funkcia $y = f(z)$ definovaná, tak funkcia

$$y = f\,[u(x)]$$

sa nazýva zloženou funkciou z funkcií $z = u(x)$ a $y = f(z)$, (f sa volá **vonkajšou zložkou** a u sa volá **vnútornou zložkou zloženej funkcie.**

Funkcie môžu byť aj viacnásobne zložené. Príkladom je: $y = \sqrt{1+\sqrt{x+1}}$, $x \in \langle -1, \infty)$
$y = \sqrt{z}$, $z = 1+\sqrt{u}$, $u = 1 + x$, $y = f\,\{z[\,u(x)]\}$.

Definícia 8.5 - Krivka a jej parametrické vyjadrenie

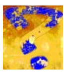
Nech poloha bodu P v rovine je určená v karteziánskej súradnicovej sústave P = (x, y). Ak je daná funkcia (zobrazenie) F, môžeme pomocou nej definovať na intervale J dve reálne spojité funkcie φ a Ψ reálnej premennej tak, že $t \in J$

$$x = \varphi(t) \qquad\qquad (8.2)$$
$$y = \Psi(t)$$

ak $F(t) = (x, y)$. Množinu K všetkých bodov P $\{\varphi(t), \Psi(t)\}$ roviny, kde $t \in J$ nazývame **krivkou.** Dvojicu φ a Ψ nazývame parametrické vyjadrenie krivky v tejto súradnicovej sústave a t - nazývame parametrom.

Funkcie, ktoré nám vyjadrujú krivku môžeme mať zadané rôzne:

- explicitne – analyticky, (pozri http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/funkcie/Explic.htm)
- implicitne (pozri http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/funkcie/Implic.htm)
- tabuľkou (pozri http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/funkcie/Table.htm)
- slovným opisom (pozri obr. 8.5).


Otázka 3: Platí rovnosť medzi funkciami $f\,(x)$ a $g\,(x)$, ak sú určené predpismi:

$f\,(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $g\,(x) = x+2$?

Odpoveď: Nie, funkcie sa nerovnajú i napriek tomu, že ak funkciu f(x) zjednodušíme a zistíme, že platí $f\,(x) = g\,(x)$, pretože ich definičné obory sú $D_f = R-\{2\}$ a $D_g = R$, $\Longrightarrow$ t.j. $D_f \neq D_g$.

Príklad 8.2: Určite definičný obor a obor hodnôt zloženej funkcie: $y = \sqrt{x+1}$,

Riešenie:

Určíme D_y: $x+1 \geq 0 \rightarrow x \in \langle -1, \infty)$. Zvoľme $u(x) = x + 1$; potom $y = \sqrt{u}$. Interval $\langle -1, \infty)$ sa zobrazí funkciou u na interval $\langle 0, \infty)$ a funkciou $y = \sqrt{u}$ na interval $\langle 0, \infty)$.

Definícia 8.6 - Funkcia určená explicitne

Elimináciou parametra t z parametrických rovníc (8.2) prejdeme k vyjadreniu krivky v tvare

$$y = f(x)\ . \tag{8.3}$$

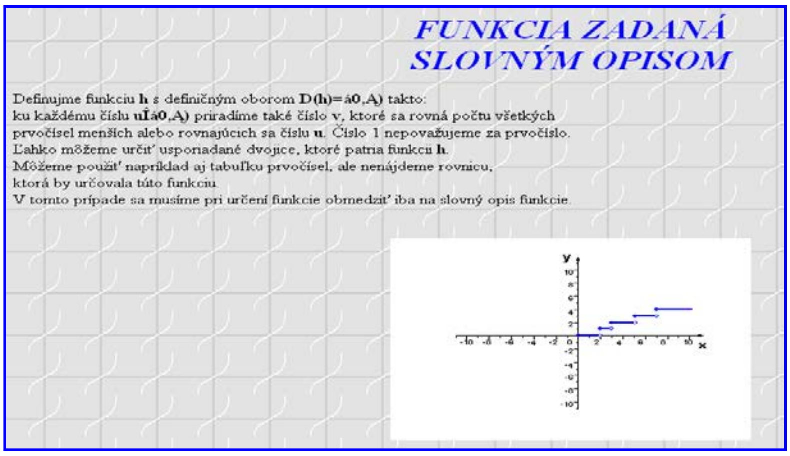
Hovoríme, že máme zadanú funkciu explicitne (*v explicitnom tvare*).

Definícia 8.7 – Funkcia určená implicitne

Ak je funkčný predpis krivky tvaru

$$F(x,y) = 0, \tag{8.4}$$

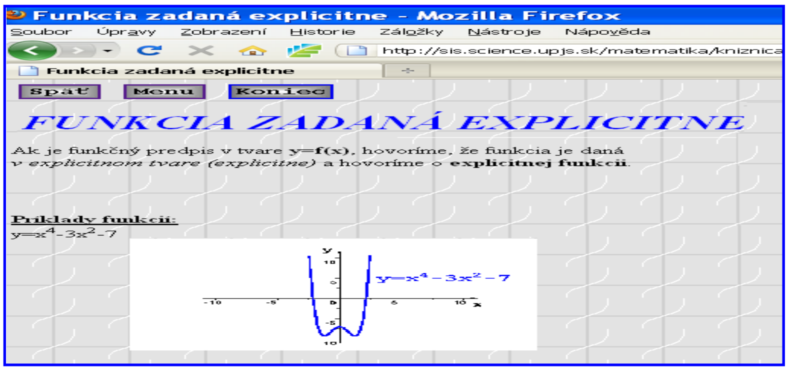
krivka je daná *v implicitnom tvare* a hovoríme o **implicitnej funkcii**.



Obrázok 8.5: Vyjadrenie funkcie slovne, resp. opisom – nespojitá krivka
http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/funkcie/Slovne.htm

Poznámka:

- Vidíme, že na obr. 8.5 sa nejedná o spojitú krivku vyjadrenú vyššie uvedeným opisom.
- Najjednoduchšie vyjadrenie parametrických rovníc možno zapísať v tvare:
  $x = t\ ,\ \ y = F(t)),\ \ t \in J.$



Obrázok 8.6: Príklad funkcie zadanej explicitne
http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/funkcie/Explic.htm

Príklad 8.3: Nech funkcia $f(x)$ je daná predpisom: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$. Určite: a) jej definičný obor; b) funkčnú hodnotu v bode $x = 5$; c) funkčnú hodnotu v bode $x = -2$; d) $f(2x)$; e) $f(z)$; f) $f(f(x))$.

Riešenie:

a) Definičný obor: $x \in D$: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$;

b) $f(5)=\frac{5+1}{5-2}=\frac{6}{3}=2$;

c) $f(-2)=\frac{-2+1}{-2-2}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$;

d) $f(2x)=\frac{2x+1}{2x-2}$;

e) $f(z)=\frac{z+1}{z-2}$;

f) $f(f(x))=\dfrac{\frac{x+1}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-2}=\dfrac{\frac{x+1+x-2}{x-2}}{\frac{x+1-2(x-2)}{x-2}}=\frac{2x-1}{-x+5}$; $x\neq 5$

Príklad 8.4: Určite definičný obor funkcií $f(x)$ a $g(x)$ daných predpisom

$f(x)=\sqrt{x-5}$, $g(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$.

Riešenie:

$f(x)=\sqrt{x-5}$, D(f): $x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$ D_f: $\langle 5, \infty)$

$g(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$,

Nakoľko sa jedná o druhú odmocninu, pod odmocninou nesmie byť záporné číslo, t.j. $\frac{x-3}{x+1}\geq 0$. Zlomok bude kladný, ak čitateľ aj menovateľ budú súčasne kladný, alebo záporný, čo môžeme vyjadriť názorne ako: $\frac{+}{+}\cup\frac{-}{-}$, resp. nerovnosťami:

$[x-3\geq 0 \cap x+1>0]\cup[x-3\leq 0\cap x+1<0] \Longrightarrow$

$[x\geq 3\cap x>-1]\cup[x\leq 3\cap x<-1]\rightarrow x\geq 3\cup x<-1 \Longrightarrow D_g: (-\infty,-1)\cup\langle 3,\infty)$.

Príklad 8.5: Určite definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{5x - x^2}$.

Riešenie:

Jedná sa o racionálnu fiunkciu, ktorá v menovateli nesmie mať nulu. Preto riešime nerovnosť

$5x - x^2 \neq 0 \rightarrow x\,(5 - x) \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \cap x \neq 5 \Longrightarrow$ D_f: R -{0, 5}.

Príklad 8.6: Nech f: $y = \sin x$ a g: $y = \sqrt{x}$. Nájdime funkcie **:** a) $F_1(x) = f\,(g(x))$, b) $F_2(x) = g(f(x))$.

Riešenie:

a) Podľa zadania $F_1(x) = f\,(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sin\sqrt{x}$, D_{F1}: $\langle 0,\infty)$

b) $F_2(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sqrt{\sin x}$. D_{F2}: $< 0+2k\,\pi, (2k+1)\,\pi>$ k = 0, ±1,±2,.......

Príklad 8.7: Nájdite definičné obory funkcií a) $f\,(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-4}\sqrt{x-4}$

Riešenie:

a) $f\,(x) = \sqrt{x-4}$, $D(f)$: $x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$ D_f: $< 4, \infty)$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x-4}\sqrt{x-4}$ $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$, kde $f_1 = \dfrac{1}{x-4}$ a $f_2 = \sqrt{x-4} \rightarrow$

$\{(-\infty, 4) \cup (4, \infty,)\} \cap < 4, \infty)$ $x \geq 4$ $\Longrightarrow$ D_g: $(4, \infty)$.

Kontrolné otázky

1. Objasnite pojmy funkcia, definičný obor a obor hodnôt.
2. Akými spôsobmi možno zadať funkciu? Vymenujte ich.
3. Uveďte príklad funkcie zadanej implicitne
4. Uveďte príklad zadanej explicitne.
5. O akej funkcii hovoríme, ak vieme že nezávisle premenná priamoúmerne s časom rastie?
6. O akej funkcii hovoríme, ak vieme že nezávisle premenná priamoúmerne s časom klesá?
7. Objasnite pojem zložená funkcia a ako určíme jej definičný obor.

8.2 Niektoré vlastnosti funkcií

V tejto časti si formou definícii si uvedieme niektoré základné pojmy a vlastnosti, ktoré budeme potrebovať, keď skúmame vlastnosti jednoduchých funkcií v závislosti od hodnôt argumentu, t.j. keď budeme skúmať priebeh funkcie.

Definícia 8.8 - Funkcia párna, nepárna
Ak funkcia $f(x)$ spĺňa pri zmene znamienka argumentu nasledovné vlastnosti:

1. pre každé $x \in D_f$ aj $-x \in D_f$
2. a) $f(-x) = f(x)$ funkcia sa volá **párna**; (8.5)

   b) $f(-x) = -f(x)$ funkcia sa volá **nepárna.** (8.6)

Otázka 4: Viete zistiť, či funkcia $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x}$ je párna alebo nepárna?

Odpoveď: Určíme si D_f, aby sme zistili, či je splnená 1. podmienka Definície 8.8 $\Longrightarrow$
$D_f = R - \{0\}$, t.j. ku každému číslu $x \in D_f$ aj $-x \in D_f$. Počítajme:

$$f(-x) = \frac{3-(-x)^2}{-x} = -\frac{3-x^2}{x} = -f(x) \Longrightarrow$$ funkcia je nepárna.

Príklad 8.8: Zistite, či funkcia $F(x)$, ktorá vznikne súčtom funkcií $y_1 = f(x)$ a $y_2 = f(-x)$ je párna, alebo nepárna, ak obidve funkcie sú definované na R.

Riešenie:
Daná funkcia je definovaná na R, takže vzťah (8.8) je splnený. Overíme platnosť podmienky určenej vzťahom (8.9):

$F(x) = f(x) + f(-x)$ .Počítajme: $F(-x) = f(-x) + f[-(-x)] \Longrightarrow f(-x) + f(x) = F(x)$ je

Definícia 8.9 - Funkcia jedno-jednoznačná (prostá)

Ak funkcia $f(x)$ pre každú dvojicu takú, že $x_1 \neq x_2$ platí, že $f(x_1) \neq f(x_2)$, funkcia sa volá **jedno-jednoznačná (prostá).**

Otázka 5: Viete rozhodnúť, či funkcia $f(x) = \dfrac{3^2}{x+1} - 5$ je jedno-jednoznačná?

Odpoveď: Určíme si $D_f = R - \{-1\}$ Pre každé dve x_1 a $x_2 \in D_f$, pre ktoré platí $x_1 \neq x_2$ možno písať:

$$x_1 \neq x_2$$

$$x_1 + 1 \neq x_2 + 1$$

$$\frac{3^2}{x_1+1} \neq \frac{3^2}{x_2+1}$$

$$\frac{3^2}{x_1+1}-5 \neq \frac{3^2}{x_2+1}-5$$

$f(x_1) \neq f(x_2)$ $\Longrightarrow$ funkcia je jedno-jednoznačná.

Definícia 8.10 - Monotónnosť a rýdzomonotónosť funkcie

Ak pre každú dvojicu $x_1, x_2 \in D_f = \langle a, b \rangle$, splňujúcu nerovnosti:

1. $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ **rastúca;**
2. $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ **klesajúca;**
3. $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ **neklesajúca;**
4. $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ **nerastúca;**

Ak funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ buď rastúca alebo klesajúca, hovoríme, že je na intervale $\langle a, b \rangle$ **rýdzomonotónna.**

Poznámka:

1. Ak $x_2 - x_1 = \Delta x$ $f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1 = \Delta y$ $f(x_1) < f(x_2) \rightarrow \Delta y > 0$ a teda $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ $\rightarrow$ že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ **rastúca.** S touto skutočnosťou budeme pracovať neskôr pri deriváciach a priebehu funkcie.

2. Keďže $x_1 < x_2$ $\Delta x > 0$ a teda $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ $\rightarrow$ že funkcia $f(x)$ je na $\langle a, b \rangle$ **klesajúca.**

Veta 8.1 Každá rýdzomonotónna funkcia je jedno jednoznačná.

Definícia 8.11 Ohraničená funkcia (zdola, zhora)

Ak existujú čísla a a b, že pre každé $x \in M$ platí:

1. $f(x) \geq a$, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je ***zdola ohraničená*** na množine M,
2. $f(x) \leq b$, hovoríme, že funkcia je ***zhora ohraničená*** na množine M,

Funkcia je **ohraničená**, ak je ohraničená aj zdola aj zhora, *t.j.* existuje také číslo a, že pre každé $x \in M$ platí $|f(x)| \geq a$.

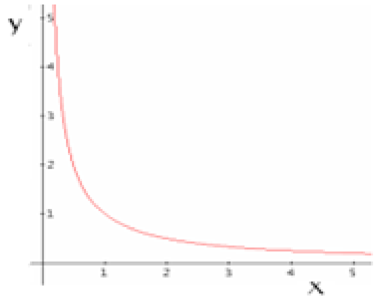
Otázka 6: Je funkcia $y = \frac{1}{x}$ na intervale $(0; \infty)$ ohraničená?

Odpoveď: Z grafu funkcie na obr. 8.7 vidíme, že všetky body grafu ležia nad osou x, takže $y > 0$ a teda je ohraničená **zdola.** Ale ak pozrieme na okolie bodu $x = 0$, ku ktorému sa blížime sprava, vidíme, že funkčná hodnota nadobúda nekonečne veľké hodnoty. Z toho vyplýva že nenájdeme žiadne také číslo K, pre ktoré by funkčná hodnota bola menšia ako toto číslo K. Hovoríme, že funkcia nie je zhora ohraničená ,funkcia na $(0;\infty)$ **je neohraničená**.

Otázka 7: Čo vieme povedať o tej istej funkcii $y = \frac{1}{x}$, ale na intervale $\langle 1; \infty)$?

$y = \frac{1}{x} \leq 1$, t.j. je zhora je ohraničená na $\langle 1; \infty)$.

Odpoveď: Nakoľko funkcia je ohraničená zdola i zhora, hovoríme, že je ohraničená.

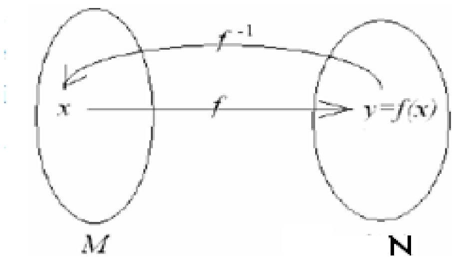


Obrázok 8.7: Graf funkcie $y = \frac{1}{x}$ na intervale $(0; \infty)$

Definícia 8.12 – Inverzná funkcia
Ak rovnica $y = f(x)$ definuje na množine M prostú funkciu (Definícia 8.8) a N je množina hodnôt tejto funkcie, tak vzťah

$$x = \varphi(y), \qquad (8.7)$$

ktorý priraďuje každému číslu množiny N to číslo množiny M, pre ktoré platí $y = f(x)$, definuje na množine N funkciu φ, ktorú voláme **inverznou funkciou** k funkcii f a označujeme f^{-1} (obr. 8.8).



Obrázok: 8.8: K pojmu inverzná funkcia

Otázka 8: Je funkcia $y = x$ sama sebe inverznou funkciou?

Odpoveď: Áno, pretože zámenou osí sa funkcia nezmení.(Pozri Poznámku 2 nižšie.)

Príklad 8.9:
Ukážte, že funkcia $f(x) = 2x - 4$ je prostá a nájdite výpočtom k nej inverznú funkciu.

Riešenie:

Vyjdeme z Definície 8.9 funkcie prostej: Určíme si jej D_f : definičným oborom funkcie f je množina všetkých reálnych čísel R. Ukážeme, že pre každú dvojicu rôznych čísel x_1 a $x_2 \in R$ t.j. $x_1 \neq x_2$, platí: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Príklad 8.9: pokračovanie riešenia

. $x_1 \neq x_2$

$2x_1 \neq 2x_2$

$2x_1 - 4 \neq 2x_2 - 4 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow$ je jednojednoznačná funkcia

Postup ako nájdeme inverznú funkciu:

Napíšeme základnú funkciu $y = 2x - 4$ a v nej vymeníme $x \Longrightarrow y$
a dostaneme:

$$x = 2y - 4$$

Vyjadríme si závisle premennú y: $2y = x + 4$

f^{-1}: $y = \dfrac{x+4}{2}$, $D_f^{-1} = R$.

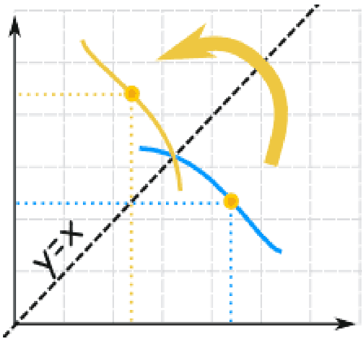
Poznámka:

1. Vysvetlenie nájdenia inverznej funkcie čitateľ nájde aj zaujímavo na www. http://www.mathsisfun.com/sets/function-inverse.html (Obr. 8.9, 8.10 a 8.11).

2. Ak bod A = (a, b) je bodom grafu funkcie $y = f(x)$, tak bodom grafu $x = \varphi(y)$,resp. po výmene $x \rightarrow y$ dostaneme bod grafu M´= (b, a). Body M a M´ sú súmerne združené podľa priamky $y = x$, t.j. osi I. a III. kvadrantu (Obr. 8.10).

Obrázok 8.9: Postup určenia inverznej funkcie
z http://www.mathsisfun.com/sets/function-inverse.html

You could plot them both in terms of **x** ... so it is now **f⁻¹(x)**, not **f⁻¹(y)**.



f(x) and f⁻¹(x) are like mirror images
(flipped about the diagonal).

In other words:

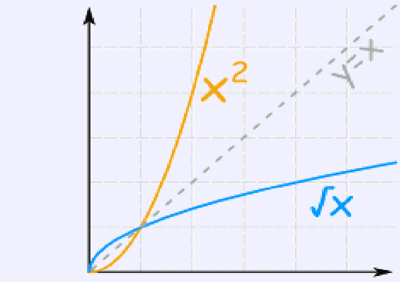
The graph of **f(x)** and **f⁻¹(x)** are symmetric across the line **y=x**

Obrázok 8.10: K inverznej funkcii –ukážka symetrie podľa osi prvého kvadrantu
http://www.mathsisfun.com/sets/function-inverse.html

Example: Square and Square Root (continued)

First, we restrict the Domain to **x ≥ 0**:

- **{x² | x ≥ 0 }** *"x squared such that x is greater than or equal to zero"*
- **{√x | x ≥ 0 }** *"square root of x such that x is greater than or equal to zero"*

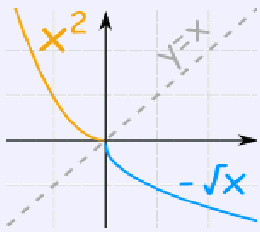


And you can see they are "mirror images"
of each other about the diagonal y=x.

Note: we could have restricted the domain to **x ≤ 0** and the inverse would then be **f⁻¹(x) = -√x**:

- **{x² | x ≤ 0 }**
- **{-√x | x ≥ 0 }**

Which are inverses, too.



Obrázok 8.11: K pojmu inverzná funkcia ku kvadratickej funkcii


PDDA

Úloha 2: Určite pre funkciu $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$: a) funkčnú hodnotu v bode 2 a 1

b) definičný obor.

Úloha 3: Je daná funkcia $\Psi(t) = ta^t$, kde $t \in (-\infty, \infty)$. Určite $\Psi(0)$, $\Psi(1)$, $\Psi(-1)$ a $\Psi(1/a)$.

Úloha 4: Určite: a) na ktorom intervale je funkcia $y = x^2$ rastúca.
b) Zistite , či existuje k funkcii $y = x^2$ funkcia inverzná.
c) Nakreslite grafy funkcie a jej inverznej funkcie.

Úloha 5: Určite definičný obor funkcií: a) $f(x) = 1 - \ln x$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$,

c) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

Úloha 6: Určite definičný obor funkcie $f(x) = \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$

Úloha 7: Určite definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{5x - x^2}{4}\right)}$.

Úloha 8: Rozhodnite, či existuje inverzná funkciu k funkcii $y = e^x$. Ak áno, nakreslite ju.

Úloha 9: Rozhodnite na základe výpočtu, či funkcia $f(x) = \dfrac{3^2}{x+1} - 5$ je párna, alebo nepárna.

Úloha 10: Otvorte si stránku http://wims.unice.fr/wims a overte si interaktívne svoje vedomosti z oblasti grafov funkcií. O elementárnych funkciách sa čitateľ taktiež dočíta na stránkach: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Zakladni-elementarni-funkce/sc-60-sr-1-a-34/default.aspx a http://www.analyzemath.com/calculus.

Úloha 11: Zistite, či funkcia $F(x)$, ktorá vznikne rozdielom funkcií $y_1 = f(x)$ a $y_2 = f(-x)$ je párna, alebo nepárna, ak obidve funkcie sú definované na R.

Úloha 12: Nájdite inverznú funkciu k funkciám: a) $f(x) = 2x$, b) $f(x) = 1-3x$,

c) $f(x) = \dfrac{3^{-1}}{x+1} - 5$

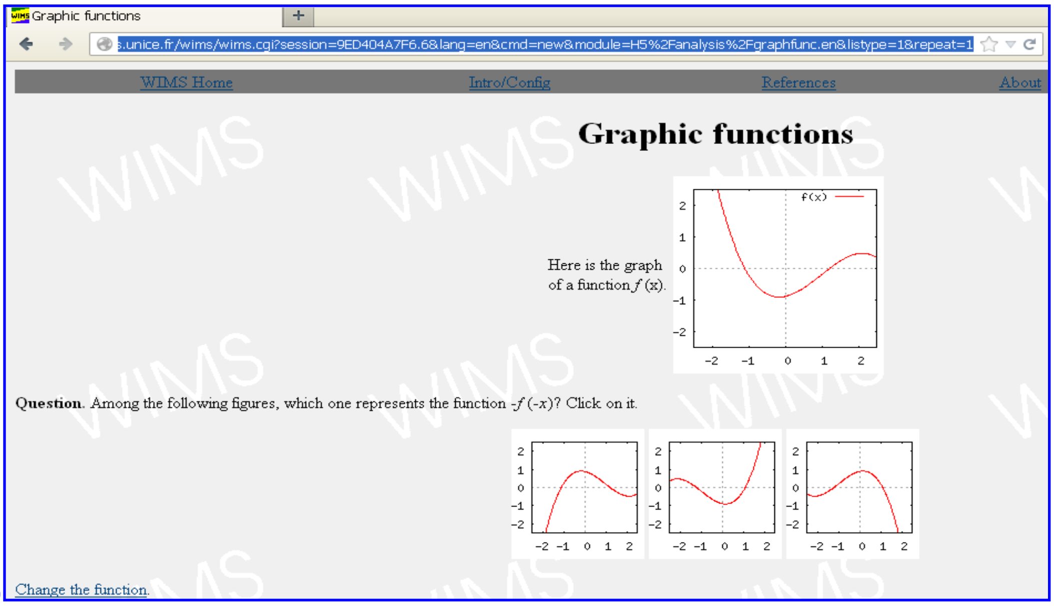
Otázka 9 :

Čo vieme povedať o symetrii nepárnej funkcie? Uveďte príklad nepárnych funkcií.

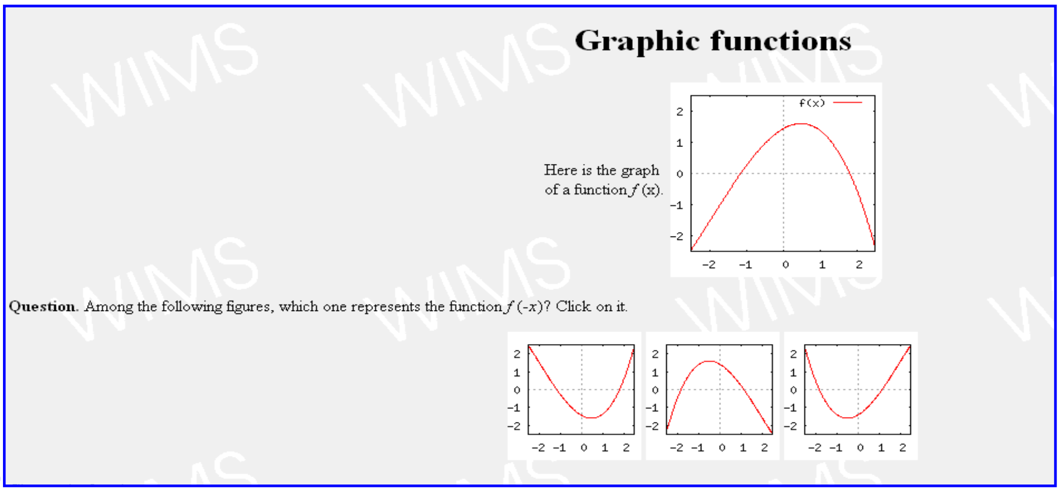
Odpoveď: Je symetrická podľa počiatku súradnicovej sústavy. Príklad: $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$.

Otázka 10: Je funkcia $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ inverzná funkcia sama k sebe? Rozhodnite výpočtom.

Otázka 11: Na obrázku 8.12 sú zobrazené dve funkcie $y = f(x)$. Ktorá z funkcií zobrazuje graf funkcie a) $y = -f(-x)$, b) $y = f(-x)$?



a)



b)

Obrázok 8.12: Interaktívna výučba: Urči k danej funkcii hľadané grafy funkcií
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=9ED404A7F6.6&lang=en&cmd=new&module=H5%2Fanalysis%2Fgraphfunc.en&listype=1&repeat=1

Kontrolné otázky

1. Čo je nutnou podmienkou aby funkcia mohla byť párna alebo nepárna?

2. Je funkcia $F(x) = e^{x} + \cos x + e^{-x}$ párna, alebo nepárna?

3. Definujte funkciu zloženú a uveďte dva príklady zložených funkcií.

8.3 Grafy vybraných funkcií

Cieľom tohto paragrafu je zopakovať si základné funkcie, s ktorými sa vo fyzike často pracuje a je dôležité, aby ste ich pri aplikáciách bezproblémovo zvládali.

A) Goniometrické funkcie:

Definícia 8.13 Goniometrické funkcie

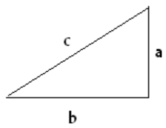
Goniometrickými (tiež trigonometrickými) funkciami nazývame funkcie:
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{cotg}\, x$, $y = \sec x$ a $y = \mathrm{cosec}\, x$, z ktorých sa najčastejšie používajú prvé štyri. Pre ostrý uhol ($0 \le \alpha \le 90^0$) definujeme tieto funkcie pomocou pravouhlého trojuholníka (obr. 8.13):

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, t.j. pomer protiľahlej odvesny ku prepone, $D_f = R$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$ (obr. 8.14);

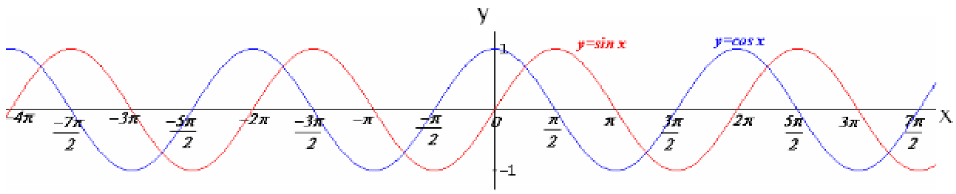
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, t.j. pomer priľahlej odvesny ku prepone, $D_f = R$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$ (obr. 8.14);

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$, t.j. pomer protiľahlej odvesny ku priľahlej odvesne,
$D_f = R/(x \neq (2k+1)\pi/2)$, pre k = 0, 1,..., $H_f = (-\infty, \infty)$; (obr. 8.15);

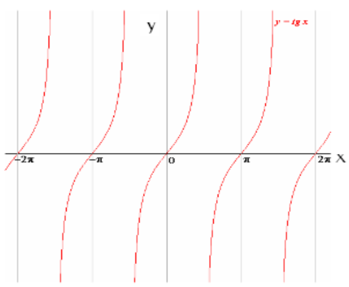
$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\cos x}{\sin x}$ t.j. pomer priľahlej odvesny ku protiľahlej odvesne, $D_f = R/(x \neq k\pi$,
pre k = 0, 1,..., $H_f = (-\infty, \infty)$; (obr. 8.16).

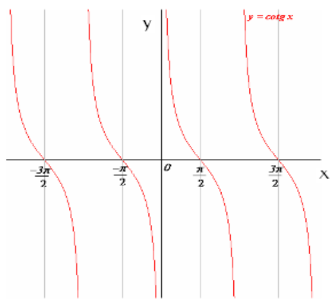


Obrázok 8.13: Pravouhlý trojuholník



Obrázok 8.14: Grafy funkcií $y = \sin x$, $y = \cos x$,





Obrázok 8.15: Graf funkcie $y = \mathrm{tg}\, x$

Obrázok 8.16: Graf funkcie $y = \mathrm{cotg}\, x$

S goniometrickými funkciami sa viaže vlastnosť periodičnosť funkcie, ktorú si definujme.

Definícia 8.14 – Periodická funkcia

Nech $y = f(x)$ je funkcia s D_f a l je kladné reálne číslo. Nech:

1. pre každé $x \in D_f$ aj $x \pm l \in D_f$ (8.8)
2. $f(x) = f(x \pm l)$ (8.9)

funkcia sa nazýva periodická. Najmenšie kladné reálne číslo l, pre ktoré platia vyššie uvedené podmienky, sa nazýva základná perióda funkcie.

Otázka 12 : Sú funkcie $y = \sin x$ a $y = \cos x$ periodickými funkciami? Ak áno, s akou najmenšou periódou?

Odpoveď: Áno, pretože zámenou $x \to x \pm 2\pi$ sa hodnota funkcií nezmení. Najmenšia perióda je $l = 2\pi$.

Otázka 13 : Sú funkcie $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, periodickými funkciami? Ak áno, s akou najmenšou periódou?

Odpoveď: Áno, pretože zámenou $x \to x \pm \pi$ sa hodnota funkcií nezmení. Perióda $l = \pi$.

Príklad 8.10: Zistite, či funkcia $y = \cos(2x-1)$ je periodická funkcia s periódou 2π.

Riešenie:

Daná funkcia je definovaná na R, takže vzťah (8.8) je splnený. Overíme platnosť podmienky určenej vzťahom (8.9):

$$\cos(2x-1) \overset{?}{=} \cos[2(x+2\pi)-1] \qquad (*)$$

Vzťah (*) upravíme použitím vzťahu pre kosínus súčtu, resp. rozdielu dvoch uhlov:

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$, takže dostávame:

$\cos[2(x+2\pi)-1] = \cos[(2x-1)+4\pi] = [\cos(2x-1)]\cos 4\pi - [\sin(2x-1)]\sin 4\pi =$

$[\cos(2x-1)] .1 - [\sin(2x-1)] .0 = \cos(2x-1) \Longrightarrow \cos(2x-1)$ je periodická s periódou 2π.

Príklad 8.11: Zistite, či funkcia $y = \sin(3x/2)$ je periodická funkcia. Ak áno, určite jej základnú periódu.

Riešenie:

Daná funkcia je definovaná na R, takže vzťah (8.8) je splnený. Zistíme, za akej podmienky pre periódu l platí :

$\sin(3x/2) = \sin[3(x+l)/2$, t.j. budeme počítať $\sin[3(x+l)/2] - \sin(3x/2) = 0$

Príklad 8.11: pokračovanie riešenia

Počítajme použitím vzťahu pre rozdiel goniometrických funkcií:

sin α - sin β = 2[cos (α+ β)/2]sin(α- β)/2,

takže dostávame:

sin[3(x+l)/ 2] - sin (3x/2)= 2[cos (3x+3l +3x)/4]sin3l/4 = 0 (*)

Aby sa pravá strana rovnala nule vo vzťahu (*) musí platiť

sin3l/4 = 0 $\Longrightarrow$ 3l/4 = kπ pre k € Z. Pre základnú periódu k =1, takže: l = 4π/3

Funkcia je periodická so základnou periódou 4π/3.

Ďalšie príklady môžete čitateľ nájsť na http://pdf.truni.sk/pokorny/mpi/index.htm. Pre rýchle výpočty vo fyzike často treba poznať hodnoty goniometrických funkcií niektorých uhlov a je ich dobré vedieť naspamäť. Ich hodnoty uvádza Tabuľka 8..

Tabuľka 8.1: Hodnoty vybraných hodnôt goniometrických funkcií

Uhol/funkcia	0^0	30^0 $(\frac{\pi}{6})$	45^0 $(\frac{\pi}{4})$	60^0 $(\frac{\pi}{3})$	90^0 $(\frac{\pi}{2})$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie je definovaný
cotg α	nie je definovaný	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Poznámka:

1. Ak si uvedomíme, že sin x je posunutý vzhľadom na funkciu cos x o 90°, hodnoty kosínusu dostaneme z druhého riadku tabuľky, ak budeme postupovať z pravej strany do ľavej, počítajúc od nulovej hodnoty stupňa.

2. Grafy funkcií si môžete interaktívne zostrojiť aj na interaktívnej stránke: http://www.mathsisfun.com/data/function-grapher.php.

Goniometrické funkcie nie sú prosté, preto ak chceme určiť k nim inverzné funkcie, musíme zúžiť definičný obor na taký interval, v ktorom je funkcia prostá (rastúca, alebo klesajúca). Pre funkciu sin α berieme interval $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, na ktorom je funkcia rastúca a nadobúda funkčné hodnoty <-1, 1>. Ak vymeníme $x \Longrightarrow y$ dostaneme inverznú funkciu:

B) Cyklometrické funkcie:

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, že trigonometrickými funkciami priraďujeme určitému uhlu α odpovedajúcu hodnotu y príslušnej trigonometrickej funkcie. Môžeme nastoliť obrátenú úlohu: Nájdenie uhla α, ktorému prislúcha daná hodnota y príslušnej trigonometrickej funkcie. Toto riešenie zapisujeme v tvare $x = \arcsin y$, $x = \arccos y$, $x = \text{arctg}\, y$ a $x = \text{arccotg}\, y$. Tieto cyklometrické funkcie (inverzné trigonometrické funkcie) majú jednoduchý význam: arcsin y je arkus uhla, ktorého sínus je rovný y.

Definícia 8.15 - Cyklometrické funkcie

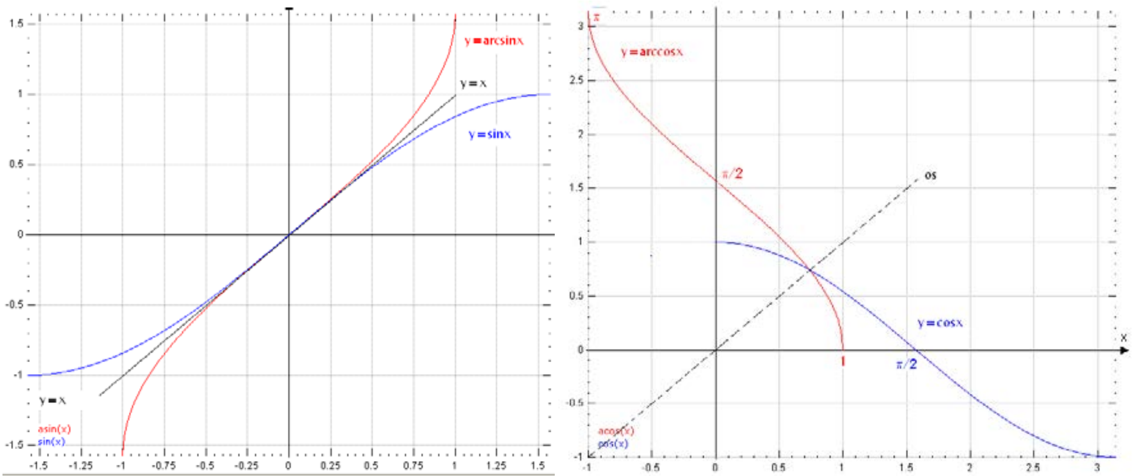
Inverzné funkcie ku goniometrickým funkciám existujú na takom zúženom intervale, kde sú prosté (monotónne) a nazývame ich cyklometrické funkcie:

arkussínus: $y = \arcsin x$ pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $H_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, (obr. 8.17 a) je inverzná funkcia k $y = \sin x$,

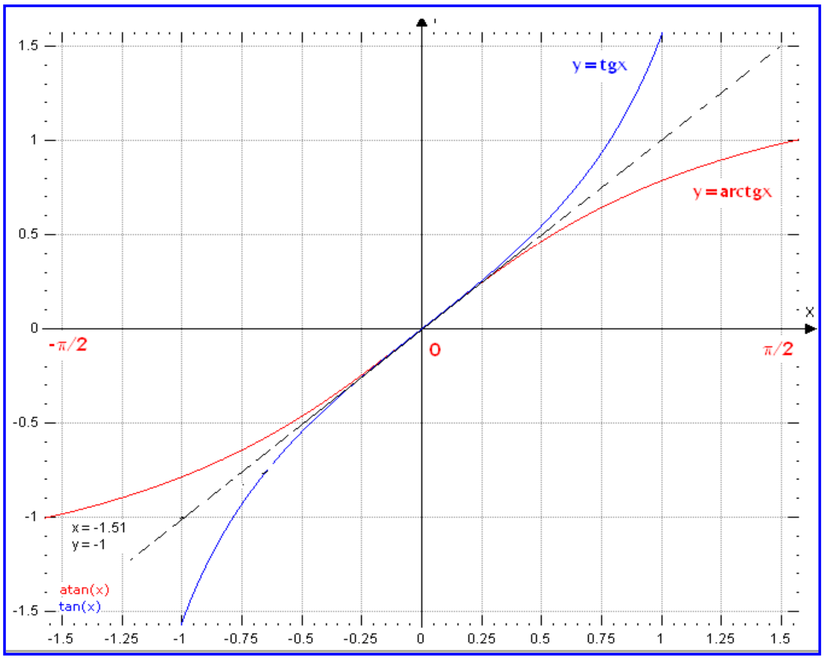
arkuskosínus: $y = \arccos x$ pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $H_f = \langle 0, \pi \rangle$, (obr. 8.17b) je inverzná funkcia k $y = \cos x$,

arkustangens: $y = \text{arctg}\, x$ pre $x \in (-\infty, \infty)$, $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, (obr. 8.18) je inverzná funkcia k $y = \text{tg}\, x$,

arkuskotangens: $y = \text{arccotg}\, x$ pre $x \in (-\infty, \infty)$, $H_f = (0, \frac{\pi}{2})$, je inverzná funkcia k $y = \text{cotg}\, x$.



Obrázok 8.17: Graf funkcie a k nej inverznej funkcie a) $y = \sin x$ a $y = \arcsin x$
b) $y = \cos x$ a $y = \arccos x$



Obrázok 8.18 : Graf funkcie y = tg x a k nej inverznej funkcie y =arccotg x

C) Exponenciálna a logaritmická funkcia:

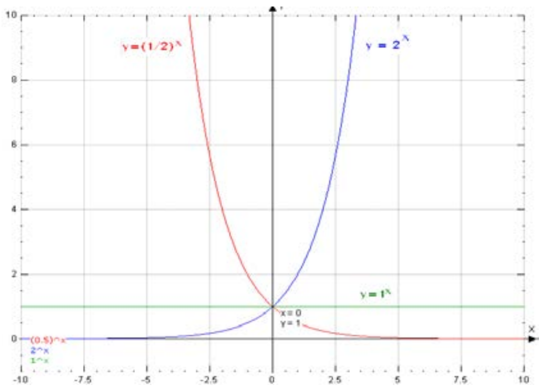
Definícia 8.16 - Exponenciálna funkcia

Exponenciálna funkcia v najjednoduchšom tvare je mocnina s konštantným základom a a premenným exponentom

$y = a^x$

s nasledovnými vlastnosťami (Obr. 8.19):

1. Pre každé reálne x a pre každé $a>0$ platí $a^x>0$, graf leží nad osou x,
2. Pre každé $a>0$ sa $a^0=1$, pre $x=1$ a $y=a^1=a$,
3. Ak $x_1< x_2$: pri $a>1$ $a^{x_1} < a^{x_2}$ – funkcia je rastúca,
   pri $a<1$ $a^{x_1} > a^{x_2}$ – funkcia je klesajúca,
   pri $a=1$ – funkcia je konštantná.



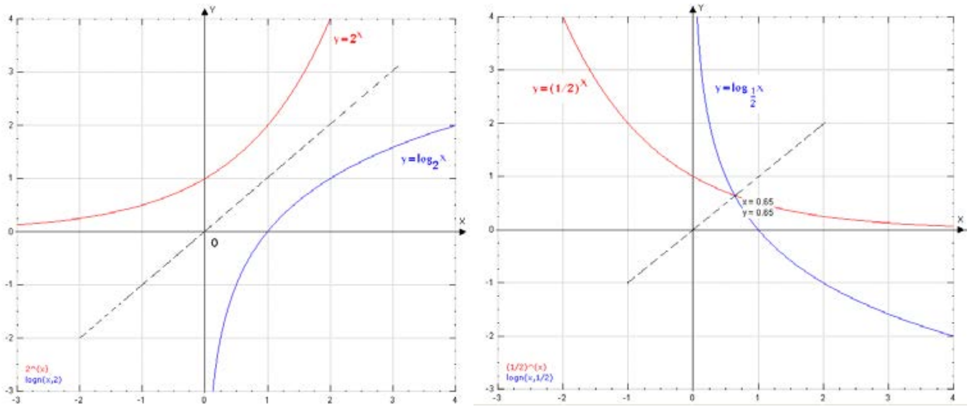
Obrázok 8.19: Grafy exponenciálnych funkcií pre rôzny základ a

Definícia 8.17 - Logaritmická funkcia

Exponenciálna funkcia a^x ($a > 0$, $a \neq 0$) je prostá, preto existuje k nej inverzná funkcia, ktorú voláme logaritmická funkcia pri základe a:

$$y = \log_a x \ ,$$

kde $x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$) (Obr. 8.20).



a) b)

Obrázok 8.20: Grafy exponenciálnej a k nej inverznej funkcii-logaritmickej pre: a) $a = 2$, b) $a = 1/2$

Z grafov na obr. 8.20 vidieť, že graf logaritmickej funkcie je súmerne združený s exponenciálnou krivkou s tým istým základom podľa osi prvého a tretieho kvadrantu ($y = x$). Vlastnosti logaritmickej funkcie vyplývajú z vlastností exponenciálnej funkcie:

1. Je definovaná len pre $x > 0$, preto sa graf funkcie nachádza napravo od osi y, prechádza bodmi [1, 0] a [a, 1]. Os $y = x$ *je* asymptotou grafu.
2. Je rastúca pre $a > 1$, klesajúca pre $0 < a < 1$.
3. Grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{1/a} x$ sú súmerne združené podľa osi x.

Pri výpočtoch sa najčastejšie používa dekadický a prirodzený logaritmus. Dekadický logaritmus má základ 10 a píšeme ho bez základu, t.j. $\log x$. Vo fyzike sa však často stretneme s logaritmami, ktorých základom je iracionálne číslo e = 2,718..., ktoré sa nazýva Eulerove číslo. Tieto logaritmy sa nazývajú prirodzené a namiesto $\log_e x$ píšeme $\ln x$, čo je odvodené z logaritmus naturalis.

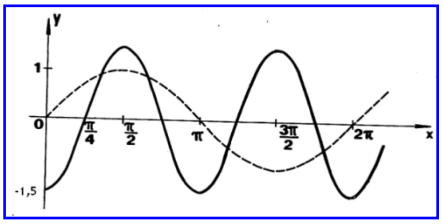
Poznámka: Často potrebujeme nájsť $\log x$ ak poznáme $\ln x$ a obrátene. Ich súvis si ukážeme úpravami :

$y = \ln x$ (1) $\Longrightarrow$ $x = e^y$ (2)

Rovnicu (2) logaritmujme so základom 10: $\log x = y \log e = \ln x \log e$,
kde sme za y dosadili vzťah (1) a za $\log e = 0{,}43429$, takže približne platí: $\ln x \approx 2{,}3 \log x$.

PDDA

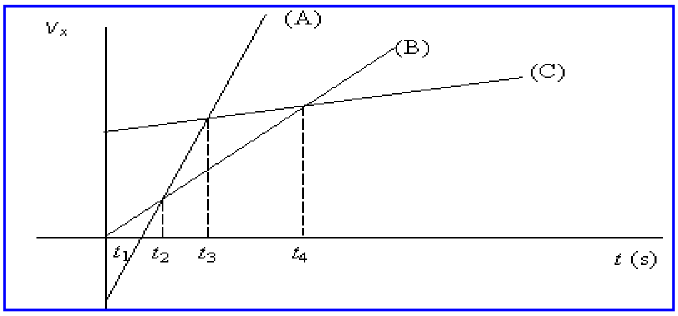
Úloha 13: Zistite, aké grafy sú na obrázku 8.21 a napíšte ich matematické vyjadrenie.



Obrázok 8.21: Grafy hľadaných funkcií

Úloha 14: Na obrázku 8.22 sú znázornené grafy závislosti veľkosti rýchlosti ako funkcia času pre tri častice (A), (B), (C), pohybujúce sa priamočiaro rôznou rýchlosťou. Určuje priesečník grafu s osou závisle premennej počiatočnú rýchlosť jednotlivých častíc? Objasnite význam priesečníkov grafov s osami a priesečníkov grafov.

Úloha 15: Na obrázku 8.22 sú znázornené grafy závislosti veľkosti rýchlosti ako funkcia času pre tri častice (A), (B), (C), pohybujúce sa priamočiaro rôznou rýchlosťou. Je poradie telies (B), (A), (C) v časovom intervale (t_2 , t_3) zoradené podľa rýchlosti týchto telies od najmenšej po najväčšiu? Zoraďte častice podľa stúpajúcej rýchlosti v jednotlivých časových intervaloch.



Obrázok 8.22: Grafy závislosti veľkosti rýchlosti ako funkcia času t pre tri častice A, B, C

Úloha 16: Nakreslite graf funkcie y = cotg x a k nej inverznej funkcie .

Úloha 17: Nájdite, na akom intervale existuje k funkcii $y = x^2$ funkcia inverzná. Nakreslite!

Úloha 18: Zistite, či funkcia $f(x) = \dfrac{x^3 - \mathrm{tg}x}{5x - \sin x}$ je párna, alebo nepárna.

Kontrolné otázky

1. Uveďte, ktoré funkcie sme uviedli v časti 8.3. Určite ich D_f , H_f a nakreslite ich grafy.

8.4 Limita funkcie

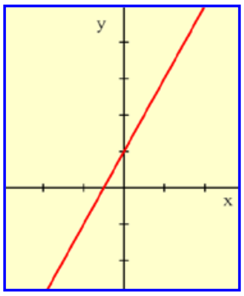
Skúmajme funkciu $y = f(x) = \frac{x-2x^2+1}{1-x}$. Funkcia je definovaná pre všetky $x \neq 1$. Upravme si tvar funkcie, tak aby sme mali v čitateli klesajúce mocniny :

$y = f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{1-x} = \frac{-(2x^2-x-1)}{-(x-1)} = \frac{2x^2-x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}$.

Pre $x \neq 1$ môžeme zlomok vykrátiť:

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x + 1 \,.$$

Keby nebolo „zakázaného" čísla $x \neq 1$, daná funkcia by bola klasickou lineárnou funkciou a jej grafom by bola priamka (obr. 8.23). Ako sa zmení graf, keď máme „zakázaný" bod x=1? Teraz sa pozrieme na to ako sa správa funkcia v okolí čísla x = 1.



Obrázok 8.23: Graf lineárnej funkcie $y = 2x+1$

Aby sme zistili ako sa správa funkcia v okolí čísla x = 1, zostavme si tabuľku.

Tabuľka 8.2: Správanie sa funkcie $f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}$ v okolí bodu x = 1

x	0,9	0,99	0,999............	1,0001	1,01	1,1
$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

Z Tabuľky 8.2 vidíme, že hodnoty funkcie $f(x)$ sú blízke číslu 3 (sú v okolí čísla 3), keď hodnoty premennej x sa málo líšia od čísla 1 (hovoríme, že sú z okolia čísla 1).

Definícia 8.18 - Definícia δ -okolia bodu

Pod „δ -okolím" čísla (bodu) a rozumieme otvorený interval $(a-\delta,\ a+\delta)$, ktorý obsahuje číslo a, pričom $\delta > 0$ (je to tzv. symetrické okolie).

Zvoľme si ľubovoľne malé číslo $\varepsilon > 0$ (napr. $\varepsilon = 0{,}001$) a hľadajme, pre ktoré hodnoty premenne x padnú príslušné hodnoty funkcie $f(x)$ do okolia $(3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$ čísla 3 (t.j. ε-ové okolie bodu 3). Zrejme musí platiť

$|f(x) - 3| < \varepsilon$

$|\,2x+1 - 3\,| = |\,2x - 2\,| = 2|\,x - 1\,| < \varepsilon$

$|\,x - 1\,| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta.$

Hodnoty premennej x musia byť z okolia ($1- \frac{\varepsilon}{2}$, $1+ \frac{\varepsilon}{2}$) čísla 1, pričom $x \neq 1$. Pre $\varepsilon = 0{,}001$ hodnoty $f(x)$ budú v intervale (2, 999; 3,001), keď x bude z intervalu (0,9995; 1,0005). Čím menšie číslo $\varepsilon > 0$ si zvolíme, tým menšie je príslušné $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$) . Hovoríme, že funkcia má v bode $x = 1$ limitu 3 a píšeme

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x+1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (2x+1) = 3$$

Definícia 8.19 - Definícia limity

Ak k ľubovoľne malé číslo $\varepsilon > 0$ existuje také kladné číslo $\delta > 0$, že pre všetky $x \neq a$ vyhovujúce nerovnosti $|\,x - a\,| < \delta$ platí

$|\,f(x) - b\,| < \varepsilon$,

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode a limitu b, čo píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Poznámka:

Aký má priebeh funkcia $f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}$ so zakázaným bodom jedna? Dozvieme sa to, v nasledujúcej kapitole, keď preberieme derivácie funkcie a prejdeme na priebeh funkcie. Nezabudnite si urobiť jej priebeh!

Jednostranné limity :

O jednostranných limitách hovoríme, keď sa blížime sprava alebo zľava k bodu a. Hovoríme o limite sprava, keď sa blížime sprava t.j. $x \to a+$, resp. blížime sa z ľava $x \to a^-$, hovoríme o limite zľava.

Veta 8.2 : Existencia limity

Ak platí pre jednostranné limity rovnosť, t.j. $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = b$,
potom existuje limita funkcia $f(x)$v bode a rovná číslu b, čo píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = b$.
o vlastnej limite vo vlastnom bode, ak a aj b sú konečné čísla.

Definícia 8.20 - Vlastná a nevlastná limita

Ak platí: a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ hovoríme o vlastnej limite vo vlastnom bode, ak a aj b sú konečné čísla, t.j. (a, b ∊ R);

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, hovoríme o nevlastnej limite (b = ∞) vo vlastnom bode a;

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, hovoríme o nevlastnej limite (b = ∞) v nevlastnom bode $a \to \infty$;

d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, hovoríme o vlastnej limite (b ∊ R) v nevlastnom bode $a \to \infty$.

Význam pojmov z definície 8.20 si ukážeme na príklade:

Príklad 8.12: Rozhodnite, či funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ má nevlastnú limitu a v akom bode. Určite akého typu sú tieto limity.

Riešenie:

Určíme definičný obor $f(x) = \frac{1}{x}$, ktorý je R -{0}, čo znamená, že nie je definovaná len v bode nula. Vypočítajme nasledujúce limity:

a) $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ → jedná sa o nevlastnú limitu sprava vo vlastnom bode 0;

Pomôcka: Znamienko nekonečna určíme, že zo znamienka podielu , keď dosadíme ľubovoľne malú hodnotu blízku k nule z pravej strany, napr. 0,001, takže dostávame

$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \to \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0{,}001} = \frac{+}{+} = +\infty$;

b) $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, → jedná sa o nevlastnú limitu zľava vo vlastnom bode 0;

Pomôcka: Znamienko nekonečna určíme, že zo znamienka podielu , keď dosadíme ľubovoľne malú hodnotu blízku k nule z ľavej strany nuly, t.j. napr. -0,001, takže

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-0{,}001} = \frac{+}{-} = -\infty .$$

c) Nakoľko $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, podľa Vety 8.2

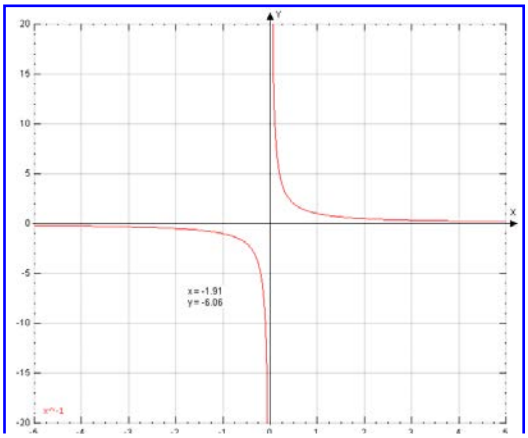
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists$ (neexistuje);

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$; jedná sa o vlastnú limitu v nevlastnom bode ∞;

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$; jedná sa o vlastnú limitu v nevlastnom bode -∞;

f) $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, pre všetky x ∊ R, $x \neq 0$, jedná sa o vlastnú limitu vo vlastnom bode a.

g) Naznačené výpočty graficky prezentuje obr. 8.24:



Obrázok 8.24 Graf funkcie $y = 1/x$

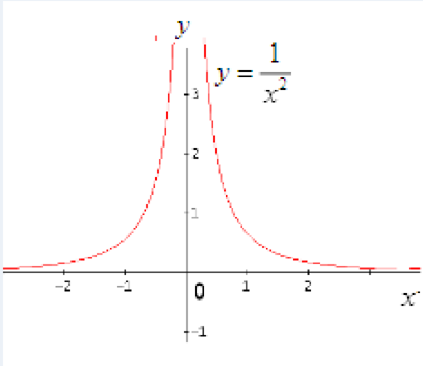
Príklad 8. 13: Určite jednostranné limity v bode nula pre funkcie: a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, b) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ a rozhodnite, či limita v bode nula existuje. Ak áno, určite ju a načrtnite grafy. Nakreslite grafy funkcií.

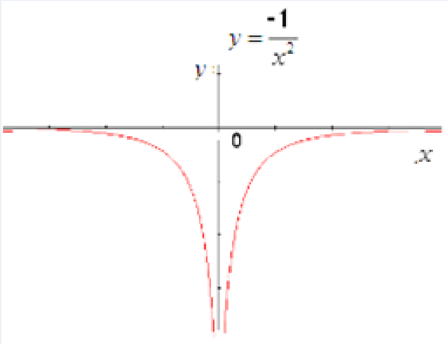
Riešenie:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2} = +\infty$ a $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^2} = +\infty$, pretože štvorec čísla je vždy kladná veličina. Nakoľko platí $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^2} = +\infty \to \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$. Jedná sa o nevlastnú limitu vo vlastnom bode.

b) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\lim_{x\to 0+} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ a $\lim_{x\to 0-}\frac{-1}{x^2} = -\infty$, pretože štvorec čísla je vždy kladná veličina a celkové znamienko zlomku je záporné. Nakoľko platí $\lim_{x\to 0+}\frac{-1}{x^2} = \lim_{x\to 0-}\frac{-1}{x^2} = -\infty \to \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2} = -\infty$.

. Grafy skúmaných funkcií prezentuje obr. 8.25:





Obrázok 8.25: Graf funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2}$, (vľavo) a $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ (vpravo)

Veta 8.3

Ak funkcie *f*(x) a g(x) majú v bode a limity: $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{b}$, $\lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{c}$, tak platia nasledovné vlastnosti:

a) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{b} \pm \mathrm{c}$,

b) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{b}.\mathrm{c}$,

c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}$, ak $\lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{c} \neq 0$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Príklad 8. 14: Vypočítajte $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|}$.

Riešenie:

Príklad budeme riešiť pre dva intervaly: a) $x > 1$, kedy $|x-1| = x-1$

a) $x < 1$, kedy $|x-1| = -(x-1)$.

Riešme prípady postupne obidva prípady:

a) t.j. pre $x > 1$ $\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$

b) $\quad \lim_{x\to 1-} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2+2x-3}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{(x-1)(x+3)}{-(x-1)} = -4$.

V zmysle vety 8.2 vidíme, že limita funkcie sprava sa nerovná limite funkcie zľava, takže limita v bode 1 neexistuje.

Otázka 14: V ktorých bodoch má funkcia $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ nevlastné limity?

Riešenie: Funkcia nie je definovaná pre $x \neq \pm 1$. V týchto bodoch vypočítame limity:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(0{,}99)^2} = \frac{+}{+} = \infty\,. \quad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(1{,}09)^2} = \frac{+}{-} = -\infty\,.$$

$$\lim_{x\to -1-} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(-1{,}1)^2} = \frac{+}{-} = -\infty\,. \quad \lim_{x\to -1+} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-(-0{,}9)^2} = \frac{+}{\mp} = \infty\,.$$

Výpočet limít nám uľahčí poznanie nasledovných viet:

Veta 8. 4

Ak funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú v bode a limity: $\lim_{x\to a} f(x) = \text{b}$, $\lim_{x\to a} g(x) = \text{c}$, tak platia nasledovné vlastnosti:

a) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = \text{b} \pm \text{c}$,

b) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = \text{b.c}$,

c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}$, ak $\lim_{x\to a} g(x) = \text{c} \neq 0$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Poznámka:

Vlastnosti, ktoré určuje veta 8.3 možno za istých podmienok aplikovať aj pre nevlastné body a aj nevlastné limity. Napríklad pre:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \text{c}$, potom $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty + \text{c} = \infty$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, potom $\lim_{x\to a} f(x)\text{g}(x) = \infty.\infty = \infty$.

Ak robíme operácie s dvomi funkciami, pre limity môžeme dostať výrazy typu: ∞ - ∞, $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0.\infty$. Vetu 8.3 v týchto prípadoch nemôžeme použiť. Limity týchto typov počítame vhodnou úpravou, alebo pomocou tzv. L´Hospitalového pravidla, s ktorým sa v prípade záujmu, čitateľ môže oboznámiť v literatúre. (Napríklad Híc P., Pokorný M.: Matematika pre informatikov a prírodné vedy, PdF TU, http://pdfweb.truni.sk/pokorny/mpi/index.htm)

Použitie L´Hospitalovho pravidla si ukážeme v nasledujúcej kapitole, po prebratí derivácií.

Príklad 8.15: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Príklad 8.16: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x - x^2}{2x^2 + 1}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x - x^2}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x - x^2}{x^2}}{\frac{2x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Príklad 8.17: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2.$$

Príklad 8.18: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)\cos x}{x\sin 2x}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)\cos x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)\cos x}{x.2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x.2}=\frac{1}{2}$$

Príklad 8.19: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin 2x}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin^2\frac{x}{2})}{x.2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}.2\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin 2\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$

$$=1.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.1=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}.1=\frac{1}{4}$$

Príklad 8.20: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\left\{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-x)\right\}}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\frac{1}{2}\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-x)\right\}}{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-x)}\right\}^2=\frac{1}{2}$$

Pri definícii prirodzených logaritmov sme si uviedli, že ich základ je číslo e. Toto číslo je limitou postupnosti $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$. Ak nahradíme limitu postupnosti limitou funkcie, možno dokázať, že platí aj vzťah:

Veta 8.5 !!!

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$, a z neho odvodený tvar: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x=\mathrm{e}^{\alpha}$

Príklad 8.21: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x+3}$.

Riešenie:

$$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x+3} = \left\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}\right\}^{2} \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{3} = e^2.1 = e^2$$

Príklad 8.22: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{4x})^{-x+1}$.

Riešenie:

$$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{4x})^{-x+1} = \left\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{4x})^{\frac{4}{4}x}\right\}^{-1} \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{1} = \left\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{4x})^{4x}\right\}^{\frac{-1}{4}}.1 = e^{\frac{-1}{4}}.$$

Poznámka. Pre niektorých je výhodnejší spôsob zavedenia substitúcie výrazu v menovateli zlomku:

$$4x = z \to x = \frac{z}{4} \to \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{4x})^{-x+1} = \lim\limits_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{-\frac{z}{4}+1} = \lim\limits_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{-\frac{z}{4}} \lim\limits_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z}) = e^{\frac{-1}{4}}$$

Príklad 8.23: Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-4}{3x+2})^{\frac{x+1}{3}}$.

Riešenie:

$$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-4}{3x+2})^{\frac{x+1}{3}} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+2-2-4}{3x+2})^{\frac{x+1}{3}} = \left\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-6}{3x+2})^{x}\right\}^{\frac{1}{3}} \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-6}{3x+2})^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{3x+2}{-6}})^{x}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{(-6z-2)/3}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{z}\right\}^{\frac{-2}{3}} \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{-2/9} = e^{\frac{-2}{3}}$$

V postupe sme zaviedli substitúciu: $\frac{3x+2}{-6} = z \Longrightarrow x=(-6z-2)/3$ a dosadili.

Ďalšie príklady nájdete napríklad na adrese:
http://www.analyzemath.com/calculus/limits/find_limits_functions.html.

Kontrolné otázky

1. Objasnite pojem spojitej a nespojitej funkcie a uveďte tri príklady.

2. Objasnite pojem limita funkcie vo vlastnom bode a nevlastnom bode. Uveďte príklady.

3. Vysvetlite na príklade význam nevlastná limita vo vlastnom bode.

4. Vysvetlite na príklade význam nevlastná limita v nevlastnom bode.

5. Vyslovte základné vety, ktoré používame pri výpočte limít funkcií.

6. Uveďte príklad známej limity funkcie pre $x \to \infty$, ktorej hodnota je e.

7. Vysvetlite pojem okolie bodu a zapíšte ho kvantitatívne.

PDDA

Úloha 19: Určite Df a H$_f$ funkcie a nakreslite jej graf: a) .y = -3x^2 + 6x + 2 b)

b) $f: y = 2x^2 - 6x + 4$

Úloha 20: Určite definičný obor funkcie $y = \arccos\dfrac{4-x}{4} + \ln(3x-2)$

Úloha 21: Zistite, či funkcie $\sqrt{\sin x}$ a $\sin^2 x$ sú periodické a určite ich periódu.

Úloha 22: Zistite, či sú ohraničené funkcie: a) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, b) $g(x) = \sin^2 x$,

c) $F(x) = x^2 + \sin^2 x$

Úloha 23: Určite inverznú funkciu k funkcii f: $y = 3x - 2$.

Úloha 24: Vypočítajte limitu: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-5n^3+8}{10n^3+9}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-n^4-2}{n^3-3}$.

Úloha 25: Vypočítajte limitu: a) $\lim\limits_{x\to\infty} 10\dfrac{6x+3}{\sqrt{x}+2x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-2x}(x+1)^{2x-5}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Úloha 26: Vypočítajte limitu: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+5}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Kapitola 9

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

Učebné ciele:

- Zvládnuť pochopenie základných pojmov súvisiacich s diferenciálnym počtom.
- Vypočítať derivácie elementárnych, zložených a vybraných funkcií jednej premennej.
- Vedieť určiť derivácie vyšších rádov a pochopiť ich význam.
- Byť schopný využiť diferenciálny počet na skúmanie priebehu funkcie.
- Vedieť aplikovať diferenciálny počet pre využitie vo fyzike a v praxi.
- Naučiť sa využívať interaktívne WWW stránky na kontrolu svojich výpočtov a na konštrukciu priebehu funkcií.

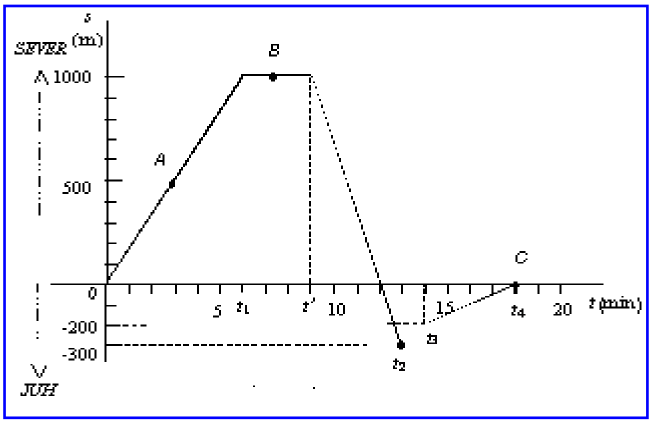
Kľúčové slová: Spojitosť funkcie, derivácia funkcie, geometrický a fyzikálny význam derivácie, základné pravidlá pre deriváciu vybraných funkcií, derivácie vyšších rádov, stacionárny bod, lokálne a globálne extrémy funkcie, konvexnosť a konkávnosť funkcie, inflexný bod, asymptoty grafu funkcie, priebeh funkcie.

Požadované vedomosti: Znalosť základnej matematiky z oblasti funkcie jednej premennej.

Základy diferenciálneho počtu položil koncom 17. Storočia Isaac Newton - anglický matematik, fyzik a astronóm a nemecký filozof a matematik Gottfried Wilhem Leibnitz. Zavedenie pojmu derivácie zohralo významnú úlohu ako v matematickej analýze, tak i vo fyzike, kde k tomuto pojmu prispelo štúdium pohybu po priamke. Bolo totiž žiaduce zadefinovať okamžitú rýchlosť a okamžité zrýchlenie. Uvidíme, že pojem derivácie je špeciálnym prípadom limity.

Motivácia

Sir Isaac *Newton*
(1664-1727)*



G. W. Leibnitz
(1646 – 1716) **

Obrázok 9.1: Grafu časovej závislosti polohy pri priamočiarom pohybe.
Možno určiť rýchlosť s akou sa pohybuje objekt v jednotlivých časových intervaloch?

*http://www.google.sk/imgres?imgurl=http://scienceblogs.com/startswithabang/files/2011/02/newton.jpeg&imgrefurl=http://scienceblogs.com/startswithabang/2011/02/24/what-newtons-3-laws-can
**https://www.google.sk/search?q=Gottfried+Wilhem+Leibnitz+picture&ie=utf-8&oe=utf-8&aq=t&rls=org.mozilla:sk:official&client=firefox-a

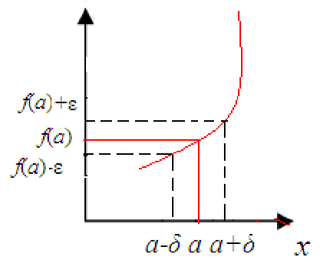
9.1 Spojitosť funkcie

Definícia 9.1 - Spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je spojitá v bode a, keď platí

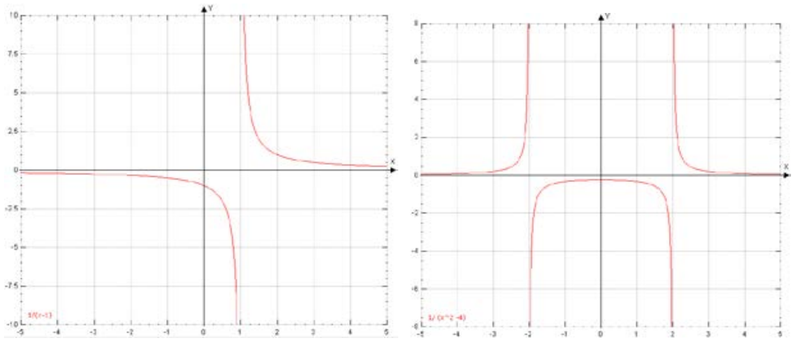
$$\lim f(x)_{x \to a} = f(a) \qquad (9.1)$$

Poznámka: Funkcia $f(x)$ je spojitá v bode a, ak ku každému ľubovoľne malému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre všetky čísla x, ktoré spĺňajú nerovnosť $|x - a| < \delta$, platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (obr. 9.2).



Obrázok 9.2: K objasneniu pojmu spojitosť funkcie

V predchádzajúcej kapitole sme si ukázali, že kým pre existenciu limity hodnota funkcie $f(a)$ nehrá žiadnu úlohu (nezáleží, či je konečná, alebo dokonca, či je v tomto bode definovaná), pre spojitosť funkcie v bode a je dôležité, aby funkcia v ňom bola definovaná a jej limita sa rovnala hodnote funkcie v bode a. Názornú predstavu o spojitosti funkcie nám umožňuje graf tejto funkcie. Každá nespojitosť funkcie sa prejaví prerušením jej grafu. Na obrázku 9.3 vidíme body nespojitosti funkcií: a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$.



a) b)

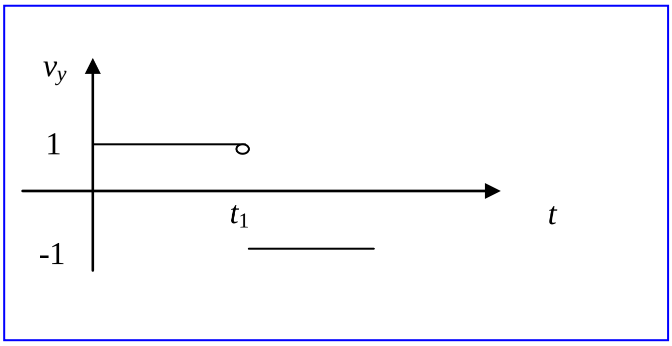
Obrázok 9.3: Grafy funkcií a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$

Definícia 9.2 - Spojitosť funkcie na intervale

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je spojitá v určitom intervale, ak je spojitá v každom bode tohto intervalu.

PDDA

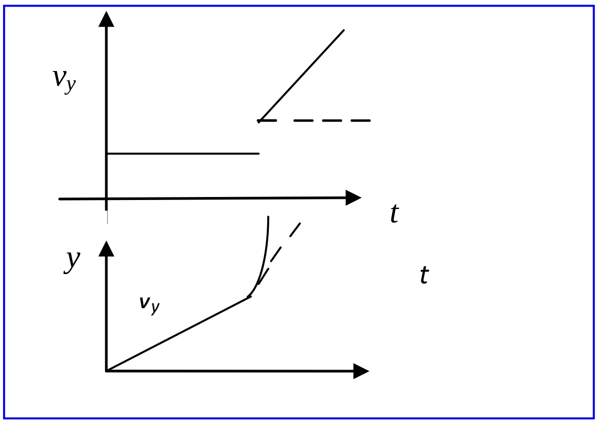
Úloha 1: Rozhodnite, či daná funkcia na obrázku 9.4 je spojitá a vyjadrite ju matematickým zápisom. Vedeli by ste priradiť v reálnom svete reálny dej popísaný funkciou určenou graficky?



Obrázok 9.4: K úlohe 1

Úloha 2: Na základe grafov na obrázku 9.3 určite, či dané funkcie sú spojité na intervale:
a) $(-\infty,-3)$, b) $(-\infty, 0)$, c) $(0, \infty)$, d) $(3, \infty)$.

Úloha 3: Meteorologický balón so záťažou stúpa v atmosfére. Pozorovateľ meria jeho pohyb vzdialene. Nameria dáta pre polohu y a rýchlosť v_y stúpania vyjadrené grafmi nižšie (obr. 9.5). Môže takúto skutočnosť v realite pozorovať? Ak áno, z akého dôvodu.



Obrázok 9.5: K úlohe 3

Úloha 4: Biliardová guľa letí konštantnou rýchlosťou. Pružnou zrážkou (bez straty energie) narazí na stenu a odrazí sa kolmo do opačného smeru (t.j. rovnakou veľkosťou rýchlosti). Graficky znázornite časovú závislosť rýchlosti biliardovej gule. Zvážte, či sa jedná o spojitú, alebo nespojitú funkciu.

Kontrolné otázky

1. Rozhodnite, či dané funkcie na obrázku 9.3 sú spojité, resp. určité body nespojitosti.

2. Akými funkciami je možné popisovať fyzikálne deje, ktoré sú funkciou času? Svoju odpoveď zdôvodnite. Uveďte príklad.

9.2 Derivácia funkcie jednej premennej, jej fyzikálny a geometrický význam

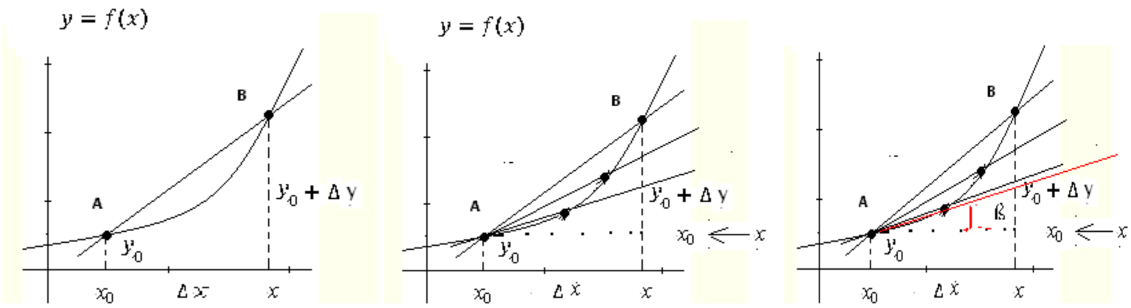
Uvažujme funkciu $y = f(x)$. Spojnica bodov A a B vytvára sečnicu (obr. 9.6a). Rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi A a B v smernicovom tvare možno zapísať:

$$y - y_0 = \mathrm{k}(x - x_0),$$

kde k je smernica priamky, určená vzťahom

$$\mathrm{k} = \frac{y - y_0}{x - x_0}\,.$$

Ak budeme posúvať bod B smerom k bodu A, dĺžka sečnice určená spojnicou bodov AB, sa skracuje, ako prezentuje obr. 9.6b. V limitnom prípade $x \to x_0$, sečnica prejde na dotyčnicu (obr. 9.6c) a dostávame sa k pojmu smernica dotyčnice prostredníctvom derivácie, ktorú určuje definícia 9.3.



a) b) c)

Obrázok 9.6: K objasneniu pojmu derivácia

Definícia 9.3 - Derivácie funkcie

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná v bode x_0 a v istom jeho okolí, a keď existuje vlastná limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{b}, \qquad (9.2)$$

volá sa táto limita derivácia funkcie v bode x_0, čo možno i zapísať

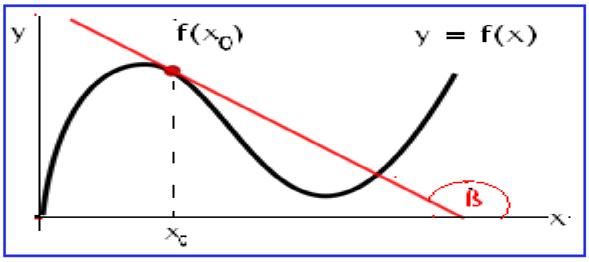
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \mathrm{b}, \qquad (9.3)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Geometrický význam derivácie určuje vzťah

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\,ß = \mathrm{k}\,, \qquad (9.4)$$

t.j. derivácia určuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie v bode x_0 a β je uhol, ktorý zviera dotyčnica grafu funkcie $f(x)$ v bode x_0 s osou x (obr. 9.7).



Obrázok 9.7: Geometrický význam derivácie funkcie v bode x_0

Poznámka:

1. Z existencie derivácie v bode x_0 vyplýva, že funkcia $f(x)$ je spojitá v tomto bode. Keby totiž neplatilo $f(x) \to f(x_0) \to 0$, keď $x \to x_0$, vlastná limita (9.2) by nemohla existovať a funkcia by nemala v bode x_0 deriváciu.

2. Z definície derivácie vyplýva, že limita (9.2) musí byť taká istá, keď $x \to x_0$ sprava aj zľava, čo označujeme (x_0+) a zľava (x_0-).

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\mathrm{b}.$$

Veta 9.1 – O existencii derivácie

Funkcia $f(x)$ definovaná na intervale (a, b) má v bode $x_0 \in (a, b)$ deriváciu, ak pre všetky $x \in (a, b)$ blížiace sa sprava k bodu x_0 (t.j. $x \to x_0^+$) má funkcia jednostrannú deriváciu sprava $f'(x_0)_+{}'$ a pre všetky $x \in (a, b)$ blížiace sa zľava k bodu x_0 (t.j. $x \to x_0^-$) má jednostrannú deriváciu zľava $f'_-{}'$ a tieto jednostranné derivácie sa rovnajú, čo zapíšeme:

$$[f'(x)]'_{x0+} = [f'(x)]'_{x0-} = [f'(x)]'_{x0}.$$

Ozrejmime si význam tejto vety na príklade funkcie $y = |x|$.

Príklad 9.1 Zistite, či existuje derivácia funkcie $y = |x|$ v bode nula.

Riešenie:

Funkcia $y = |x|$ je definovaná na celej množine R predpisom:

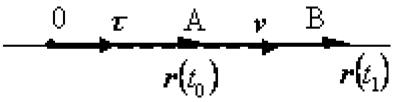
1. Pre $x \in (0, \infty)$ je funkcia $y = |x|$ definovaná: $y = x$.
2. Pre $x \in (-\infty, 0)$ je funkcia $y = |x|$ definovaná: $y = -x$.
3. Počítajme jej jednostranné derivácie v bode nula:

$$[f(x)]'_{0-} = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{-x-0}{x-0} = -1.$$

$$[f(x)]'_{0+} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0+)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x-0} = 1. \quad \rightarrow \quad [f(x)]'_{0-} \neq [f(x)]'_{0+}$$

a teda v zmysle vety 9.1 derivácia funkcie $y = |x|$ neexistuje, napriek tomu, že v tomto bode je funkcia spojitá.

Pojem derivácie hrá významnú úlohu nielen vo fyzike, ale i v prírodných a technických vedách. Stretávame sa s ním v mnohých prípadoch. K jeho zavedeniu viedlo štúdium jednoduchých priamočiarych pohybov. Uvažujme hmotný bod pohybujúci sa rovnomerne po priamke (obr. 9.8). Jeho poloha v časovom okamihu t_0 je určená súradnicou bodu A, ktorá sa rovná vzdialenosti bodov OA, resp. v t_1 vzdialenosti bodov OB. Súradnica bodu určuje v našom prípade dĺžku dráhy hmotného bodu *s*, ktorá je určená dĺžkou polohového vektora *r*(*t*), ktorý je funkciou času *t*.



Obrázok 9.8: Poloha hmotného bodu

Za časový interval $\Delta t = t_1 - t_0$ prešiel hmotný bod dráhu $\Delta s = s_1 - s_0$. Keď je pohyb rovnomerný ($s = vt$) podiel

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \qquad (9.5)$$

určuje priemernú rýchlosť pohybu za časový interval Δt, ktorá však nezávisí od času. Ak chceme určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu musíme časový interval Δt zmenšiť na infinitezimálne malý časový interval, t.j. musíme počítať limitu

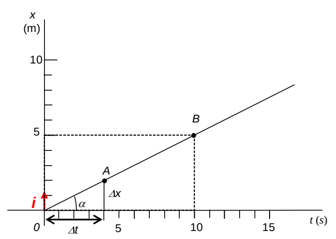
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \qquad (9.6)$$

kedy vlastne prejdú prírastky $\Delta\vec{r}$ a Δt na diferenciály $\mathrm{d}\vec{r}$ a $\mathrm{d}t$. Keďže rýchlosť je vektorová veličina okamžitá rýchlosť $\vec{v}$ je definovaná ako limita podielu prírastku polohového vektoru $\Delta\, \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)$ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ a príslušného prírastku času $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad (9.7)$$

Vzťah (9.7) čítame: *okamžitá rýchlosť je určená deriváciou polohového vektora podľa času.* S mnohými ďalšími aplikáciami sa stretneme postupne v základnom kurze fyziky. Ako príklad využitia derivácie vo fyzike možno uviesť vzťah pre prúd, ktorý vyjadríme ako deriváciu náboja Q podľa času: $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, resp. výkon $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$, ako deriváciu práce W podľa času. Niektoré ďalšie si ukážeme na vybraných príkladoch.

Príklad 9.2: Grafická závislosť okamžitej polohy guľôčky ako funkcia času je znázornená na obrázku. Určite:
a) smer pohybu guľôčky;
b) časovú závislosť polohového vektora ***r*** guľôčky;
c) jej rýchlosť v bodoch *A* a *B*;
d) priemernú rýchlosť guľôčky;
e) zrýchlenie guľôčky.



Grafická závislosť okamžitej polohy guľôčky ako funkcia času

Príklad 9.2: pokračovanie riešenia

a) Z označenia osi závisle premennej je zrejmé, že pohyb prebieha v smere osi *x*. Polohový vektor guľôčky v každom časovom okamihu *t* je určený rovnicou $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}$, kde $\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor v smere osi *x*. Trajektóriou pohybu je priamka ležiaca v smere osi *x*.

b) Časovú závislosť polohového vektora určíme z grafu tak, že určíme smernicu priamky k závislosti súradnice $x = x(t) = kt$, kde

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{s}} = 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Polohový vektor guľôčky je určený rovnicou $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i}, = kt\,\boldsymbol{i} = 0{,}5\,t\,\boldsymbol{i}.$

c) Rozmer [$\mathrm{m.s^{-1}}$] smernice priamky $x = x(t)$ naznačuje jej fyzikálny význam. Smernica priamky, resp. tg α určuje okamžitú rýchlosť guľôčky v danom bode grafu. Táto je rovnaká pre všetky body grafu a je určená rovnicou

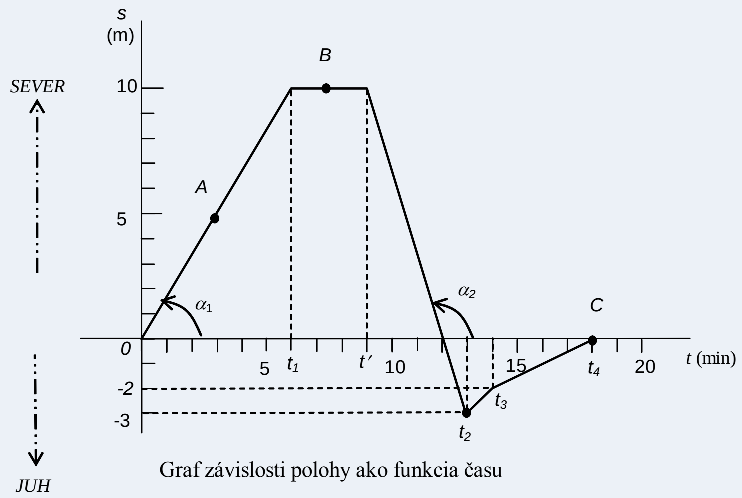
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\,\boldsymbol{i} = 0{,}5\,\boldsymbol{i}$

Veľkosť rýchlosti guľôčky v bodoch *A* i *B* je rovnaká a rovná sa $0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$

d) Nakoľko ide o pohyb rovnomerný priemerná rýchlosť guľôčky sa rovná jej okamžitej rýchlosti $v_p = v_x = 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

e) Zrýchlenie guľôčky $\boldsymbol{a} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = 0$, pretože rýchlosť pohybu sa nemení.

Príklad 9.3: Dievča vykročilo po priamej ulici v smere juh - sever. Graf jej závislosti vzdialenosti od domu ako funkcia času *t* je znázornený na obrázku. Kvalitatívne a kvantitatívne vyhodnoťte, akým pohybom sa dievča pohybuje v jednotlivých časových intervaloch a zistite:
a) priemernú rýchlosť dievčaťa počas prvej polovice celkového časového intervalu;
b) priemernú rýchlosť v siedmej a štrnástej minúte pohybu.



Graf závislosti polohy ako funkcia času

Príklad 9.3: pokračovanie riešenia

Kvalitatívne hodnotenie možno uskutočniť úvahou: V každom časovom intervale poloha dievčaťa je lineárnou funkciou času s rôznou smernicou, resp. sklonom priamky. To znamená, že dievča sa pohybuje rovnomerným pohybom s rôznymi rýchlosťami. Najrýchlejšie pôjde v tom časovom intervale, v ktorom smernica priamky, resp. tg α je najväčšia ($< t', t_2 >$). Ak je priamka rovnobežná s časovou osou nezávisle premennej t, zmena polohového vektora dievčaťa sa rovná nule, t.j. dievča sa nepohybuje. Záporná hodnota smernice určuje zmenu smeru pohybu. Presvedčíme sa o tom kvantitatívne pre jednotlivé intervaly:

- $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ je $v_1 = \Delta s / \Delta t_1 = (10/360)$ m.s^{-1} = 0,027 m.s^{-1};
- $\Delta t_2 = t' - t_1$ je $v_2 = 0$ m.s^{-1};
- $\Delta t_3 = t_2 - t'$ je $v_3 = \mathrm{tg}\alpha_2 = (-10/180)$ m.s^{-1} = - 0,055 m.s^{-1} (dievča sa obrátilo a kráča rýchlejšie ako doteraz smerom na juh);
- $\Delta t_4 = t_3 - t_2$ v_4 = - 0,016 m.s^{-1};
- $\Delta t_5 = t_4 - t_3$ $v_5 = (2/240)$ m.s^{-1} = 0,008 m.s^{-1} smerom z juhu na sever;
- Δt_4 = 18 min = 1080 s sa dievča opäť nachádza na mieste, z ktorého vyšlo.

a) Označme $\Delta t'$ dĺžku časového intervalu $< 0, t' >$, kde t'= 9 min, t.j. polovica z celkovej doby pohybu t_4 = 18 min, určeného z grafu. Nech $< 0, t' >$ je súčtom dvoch intervalov $< 0, t_1 >$ a $< t_1, t_2 >$, ktorých dĺžka je $\Delta t' = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Z grafu určíme číselné hodnoty $\Delta t'$= 9 min = 540 s, Δt_1 = 6 min = 360 s a Δt_2 = 3 min = 180 s. Priemernú rýchlosť určíme zo vzťahu

$$v_\mathrm{p} = \frac{\Delta s}{\Delta t'} = \frac{s_1 + s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2},$$

kde s_1 je dĺžka dráhy, ktoré dievča prešlo za časový interval $< 0, t_1 >$ a s_2 je dĺžka dráhy, ktoré dievča prešlo za časový interval $< t_1, t_2 >$. Z grafu vidíme, že $s_2 = 0$ (dievča oddychovalo). Veľkosť priemernej rýchlosti v prvej polovici časového intervalu vypočítame po dosadení

$$v_\mathrm{p} = \frac{10\,\mathrm{m}}{540\,\mathrm{s}} = 0{,}2\,\mathrm{m.s^{-1}}.$$

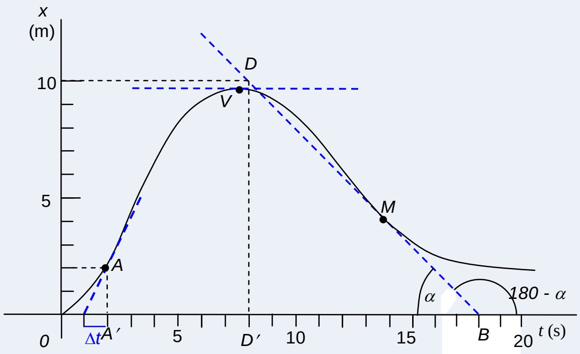
b) Z grafu k príkladu je zrejmé, že počas siedmej minúty rýchlosť dievčaťa bola nulová, t.j. v_{p7} = 0 m.s^{-1}. Tento výsledok možno určiť i zo skutočnosti, že zmena polohového vektora počas siedmej minúty je nulová. Rýchlosť počas štrnástej minúty určíme z grafu

$$v_{p14} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{60}\,\mathrm{m.s^{-1}} = 0{,}01660\ \ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Poznámka:

Všimnite si používaného označenia vektorových fyzikálnych veličín. Zámerne bolo zvolené ako označovanie so šípkou nad veličinou (v teoretickej časti), tak hrubo napísané kurzívou (**boldom**) v príklade 9.2.

Príklad 9.4: Určite okamžité rýchlosti objektu v bodoch A, V a M, ak časová závislosť pohybu v smere osi *x* je určená grafom na obrázku.



Graf závislosti polohy ako funkcia času

Riešenie:

Keďže nemáme zadanú exaktnú rovnicu závislosti *x* ako funkciu času *t*, nemôžeme dať precíznu odpoveď, pretože nepoznáme $(dx/dt)_A$, resp. v bodoch V a M. Odpovedať na otázku nám pomôže nákres dotyčnice ku grafu funkcie v danom bode. Smernica dotyčnice v tomto bode určuje okamžitú rýchlosť objektu v skúmanom bode grafu.

$$v = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_A = k = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Po číselnom dosadení hodnôt odčítaných z grafu dostaneme $v_A = 2\ \mathrm{ms}^{-1}$. Bod V je maximom funkcie $x = x(t)$. Dotyčnica v tomto bode je rovnobežná s časovou osou, t.j. smernica resp. derivácia funkcie v bode V sa rovná nule. Objekt sa v bode V zastaví.

$$v = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_V = 0$$

Obdobne určíme okamžitú rýchlosť v bode M z trojuholníka BDD′.

$$v_M = k = \mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\ \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{10}{11}\mathrm{ms}^{-1}.$$

Záporné znamienko hovorí, že objekt sa pohybuje v zápornom smere osi *x* .

Kontrolné otázky

1. Viete napísať správne definíciu derivácie ?
2. Formulujte nutnú podmienku existencie derivácie funkcie v bode?
3. Aký je geometrický význam derivácie funkcie.
4. Je spojitosť funkcie postačujúcou podmienkou pre existenciu derivácie?
5. Ako využívame deriváciu pri definícii vektora rýchlosti a zrýchlenia?
6. Aký význam má derivácia pre fyziku? Stretli ste sa i s ďalšími príkladmi využitia derivácií?

9.3 Pravidlá na výpočet derivácie funkcie

Nech sú $f(x)$ a $g(x)$ funkcie, ktoré majú v určitom intervale (a, b) derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$. Pre derivácie funkcií, ktoré sú súčtom, rozdielom, súčinom a podielom daných funkcií platia nasledovné vzťahy, určené vetami 9.2 až 9.4:

Veta 9.2 Základné pravidlá pre derivácie
Nech $f(x)$ a $g(x)$ pre všetky $x \in R$ majú derivácie, potom platí pre deriváciu súčtu, rozdielu, súčinu a podielu:

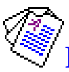
1. Derivácia súčtu funkcií: $y(x) = f(x) + g(x)$ $\quad y(x)' = f'(x) + g'(x)$
2. Derivácia rozdielu funkcií: $y(x) = f(x) - g(x)$ $\quad y(x)' = f'(x) - g'(x)$
3. Derivácia súčinu funkcií: $y(x) = f(x).g(x)$ $\quad y(x)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
4. Derivácia podielu funkcií: $y(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad y(x)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
5. Derivácia súčinu konštanty k a funkcie: $y(x) = k\, f(x)$ $\quad y(x)' = k\, f'(x)$.

Veta 9.3 Derivácia zloženej funkcie

Nech $y = f\,[u(x)]$ je zložená funkcia z funkcií $z = u(x)$ a $y = f(z)$, kde f je vonkajšia zložka a u je vnútorná zložka zloženej funkcie, definovaná pre $x \in D_f$ (pozri definíciu 8.3). Derivácia zloženej funkcie je určená predpisom:

$$y' = [f(u(x))]' = f'(u).\,(u(x))',$$

t.j. je určená súčinom derivácie vonkajšej zložky (v nezmenenom argumente!) a derivácie vnútornej zložky.


Poznámka: Schematicky si deriváciu zloženej funkcie možno načrtnúť pomocou zátvoriek, kde hranatá zátvorka nám reprezentuje vonkajšiu zložku a guľatá zátvorka vnútornú zložku zloženej funkcie:

$$[\,()]' = []' .\, ()'$$

Príklad 9.5 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = 5x^3 + 4x + 3$

Riešenie :

Jedná sa o súčet elementárnych funkcií (mocninných), takže platí, že derivácia súčtu sa rovná súčtu derivácií:

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x),$$

a využijeme, že derivácia $[k\, f(x)]' = k\,[f(x)]'$ a funkcie $(x^n)' = n\, x^{n-1}$:

$$f'(x) = 5(x^3)' + 4(x)' + (3)' = 5 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 1 + 0 = 15x^2 + 4\,.$$

Základné vzorce pre deriváciu, mocninných, goniometrických, logaritmických a cyklometrických funkcií uvádza veta 9.4.

Veta 9.4 Základné vzorce pre derivovanie vybraných funkcií

Nech $f(x)$ je definovaná pre všetky $x \in D_f$, potom pre jej deriváciu platí:

1. Derivácia konštanty sa rovná nule! $y = f(x) = k$ $\quad y' = (k)' = 0$
2. $y(x) = f(x) = x^n$ (n = 1,2,…. celé číslo) pre každé $x \in R$ platí: $y' = (x^n)' = n\,x^{n-1}$
3. $y(x) = a^x$, $a > 0$, tak pre každé $x \in R$ platí: $\quad y' = (a^x)' = a^x \ln a$
4. $y(x) = e^x$ (špeciálne pre $a = e$), tak pre každé $x \in R$ $\quad y' = (e^x)' = e^x \ln e = e^x$
5. $y(x) = \sin x$, ak pre každé $x \in R$ $\quad y' = (\sin x)' = \cos x$
6. $y(x) = \cos x$, tak pre každé $x \in R$ $\quad y' = (\cos x)' = -\sin x$
7. $y(x) = \operatorname{tg} x$, tak pre tie $x \in R$, kde $\cos x \neq 0$ $\quad y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$
8. $y(x) = \operatorname{cotg} x$, ak pre tie $x \in R$, kde $\sin x \neq 0$ $\quad y' = (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$
9. $y(x) = \log_z x$, ak $z > 0$, $z \neq 1$ tak pre všetky $x > 0$ $\quad y' = (\log_z x)' = \frac{1}{x \ln z}$
10. $y(x) = \ln x$, (špeciálne pre z = e) $\quad y' = (\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$
11. $y(x) = \arcsin x$, tak pre všetky $x \in (-1, 1)$ $\quad y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $y(x) = \arccos x$, tak pre všetky $x \in (-1, 1)$ $\quad y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $y(x) = \operatorname{arctg} x$, tak pre všetky $x \in R$ $\quad y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $y(x) = \operatorname{arccotg} x$, tak pre všetky $x \in R$ $\quad y' = (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Príklad 9.6 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = 3e^x + \operatorname{tg} x + x^n + 5\sin x$

Riešenie:

Uvedomíme si, že funkciu môžeme zapísať ako súčet funkcií, pričom konštantu dáme pred funkciu:

$$f(x) = 3f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + 5f_4(x),$$

a využijeme, že derivácia súčtu sa rovná súčtu derivácií

$$f'(x) = 3f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + 5f_4'(x),$$

$$f'(x) = 3(e^x)' + (\operatorname{tg} x)' + (x^n)' + 5(\sin x)'$$

$$f'(x) = 3e^x + \frac{1}{\cos^2 x} + nx^{n-1} + 5\cos x$$

Príklad 9.7: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = (\ln x)(\operatorname{tg} x)$.

Riešenie:

Uvedomíme si, že sa jedná o súčin dvoch funkcií a derivujeme podľa vzťahu pre súčin:

$$f'(x) = (\ln x)'(\operatorname{tg} x) + (\ln x)(\operatorname{tg} x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}(\operatorname{tg} x) + (\ln x)\frac{1}{\cos^2 x}$$

Otázka 1: Zmenil by sa výsledok z príkladu 9.4, ak by sme zátvorky pri funkciách nenapísali, takže zápis by bol $f(x) = \ln x \operatorname{tg} x$?

Odpoveď: Vzhľadom k tomu, že prednosť má súčin, znamená to, že argument logaritmickej funkcie by bol x tg$x$, t.j. jednalo by sa o *zloženú funkciu*. Z dôvodu jednoznačnosti zadania, je vhodnejšie zátvorky napísať aj v tomto prípade $f(x) = \ln(x \operatorname{tg} x)$. Riešenie takto zadaného príkladu si ukážeme neskôr.

Príklad 9.8: Vypočítajte deriváciu funkcie: $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

Riešenie:

Jedná sa o podiel funkcií, použijeme vzťah pre podiel deriváciu podielu funkcií:

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)' \cdot x - (1 + \ln x) \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

Príklad 9.9: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \operatorname{tg} 2x$.

Riešenie:

Uvedomíme si, že sa jedná sa o deriváciu zloženej funkcie. Použijeme vzťah pre deriváciu zloženej funkcie, t.j. zderivujeme vonkajšiu zložku funkcie, t.j. tg (..) a vynásobíme deriváciou vnútornej zložky funkcie (..) . Schematicky postup môžeme znázorniť: [tg(..)]´= **[tg ()]**´(..)´

$$f'(x) = [\operatorname{tg}(2x)]' = \frac{1}{\cos^2(2x)}(2x)' = \frac{1}{\cos^2(2x)}2.$$

Otázka 2: Ako objasnite postup pri derivácii zloženej funkcie?

Odpoveď: Uvedomíme si, ktorá je vonkajšia a ktorá vnútorná zložka funkcie. Ako prvé zderivujeme vonkajšiu zložku pri nezmenenom argumente a vynásobíme deriváciou vnútornej zložky.

Príklad 9.10: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = e^{-x}$.

Riešenie:

Jedná sa o deriváciu zloženej funkcie

$f'(u) = (e^u)' u' \quad \Rightarrow (e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$.

Príklad 9.11: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sin x^2$.

Riešenie:

Jedná sa o deriváciu zloženej funkcie, t.j. súčin derivácie vonkajšej zložky vynásobíme deriváciou vnútornej zložky zloženej funkcie:

$f'(x) = [\sin(x^2)]' = [\cos(x^2)](x^2)' = [\cos(x^2)]2x$.

Príklad 9.12: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sin^2 x$.

Riešenie:

Jedná sa o deriváciu zloženej funkcie

$f'(x) = [\sin x]^{2'} = 2[\sin x]^{2-1}(\sin x)' = 2[\sin x]\cos x = \sin 2x.$

Príklad 9.13: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sin^2(5x+3)$.

Riešenie:

Jedná sa o deriváciu zloženej funkcie $f(u) = u^2$, kde u je opäť zložená funkcia:

$f'(x) = [\sin(5x+3)]^{2'} = 2[\sin(5x+3)]^{2-1}(\sin(5x+3))' = 2[\sin(5x+3)]\cos(5x+3).[5]$

Príklad 9.14: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \ln x + 6x^3 - xa^2 + 5x\ln 1$, kde a je reálne číslo.

Riešenie :

Jedná sa o súčet funkcií, pričom si uvedomíme, že a je reálne číslo, teda konštanta, ktorú dáme pred deriváciu. Posledný sčítanec je súčinom, pričom druhý člen, keď si uvedomíme, že sa jedná o logaritmickú funkciu v bode $x = 1$, je nulový a nemusíme ho ani uvažovať. Pre názornosť ho však ešte uvedieme:

$f'(x) = (\ln x)' + 6(x^3)' - a^2(x)' + 5(\ln 1)\,(x)'$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 18x^2 - a^2 + 5.0.1 = \frac{1}{x} + 18x^2 - a^2$$

Príklad 9.15: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)=\left(3x^2+4x-9\right)^4$.

Riešenie:

Jedná sa o zloženú funkciu zložená funkcia): $f(u)=u^4$

$$f'(x)=\left[\left(3x^2+4x-9\right)^4\right]'=4\left(3x^2+4x-9\right)^3(6x+4).$$

Príklad 9.16: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)=\sqrt{x^3}\cot g^2 x$.

Riešenie:

Jedná sa o deriváciu súčinu, pričom každý činiteľ je zložená funkcia

$$f'(u)=f'(u)\cdot u'(x)=\left(u^4\right)'\cdot u'=4u^3\cdot(3x^2+4x-9)'=4\left(3x^2+4x-9\right)^3\cdot(6x+4)$$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^3}\right)'\cot g^2 x+x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\cot g\, x\right)^2\right]'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}\cot g^2 x+\sqrt{x^3}\,2\left(\cot g\, x\right)^{2-1}\left(\cot g\, x\right)'=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\cot g^2 x+\sqrt{x^3}\,2\left(\cot g\, x\right)^1\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Príklad 9.17: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)=\ln(\ln x)$.

Riešenie:

Uvedomíme si, že sa jedná sa o deriváciu zloženej funkcie. Použijeme vzťah pre deriváciu zloženej funkcie, t.j. zderivujeme vonkajšiu zložku funkcie, t.j. ln(..) a vynásobíme deriváciou vnútornej zložky funkcie (..). Schematicky postup môžeme znázorniť: $[\ln(..)]'=\frac{1}{(..)}(..)'$

$$f'(x)=\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Príklad 9.18: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)=\sin^2 4x$.

Riešenie:

Jedná sa o deriváciu zloženej funkcie, ktorá je ešte zložená funkcia:

$$f'(x)=\left\{\left[(\sin 4x)\right]^2\right\}'=2\left[(\sin 4x)\right]^{2-1}(\sin 4x)'=2\left[(\sin 4x)\right]\left[\cos(4x)\right](4x)'=2(\sin 4x)(\cos 4x)4$$

Príklad 9.19: Vypočítajte deriváciu funkciu $f(x)=2x^3\ln e$.

Riešenie:

Jedná sa o deriváciu súčinu funkcie s konštantou:

$$f'(x)=(2\ln e)(x^3)'=(2\ln e)3x^2=6x^2$$

Príklad 9.20: Vypočítajte deriváciu funkciu $f(x) = \ln(x \operatorname{tg} x)$.

Riešenie:

Uvedomíme si, že sa jedná o zloženú funkciu, pričom vnútorná zložka zloženej funkcie je určená súčinom dvoch funkcií. Použijeme vzťah pre deriváciu zloženej funkcie a vnútornú zložku derivujeme podľa vzťahu pre súčin dvoch funkcií:

$$f(x)' = \left[\ln(x \operatorname{tg} x)\right]'.(x \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{x \operatorname{tg} x}.(1.\operatorname{tg} x + x\frac{1}{\cos^2 x}).$$

Obrázok 9.10 prezentuje zaujímavú www stránku s interaktívnymi appletmi s grafickou deriváciou http://www.analyzemath.com/calculus/First_derivative/First_derivative.html.

Obrázok 9.10: Pohľad na www.stránku s interaktívnou deriváciou.

PDDA

Úloha 5: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\operatorname{tg}^2 3x + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sin 2x}$.

Úloha 6: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = (e^{-x/2})\operatorname{arc}tg\,(1+x) + \sqrt{x^3 - x^2} + \left[\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\ln 2x}\right]$.

Úloha 7: Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \operatorname{arc}tg\,(1+x) + (e^{-x^2})\sqrt{x^3 - x^2} + \left[\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}\right]$.

Kontrolné otázky

1. Napíšte vzťahy pre deriváciu základných elementárnych funkcií a skontrolujte si ich.
2. Napíšte vzťah pre deriváciu súčinu dvoch funkcií jednej premennej.
3. Napíšte vzťah pre deriváciu podielu dvoch funkcií.
4. Napíšte vzťah pre deriváciu zloženej funkcie a aplikujte na konkrétnom príklade.

9.4 Derivácií vyšších rádov funkcie jednej premennej

Definícia 9.4 Derivácia druhého a vyššieho rádu

Ak funkcia $y = f(x)$ je spojitá funkcia na intervale (a, b) a má na tomto intervale deriváciu prvého rádu, derivácia *druhého rádu* tejto funkcie ($f\,''$) je definovaná ako derivácia funkcie $f(x)'$, čo zapisujeme:

$$y'' = f''(x) = [f'(x)]'.$$

Derivácia *tretieho rádu* funkcie $y = f(x)$ je definovaná ako derivácia druhej derivácie funkcie, t.j.

$$y''' = f'''(x) = [f''(x)]'.$$

Derivácia n-*tého rádu* funkcie $y = f(x)$ je definovaná ako derivácia (n-1)derivácie funkcie, čo zapisujeme:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Poznámka:

Všimnime si, že pre deriváciu tretieho rádu ešte používame zápis $y''' = f'''(x)$, kým pre derivácie štvrtého rádu a vyššie, už používame zápis $f^{(4)}(x)$, ...$f^{(n)}(x)$., t.j. horný index - v zátvorke číslo, určújuce rád derivácie.
Derivácie vyššieho rádu majú význam v mnohých oblastiach, ako v matematike, fyzike , v ekonómii a iných. Ukážeme si to pri priebehu funkcií. Predtým si zadefinujeme, kedy je funkcia rastúca, klesajúca, kedy má extrém a čo je konvexnosť, konkávnosť a inflexný bod, ako ho určíme.

Otázka 3: Aký význam má vo fyzike druhá derivácia polohového vektora?
Odpoveď:
Prvá derivácia polohového vektora na základe vzťahu 9.7 určuje okamžitú rýchlosť. Ak tento vzťah derivujeme ešte raz

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad (9.8)$$

dostaneme dôležitú fyzikálnu veličinu - okamžité zrýchlenie.

Príklad 9.21: Hmotný bod sa pohybuje tak, že jeho polohový vektor $\boldsymbol{r}$ závisí na čase podľa vzťahu $\boldsymbol{r}(t) = \mathrm{A}t^3\,\boldsymbol{i} + \mathrm{B}t\,\boldsymbol{j} + \mathrm{C}\,\boldsymbol{k}$, kde A = 1 $\mathrm{ms^{-3}}$, B = 5 $\mathrm{ms^{-1}}$, C = −3 m. Určite:
a) veľkosť polohového vektora rýchlosti v časovom okamžiku t_1 = 2 s;
b) polohový vektor rýchlosti a jeho veľkosť v časovom okamžiku t_1 = 2 s;
c) polohový vektor zrýchlenia rýchlosti a jeho veľkosť v časovom okamžiku t_1 = 2 s.

Riešenie:

a) $\boldsymbol{r}(2\text{ s}) = 1.2^3\,\boldsymbol{i} + 5.2\,\boldsymbol{j} - 3 = 8\,\boldsymbol{i} + 10\,\boldsymbol{j} - 3$ [m],

$$|\boldsymbol{r}(2\,\mathrm{s})| = \sqrt{8^2 + 10^2 + (-3)^2}\ \mathrm{m} = \sqrt{64 + 100 + 9} = \sqrt{173} = 13{,}15\ \mathrm{m}$$

Príklad 9.21: pokračovanie riešenia

b) polohový vektor rýchlosti je definovaný vzťahom (9.7) ako časová derivácia polohového vektora.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(\mathrm{A}t^3\,\boldsymbol{i} + \mathrm{B}t\; + \mathrm{C}\,\boldsymbol{k})}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{A}t^2\,\boldsymbol{i} + \mathrm{B}\boldsymbol{j}\,,$$

$$v(t_1) == 3.1\,2^2\,\boldsymbol{i} + 5 = 12\,\boldsymbol{i} + 5\quad [\mathrm{m.s^{-1}}]$$

$$|\boldsymbol{v}(2\,\mathrm{s})| = \sqrt{12^2 + 5^2}\,\mathrm{m.s^{-1}} = \sqrt{144 + 25}\,\mathrm{m.s^{-1}} = 13\,\mathrm{m.s^{-1}};$$

c) polohový vektor zrýchlenia je určený vzťahom (9.8) ako druhá derivácia polohového vektora $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(3\mathrm{A}t^2\,\boldsymbol{i} + \mathrm{B}\boldsymbol{j})}{\mathrm{d}t} = 6\mathrm{A}t\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}(t_1) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(3\mathrm{A}t^2\,\boldsymbol{i} + \mathrm{B}\boldsymbol{j})}{\mathrm{d}t} = 12\boldsymbol{i}\quad [\mathrm{m.s^{-2}}],\ |\boldsymbol{a}(t_1)| = 12\,\mathrm{m.s^{-2}}.$$

Príklad 9.22 Vypočítajte všetky derivácie do piateho rádu funkcie $f(x) = 5x^3 + 4x + 3$

Riešenie:

Vychádzame z definície druhej derivácie (definície 9.2) a príkladu 9.1, kde sme vypočítali prvú deriváciu rovnú :

$$f'(x) = 5\cdot\left(x^3\right)' + 4\cdot(x)' + (3)' = 5\cdot 3x^2 + 4\cdot 1 + 0 = 15x^2 + 4$$

$$f''(x) = 15\left(x^2\right)' + (4)' = 30x$$

$$f'''(x) = 30(x)' = 30$$

$$f^{(4)}(x) = 0,\quad f^{(5)}(x) = 0.$$

PDDA

Úloha 8: Vypočítajte druhú deriváciu funkcií:

a) $f(x) = \mathrm{arc}tg\,(1 + x)$. b) $f(x) = e^{-x^2}$; c) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ d) $f(x) = \sin^2 x$.

Kontrolné otázky

1. Vysvetlite význam prvej derivácie polohového vektora podľa času.
2. Vysvetlite význam druhej derivácie polohového vektora podľa času.
3. Vysvetlite význam prvej derivácie vektora rýchlosti podľa času.

9.5 Výpočet limít pomocou derivácií –L´Hospitalovo pravidlo

Pri výpočte limít sa často stretávame v tzv. neurčitými výrazmi, teda limitami funkcií, ktoré vedú k výrazom $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $1^{\infty}, \infty^{0}, \infty - \infty$. V týchto prípadoch je vhodné použiť L´Hospitalovo pravidlo, ktoré uvádzame ako nasledujúcu vetu:

Veta 9.5 - L´Hospitalovo pravidlo

Nech majú funkcie *f*(*x*) a *g*(*x*) v bode *x* = *a* limity: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ resp. [$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$] a majú v okolí bodu *a* ich spojité prvé derivácie (poprípade i vyššie derivácie), potom limita z podielu funkcií sa rovná limite z podielu derivácií funkcii:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{[f(x)]'}{[g(x)]'}. \qquad (9.9)$$

V prípade, že sme opätovne získali neurčitý výraz 0/0. resp. ∞/∞ pokračujeme v deriváciach ďalej, t.j. platí:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{[f(x)]'}{[g(x)]'} = \lim_{x \to a} \frac{[f(x)]''}{[g(x)]''} = \ldots\ldots$$

Poznámka: Všimnite si, že v prípade L´Hospitalova pravidla, sa nejedná o deriváciu podielu funkcií, ale podiel derivovaných funkcií, čo je rozdiel!

Vybrané jednotlivé prípady, kedy možno použiť L´Hospitalovo pravidlo, si ukážeme na riešených príkladoch.

Príklad 9.23 Vypočítajte limity funkcií: a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 6x}$,

c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$, d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$, e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{e^x}$, f) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x - a}{x^n - a^n}$, g) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Riešenie:

a) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{[x]'}{[\sqrt{x}]'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x \to 0^+} 2x^{\frac{3}{2}} = 0;$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 6x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 7x)'}{(x^2 - 6x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + 7}{2x - 6} = \frac{-7}{6};$$

Príklad 9.23: pokračovanie riešenia

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)'}{(\sqrt{x}-2)'}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{1+2x}}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}}=\dfrac{4}{3},$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}2x^2=2,$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-1)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{e^x}=\dfrac{6}{\infty}=0,$

f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)'}{(x^n-a^n)'}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{nx^{n-1}}=\dfrac{1}{na^{n-1}}.$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\infty}=0.$

Príklad 9.24 Vypočítajte limity funkcie $f(x)$: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\mathrm{tg}7x}$,f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\mathrm{tg}x)}$

Riešenie:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2\cos 2x}=\dfrac{e^0}{2\cos 2.0}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{3}=\dfrac{1}{3},$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6},$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\mathrm{tg}7x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{5}{\cos^2 5x}}{\frac{7}{\cos^2 7x}}=\dfrac{5}{7},$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\mathrm{tg}x)}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x=1.$

Poznámka: Pri príkladoch sa často využívajú nasledovné identity:

- prepis súčinu dvoch funkcií na podiel: $f(x).g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$,
- prepis rozdielu funkcií na podiel: $f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$.

Príklad 9.25 Vypočítajte limitu funkcie $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{tg}x$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{tg}x \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\dfrac{1}{\mathrm{ctg}x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)\cos x = 1.0 = 0$$

Príklad 9.26 Vypočítajte limitu funkcie $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{\cos x+\cos x - \sin x}=$$

$$=\frac{0}{1+1-0}=0.$$

Ďalšie riešené príklady možno nájsť napríklad v práci: Hricišáková D.: Matematika – A, Trenčín 2011, ISBN 978-80-8075-508-9, str.137-141

PDDA

Úloha 9: Vypočítajte limitu funkcií: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Kontrolné otázky

1. Objasnite znenie a význam L´ Hospitalovho pravidla, kde a v akých prípadoch ho používame?
2. Možno súčin (resp. rozdiel) dvoch funkcií prepísať na podiel? Ak áno, tak ako?

9.6 Monotónnosť funkcie a extrémy funkcií

V tejto časti si ukážeme ako súvisí monotónnosť funkcie s jej deriváciou a hľadaním extrémov funkcií. Vyjdeme z definície 8.10 monotónnosti funkcie a nasledujúcej poznatkov:

Ak pre každú dvojicu čísel $x_1, x_2 \in D_f$ nachádzajúcich sa v intervale $< a, b >$ platí:

1. $x_1 < x_2$ a použijeme označenie

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{a} \quad \Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Ak nám platí, že $f(x_1) < f(x_2)$, t.j. $\Delta y > 0$ a teda $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \rightarrow$ že funkcia $f(x)$ je

v intervale $< a, b >$ rastúca. Ak si napíšeme $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \rightarrow f'(x) > 0$.

2.Keďže $x_1 < x_2$, $\Delta x > 0$ a ak nám platí $f(x_1) > f(x_2)$, teda

$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \quad \rightarrow f'(x) < 0 \quad \rightarrow f'(x) < 0$, že funkcia $f(x)$ je

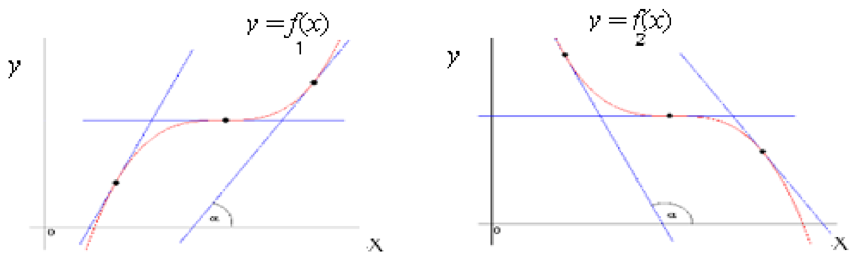
na $< a, b >$ klesajúca.

Tieto skutočnosti prezentuje nasledovné vety :

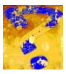
Veta 9. 6 - Monotónnosť funkcie

Nech funkcia $f(x)$ je spojitá v intervale (a, b) a nech v každom vnútornom bode tohto intervalu má deriváciu. Potom platí:

1. ak $f''(x) > 0$, potom $f(x)$ je na intervale (a, b) rastúca,
2. ak $f''(x) < 0$, potom $f(x)$ je na intervale (a, b) klesajúca, (obr. 9.8).



Obrázok 9. 8: Monotónnosť funkcie
(Híc. P., Pokorný M.: http://pdfweb.truni.sk/pokorny/mpi/index.htm)

 **Otázka 4:**

Aká je smernica dotyčnice grafu funkcie, ak funkcia je na intervale (a, b) a) rastúca,

b) klesajúca, c) konštantná?

Príklad 9.27: Zistite pomocou derivácie funkcie, na ktorom intervale je funkcia $y(x) = \ln(4 - x^2)$ rastúca a na ktorom klesajúca.

Riešenie:

Určíme si definičný obor funkcie $y(x) = \ln(4 - x^2)$. Vidíme, že sa jedná o zloženú funkciu, ktorej vonkajšia zložka je ln u. Vieme, že logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument, t.j. $u > 0$, resp. $4 - x^2 > 0$

$$-x^2 > -4$$

Príklad 9.27: pokračovanie riešenia

$$x^2 < 4$$

$$|x| < 2 \rightarrow D(f) = (-2, 2)$$

Vypočítajme prvú deriváciu:

$$f'(x) = [\ln(4 - x^2)]' = \frac{1}{4 - x^2}(4 - x^2)' = \frac{1}{4 - x^2}(-2x).$$

Funkcia bude rastúca $f'(x) > 0$ na tom podintervale definičného oboru (-2, 2), na ktorom $\frac{1}{4 - x^2}(-2x) > 0$, t.j. musí platiť:

$-2x > 0 \cap 4 - x^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f) \rightarrow x \in (-2, 2)$.

$x < 0 \cap (-2, 2) \rightarrow (-2, 0)$ je rastúca.

Obdobne možno ukázať, že funkcia $y(x) = \ln(4 - x^2)$, bude klesajúca na tej časti D(f), kde $f'(x) < 0$, t.j. $\frac{1}{4 - x^2}(-2x) < 0$.

Čitateľ si výpočtom preverí, že je to doplnkový podinterval, t.j. (0,2).

V nasledujúcej časti si ozrejmíme pojmy lokálny a globálny extrém funkcie $y = f(x)$ v intervale (a, b), ktorý je podmnožinou definičného oboru D(f) a ukážeme si, ako hľadáme *lokálne extrémy*, t.j. lokálne maximá, resp. lokálne minimá na určitom intervale (a, b) . nakoľko v praxi sa veľmi často stretávame s problémom, keď si položíme otázku ako máme nastaviť vonkajšie vstupné parametre, aby sme dostali napríklad optimálny výsledok? Napríklad v ekonómii je to zisk vo firme, aký tvar nádoby zvoliť aby mala daný objem a minimálny povrch a i. Taktiež si objasníme pojem *globálny extrém* $y = f(x)$ na D(f) prostredníctvom definícií:

Definícia 9. 5 Lokálne minimum

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f). Funkčnú hodnotu $f(a)$, v bode $a \in M \subset D(f)$, nazývame **lokálne minimum** funkcie $f(x)$ v bode a práve vtedy, ak existuje také okolie $O(a)$ bodu a, že pre všetky $x \in O(a) - \{a\} \subset D(f)$, platí

$$f(x) \geq f(a).$$

Definícia 9. 6 Lokálne extrémy

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f). Lokálne maximá a minimá funkcie na istej podmnožine $M \subset D(f)$ voláme spoločným názvom **lokálne extrémy**.

Definícia 9. 7 Globálne maximum

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f). Funkčnú hodnotu $f(a)$, $a \in M \subset D(f)$, nazývame globálne maximum funkcie $f(x)$ v bode a na množine M práve vtedy, ak pre všetky. $x \in M$ platí

$$f(x) \geq f(a).$$

Definícia 9. 8 Globálne minimum

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f). Funkčnú hodnotu $f(a)$, v bode $a \in M \subset D(f)$, nazývame globálne minimum funkcie $f(x)$ v bode a na množine M práve vtedy, ak pre všetky $x \in M$ platí

$$f'(x) \geq f'(a).$$

Definícia 9. 9 Globálne extrémy

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f). Maximálna a minimálna hodnota tejto funkcie na celej množine funkčných hodnôt nazývame globálne extrémy.

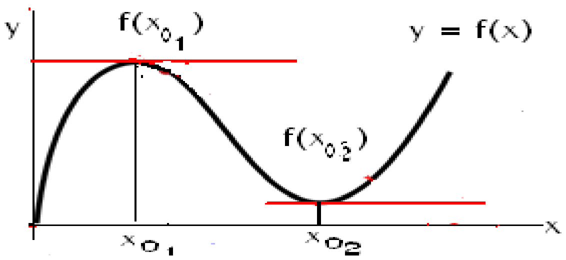
Pri určovaní lokálnych extrémov funkcie používame nasledujúce tvrdenie:

Veta 9. 7 Nutná podmienka existencie lokálneho extrému – stacionárny bod

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f). Ak má funkcia $f(x)$ v bode x_0 lokálny extrém. Potom $f''(x_0) = 0$, alebo $f''(x)$ v bode x_0 neexistuje.

Bod x_0, v ktorom prvá derivácie je nulová, nazývame stacionárnym bodom funkcie $f(x)$.

Poznámka: 1. Geometricky môžeme interpretovať nutnú podmienku lokálneho extrému tak, že dotyčnica grafu funkcia $y = f(x)$ v bode x_0 bude rovnobežná s osou x, ak existuje derivácia v bode x_0, (obr. 9.6).



Obrázok 9.9: Geometrická interpretácia stacionárneho bodu

2. V prípade, že derivácia neexistuje v tomto bode, dotyčnica ku grafu funkcie v tomto bode tiež neexistuje. Pozri príklad 9.1 pre funkciu $y = |x|$ v bode nula.

3. Podľa vety 9.7 funkcia $y = f(x)$ môže (ale nemusí!) mať lokálny extrém v tých bodoch, v ktorých prvá derivácia sa rovná nule. Ako príklad možno uviesť funkciu $y = x^3$, ktorá má

$f''(x) = 3x^2$ a $f''(x_0) = 0$ pre $x_0 = 0$. Funkcia $f''(x) = 3x^2 \geq 0$ pre všetky $x \in D(f)$, takže vieme, že je rastúca na celom D(f), takže nemôže mať extrém.

Z existencie derivácie v bode x_0 o druhu extrému rozhoduje druhá derivácia funkcie v stacionárnom bode, čo deklaruje veta 9.8:

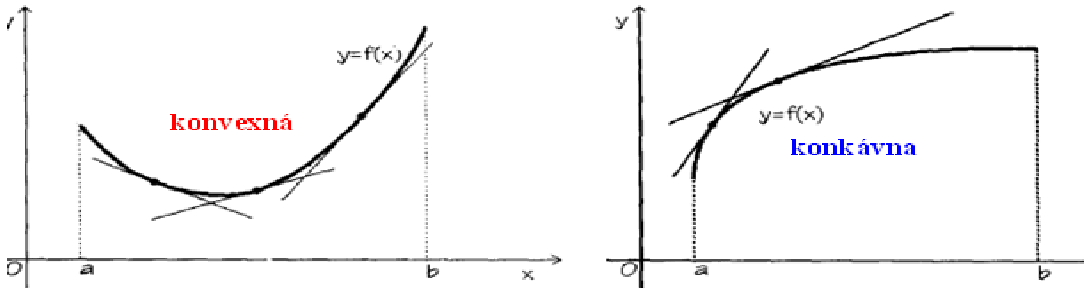
Veta 9. 8 Postačujúca podmienka lokálneho extrému v bode x_0

Nech má funkcia $f(x)$ v bode $x = x_0$ deriváciu druhého rádu a nech $f''(x_0) = 0$. Potom funkcia $f(x)$ v stacionárnom bode x_0 má **lokálny extrém**:

1. lokálne maximum, ak druhá derivácia je záporná, t.j.: $f''(x_0) < 0$,
2. lokálne minimum, ak druhá derivácia je kladná, t.j. $f''(x_0) > 0$.

Definícia 9.10 Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f). Ak všetky body grafu funkcie $y = f(x)$, okrem bodu dotyku, ležia **nad** (pod) dotyčnicou ku grafu funkcie v ľubovolnom bode z intervalu $(a, b) \subset D(f)$, hovoríme, že funkcia je v intervale (a,b) **konvexná (konkávna)** (obr. 9.10).



Obrázok 9.10: Geometrická interpretácia konvexnej a konkávnej funkcie

Poznámka: Priradenie pojmu konkávnej k tvaru funkcie je možno si zapamätať podľa pomôcky: *„Do konkávnej sa nedá naliať káva."*

Definícia 9.11 Inflexný bod funkcie

Bod (číslo) x_0, v ktorom funkcia $y = f(x)$ má deriváciu nazývame inflexným bodom práve vtedy, keď existuje také okolie bodu x_0 $O(x_0)$, že pre každé $x \in O(x_0)$, $x < x_0$ je funkcia konvexná (konkávna) a pre každé $x > x_0$ je funkcia konkávna (konvexná). Ak x_0 je inflexným bodom funkcie, potom bod $[x_0, f(x_0)]$ nazývame inflexným bodom grafu funkcie .

Poznámka: Inflexný bod je taký bod, v ktorom sa konvexná funkcia mení na konkávnu a naopak.

Veta 9. 9 Určenie konvexnosti a konkávnosti funkcie pomocou derivácie

Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na množine D(f) a nech má na tomto intervale prvé a druhé derivácie. Potom ak platí, že:

1. $f(x)'' > 0$, daná funkcia je na tomto intervale konvexná,
2. $f'(x)'' < 0$, daná funkcia je na tomto intervale konkávna.

Príklad 9.28: Na krivke $x^2(x-2)^2$ nájdite body, v ktorých sú dotyčnice rovnobežné s osou Ox**.**

Riešenie:

Vieme, že všetky priamky rovnobežné s osou x majú nulovú smernicu, t.j. k = 0, resp. $f'(x) = 0$.

$x^2(x-2)^{2\prime} = 2x.(x-2)^2 + x^2 2\,(x-2) = 2x.\,(x-2)\,[(x-2)+x] = 4x.\,(x-2)\,(x-1) = 0$

Takže hľadané body sú: $T_1 = (0, 0)$, $T_2 = (2, 0)$, $T_3 = (1, 1)$.

Príklad 9.29: Nájdite rovnicu normály ku krivke a krivke $y = \dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ v bode so súradnicou $x = 3$.

Riešenie:

1. Určíme bod v ktorom hľadáme priamku kolmú na dotyčnicu: získame ho po dosadení súradnice do rovnice krivky: $T = (x_0, y_0) = (3, 3/2)$.
2. Určíme smernicu dotyčnice z derivácie zadanej funkcie: $y' = \left[\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}\right]' =$

$$= \frac{(2x-3)x^2-(x^2-3x+6)2x}{x^4} = \frac{3x-12}{x^3} \quad \rightarrow \quad y'(3) = \frac{3.3-12}{3^3} = -\frac{1}{9} = k_{dot}.$$

3. Zo známeho vzťahu pre súčin smerníc dvoch navzájom kolmých priamok získame smernicu normály, keďže platí $k_{dot}.\,k_n = -1$.

$$k_{nor} = \frac{-1}{k_{dot}} = \frac{-1}{-\frac{1}{9}} = 9$$

4. Rovnica hľadanej normály určíme v smernicovom tvare $y - y_0 = k_{nor}(x - x_0)$

   $y - 3/2 = 9(x-3)$.

Príklad 9.30: Nájdite absolútne extrémy funkcie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ v intervale $< -1, 1 >$.

Riešenie:

Vieme, že zadaná funkcia je v každom bode R spojitá a teda je spojitá i na zadanom intervale. Určíme jej deriváciu:

$f(x)' = (x^3 - 3x^2 + 6x - 2)' = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3(x-1)^2 + 3 > 0$. Na základe vety 9. 6 vieme, že daný funkcia bude na celom intervale rastúca, keďže $f'(x) > 0$ na D_f**.**
Absolútne extrémy funkcie budú preto v koncových bodoch intervalu:

- absolútne minimum $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 6(-1) - 2 = -12$ v intervale $<-1, 1>$;
- absolútne maximum $f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 6(1) - 2 = 12$ v intervale $<-1, 1>$.

Príklad 9.31: Nájdite absolútne extrémy funkcie $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ v intervale (0,4).

Riešenie:

Vieme, že zadaná funkcia je definovaná pre $x > 0$ a je v každom bode spojitá. Teda je spojitá i na zadanom intervale. Určíme jej deriváciu:

$f(x)' = (x + 2\sqrt{x})' = 1 + \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > 0$ pre všetky $x \in D_f$. Na základe vety 9. 6 vieme, že daný funkcia bude na celom intervale rastúca, keďže $f''(x) > 0$ a teda aj na skúmanom intervale (0,4). Absolútny extrémy – maximum bude mať funkcia v koncovom bode intervalu:

- absolútne maximum $f(4) = 4 + 2\sqrt{4} = 8$;
- absolútne minimum neexistuje, keďže v bod $x = 0$ nie je definovaná .

Príklad 9.32: Určite výšku lievika kužeľovitého tvaru, ktorého strana je rovná 20 cm, tak aby jeho objem bol maximálny.

Riešenie:

Označme r polomer kruhovej podstavy lievika tvaru kužeľa a v jeho výšku. Zrejme

$r = \sqrt{400 - v^2}$, $r > 0$, $0 < v < 20$.

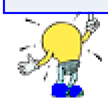
Pre objem kužeľa platí: $V = \pi r^2 v/3 \;\rightarrow\; V = \dfrac{\pi}{3}(400v - v^3)$.

Objem V je spojitou funkciou v pre všetky $v \in (0,20)$. Singulárne body zistíme z prvej derivácie:

$$\frac{dV}{dv} = \frac{\pi}{3}\frac{d(400v - v^3)}{dv} = \frac{\pi}{3}(400 - 3v^2) = 0 \rightarrow \; v_0 = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

O aký extrém sa v tomto bode jedná určíme so znamienka druhej derivácie v bode v_0 :

$\dfrac{d^2V}{dv^2} = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{d(400v - v^3)}{dv} = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{d}{dv}(400 - 3v^2) = \dfrac{\pi}{3}(-6v) = < 0$ pre každú hodnotu výšky a teda aj pre singulárny bod $v_0 = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$. Funkcia bude mať v tomto bode lokálne maximum.



PDDA:

Úloha10: Nájdite výšku valca s maximálnym objemom, ktorý možno vpísať do gule s polomerom R

Kontrolné otázky

1. Objasnite, ako postupujeme pri hľadaní lokálnych extrémov?
2. Môže byť lokálny extrém súčasne globálnym extrémom? Ak áno, objasnite na príklade.
3. Nastane prípad kedy funkcia nemá absolútny extrém? Ak áno, uveďte príklad.

9.7 Priebeh funkcie

Priebeh, ako sme uviedli v úvode tejto kapitoly, je zaujímavý z pohľadu zisťovania očakávaní napríklad pri podnikaní vo firme, či priebehu nárastu rýchlosti a i. Nie vždy vieme určiť podľa akej funkcie sa sledovaná udalosť bude vyvíjať. Preto si naznačíme všeobecný postup pri určovaní priebehu funkcie. Predtým si zadefinujeme pojmy *asymptoty grafu* funkcie. Začneme s často používanými, t.j. kedy je os x a os y je *asymptotou* grafu funkcie $y = f(x)$.

Definícia 9.12 Asymptota grafu funkcie

Pod asymptotou grafu funkcie rozumieme priamku, ku ktorej sa graf funkcie $y = f(x)$ blíži pre určité x, ktoré môže, alebo nemusí byť z $D(f)$.

1. Os x o rovnici $y = 0$ bude asymptotou grafu funkcie $y = f(x)$, ak platí:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;$$

2. Os y o rovnici $x = 0$ bude asymptotou grafu funkcie $y = f(x)$ keď platí:

$$\lim_{x\to0+} f(x) = +\infty, \text{alebo } \lim_{x\to0+} f(x) = -\infty,$$

a

$$\lim_{x\to0-} f(x) = +\infty, \text{alebo } \lim_{x\to0+} f(x) = -\infty;$$

3. Asymptota bez smernice, priamka $x = a$ je asymptotou grafu funkcie $y = f(x)$ keď platí:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty,$$

pričom znamienka pri ∞, môžu mať ľubovoľnú kombináciu (+,+), (+,-), (-,+), (-,-) podľa typu funkcie.

4. Asymptota so smernicou, priamka o rovnici $y = \mathrm{k}x+\mathrm{q}$, je asymptotou grafu funkcie $y = f(x)$, keď platí:

$$\mathrm{k} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \mathrm{k}x].$$

Poznámka:

1. Vidíme, že os y o rovnici $x = 0$ je špeciálny prípad asymptoty bez smernice, kedy $x = 0$.

2. Vidíme, že os x o rovnici $y = 0$ je špeciálny prípad asymptoty so smernicou, kedy $\mathrm{k} = 0$ a $\mathrm{q} = 0$.

Otázka 5:

Existuje rovnobežná asymptota grafu funkcie s vybranou osou, ktorej smernica neexistuje?

Odpoveď: Áno, je to asymptota bez smernice, ktorá je rovnobežná s osou Oy v bodoch, kde daná funkcia nie je definovaná. Príklady uvidíme pri skúmaní priebehu funkcie.

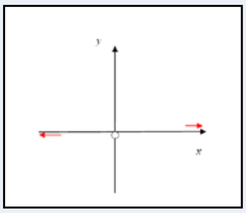
Pri skúmaní priebehu funkcie budeme postupovať podľa nasledovných desiatich bodov:

1. Nájdeme obor definície funkcie.
2. Nájdeme všetky nulové body funkcie.
3. Zistíme, či je funkcia párna, nepárna, periodická.
4. Nájdime všetky asymptoty grafu funkcie: Nájdeme všetky jej body nespojitosti a jednostranné limity v nich. Nájdeme všetky jej body nespojitosti a jednostranné limity v nich.
5. Zistíme všetky intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca, nerastúca, neklesajúca, t.j. vypočítame prvú deriváciu funkcie.
6. Určíme stacionárny bod, t.j. bod v ktorom prvá derivácia funkcie je nulová, alebo neexistuje a určíme, kde môžu byť potenciálne extrémy funkcie.
7. Vypočítame druhú deriváciu a znamienko druhej derivácie v stacionárnych bodoch Nájdeme všetky lokálne extrémy funkcie.
8. Určíme všetky intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna.
9. Nájdeme všetky čísla, v ktorých má funkcia inflexný bod a všetky inflexné body grafu funkcie.
10. Zostrojíme (načrtneme) graf funkcie.

Poznámka: Všetky priebežné úkony a nimi získané výsledky priebežne zakresľujeme do jedného grafu funkcie. Postup prezentuje nasledovný príklad 9.33. Aby boli jednotlivé kroky zreteľnejšie, obrázky sú dopĺňané postupne.

Príklad 9.33: Na základe načrtnutého postupu určite priebeh funkcie: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Riešenie:



1. Nájdeme obor definície funkcie.

   D(f) = $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

   Bod 0 nepatrí do D(f), čo si zakreslíme hneď do grafu!

2. Nájdeme všetky nulové body funkcie.

   a) $x = 0 \notin$ D(f), (Poznámka: bude mať súvis s asymptotou!),

   b) $y = 0$ platí pre $\dfrac{1}{x} = 0, \rightarrow$ pre $x \rightarrow +\infty$ a $x \rightarrow -\infty$

   (Poznámka: graf funkcie nepretína os x, keďže nulové body funkcia nemá a neprechádza ani počiatkom súradnicovej sústavy.)

3. Zistíme, či je funkcia párna, nepárna, periodická.

   Vieme, že pre párnu, resp. nepárnu funkciu platí:

   1. Pre každé $x \in$ D(f) aj $-x \in$ D(f) - je splnené;

   2. a) Pre párnu funkciu: pre každé $x \in$ D(f) platí: $f(-x) = f(x)$.

      b) Pre nepárnu funkciu: pre každé $x \in$ D(f) platí: $f(-x) = -f(x)$.

   Počítajme pre zadanú funkciu:

   $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)} = -\dfrac{1}{x} = -f(x) \quad \Rightarrow$ funkcia je nepárna (lichá). Funkcia bude symetrická podľa počiatku, jedna časť bude ležať nad osou x, druhá časť grafu pod osou x!

Príklad 9.33: pokračovanie riešenia

4. Nájdeme všetky asymptoty grafu funkcie: Nájdeme všetky jej body nespojitosti a jednostranné limity v nich. Bodom nespojitosti je bod $x = 0$.

4.1 Pýtame sa, či os x o rovnici $y = 0$ je asymptotou grafu funkcie? Počítajme:

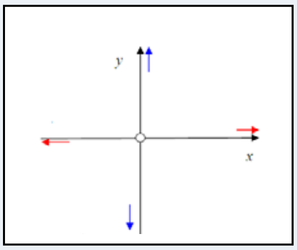
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0;$$

Podmienka je splnená- os x *je asymptotou*, t.j. graf funkcie sa pre $x \to \pm\infty$ bude blížiť k osi x, čo si následne zakreslíme do grafu červenými šípkami ⟶.

4.2 Pýtame sa, či os y o rovnici $x = 0$ bude asymptotou grafu funkcie? Počítajme:

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{x} = +\infty, \text{a } \lim_{x\to0-}\frac{1}{x} = -\infty,$$

Podmienka je splnená - os y *je asymptotou*, t.j. graf funkcie sa pre $x \to 0$ bude blížiť k osi y, čo si zakreslíme do grafu modrými šípkami.



Ako pomôcku pri určovaní znamienka limity môžeme uviesť spôsob: pre limitu $x\to0+$ dosadíme veľmi blízke číslo z pravého okolia bodu 0, t.j. 0,0001, resp. z ľavého okolia:

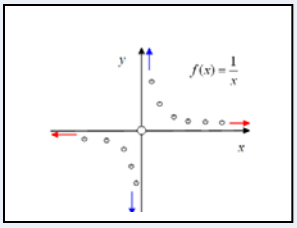
$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{x} = \lim_{x\to0+}\frac{1}{0{,}0001} > 0 \text{ a } \lim_{x\to0+}\frac{1}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{1}{-0{,}0001} < 0 \; a \text{ teda } \lim_{x\to0-}\frac{1}{x} = -\infty.$$

V predchádzajúcom postupe sme určili, že skúmaná funkcia má asymptotu bez smernice o rovnici $x = 0$, čo je jediný bod nespojitosti funkcie. Takže iné asymptoty bez smernice nemá.
Pýtame sa, či funkcia má asymptotu so smernicou, t.j. priamku o rovnici $y = \mathrm{k}x + \mathrm{q}$. Počítajme:

$$\mathrm{k} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1/x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x} - 0x\right] = 0$$

Jedinou asymptotou so smernicou je os x s rovnici $y = 0$.
Z priebeh šipiek a poznatku o nepárnosti funkcie už, aj bez derivácii, vieme odhadnúť priebeh funkcie, čo prezentuje obrázok:



5. Zistíme všetky intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca, nerastúca, neklesajúca, t.j. vypočítame prvú deriváciu funkcie - určíme na ktorých intervaloch je kladná (rastúca) a na ktorých záporná (klesajúca).

$$[f(x)]' = \left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2}$$

Príklad 9.33: pokračovanie riešenia

Vidíme, že $[f(x)]' < 0$ pre všetky $x \in$ D(f) a teda funkcia je na celom D(f) klesajúca, v zhode s našim náčrtom funkcie

1. Určíme stacionárny bod, t.j. bod v ktorom prvá derivácia funkcie je nulová, alebo neexistuje a v ktorých môžu byť extrémy funkcie.

   $[f(x)]' = \left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ neexistuje žiadne $x \in$ D(f) , aby sa $[f(x)]' = 0$ .Teda funkcia nebude mať ani lokálne ani globálne extrémy.

2. Nájdime všetky lokálne extrémy funkcie. Vypočítame druhú deriváciu a znamienko druhej derivácie v stacionárnych bodoch.

   Keďže neexistuje žiadne $x \in$ D(f) , aby sa $[f(x)]' = 0$, funkcia nebude mať ani lokálne ani globálne extrémy.

3. Zistíme všetky intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna. Vypočítame druhú deriváciu:

   $$[f(x)]'' = \left[\left[\frac{1}{x}\right]'\right]' = \left[-\frac{1}{x^2}\right]' = -(-2)\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

   $\frac{2}{x^3} > 0$, keď $x > 0 \rightarrow$ na tomto intervale $(0, \infty)$ funkcia je konvexná;

   $\frac{2}{x^3} < 0$, keď $x < 0$ na tomto intervale $(-\infty, 0)$ je konkávna.

4. Nájdeme všetky čísla x, v ktorých má funkcia inflexný bod a všetky inflexné body grafu funkcie.

   Funkcia sa mení z konvexnej na konkávnu v okolí bodu 0. Keďže tento bod nie je z D(f), funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ inflexný bod nemá.

5. Zostrojíme (načrtneme) graf funkcie, (pozri obrázok vyššie).

Príklad 9.34: Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$-

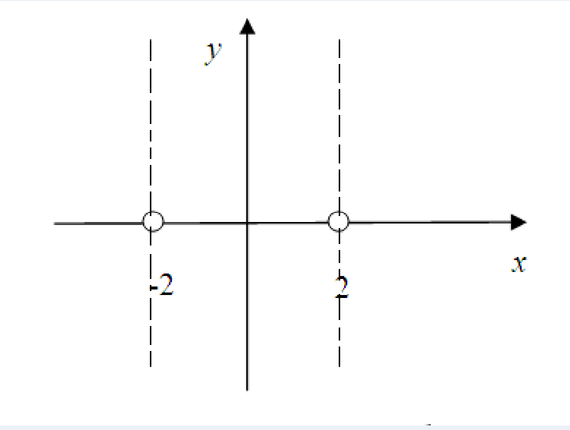
Riešenie:

1. Nájdeme obor definície funkcie.
   Funkcia nie je definovaná tam, kde sa $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x \neq \pm 2$

   D(f) = $(-\infty,-2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

   Body –2 a 2 nepatria do D(f), čo si zakreslíme hneď do grafu (obr. 9.9 a)! (Poznámka: bude mať súvis s asymptotou!),Vieme že to budú asymptoty grafu funkcie bez smernice – zakreslíme si do grafu.

Príklad 9.34: pokračovanie riešenia

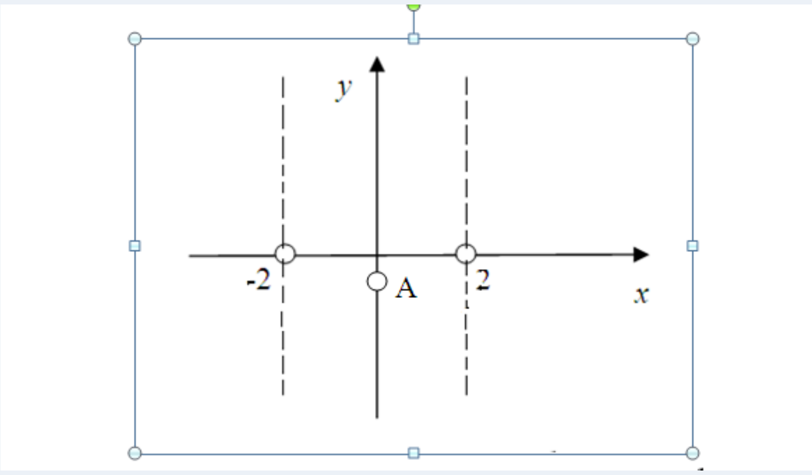


Obr. 9. 9a K postupu priebehu funkcie $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

2. Nájdeme všetky nulové body funkcie.

   a) $x = 0 \in D(f)$, $y = f(0)=\dfrac{1}{0^2-4}=-\dfrac{1}{4}=-0{,}25$. Máme jeden bod , ktorým graf funkcie bude prechádzať: A =[0, –0,25], ktorý si zakreslíme do grafu (obr. 9.8b)!

   c) $y = 0$, t.j. $\dfrac{1}{x^2-4}=0$. Ak túto rovnicu vynásobíme (x^2-4), dostaneme rovnosť
   $1 = 0$, čo vieme že neplatí pre žiadne $x \in D(f)$, pretože $1 \neq 0$. Zistenie nám hovorí, že graf funkcie nepretína os x, v žiadnom bode.



Obr. 9. 8b K postupu priebehu funkcie $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

3. Zistíme, či je funkcia párna, nepárna, periodická.

   Vieme, že pre párnu, resp. nepárnu funkciu platí:

Príklad 9.34: pokračovanie riešenia

1. Pre každé $x \in$ D(f) aj $-x \in$ D(f) - je splnené;

2. a) Pre párnu funkciu: pre každé $x \in$ D(f) platí: $f(-x) = f(x)$.

   b) Pre nepárnu funkciu: pre každé $x \in$ D(f) platí: $f(-x) = -f(x)$.

Počítajme pre zadanú funkciu:

$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{1}{x^2 - 4} = f(x) \quad \Rightarrow$ funkcia je párna, takže bude symetrická podľa osi y!

4. Nájdime všetky asymptoty grafu funkcie: Nájdeme všetky jej body nespojitosti a jednostranné limity v nich. Bodom nespojitosti sú body $x = -2$ a $x = 2$.

4.1 Pýtame sa, či os x o rovnici $y = 0$ je asymptotou grafu funkcie? Počítajme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0, \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0;$$

Podmienka je splnená- os x *je asymptotou*, t.j. graf funkcie sa pre $x \to \pm\infty$ bude blížiť k osi x, čo si následne zakreslíme do grafu šípkami →.

4.2 Pýtame sa, či os y o rovnici $x = 0$ bude asymptotou grafu funkcie? Počítajme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2-4} = -0{,}25 \neq +\infty.$$

Podmienka nie je splnená, t.j. os y *nie je asymptotou,* čo bolo zrejmé, aj z toho, že existuje priesečník s osou y v bode A.

4.3 Asymptoty bez smernice: Určíme limity v bodoch nespojitosti funkcie, t.j. pre $x = 2$ a $x = -2$. Počítajme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(2{,}001)^2-4} = \frac{+}{+} = +\infty$$, čo zakreslíme šípkou do grafu (→).

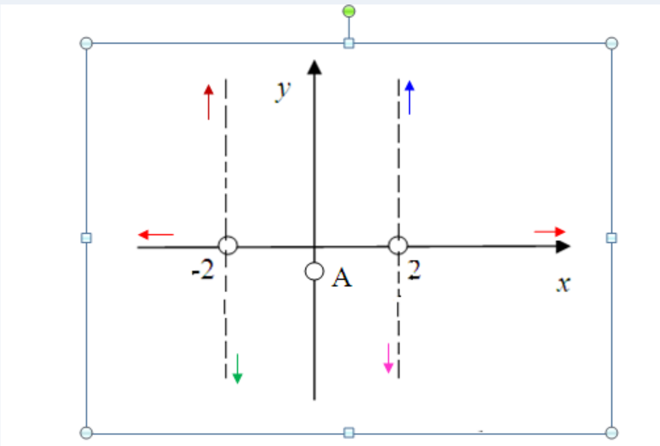
$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(1{,}999)^2-4} = \frac{+}{-} = -\infty$$, čo zakreslíme šípkou do grafu (→).

Rovnako počítame pre bod $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2+} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(-1{,}99)^2-4} = \frac{+}{-} = -\infty$$, čo zakreslíme šípkou do grafu (→).

$$\lim_{x\to -2-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(-2{,}001)^2-4} = \frac{+}{+} = +\infty$$, čo zakreslíme šípkou do grafu (→).

Príklad 9.34: pokračovanie riešenia



Obr. 9. 8c K postupu priebehu funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Výpočtom sme ukázali, že priamky o rovniciach $x = 2$ a $x = -2$ sú asymptoty bez smernice grafu funkcie.

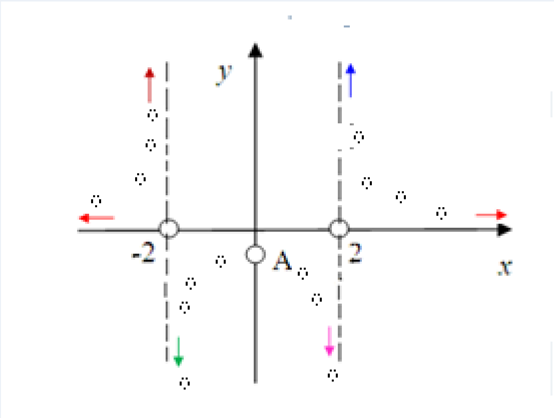
4.1 Pýtame sa, či funkcia má asymptotu so smernicou, teda priamku o rovnici $y = kx + q$.

Počítajme:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(x^2-4)} = 0 = 0 \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{1}{x^2-4} - 0x\right] = 0 \,.$$

Jedinou asymptotou so smernicou má rovnicu $y = 0$, čo je os x, ktoré sme si iným spôsobom odvodili.

Viete už z priebehu šípiek a poznatku o párnosti funkcie už, aj bez derivácii odhadnúť priebeh funkcie? Predpoklad priebehu funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ prezentuje obr. 9.8d.



Obr. 9. 8d K postupu priebehu funkcie $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Príklad 9.34: pokračovanie riešenia

Z grafu vidíme, že :

- funkcia bude rastúca na intervale $(-\infty,-2) \cup (2, 0)$;
- funkcia bude klesajúca na intervale $(0, 2) \cup (2, \infty)$;
- funkcia bude mať lokálny extrém v bode A =[0, – 0,25] a to lokálne maximum;
- funkcia bude na intervale $(-\infty,-2) \cup (2, \infty)$ konvexná;
- funkcia bude na intervale $(-2, 2)$ konkávna;
- funkcia inflexný bod nemá.

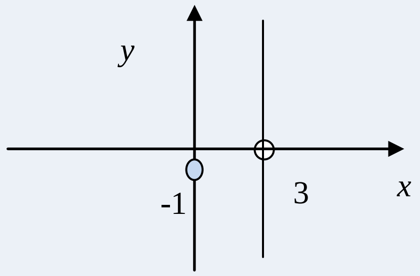
Pravdivosť týchto tvrdení overíme ďalšími výpočtami podľa naznačeného postupu, čo necháme na čitateľa.

Príklad 9.35: Príklad Zistite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$.

Riešenie:

1. Obor definície funkcie: Funkcia nie je definovaná tam, kde sa $x - 3 = 0 \rightarrow x \neq 3$

D(*f*) = $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, čo si zakreslíme hneď do grafu! (Poznámka: bude mať súvis s asymptotou!).



2. Nájdeme všetky nulové body funkcie:

a) $x = 0 \in$ D(*f*), $y = f(0) = \dfrac{3}{-3} = -1$. Máme jeden bod, ktorým graf funkcie bude prechádzať: A =[0, -1], ktorý si zakreslíme do grafu vyššie.

b) $y = 0$, t.j. $\dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} = 0 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \rightarrow x_1 = 3 + 2{,}45 = 5{,}45$

$x_1 = 3 - 2{,}45 = 0{,}55$.

Zistenia nám hovoria, že graf funkcie pretína ako os *y* v jednom bode a os *x* v dvoch bodoch, z čoho vyplýva, že ani jedna os nebude asymptotou grafu funkcie, o čom sa možno presvedčiť výpočtom.

Príklad 9.35: pokračovanie riešenia

3. Zistíme, či je funkcia párna, nepárna, periodická.

Vieme, že pre párnu, resp. nepárnu funkciu platí:

1. Pre každé $x \in$ D(f) aj $-x \in$ D(f) - nie je splnené pretože pre $x = -3$ neexistuje $-x$ $\rightarrow$ nebude ani párna ani nepárna.

4. Nájdime všetky asymptoty grafu funkcie:

4.1 Pýtame sa, či os x o rovnici $y = 0$ je asymptotou grafu funkcie?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=\infty\neq 0\ ,\ \text{resp.}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=-\infty\neq 0\ .$$

Podmienka nie je splnená - os x *nie je asymptotou, ako sme si už objasnili vyššie.*

4.2 Pýtame sa, či os y o rovnici $x = 0$ bude asymptotou grafu funkcie?

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=-1\neq\infty$$

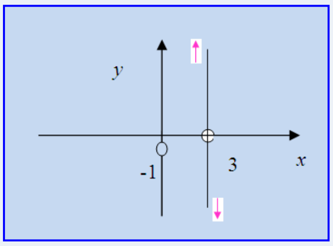
Os y *nie je asymptotou* (*má jeden priesečník).*

4.3 Asymptoty bez smernice:

Počítajme jednostranné limity v bode nespojitosti $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{3{,}1^2-6.3{,}1+3}{3{,}1-3}=\frac{-}{+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2-6x+3}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{2{,}9^2-6.2{,}9+3}{2{,}9-3}=\frac{-}{-}=\infty$$



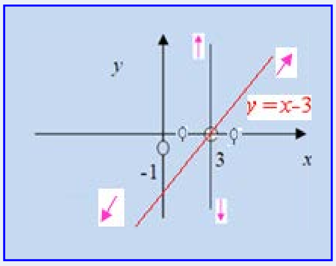
4.4 Asymptota so smernicou, teda priamku o rovnici $y = kx+q$.

Počítajme:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-6x+3}{x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left[\mathrm{f}(x)-\mathrm{k}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{3-3x}{x-3}=-3$$

$\rightarrow$ *asymptota:* $y = x-3$.



Z načrtnutých limít, viete načrtnúť už priebeh funkcie? Vyskúšajte, alebo sa presvedčte pokračovaním výpočtov:

5. Monotónnosť funkcie: $[f(x)]'=\left[\frac{x^2-6x+3}{x-3}\right]'=\frac{x^2-6x+15}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)^2+6}{(x-3)^2}$

$[f(x)]' > 0$ pre každé $x \in D_f$ $\rightarrow$ je na celom D_f rastúca.

6. Stacionárny bod: Keďže je rastúca na celom D_f, nemá stacionárne body pretože čitateľ je vždy rôzny od nuly, t.j. $(x-3)^2+6\neq 0$.

7. Extrémy: nemá.

Príklad 9.35: pokračovanie riešenia

8. Konvexnosť a konkávnosť funkcie na intervaloch:

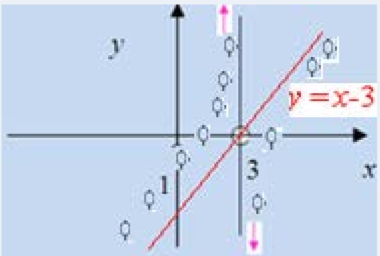
$$[f(x)]'' = \left[\frac{x^2-6x+15}{(x-3)^2}\right]' = \left[1+\frac{6}{(x-3)^2}\right]' = \frac{6.(-2)}{(x-3)^3} = \frac{-12}{(x-3)^2(x-3)}$$

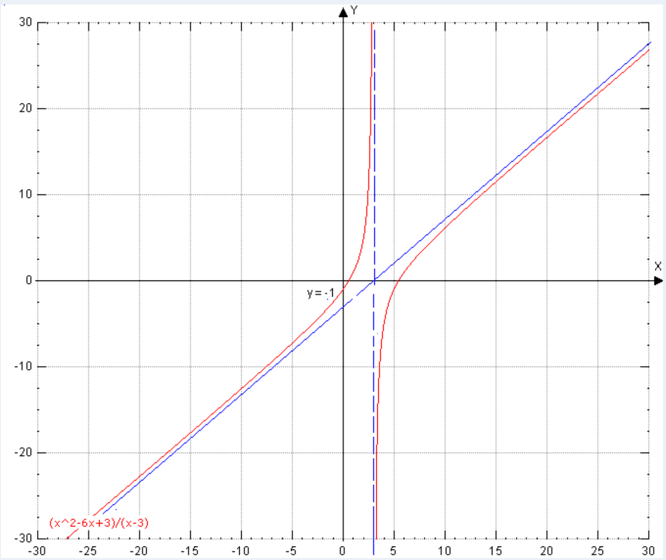
Pre $x - 3 < 0$ je $[f(x)]'' > 0 \rightarrow$ všetky body dotyčnice ležia pod grafom - funkcia je konkávna na intervale $x \in (3, \infty)$.

Pre $x - 3 > 0$ je $[f(x)]'' < 0 \rightarrow$ všetky $x \in (-\infty, 3)$ je funkcia konvexná.

9. Inflexný bod: Kedže konkávnosť sa mení na konvexnosť funkcie v tesnej blízkosti bodu nespojitosti $x = 3$, ktorý nie je z $D_{f.} \rightarrow$ inflexný bod nemá.

10. Načrtneme graf funkcie.





Obrázok **9.9** Graf funkcie $f(x) = \dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$

PDDA:

Úloha11: Nájdite výšku valca s maximálnym objemom, ktorý možno vpísať do gule s polomerom R

Kontrolné otázky

1.Objasnite, ako postupujeme pri hľadaní lokálnych extrémov?