

TRNAVSKÁ UNIVERZITA PETRA PÁZMÁNYA V TRNAVE

KATEDRA FYZIKY



Štefan Húšťava

NÁVODY NA LABORATÓRNE CVIČENIA Z FYZIKY

TU

Trnava
2006

TRNAVSKÁ UNIVERZITA PETRA PÁZMÁNYA V TRNAVE

KATEDRA FYZIKY



Štefan Húšťava

NÁVODY NA LABORATÓRNE CVIČENIA Z FYZIKY

TU

Trnava

2006

© Autorský kolektív

Recenzovali: Doc. RNDr. Dušan Kollár, CSc., Katedra jadrovej fyziky a biofyziky MFF UK
Bratislava

Doc. RNDr. Martin Chudý, CSc., Katedra jadrovej fyziky a biofyziky MFF UK
Bratislava

Za odbornú, obsahovú úpravu zodpovedá autor.

Skriptá neprešli jazykovou úpravou.

OBSAH

Predslov	5
1.1 Laboratórny poriadok	6
1.2 Základné pravidlá bezpečnej a zdraviu nezávadnej práce v laboratóriu fyziky	7
1.3 Fyzikálne veličiny a jednotky	14
1.4 Fyzikálny experiment	18
1.5 Meranie dĺžok	19
1.6 Váženie	23
1.6.1 Teória rovníramenných váh	23
1.6.2 Typy laboratórnych váh	25
1.6.3 Určenie hmotnosti pri exaktnom vážení	29
1.7 Chyby merania a neistoty v meraní fyzikálnych veličín	30
1.7.1 Pravdepodobnosť a zákon normálneho rozdelenia	30
1.7.2 Aritmetický priemer a štandardná odchýlka aritmetického priemeru	32
1.7.3 Neistoty v meraní	34
1.7.4 Postup určovania štandardných neistôt pri priamom meraní	35
1.7.5 Postup určovania štandardných neistôt pri nepriamom meraní jednej veličiny	36
1.7.6 Súvis medzi neistotou merania a chybou merania	39
1.8 Spracovanie experimentálnych výsledkov	40
1.8.1 Metóda najmenších štvorcov	40
1.8.2 Postupná metóda	42
1.8.3 Grafická metóda interpolácie a extrapolácie	43
1.9 Referát z laboratórnej práce	44

Návody na laboratórne cvičenia z mechaniky

1. Určenie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom	50
2. Meranie tiažového zrýchlenia z dôb kmitov matematického kyvadla	55
3. Meranie pružinovej konštanty statickou metódou	61
4. Overenie platnosti Steinerovej vety na základe stanovenia tiažového zrýchlenia a momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla	65
5. Meranie momentu zotrvačnosti a modulu pružnosti v šmyku torzným kyvadlom	67
6. Meranie hustoty kvapalín a tuhých látok	75
7. Meranie viskozity kvapalín	83

Návody na laboratórne cvičenia z termiky a molekulovej fyziky

8. Meranie teplotnej rozťažnosti tuhých látok	89
9. Určenie mernej tepelnej kapacity tuhých látok a kvapalín	93
10. Overenie platnosti Boyleovho – Mariotteovho zákona	97
11. Merania Poissonovej konštanty vzduchu	101
12. Meranie koeficienta teplotnej rozpínavosti vzduchu	107
13. Meranie termofyzikálnych veličín	111

Návody na laboratórne cvičenia z elektriny a magnetizmu

14. Kontrola voltmetra normálovým ampérmetrom	118
---	-----

15.	Kontrola wattmetra.....	121
16.	Meranie závislosti rezistancie kovových vodičov od teploty.....	126
17.	Meranie rezistancií.....	130
18.	Mapovanie elektrického poľa v roztokoch silných elektrolytov.....	135
19.	Meranie voltampérových charakteristík diód.....	140
20.	Kalibrovanie termočlánku a termistora.....	147
21.	Overenie platnosti Faradayových zákonov.....	151
22.	Meranie veľkých odporov metódou vybíjania kondenzátorov.....	156
23.	Meranie indukcie magnetického poľa solenoidu teslametrom.....	159

Návody na laboratórne cvičenia z optiky, kmitov a vlnení

24.	Štúdium skladania rovnobežných kmitov pomocou spriahnutých kyvadiel.....	166
25.	Meranie rýchlosti zvuku vo vzduchu	172
26.	Meranie ohniskovej vzdialenosti šošovky.....	176
27.	Meranie mriežkovej konštanty optickej mriežky.....	183
28.	Meranie priemeru tenkého vlákna pomocou ohybu svetla.....	183
29.	Holografia, záznam a rekonštrukcia hologramu.....	191

Návody na laboratórne cvičenia z atómovej a jadrovej fyziky

30.	Meranie výstupnej práce termoemisného elektrónu.....	199
31.	Meranie náboja termoemisného elektrónu.....	202
32.	Meranie Planckovej konštanty.....	205
33.	Štúdium vlastností proporcionálnych detektorov.....	208
34.	Dozimetrická kontrola pracoviska a meranie radiačnej dávky.....	216

Literatúra.....	221
------------------------	------------

PREDSLOV

Úvodom chcel by som zdôrazniť, že táto publikácia nie je ucelenou učebnicou praktickej fyziky. Je to zbierka návodov pre praktické cvičenia, ktorá má byť pomôckou najmä pri príprave poslucháčov na laboratórne merania v rámci štúdia základného kurzu fyziky.

V snahe uľahčiť prípravu študentov pedagogickej fakulty Trnavskej univerzity z laboratórnych cvičení z fyziky a súčasne tým zvýšiť ich vzdelanostnú úroveň, rozhodol som sa vydať tieto skriptá zatiaľ aspoň v elektronickej forme. Netreba osobitne zdôrazňovať, že laboratórne cvičenia z fyziky predstavujú nenahraditeľnú súčasť v pedagogickom reťazci prednášky a seminára z fyziky. Na laboratórnych cvičeniach z fyziky sami študenti reprodukovujú na laboratórnom stole základné fyzikálne princípy, vety a pravidlá. Toto je ich vlastný prvotný predvstup do fyzikálneho výskumu. Budeme im v tom nápomocní, aby sa im v tom darilo a ich to zaujalo, tak, že sa toho nikdy nevzdajú. Predpokladáme, že získané vedomosti a skúsenosti zo základných experimentálnych fyzikálnych metód budú schopní úspešne aplikovať v nadväzujúcich predmetoch na fyziku. Skriptá zúžene pokrývajú všetky oblasti základného kurzu prednášok z fyziky.

Mojou milou povinnosťou je poďakovať recenzentom Doc. RNDr. Martinovi Chudému, CSc a Doc. RNDr. Dušanovi Kollárovi, CSc. za veľmi cenné pripomienky, zohľadnenie ktorých autormi skript zvýšilo ich úroveň. Budem povďační všetkým čitateľom a najmä naším študentom za pripomienky adresované priamo na laboratórnych cvičeniach z fyziky.

Moja vďaka patrí pánom dekanovi Doc. RNDr. Petrovi Čerňanskému, PhD za pomoc pri vydávaní skript. Moja vďaka patrí aj Prof. RNDr. Júliusovi Krempaskému DrSc. Za výzvu k napísaniu týchto skript ako aj za povzbudzovanie a pomoc pri písaní a s edíciou týchto skript.

Autor

1.1 LABORATÓRNY PORIADOK

Laboratórne cvičenie je organickou súčasťou vyučovania fyziky na Trnavskej univerzite. Jeho poslaním je získať praktickú zručnosť, experimentálne skúsenosti a metodické poznatky pri uskutočňovaní praktických pokusov a vyhodnocovaní experimentálnych údajov.

Laboratórne cvičenie sa uskutočňuje v súlade s harmonogramom príslušného semestra v predpísanom počte týždňov. Na prvom cvičení sa študenti rozdelia do dvojíc, poučia sa o bezpečnosti práce v laboratóriu, oboznámia s laboratórnymi prístrojmi, zariadením v cvičení a metódami spracovania a vyhodnocovania experimentálnych údajov. Na úvodnom cvičení sa študenti oboznámia s harmonogramom cvičení na obdobie celého semestra.

Predposledný týždeň semestra je určený na docvičovanie chýbajúcich úloh pre tých študentov, ktorí mali ospravedlnenú neúčast' na cvičení. V poslednom týždni sa udeľuje zápočet.

Účasť na laboratórnom cvičení je povinná. Neúčast' sa ospravedľňuje len vo výnimočných prípadoch. O týchto prípadoch rozhoduje vedúci učiteľ cvičenia, ktorý súčasne určí spôsob docvičenia. V závažnejších prípadoch neúčasti na laboratórnych cvičeniach rozhoduje o ďalšom postupe vedúci katedry na základe písomnej žiadosti študenta.

Študenti nastupujú na každé laboratórne cvičenie pripravení teoreticky aj metodicky z úloh, ktoré majú podľa harmonogramu cvičiť. Študent preukáže prípravu aj písomnou prípravou v zošite, kam počas cvičenia zapisuje údaje do pripravených tabuliek. Stupeň pripravenosti posúdi učiteľ, ktorý vedie cvičenia. Ak prípadnú cvičenia na štátny alebo iný sviatok, dni dekanského alebo rektorského voľna, cvičenia sa nenahradzujú a dvojica cvičí úlohy podľa určeného harmonogramu.

Študent si pri príchode do miestnosti cvičenia odloží na určenom mieste tašku a v zimnom období vrchné oblečenie. Na laboratórnom stole má iba zošit, kalkulačku a písacie potreby. Počas cvičenia dbá na šetrné zaobchádzanie s prístrojmi. V prípade hrubého porušenia pravidiel alebo nepripravenosti môže byť vylúčený z cvičenia. Ak spôsobí škodu následkom nedbanlivosti a porušenia pravidiel cvičenia, je povinný túto škodu uhradiť.

Referáty/protokoly z cvičení sú študenti povinní odovzdať na nasledujúcom cvičení učiteľovi, ktorý viedol cvičenie. Referát, ktorý nevyhovuje požiadavkám, učiteľ vráti študentovi na prepracovanie. Učiteľ môže požadovať pri kontrole protokolu pôvodné namerané dáta v zošite študenta. .

Zápočet sa udeľí študentovi, ktorý odcvičil stanovený počet úloh a v stanovenom termíne odovzdal všetky protokoly.

1.2 ZÁKLADNÉ PRAVIDLÁ bezpečnej a zdraviu nezávadnej práce v laboratóriu fyziky

Pri práci v laboratóriu sú bezpečnosť a zdravie učiteľov a študentov ohrozované najmä úrazom elektrickým prúdom, poranením pri práci so sklom a výparmi jednotlivých látok. Aby sa predišlo

prípadným úrazom, treba dodržiavať tieto pravidlá:

1. Na laboratórnych cvičeniach sa treba vždy riadiť pokynmi vedúceho cvičenia.
2. Pri jednotlivých meraniach treba postupovať podľa "Návodov pre praktické cvičenia z fyziky" a pokynov asistenta.
3. V laboratóriu treba zachovať pokoj a disciplínu, udržiavať poriadok a čistotu, nepoškodzovať laboratórny nábytok.
4. V laboratóriu je zakázané fajčiť, ako aj jedenie a pitie vody z laboratórneho skla.
5. Pri práci so sklom treba sa chrániť pred poranením.
6. Zvlášť nebezpečné pre ľudský organizmus sú výpary rozliatej ortuti a preto tomu treba zabrániť. V prípade rozliatia ortuť nikdy nespľachovať do kanalizácie, ale čo najrýchlejšie pozbierať na zinkový plech. Ortuť nikdy nenasávať ústami do kapilár.
7. Olejové kúpele starostlivo chrániť pred zmiešaním s vodou, ktorá môže spôsobiť vzkypenie horúceho oleja a tým popáleniny.
8. Pri úlohách stanovenia momentov zotrvačnosti treba venovať zvýšenú opatrnosť, nakoľko uvoľnený oceľový drôt môže poraniť a zotrvačníky na ňom zavesené spôsobiť úraz pohmoždeniny, resp. zlomeniny končatín.
9. Elektrické obvody zapojíme podľa schémy až po zdroj napätia (el. sieť alebo batériu) a potom požiadame prítomného asistenta o skontrolovanie správnosti zapojenia a o súhlas pripojenia zariadenia ku zdroju.
10. Počas merania nedotýkať sa voľných neizolovaných živých častí meracieho regulačného zariadenia.
11. Po skončení elektrického merania si treba dať skontrolovať stav meracích prístrojov a namerané hodnoty asistentom, ktorý dá pokyn k odpojeniu zdroja napätia od elektrického obvodu. Až po odpojení zdroja (vytiahnutím vidlice zo zásuvky) možno rozpojiť jednotlivé prvky obvodu.
12. Nerobiť samovoľne opravy alebo zmeny na elektrických zariadeniach, ale na poruchu ihneď upozorniť asistenta.

V záujme bezpečnosti študentov pri výuke v laboratóriu je potrebné stanoviť odborný dozor tak, aby na jedného asistenta pripadlo **najviac 10 študentov**, pričom platia tieto zvláštne nariadenia:

1. Pred začatím výučby musí asistent osobne skontrolovať všetky signálne zariadenia a funkcie spínačov, ktorými možno v laboratóriu v prípade nebezpečenstva vypnúť prívod prúdu na všetky pracoviská. Ovládač vypínača musí byť výrazne označený.
2. Asistent dbá na to, aby študenti používali predpísané a vyhovujúce osobné ochranné pracovné pomôcky a aby boli v poriadku hasiace prístroje.
3. Pred začatím výučby v laboratóriách musia byť študenti oboznámení s príslušnými bezpečnostnými predpismi o hroziacom nebezpečenstve. Je potrebné, aby boli vyškolení v poskytovaní prvej pomoci pri úrazoch elektrinou.
4. Asistent musí mať preukaz odbornej spôsobilosti získaný na základe skúšky z príslušných predpisov podľa vyhlášky **SÚBP č. 74/1996Zb.** a svoje znalosti si musí dopĺňovať sledovaním noriem a dodatkov.

Vznik úrazu elektrickým prúdom

Úrazy, spôsobené elektrickým prúdom, môžu vzniknúť týmito spôsobmi:

1. Dotykom živých častí elektrického zariadenia, ktoré majú nebezpečné napätie voči zemi, alebo nebezpečným priblížením sa k nim. V takomto prípade vzniká jedнопólový dotyk s elektrickým vedením, v dôsledku ktorého telom prejde poruchový prúd do zeme, ktorou sa vracia uzemnenému uzlu zdroja.
2. Súčasným dotykom živých častí rozličnej polarity. V tomto prípade vzniká dvojpólový dotyk, pri ktorom sa telo nachádza v prúdovom obvode z jedného pólu do druhého, takže je zasiahnuté i vtedy, keď je postihnutý dobre izolovaný od zeme.
3. Dotykom neživých častí el. zariadenia, ktoré za normálnych okolností nie sú síce pod napätím, ale ktoré dostali nebezpečné napätie pre poruchu izolácie niektorejlivej časti. Veľmi nebezpečné sú prípady, keď sa na kostru el. zariadenia dostane pri poruche fázové napätie. Vtedy obyčajne vzniká jedнопólový dotyk voči zemi, avšak nie je vylúčený ani dvojpólový dotyk medzi dvomi rozličnými konštrukčnými časťami, ktoré majú voči sebe rozdielny potenciál.
4. Pri vn a vvn stačí i priblíženie sa k živým častiam na tzv. preskokovú vzdialenosť (pod 400 cm), aby nastal úraz.

Rozdelenie priestorov z hľadiska nebezpečenstva úrazu elektrickým prúdom

Priestory významne ovplyvňujúce voľbu a druh elektrických zariadení, s veľkou mierou prispievajú k bezpečnosti resp. úrazovosti pri prácach s el. zariadeniami. Podľa kvality ich delíme na:

1. **Bezpečné priestory** - sú to priestory, v ktorých prostredie znižuje nebezpečenstvo úrazu el. prúdom (studené, suché, neobsahujúce horľavé látky).
2. **Nebezpečné priestory** - tieto priestory obsahujú prostredie znižujúce kvalitu izolácie, čím sa zvyšuje prechodne, alebo trvalo nebezpečenstvo úrazu el. prúdom (horúce prostredie, vlhké, prostredie obsahujúce vodivý prach, žieravé látky, prostredie s nebezpečenstvom mechanického poškodenia, priestory s otrasmi, vonkajšie priestory).
2. **Osobitne nebezpečné** - sú to prostredia znižujúce izolačné odpory (mokrú priestory, priestory mimoriadne vodivé, atď).

Podmienky pre pripájanie prenosných el. spotrebičov pohyblivým prívodom do zásuviek

Podľa STN 341010 je potrebné dodržiavanie týchto zásad:

1. Pevné zásuvky v rozvodoch nn musia mať ochranné kontakty, ktoré musia byť vždy spojené s ochrannou sústavou el. rozvodu.
2. Zásuvky sa pripájajú tak aby ochranný kolík bol hore a nulovací vodič bol pripojený na pravú zdierku pri pohľade spredu.
3. V prostredí, pre ktoré sú predpísané zásuvky na bezpečné napätie, sa tieto nesmú zameniť so zásuvkami, konštruovanými pre nízke napätie.
4. Pohyblivé prívody musia mať vždy ochranný vodič a vidlicu s ochranným kontaktom. Len pri elektrických predmetoch s *triedou ochrany* II má pohyblivý prívod len dva vodiče, ktoré môžu byť rovnakej farby a vidlicu bez ochranného kontaktu (kolíka), ktorú možno zastrčiť do bežnej zásuvky s kolíkom. Vidlica musí byť od šnúry neoddeliteľná.

Rozdelenie elektrických predmetov/prístrojov do tried

Elektrické predmety a zariadenia sú zaradené podľa noriem z hľadiska bezpečnosti pred úrazom elektrinou do týchto skupín:

1. *Predmety triedy 0* - Má len pracovnú izoláciu. Môžu sa inštalovať iba s pevným prívodom.
2. *Predmety triedy 01* - Má všade aspoň pracovnú izoláciu a ochrannú svorku. Ich pevne pripojený pohyblivý prívod alebo šnúra sú bez ochrannej žily, vidlica bez ochranného kontaktu a preto ju nemožno zasunúť do zásuvky s ochranným kolíkom.
3. *Predmety triedy I* - Majú všade aspoň pracovnú izoláciu a ich kovové kostry majú ochrannú svorku. Spotrebič sa pripojí s pohyblivým prívodom s ochranným vodičom (jednofázový štvorpramenný šnúru). Prívod je ukončený vidlicou a ochranným kontaktom.
4. *Predmety triedy II* - Majú všade dvojitú alebo zosilnenú izoláciu a sú bez ochranného vodiča. Sú bez možnosti pripojenia ochranného vodiča. Nemožno ich kombinovať s ďalšími ochranami. Sú označené značkou.
5. *Predmety triedy III* - Môžu sa použiť len po zapojení na bezpečné napätia. Prenosné spotrebiče musia mať pohyblivý prívod, ktorého vidlica neumožňuje prípoj spotrebiča do zásuvky s vyšším napätím.

Rozdelenie el. zariadení podľa menovitého napätia

I	mn	malého napätia	≤ 50	≤ 50	≤ 50
II	nn	nízkeho n.	50 :- 600	50 :- 1000	50 :- 1000
A	vn	vysokého n.	600 :- 30k	1 k :- 52k	1 k :- 52k
B	vvn	vel'mi vysokého n.	30k :- 170k	52k :- 300k	52k :- 300k
C	zvn	zvlášť vysokého n.		300k :- 800k	
D	uvn	ultra vysokého n.		> 800k	

Ochrana živých častí elektrických zariadení

Živé časti el. zariadení treba pri práci vždy chrániť pred nebezpečím dotyku alebo pred priblížením na takú vzdialenosť, pri ktorej by už mohlo dôjsť k úrazu el. prúdom.

Ochrana prevádzame týmito spôsobmi:

- 1. Polohou** - ochrana polohou spočíva v takom umiestnení živých častí, že ich dotyk je bez použitia osobitných pomôcok vylúčený.
- 2. Zábranou** - spočíva v znemožnení dotyku živých častí alebo v zabránení nebezpečného priblíženia sa k nim (ohrade). Nie je súčasťou el. zariadenia.
- 3. Krytím** - je to konštrukčné opatrenie, ktoré tvorí súčasť el. zariadenia (kryt).
- 4. Izoláciou** - spočíva v tom že sa živé časti obklopija izolantom tak, aby sa znemožnil akýkoľvek dotyk človeka.
- 5. Doplnkovou izoláciou** - elektrické zariadenie sa vybaví izolačným stanovišťom (koberec) alebo sa pri práci použijú osobné ochranné pracovné prostriedky (vypínacie tyče, dielektrické rukavice,...).

Kategória	Označenie	Názov zariadenia	Menovité napätia (V)		
			v uzemn. sústave vodičom z zemou	v uzemn. sústave medzi vodičmi	v izolovanej sústave medzi vodičmi
	napätia				

Predpisy pre zaobchádzanie s elektrickými zariadeniami pri požiaroch a zátopách

Požiar, alebo zátopy treba ihneď hlásiť :

1. na ohlasovňu požiarov
2. povereným osobám v závodoch, školách, ...
3. príslušnému rozvodnému energetickému podniku.

Pred začatím záchranných prác pri požari alebo zátopy elektrického zariadenia treba ďalej postupovať takto:

A) Pracovníci k tomu určení musia vypnúť elektrický prúd, pričom treba skontrolovať či sa pritom nevypli :

- a) dôležité zariadenia, ktoré by mohli havarovať
- b) požiarne čerpadlá a čerpadlá na plnenie vodných zásobníkov
- c) núdzové osvetlenie

d) zariadenia potrebné na evakuáciu osôb a materiálu (výtahy, odsávacie ventilátory, ...).

B) K pretrhnutému elektrickému vedeniu treba zamedziť prístup.

C) Požiar, ktorý vznikol pri **nn** vedení, sa môže hasiť súvislým prúdom vody až po spoľahlivom vypnutí el. prúdu. Kde nie je možné toto zariadenie vypnúť, treba požiar hasiť hasiacimi prístrojmi alebo vodnou hmlou. V záujme bezpečnosti je však potrebné dodržať pri hasení vzdialenosť od živých častí *najmenej* 2 m. Elektrické zariadenia **vn** alebo **vvn** i jeho okolie možno hasiť len po bezpečnom vypnutí el. prúdu. Hasenie sa vykonáva snehovým hasiacim prístrojom s CO₂, práškovým hasiacim prístrojom a na otvorenom priestranstve možno použiť i tetrachlórový hasiaci prístroj. Pri väčšom požiari musia mať aspoň dve osoby bezpečnostný dozor, aby záchrancovia v boji so živlom neutrpeli žiadny úraz.

Prvá pomoc pri úraze elektrickým prúdom

Elektrický prúd, prechádzajúci ľudským telom, spôsobuje tepelné a fyziologické účinky. O tom v akej miere sa tieto účinky prejavia rozhoduje veľkosť prúdu, dĺžka času jeho pôsobenia a druh prúdu. Jednosmerný prúd nízkeho napätia spôsobuje kŕče svalov a svojimi elektrolytickými účinkami rozklad krvi. Striedavý prúd (50Hz) nízkeho napätia spôsobuje kŕče svalov. Najhorší je ten prípad, keď elektrický prúd prechádza oblasťou srdca alebo zasiahne mozog či miechu. V týchto prípadoch postihnutý upadá do bezvedomia a keď sa mu včas neposkytne prvá pomoc umiera. Vysoké napätie spôsobuje úrazy najmä popálením a ak je vyššie než 1000V môže spôsobiť aj rozklad krvi a embóliu.

Pri poskytovaní prvej pomoci treba dodržať tento postup:

- 1) Postihnutého hneď vyslobodiť z dosahu el. prúdu vypnutím, alebo spoľahlivým prerušením obvodu, v ktorom sa nachádza (odtiahnutím postihnutého z dosahu živej časti zariadenia, mechanickým prerušením vodiča).
- 2) Ihneď zistiť či je postihnutý pri vedomí, či dýcha, či má hmatateľný pulz a do akej miery je poranený (krvácanie, popáleniny, ...).
- 3) Po tejto laickej diagnostike treba prísť k poskytnutiu prvej pomoci (do príchodu lekára takto):

a) Ak postihnutý je v bezvedomí ale dýcha, má pritom hmatateľný pulz a nemá známky vážnejšieho zranenia, treba ho uložiť do vodorovnej polohy na bok, s hlavou čo najviac zaklonenou a s uvoľneným odevom pri krku, na prsiach a bruchu tak, aby sa mu uvoľnili dýchacie cesty.

Nesmie sa podávať žiadny nápoj ani liek. Treba neustále sledovať dych a činnosť srdca až do príchodu lekára.

b) Ak postihnutý nedýcha alebo prestane dýchať, musí sa ihneď zaviesť umelé dýchanie až do času, kedy začne opäť dýchať. Ak postihnutý dýcha slabo, povrchno a nepravidelne, treba zaviesť podporné dýchanie. S umelým dýchaním sa pokračuje až do príchodu do nemocnice. Zásadne pri ňom používame vnútorný spôsob umelého dýchania z pľúc do pľúc.

c) Ak postihnutý i naďalej nedýcha (umelé dýchanie je neúčinné), postihnutý nemá hmatateľný pulz na krčnici ani na hlavnej stehennej tepne, vycvičený záchranca doplní oživovanie nepriamou masážou srdca.

d) Záchranca ošetrí zistené poranenie až vtedy, keď postihnutý začne pravidelne dýchať a aked' sa obnoví činnosť srdca. Toto spočíva v zastavení krvácania priložením tlakového obväzu, pri krvácaní z veľkých tepien na končatinách treba tieto pevne stiahnuť nad ranou Martinovým obväzom a pod. Postihnutý sa urýchlene prepraví do nemocnice, pričom sa na

pripojenom lístku uvedie presný čas, kedy sa ovínadlo priložilo. Ostatné rany treba ošetriť tak, že sa očistí ich okolie a vlastná rana sa zakryje sterilným obvazom. Zlomeniny a vyklbeniny sa nesmú naprávať. Treba ich zafixovať pomocou dláh.

Umelé dýchanie z pľúc do pľúc

Pred začatím umelého dýchania sa postihnutý položí na chrbát. Z jeho úst sa odstránia všetky prekážky, a pod lopatky sa podloží zvinutá prikrývka. Potom sa hlava postihnutého zakloní čo najviac dozadu a to tak, že jednou rukou sa tlačí dolná sánka hore a dozadu a druhou na čelo. Tým sa dosiahne uvoľnenie dýchacích ciest postihnutého. Ak zostanú ústa v kľči zatvorené, nesmú sa otvárať násilím, ale treba vykonávať umelé dýchanie cez jeho nos. Záchranca sa z hlboka nadýchne a potom vydýchne do úst (nosa) postihnutého asi 10 krát rýchlo za sebou vzduch asi v sekundových intervaloch. Potom tempo spomalí a pokračuje rýchlosťou 12 - 16 krát za minútu. Len čo postihnutý začne dýchať sám, záchranca umelé dýchanie preruší.

Pri umelom dýchaní možno použiť i tzv. T - tubus z plastu alebo prístroj PRIMA 10 M7. Trubica T- tubus sa zasunie do náustku tak, aby uhnutá časť smerovala k nemu. V mieste spojenia oboch častí sa odporúčajú vložiť tri až štyri vrstvy mulu, čím sa zníži možnosť infekcie.

Pri použití prístroja PRIMA 10 M7 si záchranca zavedie náustok do úst obrubou za predné zuby a na ústa a nos postihnutého priloží masku prístroja s nafúknutou poduškou. Vdychuje a vydychuje do prístroja.

Nepriama masáž srdca

Túto môže vykonávať len odborne vyškolený záchranca. Aj ten musí začať najprv umelým dýchaním, ktoré sa nesmie prerušiť ani počas masáže srdca. Záchranca uloží postihnutého na chrbát na tvrdú podložku a postaví sa po jeho ľavej strane. Zápästie pravej položí dlaňou na dolnú časť hrudnej kosti, pričom prsty smerujú k pravému lakt'u postihnutého, ale nedotýkajú sa hrudníka. Ľavú ruku potom položí naprieč cez pravú a celým telom stláča rytmicky hrudnú kosť smerom k chrbtici do hĺbky asi 4 - 5 cm v sekundových intervaloch. Vždy na päť stlačení hrudnej kosti nasleduje jeden vdych, ktorý záchranca robí metódou umelého dýchania z pľúc do pľúc. Táto činnosť sa vykonáva až do príchodu lekára, ktorý rozhodne o ďalšom postupe.

1.3 FYZIKÁLNE VELIČINY A JEDNOTKY

Základné fyzikálne veličiny a ich jednotky

Fyzikálna veličina je pojem, slúžiaci na opis nejakého javu, stavu látky alebo telesa, t. j. na vyjadrenie vlastnosti hmotných objektov. Fyzikálne veličiny majú súčasne kvantitatívny i kvalitatívny charakter. Na to, aby sme mohli veličiny merať, potrebujeme jednotky. Hodnota fyzikálnej veličiny je súčinom číselnej hodnoty a jednotky.

Od roku 1980 platí u nás medzinárodná sústava jednotiek SI, ktorá dostala svoje označenie podľa skratky francúzskeho názvu. *Système International d'Unites*.

Jednotky sústavy SI sú rozdelené do štyroch kategórií. V prvých troch kategóriách sú hlavné jednotky, štvrtá obsahuje násobky a diely jednotiek prvých troch kategórií.

Hlavné jednotky SI delíme na základné, doplnkové a odvodené.

Základné jednotky SI:

Základná veličina	Symbol veličiny	Jednotka SI	Symbol jednotky
Dĺžka	l	meter	m
Hmotnosť	m	kilogram	kg
Čas	t	sekunda	s
Elektrický prúd	I	ampér	A
Termodynamická teplota	T	kelvin	K
Látkové množstvo	n	mól	mol
Svietivosť	I	kandela	cd

Meter je dĺžka dráhy, ktorú prejde svetlo vo vákuu za $1/299\,792\,458$ sekundy.

Kilogram sa rovná hmotnosti medzinárodného prototypu kilogramu, uloženého v Medzinárodnom úrade pre váhy a miery v Sévres pri Paríži.

Sekunda je čas trvania 9 192 631 770 periód žiarenia zodpovedajúceho prechodu medzi dvoma veľmi jemnými hladinami ($F = 4, m_F = 0$ a $F = 3, m_F = 0$) základného stavu cézia – 133 bez vplyvu akéhokoľvek vonkajšieho poľa.

Ampér je prúd, ktorý pri stálom prietoku dvoma priamymi rovnobežnými vodičmi nekonečnej dĺžky a zanedbateľného kruhového prierezu, vzdialenými od seba vo vákuu jeden meter, vyvoláva medzi týmito vodičmi silu rovnú $2 \cdot 10^{-7}$ newtona na jeden meter dĺžky.

Kelvin je jednotka termodynamicej teploty a je 273,16-tým dielom termodynamicej teploty trojného bodu vody.

Mól je látkové množstvo, ktoré obsahuje toľko základných entít (atómov, molekúl, iónov, elektrónov alebo iných častíc alebo špecifikovaných skupín týchto častíc), koľko atómov obsahuje 0,012 kg uhlíka ^{12}C .

Kandela je svietivosť $1/600\,000$ štvorcového metra povrchu absolútne čierneho telesa v kolmom smere, pri teplote tuhnutia platiny ($1768\text{ }^\circ\text{C}$) a tlaku $101\,325\text{ Pa}$.

Doplňkové jednotky SI:

Radián je rovinný uhol, zovretý dvoma radiálnymi polpriamkami, ktoré vytínajú na kružnici oblúk rovnakej dĺžky, ako má jej polomer.

Steradián je priestorový uhol, ktorý s vrcholom v strede gule vytína na povrchu tejto gule plochu s obsahom, rovnajúcim sa druhej mocnine polomeru tejto gule.

Doplňkové jednotky sa podľa najnovšej normy nemusia uvádzať.

Odvodené jednotky SI sa dajú rozdeliť do troch skupín:

- odvodené jednotky, ktoré vo svojom názve obsahujú základné jednotky, napr. m^2 , ms^{-1} , m s^{-2} , kg m^{-3} .
- Odvodené jednotky so samotným názvom. Takýchto jednotiek je 18 a uvádza ich nasledujúca tabuľka.
- Odvodené jednotky, ktoré vo svojom názve používajú spoločné základné alebo doplnkové a odvodené jednotky sa samostatným názvom; napr.: Pa s, N m, F m^{-1} .

Násobky a diely jednotiek sú štvrtou kategóriou v sústave SI. Tvorené sú pomocou predpony, označujúcej ,o aký násobok alebo diel ide.

Pri odvodení jednotiek násobením alebo delením základných jednotiek sa majú používať výhradne uvedené predpony, ktoré odporúča komisia IUPAC (prepony odstupňované po jednom dekadickom poriadku sa majú používať len výnimočne). Je zakázané používať naraz dve alebo viac predpôn. Pri zápise sa odporúča tvar zo záporným exponentom pred tvarom so šikmou zlomkovou čiarou (napr. kg m^{-3} namiesto kg/m^3).

Násobky a diely jednotiek

Predpona	Symbol	Násobok	Predpona	Symbol	Násobok
peta	P	10^{18}	deci	d	10^{-1}
exa	E	10^{15}	centi	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	mili	m	10^{-3}
giga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^3	piko	p	10^{-12}
hekto	h	10^2	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^1	atto	a	10^{-18}

Odvozené jednotky so samostatným názvom:

Jednotka	Symbol	Rozmer	Veličina
becquerel	Bq	s^{-1}	aktivita
coulomb	C	As	elektrický náboj
farad	F	$m^{-2} kg^{-1} s^4 A^2$	elektrická kapacita
gray	Gy	$m^2 s^{-2}$	dávka ionizujúceho žiarenia
henry	H	$m^2 kg s^{-2} A^{-2}$	indukčnosť
hertz	Hz	s^{-1}	kmitočet (frekvencia)
joule	J	$m^2 kg s^{-2}$	energia, práca
lumen	lm	cd sr	svetelný tok
lux	lx	$m^{-2} cd sr$	osvetlenie
newton	N	$m kg s^{-2}$	sila
ohm	Ω	$m^2 kg s^{-3} A^{-2}$	elektrický odpor
pascal	Pa	$m^{-1} kg s^{-2}$	tlak, mechanické napätie
siemens	S	$m^{-2} kg^{-1} s^3 A^2$	elektrická vodivosť
sievert	Sv	$J kg^{-1}$	dávkový ekvivalent
tesla	T	$kg s^{-2} A^{-1}$	magnetická indukcia
volt	V	$m^2 kg s^{-3} A^{-1}$	elektrický potenciál, napätie
watt	W	$m^2 kg s^{-3}$	výkon, žiarivý tok
weber	Wb	$m^2 kg s^{-2} A^{-1}$	magnetický indukčný tok

Vedľajšie jednotky nepatria do sústavy SI, ale sú v SR zákonne povolené

Jednotka	Symbol	Vzt'ah k jednotkám SI	Veličina
minúta	min	1 min = 60 s	čas
hodina	h	1 h = 60 min = 3600 s	čas
deň	d	1 d = 24 h = 86 400 s	čas
stupeň uhlový	$^{\circ}$	$1^{\circ} = (\pi/180)$ rad	rovinný uhol
minúta uhlová	'	$1^{\circ} = 60'$	rovinný uhol
sekunda uhlová	"	$1' = 60''$	rovinný uhol
grad (gon)	g	$1 g = (\pi/200)$ rad	rovinný uhol
hektár	ha	$1 ha = 10\,000 m^2$	plošný obsah
liter	l	$1 l = 1 dm^3$	objem
tona	t	$1 t = 1000 kg$	hmotnosť
atóm.hm.jednotka	u	$1 u = 1,660\,53 \cdot 10^{-27} kg$	hmotnosť
stupeň celzia	$^{\circ}C$	$T/K = t/^{\circ}C + 273,15$	teplota
elektrónvolt	eV	$1 eV = 1,602\,19 \cdot 10^{-19} J$	energia
astronom. jednotka	UA alebo AU	$1 UA = 1,496 \cdot 10^{11} m$	dĺžka
parsek	pc	$1 pc = 3,086 \cdot 10^{16} m$	dĺžka

K vedľajším jednotkám rovinného uhlu a k atómovej hmotnostnej jednotke nie je dovolené pridávať predpony. Jednotky kombinované z jednotiek SI a vedľajších jednotiek sa používať môžu (napr. $kg l^{-1}$, $mol l^{-1}$).

V niektorých odboroch (ale len práve v nich) sú povolené ešte tieto jednotky:

- v astronómii: svetelný rok (ly) pre dĺžku ($1 ly = 9,460\,5 \cdot 10^{15} m$),
- v optike: dioptria (Dp, D) pre optickú mohutnosť a
- v elektrotechnike: voltampér (VA) pre zdanlivý výkon a var (var) pre jalový výkon.

Iné jednotky zákon nepripúšťa, ale stále sa s nimi môžeme stretnúť jednak v staršej našej ale i zahraničnej literatúre. Preto si uvedieme aspoň tie najčastejšie.

Tlak sa popri pascaloch vyskytuje udávaný v atmosférach, torroch alebo baroch.

Atmosfér bolo viacero druhov. Technická atmosféra vychádzala z tlaku telesa s hmotnosťou 1 kg na plochu 1 cm², čo je v dnešných jednotkách 9,81.10⁴ Pa. Fyzikálna atmosféra 1 atm = 101 325 Pa.

1 Torr je tlak 1 mm ortuťového stĺpca (presne pri teplote 0 °C a tiažovom zrýchlení $g = 9,806\ 65\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$). 1 atm odpovedá 760 torr, teda 1 torr = 133,3 Pa.

Starou jednotkou energie, ktorú ale stále poznáme najmä pri uvádzaní „kalorickej hodnoty potravín“ je kalória. 1 cal = 4,186 J.

V staršej fyzikálnej literatúre (najmä z oblasti elektriny a magnetizmu) sa ešte môžeme stretnúť s jednotkami takzvanej sústavy CGS, v ktorej boli základnými jednotkami centimeter, gram a sekunda. Jednotkou energie CGS sústavy, ktorou bol erg využijeme na príklad prepočtu jednotiek:

Jednotkou energie ($E = F \cdot s = m \cdot a \cdot s$) v SI sústave je joule 1 J = 1 kg m²s⁻². Potom 1 erg = 1 g cm²s⁻² = 1.(10⁻³ kg).(10⁻² m)²s⁻² = 1.10⁻⁷ kg m²s⁻² = 1.10⁻⁷ J.

ZÁKLADNÉ FYZIKÁLNE KONŠTANTY

<i>Názov</i>	<i>Symbol</i>	<i>Hodnota</i>
Normálne tiažové zrýchlenie	g_n	9,80665 m s ⁻²
Gravitačná konštanta	κ	(6,6720± 0,0041).10 ⁻¹¹ N m ² kg ⁻²
Rýchlosť svetla vo vákuu	c	(2,99792458± 0,00000001).10 ⁸ m s ⁻¹
Permeabilita vákuu	μ_0	4 π .10 ⁻⁷ H m ⁻¹
Permitivita vákuu	ϵ_0	(8,85418782± 0,00000007).10 ⁻¹² F m ⁻¹
Pokojuvá hmotnosť protónu	m_p	(1,6726485± 0,0000086).10 ⁻²⁷ kg
Pokojuvá hmotnosť neutrónu	m_n	(1,6749543± 0,0000086).10 ⁻²⁷ kg
Pokojuvá hmotnosť elektrónu	m_e	(9,109534± 0,000047).10 ⁻³¹ kg
Hmotnostný náboj elektrónu	e_m	(1,7588047± 0,0000049).10 ¹¹ C kg ⁻¹
Elementárny náboj	e	(1,6021892± 0,0000046).10 ⁻¹⁹ C
Planckova konštanta	h	(6,626176± 0,000036).10 ⁻³⁴ J s
Wienova konštanta	b	(2,89779± 0,00009).10 ⁻³ m K
Stefanova Boltzmannova konštanta	σ	(5,67032± 0,00071).10 ⁻⁸ W m ⁻² K ⁻⁴
Atómová hmotnostná konštanta	m_u	(1,6605655± 0,0000086).10 ⁻²⁷ kg
Univerzálna plynová konštanta	R	(8,31441± 0,00026) J mol ⁻¹ K ⁻¹
Avogadrova konštanta	N_A	(6,022045± 0,000031).10 ²³ mol ⁻¹
Molový objem ideálneho plynu	V_m	(2,241383± 0,000070).10 ⁻² m ³ mol ⁻¹
Faradayova konštanta	F	(9,648455± 0,000044).10 ⁴ C mol ⁻¹
Boltzmannova konštanta	k	(1,380662± 0,000086).10 ⁻²³ J K ⁻¹

1.4 FYZIKÁLNY EXPERIMENT

Fyzikálny experiment sa skladá z dvoch dôležitých pracovných častí:

- merania
- vyhodnotenia merania.

Merat' fyzikálnu veličinu znamená určiť jej hodnotu vo zvolených jednotkách. Počet jednotiek nachádzajúcich sa v meranej veličine nazývame merným číslom tejto veličiny. Meranie je dôležité pri odvodzovaní fyzikálnych zákonitostí z pozorovaných fyzikálnych javov. Spôsob určovania hodnoty určitej fyzikálnej veličiny nazývame metódou merania. Metóda merania závisí od viacerých faktorov, a to predovšetkým od charakteru určovanej veličiny. Ďalej od toho, z akých vzťahov meranú veličinu určujeme, aké prístroje používame a ako ich usporiadame. Takmer každú fyzikálnu veličinu možno merať viacerými metódami, ktoré sa od seba aj podstatne líšia. Všetky metódy merania možno rozdeliť na metódy priame a metódy nepriame.

Pri priamej metóde meranej veličiny je táto veličina meraná priamo meracím prístrojom. Pri nepriamych metódach sa opierame o vzťahy, ktoré vyjadrujú súvis meranej veličiny s inými veličinami, pomocou ktorých meraná veličina s inými veličinami je definovaná. Napr. hustotu môžeme zmerať pomocou Archimedovho zákona.

Z iného hľadiska rozdeľujeme metódy merania na:

- absolútne – nezávislé
- relatívne – porovnávacie .

Metódami absolútnymi (nezávislými) nazývame také metódy, ktorých výsledok dáva priamo skutočnú hodnotu meranej fyzikálnej veličiny v jej jednotkách. Výsledky získané absolútnymi metódami sú cennejšie, avšak realizácia absolútnych metód merania býva obtiažnejšia ako realizácia metód relatívnych. Výsledok získaný relatívnou metódou merania dáva len relatívnu hodnotu meranej veličiny k zvolenej hodnote veličiny rovnakého druhu. Relatívne metódy merania môžu viesť k takým výsledkom ako absolútne metódy merania vtedy, ak poznáme veľkosť tej veličiny, s ktorou meranú veličinu porovnávame, v rovnakých jednotkách. Pre dôležité fyzikálne veličiny sa preto zhotovujú presné miery – normály (etalóny), na ktorých je presne udaná ich hodnota. Napr. závažia, normály rezistancie a pod. S týmito normálmi porovnávame meranú veličinu.

Matematické spracovanie výsledkov merania, a to dostatočne úplné a všestranné, umožňuje posúdiť správnosť a užitočnosť získaných výsledkov a zistiť, či overiť správnosť fyzikálneho zákona, ktorým sa daný jav riadi. Pre takýto všestranný rozbor získaných výsledkov boli vypracované špeciálne metódy, ktoré v ďalšom rozoberieme.

1.5 MERANIE DÍŽOK

Prístroje a zariadenia a zariadenia používané na meranie dĺžok môžeme rozdeliť podľa toho s akou presnosťou umožňujú odčítať meranú dĺžku.

Meranie s presnosťou 0,5 mm umožňujú tyčové a pásové meradlá, ktoré majú stupnicu delenú na milimetre, prípadne na polovicu milimetrov. Dĺžkové rozdiely menšie ako 0,5 mm možno určiť odhadom. Namerané údaje sú však správne len pre určitú teplotu t_0 , pre ktorú bolo meradlo zhotovené (napr. 20 °C) vzhľadom na dĺžkovú rozťažnosť meradla. Keď meriame pri inej teplote t , nameranú dĺžku treba opraviť o vlastnú rozťažnosť meradla. Keď oprava je

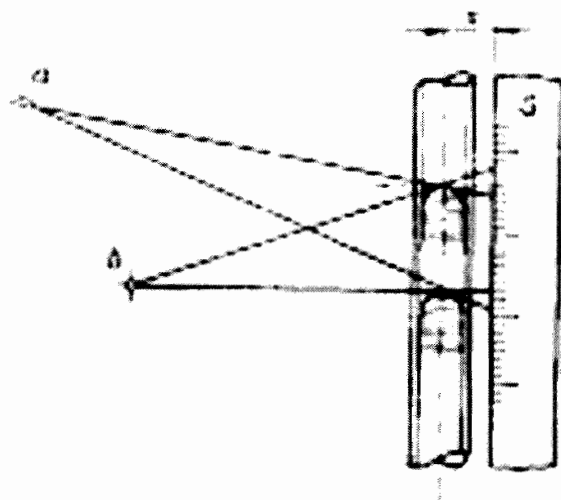
$$\Delta l = \alpha l_1 (t - t_0)$$

opravenú dĺžku určíme zo vzťahu

$$l = l_1 [1 + \alpha(t - t_0)]$$

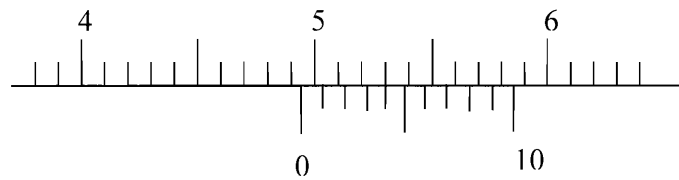
kde α je teplotný koeficient dĺžkovej rozťažnosti látky.

Meradlo a meraná dĺžka majú byť pri sebe. Ináč vzniká tzv. paralaxná chyba tým, že koniec meranej dĺžky sa nepremietne kolmo na meradlo. Malá odchýlka oka od kolmice spôsobí tým väčšiu chybu, čím je oko bližšie pri meranom predmete. Na odstránenie tejto chyby sa používajú meradlá nanesené na zrkadle, alebo odčítame z väčšej vzdialenosti pomocou ďalekohľadu. Obr. 1.5.1



Obr. 1.5.1 Príklad paralaxnej chyby pri meraní dĺžky.

Meranie s presnosťou 0,1 mm umožňujú posuvné meradlá a mikrometer. Posuvné meradlo sa používa na meranie rozmerov telies a dutín. Skladá sa z dvoch rovnobežných ramien, z ktorých jedno rameno je pevné, kolmé k hlavnej stupnici delenej na milimetre, a druhé posúvateľné. S posúvateľným ramenom je spojený nónius, stupnica obvykle 9 mm dlhá, rozdelená na 10 dielikov (desatinový nónius). Dieliky nónia sú teda o 0,1 mm kratšie ako dieliky hlavnej stupnice.



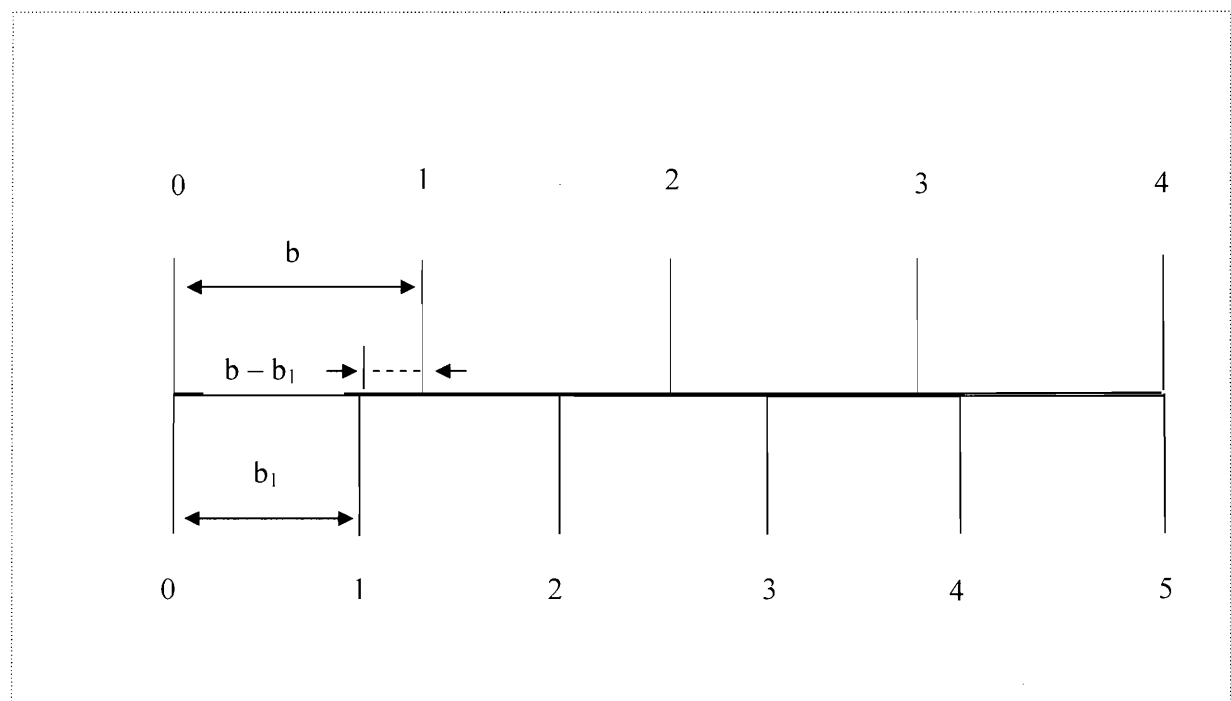
Obr. 1.5.2. Hlavná stupnica a nónius posuvného meradla

Meranú dĺžku udáva poloha počiatkovej značky nóniovej stupnice na stupnici hlavnej. Keď sa stotožňuje n -tý dielik nóniovej stupnice s niektorým dielikom hlavnej stupnice, meraná dĺžka má hodnotu danú dielikom hlavnej stupnice, ktorý je pred počiatkovým dielikom nóniovej stupnice, zväčšenú však o n desatín milimetra (podľa obr. 1.5.2. je to 49,4 mm). Používajú sa aj dvadsatinové a päťdesiatinové nóniá. Všeobecne, keď rozdelíme $n-1$ dielikov hlavnej stupnice na n dielikov nóniovej stupnice šírka dielika nóniovej stupnice je

$$b_1 = \frac{b(n-1)}{n}$$

kde b je šírka dielika hlavnej stupnice.

Ilustrácia päťdesiatinového nónia je na obr. 1.5.3.



Obr. 1.5.3. Ilustrácia päťdesiatinového nónia

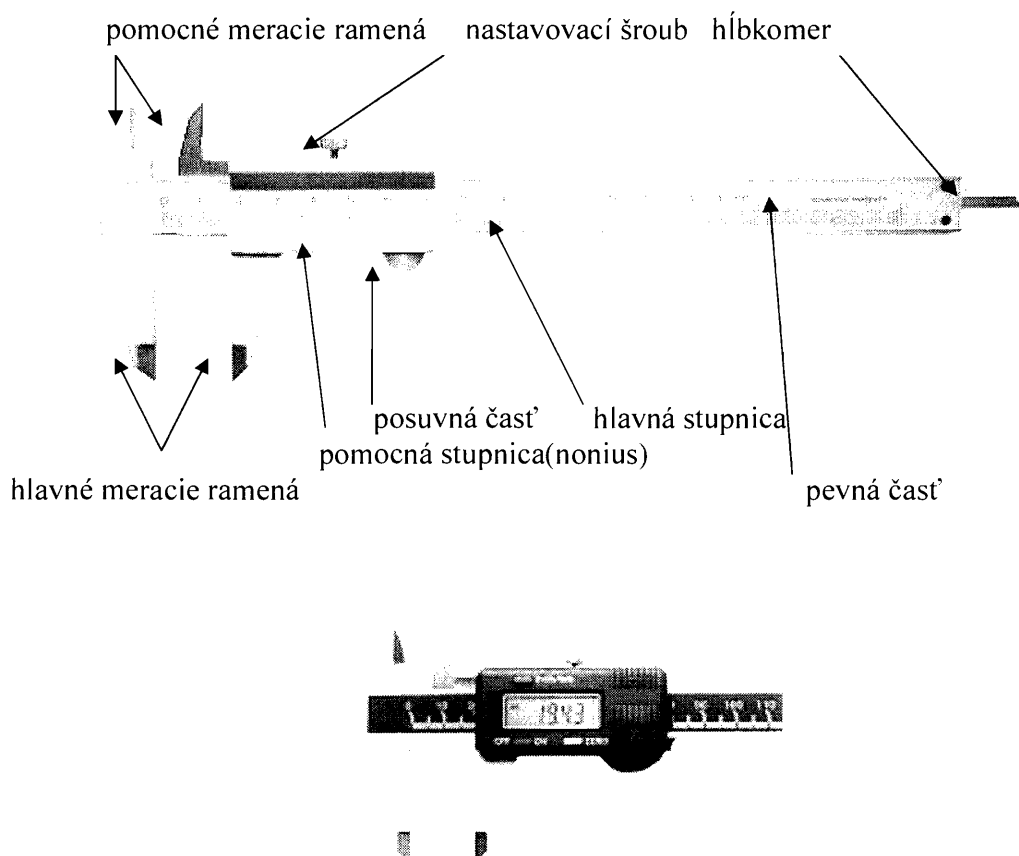
Rozdiel šírky dielikov hlavnej a nóniovej stupnice bude

$$b - b_1 = b \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{b}{n},$$

čo udáva veľkosť hodnoty, ktorú môžeme ešte odčítať uvedeným spôsobom. Keď vydělíme obe strany rovnice šírkou hlavného dielika b , dostaneme

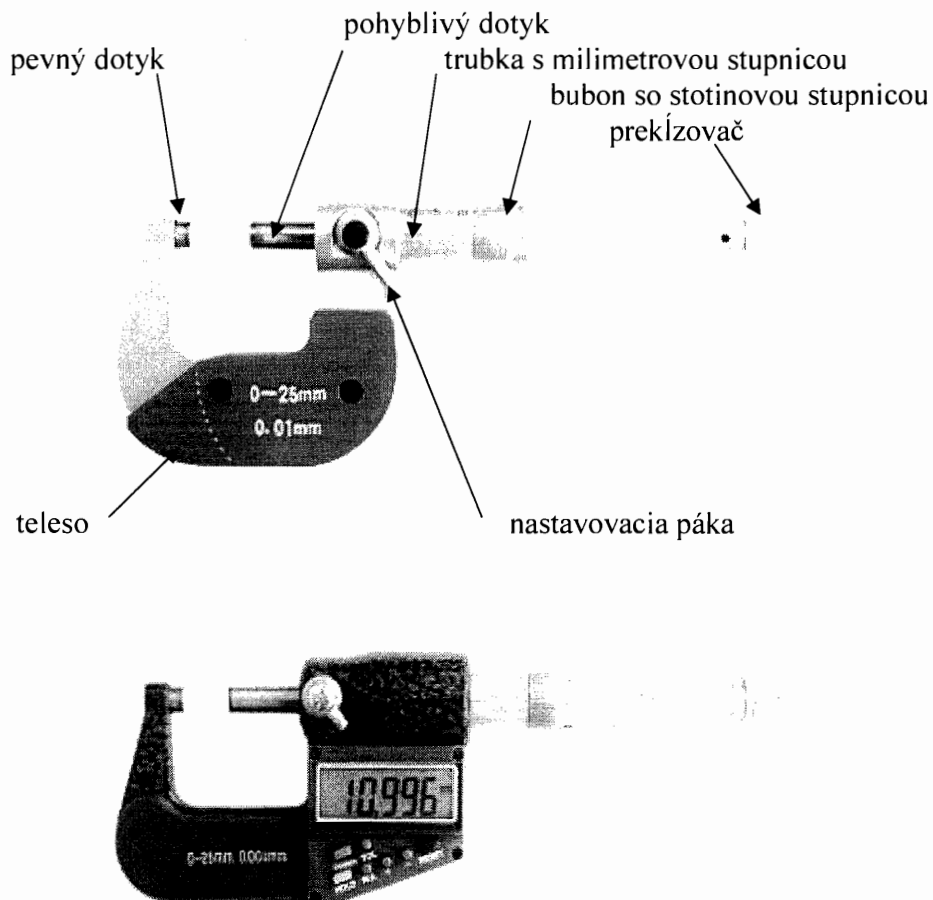
$$\frac{b - b_1}{b} = \frac{1}{n}$$

čo je tzv. nóniový pomer, ktorý udáva akú časť dielika hlavnej stupnice môžeme odčítať. Pri desatinovom nónio $n-1 = 9$, $n = 10$, $b = 1$ mm, $b - b_1 = 0,1$ mm, nóniový pomer je 1:10. Nónio sa používa aj pri uhlových meradlách, planimetroch a pod. Na obr. 1.5.4 je vyobrazené s popismi hlavných častí posuvné meradlo mechanické a digitálne.



Obr. 1.5.4. Mechanické a digitálne posuvné meradlo.

Prístroje mikrometrické (obr. 1.5.5.) umožňujú merať s presnosťou 0,01 mm. Mikrometer sa líši od posuvného meradla tým, že s pevným ramenom je spojená čeľusť, ktorou prechádza presná tzv. mikrometrická skrutka. Jej závit má rovnakú výšku, obvykle 1 mm, prípadne 0,5 mm. Skrutka je spojená s hlavnicou delenou na 100, alebo 50 dielikov.



Obr. 1.5.5. Mechanický a digitálny mikrometer

Meranú dĺžku udáva poloha hlavice na hlavnej stupnici. Počet milimetrov odčítame na hlavnej stupnici, časti milimetra na obvode hlavice. Jeden dielik na obvode hlavice takmer vždy znamená 0,01 mm (závisí od výrobcu) pri výške závitú 1 mm aj pri výške závitú 0,5 mm. Mikrometer sa používa najmä na meranie hrúbok dosiek, priemeru valcov a drôtov.

1.6 VÁŽENIE VO FYZIKÁLNO M LABORATÓRIU

Vážením nazývame meranie, pri ktorom pomocou váh zisťujeme hmotnosť látky m . Váhy patria medzi základné vybavenie fyzikálneho laboratória. Keďže tiaže telies $G = mg$ sú úmerné ich hmotnostiam, hmotnosti telies určujeme najčastejšie porovnávaním ich tiaže s tiažou závaží so známymi hmotnosťami pomocou prístrojov, ktoré sa nazývajú váhy.

Váživosť váh je najväčšie povolené zaťaženie jednej misky daných váh, ktoré udáva na sprievodnom liste výrobcu.

Presnosť váh je najmenší rozdiel hmotnosti, ktorý možno danými váhami stanoviť.

Citlivosť váh sa udáva výchylkou jazýčka váh z rovnovážnej polohy pri zaťažení jednej misky malým závažím, napr. 0,1 g alebo 0,001 g. Citlivosť váh klesá úmerne s ich zaťažením.

Nulová poloha je daná polohou jazýčka nezaťažených váh.

Rovnovážna poloha (pokožová poloha) je daná polohou, v ktorej sa jazýček ustáli pri zaťažených váhach.

Aretácia váh je zariadenie, pomocou ktorého mechanicky dvíhame vahadlo z hrotov a fixujeme ho v čase, keď sa pridáva alebo odoberá závažie, resp. látka, alebo sa na váhach neváži.

1.6.1 Teória rovníramenných váh

Presné váženie sa robí zvyčajne pomocou rovníramenných váh vahadlových alebo analytických (obr. 1.6.4). Analytické váhy sa skladajú z rovníramenného vahadla, ktoré ostrou hranou (osou vahadla) hranola upevneného na vahadle spočíva na hladkej podložke, nesenej stojanom váh. Na koncoch vahadla, zvyčajne tiež na hranoloch, visia misky, na ktoré pri vážení kladieme vážené teleso a závažia. Vahadlo musí mať polohu stálu, čiže jeho ťažisko musí byť pod osou vahadla. Vzdialenosť ťažiska od osi vahadla možno meniť posúvaním závažia pozdĺž jazýčka na vahadle upevneného. Os vahadla a hrany nesúce misky majú byť navzájom rovnobežné a ležať v rovnakej rovine.

Prikladanie malých závaží nahrádza na citlivých váhach analytických posúvanie jazdca (vážiaceho zvyčajne 0,01 g) pozdĺž deleného vahadla. Hrany takýchto váh sú pred poškodením pri prenášaní a pod. vždy chránené tzv. aretáciou. Nulová poloha môže sa opravovať pomocou malých skrutiek na koncoch ramien vahadla.

Pri vážení sa usilujeme o to, aby rovníramenná poloha zaťažených váh splyvala s ich polohou nulovou. Tiaž váženého predmetu mg pri dokonale zhotovených váhach sa potom rovná tiaži závažia zg , takže hmotnosť váženého predmetu sa rovná hmotnosti závažia z , čiže $m = z$. Dobré váhy mali by byť *správne, presné a citlivé*. Rovníramenné vahadlové váhy sú správne, ak sú vskutku rovníramenné; sú presné, ak sa pri nezmenenom zaťažení zastavujú vždy v tej istej polohe a sú citlivé, ak malá zmena zaťaženia niektorej misky vyvolá veľkú zmenu ich rovníramennej polohy.

Kvantitatívnym vyjadrením citlivosti c rovníramenných vahadlových váh je pootočenie ich vahadla, spôsobené zväčšovaním zaťaženia niektorého ramena o jednotku hmotnosti $c = d\varphi/dm$, alebo pre veľmi malé uhly $c = \varphi/m$ (obr. 1.6.1). Odvodíme vzorec pre túto citlivosť, pričom budeme predpokladať, že hrany nesúce závesy misiek sú rovnobežné s vodorovnou osou vahadla, nebudeme však predpokladať, že by s osou vahadla ležali v

spoločnej rovine ale budeme predpokladať, že vahadlo je dostatočne tuhé, aby sa zaťažovaním neohýbalo. Nech sú dĺžky ramien vahadla s miskami nezaťažených váh l_1 a l_2 a vzdialenosť ťažiska vahadla od jeho osi a , ε_1 , ε_2 zvislé odľahlosti ramien vahadla (merané kladne smerom dolu) od vodorovnej roviny idúcej osou vahadla. Hmotnosti misiek nech sú m_1 a m_2 , hmotnosť vahadla m_0 . Ak na vahadlo zavesíme misky, na jednu z nich dáme teleso o hmotnosti m a na druhú misku závažie s približne rovnakou hmotnosťou z , po dosiahnutí rovnováhy poloha vahadla vzhľadom na svoju pôvodnú polohu bude pootočená o uhol φ , veľkosť ktorého indikuje výchylka jazýčka. Z podmienok rovnováhy telesa na osi uloženého (algebraicky súčet momentov síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na os otáčania vahadla sa rovná nule, $\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$) vyplýva, že za rovnováhy je

$$(m_1 + m)g(l_1 \cos \varphi - \varepsilon_1 \sin \varphi) = (m_2 + z)g(l_2 \cos \varphi + \varepsilon_2 \sin \varphi) + m_0 g a \sin \varphi \quad (1.6.1)$$

Úpravou tejto rovnice dostaneme

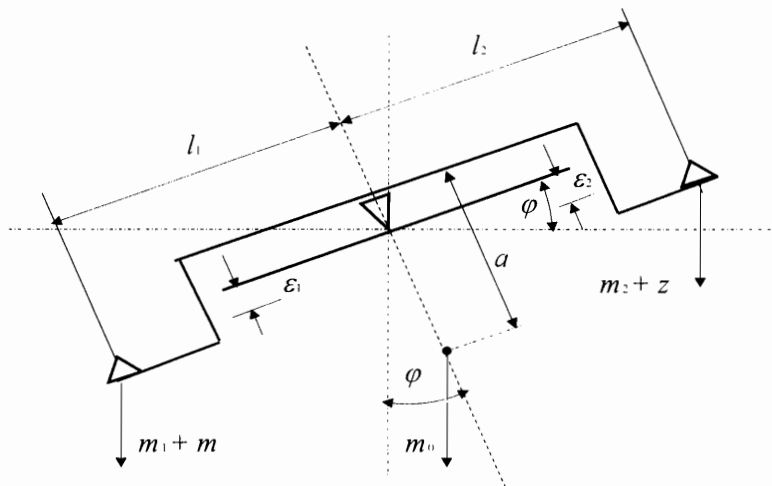
$$[(m_1 + m)l_1 - (m_2 + z)l_2] \cos \varphi = [(m_1 + m)\varepsilon_1 + (m_2 + z)\varepsilon_2 + m_0 a] \sin \varphi$$

a diferencovaním závislosti $m = F(\varphi)$, keď vo výsledku súčasne položíme $\varphi = 0$ (uvažujeme o citlivosti váh v okolí nulovej polohy jazýčka t. j. samotného vahadla)

$$l_1 dm = [(m_1 + m)\varepsilon_1 + (m_2 + z)\varepsilon_2 + m_0 a] d\varphi \quad (1.6.2)$$

takže hľadaná citlivosť je

$$c = \frac{d\varphi}{dm} = \frac{l_1}{(m_1 + m)\varepsilon_1 + (m_2 + z)\varepsilon_2 + m_0 a} \quad (1.6.3)$$



Obr. 1.6.1 Zobrazenie pôsobiacich síl pri vážení na analytických váhach (obr. 1.6.4)

Za ideálnych podmienok $l_1 = l_2 = l$ a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, citlivosť rovnoramenných vahadlových váh je

$$c = \frac{l}{m_0 a}, \quad (1.6.4)$$

teda citlivosť rovnoramenných vahadlových váh je priamo úmerná dĺžke ramien vahadla a nepriamo úmerná hmotnosti vahadla m_0 a vzdialenosti jeho ťažiska a od jeho osi. Zhotovovať vahadlo s príliš dlhými ramenami nie je však vhodné, lebo tým sa nutne zväčšuje i jeho hmotnosť. Vahadlo musí byť dostatočne tuhé, aby sa zaťažovaním neohýbalo, pretože vzhľadom na (1.6.3), ohnutie vahadla by malo za následok zmenšenie citlivosti váh. Citlivosť sa preto upravuje zmenšovaním vzdialenosti ťažiska vahadla od jeho osi. Pri váhach netlmených prílišné zmenšenie tejto vzdialenosti spôsobuje, že váhy kývajú potom príliš pomaly.

Analytické váhy môžu byť *netlmené* a *tlmené*. U netlmených inak nebrzdených váh dosiahne jazýček váh rovnovážnu polohu až po určitej dobe. Tlmené, inak brzdené váhy sú opatrené zariadením, najčastejšie realizovaným brzdiacimi vzduchovými valcami, ktoré spôsobuje umelé tlmenie pohybu jazýčka. Vychýlené váhy sa vracajú do rovnovážnej polohy aperiodickým pohybom, bez toho aby jazýček prešiel cez rovnovážnu polohu, za pomerne krátky čas. Pri tlmených váhach je určenie rovnovážnej ako i nulovej polohy veľmi jednoduché. Počkáme až sa váhy po odaretovaní ustália a potom odčítame polohu ukazovateľa na stupnici.

Podľa (1.6.3) výchylku možno chápať ako odchýlku rovnovážnej polohy n od nulovej polohy n_0 pri rovnakom zaťažení váh. Pre túto výchylku vzhľadom na (1.6.3) možno písať

$$\varphi = n - n_0 = cz \quad (1.6.5)$$

Pomocou (1.6.5) možno určovať aj neznámu hmotnosť predmetu m . Na začiatku a na konci váženia predmetu, ktorého hmotnosť nepoznáme, sa určí nulová poloha váhy a potom priemerná hodnota n_0 . Pri vyvažovaní hmotnosti telesa sa volí také závažie, aby rovnovážna poloha n bola blízka k nulovej. Keď hmotnosť vyvažujúceho závažia je m_z , potom prívažok bude

$$z = m_z - m = \frac{n - n_0}{c} \quad (1.6.6)$$

Hodnotu z je potrebné podľa znamienka odchýlky pripočítať alebo odpočítať od hodnoty vyvažujúcich závaží. Hodnotu c zodpovedajúcu použitému zaťaženiu možno nájsť z grafu citlivosti váh. Skutočná hmotnosť váženého predmetu potom bude

$$m = m_z \pm z \quad (1.6.7)$$

1.6.2 Typy laboratórnych váh

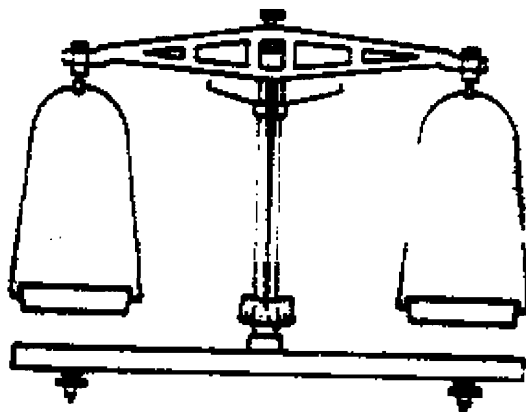
Laboratórne váhy sa od seba líšia vonkajšími znakmi, ovládacími prvkami a presnosťou. Podľa toho, aké požiadavky kladieme na váženie, poznáme niekoľko druhov váh.

- Podľa počtu misiek rozlišujeme váhy s jednou miskou alebo dvoma miskami.
- Podľa rýchlosti ustáľovania rovnovážnej polohy rozoznávame váhy tlmené a netlmené.
- Určovanie polohy jazýčka odčítame priamo na stupnici, alebo sa poloha jazýčka (vlákna) pomocou svetelných lúčov premieta na stupnicu.
- Podľa spôsobu kladenia závažia rozlišujeme váhy

- s manuálnym ovládaním,
 - poloautomatické (väčšie závažia manuálne, menšie automaticky),
 - automatické.
- e) Podľa presnosti rozdeľujeme váhy na:
- technické,
 - analytické,
 - semimikroanalytické,
 - mikroanalytické.

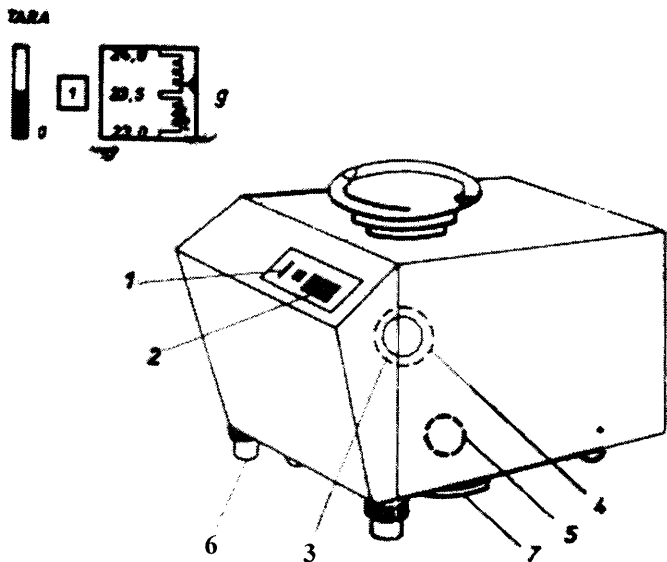
Technické váhy

Technické váhy sú laboratórne rovnoramenné netlmené váhy s dvoma miskami, s priamym odčítaním polohy jazýčka na stupnici a s ručným kladením všetkých závaží (obr.1.6.2). Nepostrádateľnou súčasťou takýchto váh je olovnička alebo libela, ktorými kontrolujeme správnosť usadenia váh. Technické váhy majú aj zaistovacie zariadenie (aretáciu). Tým, že preložíme páčku alebo otočíme aretačný gombík, môžeme odstrániť kývanie. Technické váhy majú nosnosť 0,5 až 1 kg a možno nimi stanoviť hmotnosť s presnosťou asi na ± 10 mg.



Obr.1.6.2. Dvojmiskové technické váhy

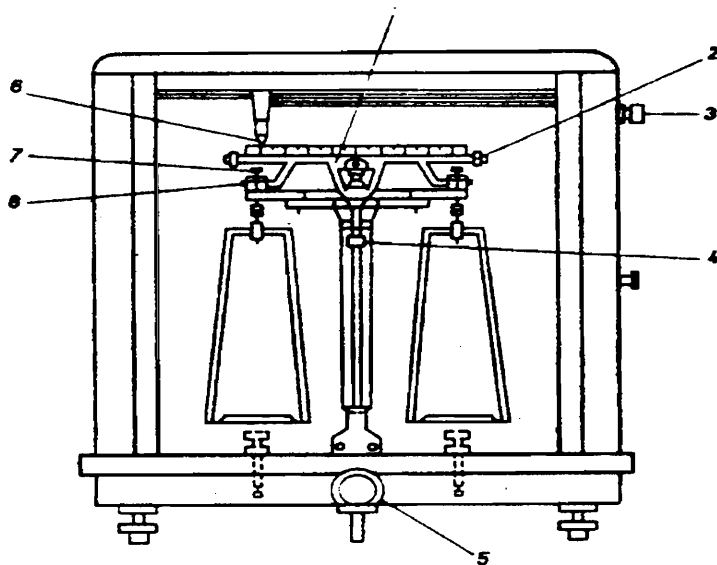
Na rýchle a presné váženie možno použiť jednomiskové váhy (obr.1.6.3). Optický ukazovateľ týchto váh má rozsah napr. 100 g a delenie stupnice 0,1 g. Nosnosť je 1000 g a váhy majú možnosť záznamu tary.



Obr. 1.6.3. Jednomiskové technické váhy

Analytické váhy

Mnohé fyzikálne experimenty vyžadujú na váženie predmetov analytické váhy (obr.1.6.4) s vysokou citlivosťou. Stredná citlivosť analytických váh je medzi jedným dielikom stupnice /mg až 10 dielikmi stupnice/mg. Analytické váhy sú laboratórne dvojramenné tlmené váhy s jednou alebo dvoma miskami a so svetelnou projekciou vlákna na stupnici. Môžu byť poloautomatické alebo automatické. Ich váživosť je 100 g a presnosť asi $\pm 0,2$ mg.



Obr. 1.6.4. Analytické váhy

Podmienky váženia

Pre správne váženie je nevyhnutné, aby sa dodržali nasledujúce všeobecné podmienky:

- a) čistota váh,
- b) správna funkcia váh,
- c) čistota a úplnosť závaží.

Pri vážení na analytických váhach platia nasledujúce pravidlá:

1. Vážený predmet, závažie i jazdec kladieme na misky alebo z nich odoberáme len pri zaaretovaných váhach.
2. Závažie ako i vážený predmet uložíme na misky tak, aby ich ťažisko bolo v strede misky. Závažie neberieme do rúk ale použijeme na to pinzetu.
3. Váhy odaretujeme len keď jazýček prechádza cez stred stupnice a keď je skrinka váh uzavretá (prúdenie vzduchu môže skresliť výsledky váženia).
4. Pri manipulovaní s aretáciou postupujeme pomaly a opatrne.
5. Vonkajšok váh chránime pred znečistením a pred účinkom vlhkosti a chemikálií.
6. Závažie prenášame len príslušnou pinzetou.
7. Po skončení váženia, v zaaretovanej polohe vezmite z misiek váh vážený predmet, závažia uložte do súpravy závažia, misky očistite, tiež priestor pod miskami váh a zatvorte okienka váh.

Pre dodržanie uvedených podmienok sa od všetkých pracovníkov, ktorí používajú váhy, vyžaduje, aby pred vážením, počas váženia a najmä po skončení váženia skontrolovali čistotu misiek a celého priestoru váh. Chemikálie sa nikdy nekladú priamo na misky. Na váženie chemických látok sa používajú na to určené nádoby zo skla (lodičky a odvažovačky) alebo hodinové sklíčka. Prchavé a hygroskopické látky sa musia vážiť v uzavretých odvažovačkách. Silne agresívne látky, by mohli spôsobiť koróziu váh, treba vážiť v zatavených ampulách.

Prípadné nečistoty na miskách a v ich okolí odstránime jemným štetcom alebo jemnou čistiacou handričkou.

Pre správnu funkciu váh je dôležité, aby váhy stáli vo vodorovnej polohe (kontrolujeme olovnícou alebo vodováhou a upravujeme adjustačnými skrutkami).

Veľkú pozornosť venujeme čistote závažia. Dbáme, aby po skončení váženia závažie nezostávalo na miske váh, ale okamžite ho vrátime na vyhradené miesto v súprave. Závažie nesmie prísť do styku s chemikáliami.

Rýchlováhy

Rýchlováhy slúžia na informatívne a rýchle odváženie látky. Kombináciou a následným vážením na analytických váhach dosiahneme, že látku presne odvážeme v kratšom čase.

Rýchlováhy sú dvojramenné váhy s nerovnakou dĺžkou ramien, s olejovým tlmením, s jednou miskou a so svetelnou projekciou vlákna na stupnicu. Váživosť je 200 g a ich presnosť asi $\pm 0,1$ g.

1.6.3 Určenie hmotnosti pri exaktnom vážení

Treba si všimnúť, že jednou z podmienok exaktného vážení je rovnosť vztlaku vzduchu, ktorý nadľahčuje meraný predmet a závažie. Inými slovami povieme, že vážený predmet aj závažie majú mať rovnakú hustotu. Ak tomu tak nie je, potom správny údaj môže poskytnúť iba váženie vo vákuu. Hmotnosť telesa vo vákuu m_v možno vypočítať podľa vzťahu.

$$m_v = m_a + V\rho_0 - v\rho_0 \quad (1.6.8)$$

kde m_a je hmotnosť v atmosfére vzduchu,

V, v – objemy predmetu, resp. závažia,

ρ_0 - hustota vzduchu.

Keďže závažia sú väčšinou z mosadze hustoty $8,4 \text{ g cm}^{-3}$, môžeme namiesto v dosadiť $m_c/8,4$ a dostaneme

$$m_v = m_a \left(1 - \frac{\rho_0}{8,4} \right) + V\rho_0 \quad (1.6.9)$$

Vzťah (1.6.9) sa používa vtedy, keď objem V poznáme. Inak možno použiť tento vzťah upravený pomocou hustoty váženého predmetu ($V = m_v / \rho$)

$$m_v = m_a \frac{1 - \left(\frac{\rho_0}{8,4} \right)}{1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)} \quad (1.6.10)$$

Pri ľubovoľnej relatívnej vlhkosti, pri teplotách 15 až $30 \text{ }^\circ\text{C}$ a tlakoch $97325,33$ až $103\,991,45 \text{ Pa}$ môžeme s dostatočnou presnosťou pre hustotu vzduchu použiť hodnotu $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$.

Korekciu na vztlak možno často zanedbať pri vážení tuhých látok. Zásadne je však nevyhnutná pri vážení plynov a dôležitá je aj pri vážení väčších objemov kvapalín (táto korekcia má napr. pre 100 g vody hodnotu asi 100 mg).

Iným zdrojom chýb pri vážení môže byť nepresnosť závaží. Na kontrolu závažia je najlepšie použiť normálové závažie. Ďalej treba mať na zreteli, že:

- prchavé, hygroskopické, resp. inak nestále látky (adsorpcia plynov a pod.) treba prechovávať v uzavretých odvažovačkách,
- materiál aj odvažovačky musia byť vytemperované na teplotu okolia váh.

1.7 CHYBY A NEISTOTY V MERANÍ FYZIKÁLNYCH VELIČÍN

Rozdelenie chýb

Ak opakujeme za rovnakých podmienok fyzikálne meranie n -krát, dostávame súbor nameraných hodnôt x_1, x_2, \dots, x_n , ktoré sú spravidla navzájom rôzne. Odchýlky i -tého merania od skutočnej hodnoty x nazývame skutočnou chybou meranej veličiny Δx_i

$$\Delta x_i = x - x_i \quad (1.7.1)$$

Na to, aby sme merali s čo najväčšou presnosťou, musíme poznať príčiny vzniku chýb a ich eliminovania. Podľa príčin vzniku delíme chyby na

- hrubé
- systematické
- náhodné.

Hrubé chyby vznikajú najmä nepozornosťou alebo omylom pozorovateľa, poruchou prístroja alebo nevhodnou metódou. V dôsledku hrubých chýb dostávame výsledky, ktoré sú veľmi odlišné od ostatných hodnôt merania a preto ich z ďalšieho spracovania vylúčime.

Systematické chyby sa vyskytujú pravidelne v meraní a ich zdrojom je najčastejšie metóda merania, prístroj a pozorovateľ. Ich zdrojom však môžu byť aj rôzne rušivé vplyvy.

Chyby meracej metódy sú spôsobené nepresnosťou, neúplnosťou a nevhodnosťou použitej metódy merania. Napr. pri vážení sa dopúšťame systematickej chyby neuvážením rôzneho vztlaku u telies s rôznou hustotou. Pri meraní veľmi malých odporov je vhodnejšia metóda merania na dvojitom Thomsonovom mostíku ako na Wheatstoneovom mostíku, pretože dvojitý mostík vylučuje systematickú chybu merania odporov prívodných vodičov.

Chyby meracích prístrojov sú spôsobené predovšetkým nedokonalosťou a nepresnosťou meracích aparatúr. Dajú sa často zmenšiť pomocou korekčných tabuliek alebo kriviek.

Osobné chyby, ktoré majú pôvod v osobe pozorovateľa sú spôsobené rôznym prístupom pri odčítaní na stupniciach meracích prístrojov, pri zaokrúhľovaní, ale aj rôznou zručnosťou vo fyzikálnom meraní. Dajú sa zmenšiť najmä vylúčením ľudského faktora a jeho náhradou automatickým snímaním pomocou počítača.

Náhodné chyby sú tie, ktorých pôvod sa nedá presne určiť. Sú spôsobené celým radom navzájom sa neovplyvňujúcich elementárnych príčin a faktorov a výsledná chyba je ich súčtom. Preto podstatu náhodnej chyby nemôžeme určiť a jej príčinu môžeme vidieť v náhode. Na vyšetovanie súborov meraní, v ktorých vystupujú náhodné chyby, používame počet pravdepodobnosti. Pokiaľ však v súbore meraní dostávame vždy rovnaké hodnoty, nemôžeme vypočítať chybu pomocou počtu pravdepodobnosti, ale chyba nemusí byť nulová. V tomto prípade sú náhodné chyby celkom prekryté systematickou chybou, nepresnosťou meracieho prístroja a pod. K odhadu chyby potom pristupujeme z odhadu presnosti prístroja.

1.7.1 Pravdepodobnosť a zákon normálneho rozdelenia

V súbore n meraní, kde meraná veličina môže nadobúdať diskkrétne hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n , pod pravdepodobnosťou náhodného javu x_i rozumieme výraz

$$p(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} n_i / n \quad (1.7.2)$$

kde n_i je počet tých meraní, v ktorých sme namerali hodnotu x_i .

V prípade, že nameraná veličina nadobúda spojité hodnoty v nekonečnom intervale, pravdepodobnosť $p(a,b)$, že nameraná veličina leží v intervale (a,b) , je daná vzťahom

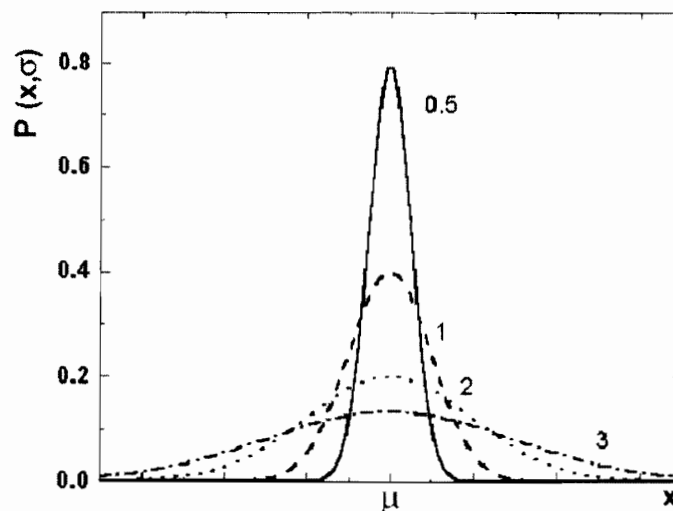
$$p(a,b) = \int_a^b P(x) dx \quad (1.7.3)$$

kde $P(x)$ je tzv. *hustota pravdepodobnosti*.

Mnohé javy v prírode sú dajú veľmi dobre popísať tzv. normálnym alebo Laplaceovým - Gaussovým rozdelením. Normálne rozdelenie sa vyznačuje symetrickou funkciou hustoty pravdepodobnosti, ktorej maximum vyjadruje najpravdepodobnejšiu hodnotu veličiny. Najpoužívanejšie vyjadrenie funkcie hustoty normálneho rozdelenia je:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (1.7.4)$$

Graf funkcie $P(x, \sigma)$ pre štyri hodnoty parametra σ ($= 0.5, 1, 2, 3$) je na obr.1.7.1. Ako vidno z obrázku parameter σ určuje ostrosť krivky a parameter μ vyjadruje najpravdepodobnejšiu hodnotu.



Obr. 1. 7. 1. Krivka normálneho rozdelenia

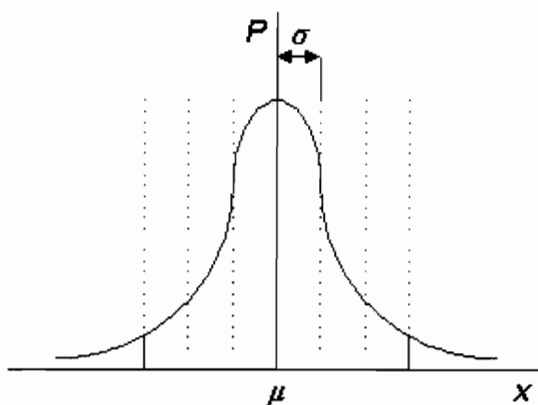
Pravdepodobnosť, že náhodná veličina bude z intervalu $(x, x+dx)$ je

$$dp(x, dx) = P(x)dx \quad (1.7.5)$$

Výraz pred exponentom v (1.7.4) je tzv. normovací člen, ktorého veľkosť musí byť taká, aby pravdepodobnosť nameranej hodnoty v celom intervale možných hodnôt bola rovná istote, t.j. vzhľadom na (1.7.3) $p(-\infty, \infty) = 1$.

Pre meranú veličinu, ktorá pri meraní podlieha zákonu normálneho rozdelenia predstavuje parameter σ tzv. štandardnú odchýlku základného súboru meraní (obsahujúcom všetkých n možných meraní), ktorú vypočítame zo vzťahu (1.7.6)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|^2}{(n-1)}} \quad (1.7.6)$$



Obr.1.7.2. K vysvetleniu normálneho rozdelenia

Výpočtom sa dá ukázať, že veľkosť pravdepodobnosti, že veličina nadobudne hodnotu z intervalu $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$, je $p_{3\sigma} = 0.9972$, t. j. z tisíc nameraných hodnôt len tri budú mimo (vyšrafovaného) intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ na obr. 1.7.2.

1.7.2 Aritmetický priemer a štandardná odchýlka aritmetického priemeru

Pri meraní fyzikálnych veličín si musíme uvedomiť, že skutočnú veľkosť x_s veličiny a ani skutočnú veľkosť chyby merania nepoznáme. Dá sa ukázať, že v súbore n - meraní, v ktorom všetky namerané hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n zo základného súboru všetkých možných n meraní sú rovnako spoľahlivé, najlepšie aproximuje strednú hodnotu aritmetický priemer

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.7.7)$$

Pri dostatočnom veľkom počte meraní ($n \rightarrow \infty$) bude platiť

$$\bar{x} = \mu = x_s \quad (1.7.8)$$

Odchýlka i -tého merania od aritmetického priemeru je $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$. Aritmetický priemer má vo vzťahu k odchýlkam dve dôležité vlastnosti:

1. Súčet odchýlok je rovný nule

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - n \bar{x} = n \bar{x} - n \bar{x} = 0. \quad (1.7.9)$$

2. Súčet štvorcov odchýlok je minimálny.

Môžeme sa o tom presvedčiť ľahko nasledujúcou úvahou. Uvažujme súčet S štvorcov odchýliek od n ľubovoľnej hodnoty x . Tento súčet je daný rovnicou

$$S = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2 \quad (1.7.10)$$

a bude najmenší pre také x , pre ktoré platí $dS/dx = 0$, tj.

$$2x - 2x_1 + 2x - 2x_2 + \dots + 2x - 2x_n = 0 \quad (1.7.11)$$

a po úprave

$$nx - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (1.7.12)$$

alebo

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \quad (1.7.13)$$

O tom, že hľadaný extrém je skutočne minimom, svedčí kladná hodnota druhej derivácie funkcie S ($d^2S/dx^2 = 2n$).

Ako už bolo spomenuté, štandardná odchýlka σ súvisí so skutočnými chybami merania. Keďže skutočné chyby merania nepoznáme a nahradíme ich odchýlkami Δx_i , potom aj chyby jednotlivých meraní môžeme nahradiť odhadom štandardnej odchýlky. Štandardná odchýlka σ_j jednotlivého merania zo súboru n meraní ($n < N$) je

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1.7.14)$$

Pre veľký počet meraní ($n \rightarrow \infty$) bude $\sigma_j = \sigma$.

Často sa pri vyhodnocovaní meraní uvádza štandardná odchýlka aritmetického priemeru σ_a , ktorá je podľa teórie chýb \sqrt{n} krát menšia ako štandardná odchýlka jednotlivého merania, t.j.

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)n}} \quad (1.7.15)$$

Výsledok merania veličiny x , ktorá je zaťažená iba náhodnými chybami môžeme zapísať v tvare

$$x = \bar{x} \pm \sigma_a . \quad (1.7.16)$$

V ďalšom popise, ako aj pri jednotlivých laboratórnych úlohách budeme vyjadrovať štandardnú odchýlku aritmetického priemeru. Pre zjednodušenie písania vynecháme v symbole index, t.j. budeme pre štandardnú odchýlku aritmetického priemeru používať symbol σ .

Pri porovnávaní nameranej veličiny s tabuľkovou (skutočnou) hodnotou veličiny často používame *relatívnu chybu*, ktorú definujeme ako pomer absolútnej chyby a skutočnej hodnoty veličiny. Skutočná chyba je rozdiel tabuľkovej a nameranej hodnoty. Relatívnu chybu obyčajne vyjadrujeme v % podľa vzťahu (1.7.17).

$$\delta_{\text{xrel}} = \frac{x_{\text{tab}} - \bar{x}}{x_{\text{tab}}} \cdot 100\% \quad (1.7.17)$$

Relatívna chyba umožňuje porovnávať aj presnosť merania dvoch rôznych fyzikálnych veličín, pretože je bezrozmerná.

1.7.3 Neistoty v meraní

Neistotou (výsledku) merania rozumieme parameter charakterizujúci rozsah (interval) hodnôt meranej veličiny okolo výsledku merania, ktorý podľa očakávania obsahuje skutočnú hodnotu meranej veličiny. Neistota výsledku merania závisí od hodnôt odčítaných z použitých prístrojov, hodnôt použitých konštánt, korekcií a pod. Neistoty sú spôsobené náhodnými a neznámymi systematickými chybami. Známe systematické chyby z výsledku merania vylučujeme korekciou údajov. Korekcia sa rovná zápornej hodnote systematickej chyby a k údaju sa pripočítava. Rozdiel medzi absolútnou chybou a neistotou je ten, že absolútna chyba je jedna hodnota, kým neistota je interval hodnôt, v ktorom leží skutočná hodnota meranej veličiny.

Základom určovania neistôt je pravdepodobnostný princíp. Pritom sa predpokladá určité rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré opisuje ako udávaná hodnota odhaduje skutočnú hodnotu. Základnou kvantitatívnou charakteristikou neistoty je **štandardná neistota** u (stručne neistota). Štandardná neistota sa rovná štandardnej odchýlke príslušného rozdelenia pravdepodobnosti. Podľa spôsobu získania neistôt delíme ich na:

- štandardné neistoty typu A** – u_A , ktoré získame štatistickými metódami z nameraných údajov,
- štandardné neistoty typu B** – u_B , získané iným spôsobom ako v bode a),
- kombinované štandardné neistoty** – u_C , získané zlúčením neistôt typu A a B.

Charakteristickou vlastnosťou neistôt typu A je, že ich hodnoty s rastúcim počtom meraní klesajú, zatiaľ čo hodnoty neistôt typu B od počtu opakovaných meraní nezávisia. Príčiny vzniku neistôt typu A sa považujú za neznáme, naproti tomu neistoty typu B sa viažu na

známe alebo identifikovateľné zdroje. Neistoty typu B pochádzajúce z rôznych zdrojov sa zlučujú do výslednej štandardnej neistoty typu B.

Štandardné neistoty vytvárajú interval pokrývajúci skutočnú hodnotu meranej veličiny s pomerne malou pravdepodobnosťou (68,27 %). Prax často požaduje hodnotu neistoty, ktorá by vytvárala s väčšou pravdepodobnosťou pokrytia skutočnej hodnoty. Takáto neistota sa nazýva **rozšírená neistota** U a určí sa zo štandardnej neistoty podľa vzťahu

$$U = k_{t_i} \cdot u, \quad (1.7.18)$$

kde k_{t_i} je koeficient rozšírenia (pokrytia), a jeho hodnoty sa pohybujú od 2 do 3. V poslednom čase je snaha normalizovať hodnotu koeficientu $k_{t_i} = 2$. Štandardnú neistotu môžeme vyjadriť v hodnotách meranej veličiny, vtedy hovoríme o **absolútnej štandardnej neistote**, alebo pomerom absolútnej neistoty a hodnoty príslušnej veličiny, ktorý nazývame **relatívna štandardná neistota**. Pri uvádzaní hodnoty neistoty za znamienkom rovnosti (=) sa píše bez znamienka. Znamienko \pm sa dáva pred číselnú neistoty vtedy, ak sa pripája k hodnote výsledku merania. Udávané hodnoty neistôt sa zaokrúhľujú prevážne na dve platné číslice, pričom sa uprednostňuje zaokrúhľovanie hore. Na väčší počet číslic (3 až 4) sa zaokrúhľujú hodnoty, ktoré sa ďalej spracovávajú. Udávanie absolútnych a relatívnych neistôt je ekvivalentné. Niekedy je účelné udať neistotu oboma spôsobmi.

1.7.4 Postup určovania štandardných neistôt pri priamom meraní

Štandardná neistota typu A

Ak opakovaním merania jednej veličiny X získame n rovnako presných údajov x_1, x_2, \dots, x_n a výsledok merania bude \bar{x} , neistota merania typu A sa rovná štandardnej odchýlke

$$u_{Ax} = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (1.7.19)$$

kde \bar{x} je aritmetický priemer daný vzťahom (1.7.7)

Štandardná neistota typu B

Zdrojom neistôt pri meraní sú nedokonalosti: použitých meracích prostriedkov (mier, prístrojov, ...), použitých metód, podmienok merania (vplyv rôznych veličín), použitých parametrov a konštánt pri vyhodnotení. Ak nie je možné získať hodnotu neistoty typu B z technickej dokumentácie (certifikáty, kalibračné listy, tabuľky fyzikálnych konštánt a pod.), potom základná metóda odhadu štandardnej neistoty typu B zo zdroja je takáto:

- odhadne sa rozsah zmien – odchýlok $\pm z_{max}$ od nominálnej hodnoty veličiny prislúchajúcej uvažovanému zdroju, ktorej prekročenie je málo pravdepodobné,
- posúdi sa priebeh pravdepodobnosti odchýlok v tomto intervale a určí sa jej najvhodnejšia aproximácia,
- štandardná neistota uvažovaného typu zdroja u_{Bz} sa určí podľa vzťahu

$$u_{Bz} = \frac{z_{max}}{\chi}, \quad (1.7.20)$$

kde χ je hodnota prislúchajúca danému rozdeleniu pravdepodobnosti. Pre normálne rozdelenie $\chi = 3$, pre rovnomerné (pravouhlé) rozdelenie $\chi = \sqrt{3}$. Aproximáciu normálnym rozdelením použijeme vtedy, keď pravdepodobnosť odchýlok s ich rastúcou hodnotou klesá a najväčšiu pravdepodobnosť majú odchýlky malé. Aproximáciu rovnomerným rozdelením použijeme vtedy, keď pravdepodobnosť výskytu ktorejkoľvek odchýlky v danom intervale $\langle -z_{\max}, +z_{\max} \rangle$ je rovnaká. Táto aproximácia sa v praxi používa najčastejšie.

Kombinovaná štandardná neistota

Ak nepredpokladáme žiadnu závislosť medzi zdrojmi neistôt typu A a typu B, kombinovanú neistotu opakovaného merania jednej veličiny vypočítame zo vzťahu

$$u_{Cx} = \sqrt{u_{Ax}^2 + u_{Bx}^2} \quad (1.7.21)$$

Rozšírenú neistotu merania U_{Cx} vypočítame podľa vzťahu (1.7.18), kde $k_{1\sigma} = 2$ a $u = u_{Cx}$

1.7.5 Postup určovania štandardných neistôt pri nepriamom meraní jednej veličiny

Uvažujme prípad, keď veličina Y ktorej hodnotu chceme určiť, je vo vzťahu s veličinami (X_1, X_2, \dots, X_m) , ktoré sú priamo merateľné a ktorých hodnoty poznáme s určitou neistotou:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (1.7.22)$$

Meranie opakujeme n -krát a pre každé meranie sa získa séria hodnôt priamo meraných veličín. Výsledkom merania je hodnota \bar{y} , ktorá sa všeobecne môže počítat' dvomi spôsobmi:

a) dosadením aritmetických priemerov priamo meraných veličín do rovnice (1.7.22)

$$\bar{y} = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m) \quad (1.7.23)$$

b) ako aritmetický priemer z hodnôt y_i určených z rovnice (1.7.22) pre každú sériu nameraných hodnôt x_j

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.7.24)$$

Výpočet podľa vzťahu (1.7.24) je spravidla presnejší pri nelineárnej závislosti vzťahu (1.7.22). Pri lineárnej závislosti sú obidva spôsoby rovnocenné. Výpočet podľa vzťahu (1.7.23) je možný aj vtedy, keď merania neboli vykonané v sériách a tiež počet opakovaných meraní pri jednotlivých veličinách bol rôzny.

Ako sa prenášajú štandardné neistoty u_{x_j}, u_{x_k} vstupných veličín $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m$ na štandardnú neistotu u_y výstupnej veličiny y nám udáva vzťah, známy ako **všeobecný (kovariačný) zákon šírenia neistôt**

$$u_Y = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y}{\partial x_j} \right)^2 u_{x_j}^2 + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial Y}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x_k} \cdot u_{x_j, k}} \quad (1.7.25)$$

kde štandardné neistoty $u_{x_j} = \sigma_{x_j}$ a kovariancia $u_{x_j, k} = u_{x_j} \cdot u_{x_k} \cdot r_{x_j, k}$, kde $r_{x_j, k}$ je korelačný koeficient. Korelačný koeficient vyjadruje mieru stochastickej závislosti veličín x_j, x_k a môže nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle -1, +1 \rangle$. Pre nezávislé odhady (t.j. vstupné veličiny nie sú korelované) bude $r_{x_j, k} = 0$ pre všetky j, k . Pre tento prípad vo vzťahu (1.7.25) druhý člen vypadne a dostaneme pre výpočet neistoty klasický **Gaussov zákon**

$$\text{široenia neistôt } u_Y = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y}{\partial x_j} \right)^2 u_{x_j}^2} \quad (1.7.26)$$

Kovariancie sa rovnajú nule vtedy, ak príslušné veličiny boli stanovené nezávislými meraniami, alebo zistená korelácia medzi príslušnými veličinami je malá (zanedbateľná), a tiež ak nevieme nič konkrétne o korelácii príslušných veličín.

Štandardné neistoty typu A a typu B pri nepriamom meraní sa určia podľa vzťahu (1.7.25) alebo ak neuvažujeme korelácie tak podľa vzťahu (1.7.26). Kombinovanú štandardnú neistotu, ak nepredpokladáme závislosť medzi zdrojmi oboch typov neistôt, vypočítame podľa vzťahu (1.7.21). Rozšírenú štandardnú neistotu určíme podľa vzťahu (1.7.18).

Vzťah (1.7.26) pre konkrétny výpočet absolútnej štandardnej neistoty meranej veličiny býva často dosť zložitý. Preto niekedy je výhodnejšie odvodiť všeobecný vzťah pre výpočet relatívnej neistoty $\frac{u_Y}{Y}$, ktorý môže byť jednoduchší. Najskôr vypočítame relatívnu neistotu a z nej spätne sa vypočíta absolútna neistota. Rozborom vzťahu pre výpočet relatívnej neistoty veličiny Y môžeme zistiť, ktoré z meraní veličín X_j má podstatný vplyv na celkovú neistotu výsledku merania a ktoré musíme urobiť čo najpresnejšie vzhľadom na požadovanú presnosť merania.

V nasledujúcom uvedieme vzťah pre výpočet neistoty veličiny $R = R(x, y, z)$ s tromi premennými. Väčšinu fyzikálnych veličín meriame nepriamo. Určujeme ich na základe fyzikálnych zákonov a sú funkciou jednej alebo viacerých priamo meraných premenných. Predpokladajme, že neistoty priamo meraných veličín poznáme (odhadneme ich alebo ich vypočítame) a sú $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$. Nech funkčný vzťah medzi premennými a veličinou R , ktorú potrebujeme určiť je $R = R(x, y, z)$. Počet pravdepodobnosti dáva pre strednú neistotu veličiny R vzťah

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \sigma_z \right)^2} \quad (1.7.27)$$

kde $\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \dots$ sú parciálne derivácie funkcie R podľa jednotlivých premenných. (Parciálne derivácie vypočítame tak, že danú funkciu derivujeme podľa jednej premennej naznačenej deriváciou a ostatné premenné pokladáme za konštanty.)

Pre výpočet neistoty nepriamych meraní je dôležité správne určiť štandardné neistoty typu B veličín, ktoré meriame len jedenkrát. Preto sa treba oboznámiť s údajmi o chybách

meracieho prístroja z technickej dokumentácie dodanej výrobcom. Ak nemáme tieto podklady k dispozícii, odhadujeme najväčšiu dovolenú chybu prístroja (z_{max}) tak, že ju položíme rádove rovnú najmenšiemu vyznačenému dieliku na stupnici prístroja. Pre elektrické meracie prístroje maximálnu chybu vypočítame z ich triedy presnosti. V nasledujúcej tabuľke 1.7.1 sú uvedené odhady chýb niektorých meracích zariadení a prístrojov.

Tab. 1.7.1. Orientačné hodnoty odhadu chýb niektorých meracích zariadení

Meracie zariadenie	Delenie stupnice	Chyba z_{max}
Pásmové meradlo	10 dielikov na 1 cm	1 mm
Posuvné meradlo	10 dielikový nónius	0,1 mm
Posuvné meradlo	20 dielikový nónius	0,05 mm
Posuvné meradlo	50 dielikový nónius	0,02 mm
Mikrometer	50 dielikov na 0,5 mm	0,01 mm
Váhy obchodné	2 dieliky na 10 g	5 g
Váhy analytické	10 dielikový nónius (bez nónia)	0,1 mg (1 mg)
Mechanické stopky	5 dielikov na 1 s	0,2 s
Elektrické digitálne stopky	(so zdrojom stálej frekvencie)	0,01 s
Teplomer	5-2-1 dielik na 1 °C	0,2-0,5-1 °C

Pri meraní dlhších časových intervalov mechanickými stopkami musíme započítať aj systematickú chybu chodu hodinového strojčeka. Ak sú digitálne stopky riadené frekvenciou elektrickej siete, potom relatívna chyba časového údajá je daná ako $\frac{50-f}{50}$, kde f je zmeraná frekvencia elektrickej siete.

Štandardnú neistotu typu B uvažovaného zdroja (meracieho prístroja) u_B vypočítame podľa vzťahu (1.7.20), kde za z_{max} dosadíme príslušnú hodnotu z Tab. 1.7.1.

Odhad chýb jednotlivých veličín, pri ktorých je najväčšia systematická chyba, alebo ich meriame len raz, je dôležitý pre výpočet chyby nepriameho merania. Uvedme aspoň základné pravidlá ako pri tom postupovať. Na stupnici odčítame s presnosťou najmenšieho dielika. V niektorých prípadoch možno odhadovať ešte aj desatiny tohto dielika, ak je k dispozícii nóniové delenie. Posuvným meradlom, ktoré má dieliky po 1 mm odčítame aj desatiny mm, ak je nóniové delenie desatinné. V mikrometri je stupnica delená po 0,01 mm a nónius umožňuje odčítať tisíciny milimetra. Nóniové delenie nemusí byť desatinné, posuvné meradlá majú aj dvadsatinné delenie, na ktorých meriame s presnosťou 0,05mm. Iné delenie sa vyskytuje predovšetkým pri odčítaní uhlov, nóniové delenie uhlomerov je dvadsaťpäťtinové alebo tridsatinné. Presnosť odčítania času na mechanických stopkách v laboratórnom cvičení používaných je 0,1 až 0,2 s (intervalu 0,2 až 0,4 s). Pre dlhšie časové intervaly musíme uvažovať i chybu nepresnosti chodu stopiek. Pomerne presnejším, s menšou relatívanou chybou, je váženie. Na analytických váhach so zaťažením do 100 g môžeme spravidla merať s presnosťou 1 až 0,01 mg. Na elektrických meracích prístrojoch je udaná trieda presnosti, ktorá udáva percentuálnu chybu z maximálnej hodnoty príslušného rozsahu prístroja. Pri prístrojoch s digitálnym ukazovateľom treba vychádzať z triedy presnosti prístroja udávanej výrobcom.

1.7.6 Súvis medzi neistotou merania a chybou merania

V predchádzajúcich častiach boli zavedené pojmy neistoty merania a chyby merania (resp. meracej metódy). Keďže sa tieto dva pojmy často zamieňajú, podrobnejšie si vysvetlíme ich súvis a rozdiely medzi nimi.

Pojem chyby sa používa na označenie faktu, že hodnota veličiny získaná z experimentu je odlišná od skutočnej hodnoty. V laboratórnych cvičeniach z mechaniky je niekoľko úloh na meranie gravitačného zrýchlenia. Predpokladajme, že študenti namerali hodnotu gravitačného zrýchlenia $g = 9,67104 \text{ ms}^{-2}$. Za skutočnú hodnotu považujeme tabuľkovú $9,80665 \text{ ms}^{-2}$ pre normálne zrýchlenie voľného pádu, takže **chyba merania** je $0,13561 \text{ ms}^{-2}$. Chyba merania je však obvykle experimentátorovi neznáma a pri meraní doteraz neznámych veličín a pri spresňovaní merania známych veličín ju ani nemožno určiť. V podobnom kontexte treba chápať aj pojem **chyby meracej metódy**, ktorý vyjadruje to, že konkrétny experiment nespĺňa všetky podmienky pre použitie zjednodušených vzťahov platných pre ideálny experiment.

Keďže chyby merania a meracích metód sú neoddeliteľnou súčasťou každého experimentu, experimentátor sa snaží analýzou experimentu odhadnúť **možnú chybu** meranej veličiny. Vzhľadom k neúplným informáciám sa často prikláňa smerom k vyšším možným chybám a výsledkom odhadu je interval – **neistota merania**, ktorý je v optimálnom prípade o niečo väčší než skutočná realizovaná chyba merania. Tým má experimentátor istotu, že skutočná hodnota meranej veličiny neleží mimo intervalu určeného neistotou merania. Z uvedeného vyplýva, že neistota merania, keďže dáva iba možnú hodnotu chyby merania, má **pravdepodobnostný (štatistický)** charakter. S hodnotou neistoty merania (typu A aj B) je vždy spojené **rozdelenie pravdepodobnosti** vyjadrujúce, ktoré hodnoty chyby merania sú vysoko pravdepodobné, a ktoré sú nepravdepodobné.

Záverom môžeme zhrnúť nasledovné: Na chybu merania má vplyv mnoho faktorov ktoré spôsobia, že získaná hodnota bude menšia alebo väčšia než skutočná. S meraním je preto úzko spätá neistota v určení meranej veličiny.

Pri meraní sa stretávame s dvomi základnými typmi zdrojov neistôt:

1. Neistoty typu A. Pri opakovaní merania sa prejaví získaním rôznych výsledkov merania. Ich veľkosť sa určuje z opakovaných meraní štatistickými metódami.
2. Neistoty typu B. Pri opakovaní merania za nezmenených podmienok sa prejaví. Ich veľkosť sa odhaduje inými ako štatistickými metódami.

Pojem chyba merania sa používa na označenie faktu, že nameraná hodnota sa líši od skutočnej, „správnej“, hodnoty. S výnimkou meraní etalónov (známych veličín) zostáva experimentátorovi neznáma.

Pojem neistoty merania sa používa na označenie odhadu chyby merania. Neistota má preto iba pravdepodobnostný charakter.

Pre určenie neistoty výsledku merania potrebujeme posúdiť vplyv jednotlivých faktorov ovplyvňujúcich chybu výsledku. Ďalej treba z jednotlivých príspevkov určiť výslednú neistotu. K tomu potrebujeme univerzálne a jednoduché postupy pre typické prípady stanovenia neistôt typu A i B a pod.

1.8. SPRACOVANIE EXPERIMENTÁLNYCH VÝSLEDKOV

1.8.1 Metóda najmenších štvorcov

Strednú hodnotu súboru rovnakých meraní určuje aritmetický priemer. Ako už bolo spomenuté je jednou z jeho dôležitých vlastností, že súčet štvorcov odchýlok je minimálny. Táto vlastnosť sa používa na určenie parametrov funkčnej závislosti $y = f(x)$. Majme súbor meraní dvoch hodnôt x a y :

$$[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n] \quad (1.8.1)$$

čo predstavuje v rovine súbor n bodov. Týmito bodmi treba preložiť krivku. Zo všeobecných fyzikálnych zákonitostí vieme, o aký druh krivky ide, potrebujeme určiť len určitý počet neznámych parametrov b_1, b_2, \dots, b_m (napr. Gay-Lussacovho zákona veličinou x je teplota t , veličinou y tlak p ; zákon vyjadruje priamkovú závislosť medzi tlakom a teplotou $p_i = p_0(1 + \gamma t)$ s dvoma parametrami p_0 a γ). Na určenie m parametrov nám stačí zmerať m bodov, preto pokiaľ $n > m$, evidentne krivka nebude prechádzať všetkými bodmi. Kritérium ako viesť krivku alebo aké hodnoty majú mať parametre b_1 až b_m , je práve podmienka, aby súčet štvorcov odchýlok bol minimálny, t. j.

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, b_1^*, b_2^*, \dots, b_m^*)]^2 = \min \quad (1.8.2)$$

kde b_1^*, \dots, b_m^* sú parametre, ktoré spĺňajú túto podmienku. Nimi určená krivka najlepšie prilieha k empirickým bodom.

Ozrejmíme si túto metódu na priamkovej závislosti $y = a + bx$, a dvoma neznámymi a, b . Z podmienky

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a^* - b^* x_i)^2 = \min \quad (1.8.3)$$

plynie

$$\frac{\partial S}{\partial a^*} = 0, \quad (1.8.4)$$

alebo

$$\frac{\partial S}{\partial a^*} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a^* - b^* x_i) = -2 \left[\sum_{i=1}^n y_i - n a^* - b^* \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right] = 0 \quad (1.8.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b^*} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a^* - b^* x_i) x_i = -2 \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - a^* \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - b^* \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right] = 0 \quad (1.8.6)$$

Riešením dostaneme

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (1.8.7)$$

$$a^* = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - b^* \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right) \quad (1.8.8)$$

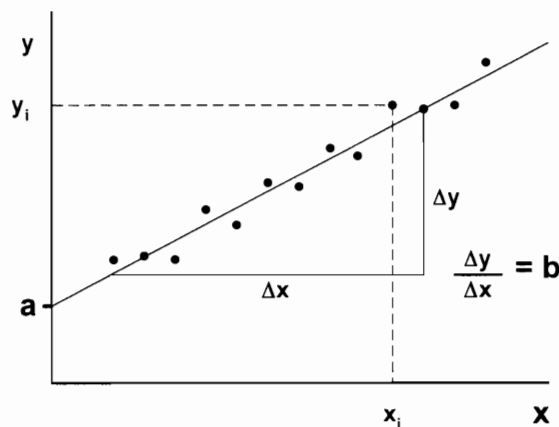
Vzťah medzi nameranými bodmi (x_i, y_i) a preloženou priamkou s vypočítanými parametrami (a, b) metódou najmenších štvorcov je na obr.1.8.1.

Pokiaľ na výpočet parametrov nepoužijeme kalkulačku s možnosťou priameho výpočtu (regresnej analýzy) je výhodné postupovať podľa nasledovnej tabuľky.

Tab.č.1.7.1. Metóda najmenších štvorcov

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	x_1	y_1	x_1^2	$x_1 y_1$
2	x_2	y_2	x_2^2	$x_2 y_2$
.				
.				
n	x_n	y_n	x_n^2	$x_n y_n$
Σ	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i y_i$

Výpočet metódou najmenších štvorcov viacerých parametrov je zložitý, preto sa využívajú jednoduchšie metódy, napr. metóda skupinová, metóda postupná, metóda grafického vyjadrenia.



Obr. 1.8.1. K metóde najmenších štvorcov

Zvláštnym prípadom metódy najmenších štvorcov je, keď sa meranie urobí v konštantných intervaloch nezávisle premennej. Týmto meraním môže byť aj opakované meranie určovanej veličiny, kde začiatok druhého merania nadväzuje na koniec prvého merania. Napr. pri zisťovaní doby kyvu T kyvadla priebežne odčítame časti vždy po rovnakom počte kyvov k . Teda

$$t_i = a + kT, \quad t_i = a + b_i$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Potom

$$b^* = kT = \frac{(n-1)(t_n - t_1) + (n-3)(t_{n-1} - t_2) + \dots}{n(n^2 - 1)} \quad (1.8.9)$$

1.8.2 Postupná metóda

V prípade, že je meraná fyzikálna veličina x určená rozdielom dvoch hodnôt po sebe nasledujúcich meraní $x = x_i - x_{i-1}$, pre $i = 1, 2, \dots, N$ potom je výhodné pre spracovanie použiť metódu postupných meraní. Konečná hodnota predchádzajúceho merania je totožná s počiatočnou hodnotou nasledovného merania.

Ak bude nameraný súbor hodnôt $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, potom rozdiely budú $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_N - x_{N-1}$. Hodnoty rozdielov sa od seba navzájom líšia. Ak by sme počítali aritmetický priemer týchto rozdielov dostaneme

$$\bar{x} = \frac{1}{N} [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_N - x_{N-1})] = \frac{1}{N} (x_N - x_0) \quad (1.8.10)$$

Aritmetický priemer závisí iba od prvej a poslednej hodnoty a preto je výhodné pre dosiahnutie vyššej presnosti využiť všetky merania. Použije sa nasledovný postup:

1. Hodnoty sa rozdelia na dve polovice $N = 2n$.
2. Na spracovanie sa použije nasledovná tabuľka

Tab.1.7.2. Metóda postupných meraní

k	1. polovica	k+1	2. polovica	Rozdiel $D_k = x_{k+n} - x_k$	ΔD_k	ΔD_k^2
1	x_1	$k+1$	x_{n+1}	$D_1 = x_{1+n} - x_1$	$D - D_1$	$(D - D_1)^2$
2	x_2	$k+2$	x_{n+2}	$D_2 = x_{2+n} - x_2$	$D - D_2$	$(D - D_2)^2$
n	x_n	$2n$	x_{2n}	$D_n = x_{2n} - x_n$	$D - D_n$	$(D - D_n)^2$
Σ				ΣD_k	$\Sigma \Delta D_k$	$D_k = x_{k+n} - x_k$

Aritmetický priemer je

$$D = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k \quad (1.8.11)$$

Stredná hodnota veličiny je

$$\bar{x} = \frac{1}{n} D \quad (1.8.12)$$

Štandardná odchýlka je

$$\sigma_{D'} = \frac{1}{n} \sigma_D = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n \Delta D_k^2}{n(n-1)}} \quad (1.8.13)$$

1.8.3 Grafická metóda interpolácie a extrapolácie

Často potrebujeme určiť hodnotu veličiny y pre takú hodnotu x , ktorú sme priamo nenamerali a poznáme len hodnoty y v okolí tohto bodu. Potom z grafu, v ktorom je bodmi preložená krivka, môžeme odčítať túto hodnotu medzi dvoma nameranými veličinami – interpolovať, alebo mimo nameranú oblasť – extrapolovať. Vždy však výsledná presnosť odčítania je určená okrem presnosti merania aj vhodným grafickým znázornením. Pri extrapolácii treba postupovať s väčšou opatrnosťou pokiaľ závislosť nie je priamková, alebo hľadaný bod leží ďaleko od meranej oblasti, alebo sa nedá namerať.

1.9 REFERÁT Z LABORATÓRNEJ PRÁCE

Referát z laboratórnej práce má obsahovať tieto časti:

1. Cieľ úlohy
2. Zadanie (úlohy) merania
3. Teoretický úvod
4. Opis aparatury
5. Prístroje a pomôcky
6. Postup práce
7. Spracovanie nameraných hodnôt
8. Výpočet chyby merania
9. Konečná hodnota nameranej veličiny
10. Zhodnotenie práce a výsledkov meraní
11. Grafy

1. **Cieľ úlohy**

Cieľ úlohy stručne uvádza čo sa má meraním dosiahnuť.

2. **Zadanie (úlohy) merania**

Zadanie presne špecifikuje úlohy, ktoré treba v laboratórnom cvičení splniť

- ktoré veličiny a akou metódou merať
- aké grafy znázorniť a aké chyby vyjadriť .

3. **Teoretický úvod**

Pod týmto bodom v referáte bude veľmi stručne (len niekoľkými vetami) uvedený princíp merania, aký fyzikálny zákon alebo vzťah sa využíva pri meraní danej fyzikálnej veličiny; tento bod má byť úvodom celej práce.

4. **Opis aparatury**

Stručne opíšeme aparaturu – jednotlivé prístroje, ich princípy a funkcie.

5. **Prístroje a pomôcky**

V referáte uvedieme všetky prístroje a pomôcky, ktoré sme pri meraní používali. Pri elektrických prístrojoch vypíšeme nielen o aký prístroj ide, ale aj jeho systém (značkou), triedu presnosti a iné charakteristické údaje toho prístroja. Treba to urobiť preto, aby sme podľa referátu mohli meranie znovu kedykoľvek zreprodukovať

6. **Postup práce**

Tu musíme uviesť dôležitejšie postupy, ktoré musíme pri meraní na danej aparature dodržiavať. Uvedieme podmienky, za ktorých sa meranie uskutočnilo.

Zakreslíme úplnú schému zapojenia elektrických prístrojov, ktoré sme pri meraní používali. Ak to bude laboratórna práca, kde sa nepoužívajú elektrické prístroje, nakreslíme zariadenie, na ktorom robíme meranie, a to tak, aby sa vystihla fyzikálna podstata meracieho zariadenia.

7. Spracovanie nameraných hodnôt

Experimentálne výsledky sa zapisujú do tabuliek a znázorňujú do grafov. Tabuľky používame ako formu zápisu pri meraní aj vtedy, keď sa výsledok bude ďalej spracúvať, sú preto najrozšírenejšou formou zápisu. Používajú sa na zápis viacerých premenných veličín. Aby boli čo najprehľadnejšie, musíme dodržať určité pravidlá:

Tabuľka obsahuje záhlavie, riadky a stĺpce. V záhlaví tabuľky je uvedená veličina, ktorú meriame alebo jej značka, ktorá sa v texte používa a je vysvetlená. Vedľa nej za lomítkom je príslušná jednotka danej veličiny.

Tie veličiny, ktoré sú počas merania konštantné, zapisujeme nad hlavičku tabuľky. Pri elektrických meracích prístrojoch, kde možno meniť rozsah prístroja hneď prepočítavame hodnotu príslušnej veličiny.

Každá fyzikálna veličina je spravidla funkčne závislá od iných veličín, s ktorými je preto v určitom vzťahu. Ak chceme zistiť hodnotu takej fyzikálnej veličiny, môžeme to urobiť tak, že odmeriame hodnoty tých fyzikálnych veličín, s ktorými je vo vzťahu. Po dosadení príslušných hodnôt do vzťahu dostaneme hľadanú hodnotu skúmanej fyzikálnej veličiny. Aby táto hodnota fyzikálnej veličiny bola pokiaľ možno čo najpresnejšia, snažíme sa každú fyzikálnu veličinu, s ktorou je vo vzťahu, merať viackrát (najčastejšie 10-krát). Zo všetkých meraní pre každú fyzikálnu veličinu urobíme aritmetický priemer, a ten dosadíme do daného vzťahu. V referáte neuvádzame výpočty všetkých hodnôt skúmanej veličiny, ale iba výpočty pri jednom meraní pre jeden ľubovoľný riadok, tzv. vzorový výpočet.

Príklad vzorového výpočtu pre modul pružnosti v torzii dynamickou metódou:

$$G = \frac{2\pi l J}{r^4 T^2}; l = 1m \quad T = 1,2 \text{ s} \quad r = 1,236 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$J = 4,34 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

$$G = \frac{2\pi \cdot 1m \cdot 4,34 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2}{1,236^4 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 \cdot 1,2^2 \text{ s}^2} = \frac{2\pi \cdot 4,34}{2,34 \cdot 1,44} \cdot 10^{10} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} = 8,092678 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

$$G = 8,092678 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

Nie vždy môžeme každú fyzikálnu veličinu merať viackrát. Niektoré meriame iba raz, iné viackrát. Pri výpočte sa snažíme dosadiť hodnoty fyzikálnych veličín v SI sústave, a to pokiaľ možno pomocou základných a hlavných jednotiek. Vedľajšie jednotky používame iba v nutných prípadoch.

8. Výpočet chyby merania

Aby sme svoje meranie mohli posúdiť, potrebujeme vedieť, s akou chybou sme výslednú fyzikálnu veličinu určili. Ako bolo už ukázané, podľa charakteru merania môžeme rôznym spôsobom vypočítať chybu merania fyzikálnej veličiny. Ak výslednú fyzikálnu veličinu pomocou iných sme merali 5 alebo 10-krát, zdanlivé chyby a ich druhé mocniny zapisujeme do tabuľky.

V referáte ukážeme výpočet chýb pre jeden ľubovoľný riadok a konečný výpočet štandardnej odchýlky aritmetického priemeru danej veličiny. Ak z merania dostaneme iba jednu hodnotu výslednej fyzikálnej veličiny, ukážeme výpočet stredných kvadratických chýb aritmetických priemerov tých fyzikálnych veličín, od ktorých je závislá, ako aj celkový výpočet chyby merania výslednej fyzikálnej veličiny. Postup pri výpočte musí byť podobný, ako sme si ukázali v odseku 7. *Spracovanie nameraných hodnôt.*

9. Konečná hodnota nameranej veličiny

Nameraná hodnota fyzikálnej veličiny je presná a preto ju treba zapísať tak, aby zo zápisu bolo zrejmé, nakoľko je presné. Zapisujeme ho s udaním príslušnej chyby, alebo aj bez nej, ak sme chybu neurčovali. Uvádzame aj relatívnu chybu v percentách.

V zápise hodnoty s chybou má byť hodnota s chybou v zátvorke a za ňou fyzikálny rozmer. Chyba sa udáva na jedno vo zvláštnych prípadoch na dve platné miesta, preto aj hodnota končí rovnakým desatinným miestom a na ďalších miestach môžu byť len nuly.

Príklad zápisu:

Všeobecný zápis nameranej veličiny $X = [\bar{X} \pm \sigma(\bar{X})][\text{Rozmer}]$

$$m = (3,29 \pm 0,05) \text{ kg} \quad \frac{\sigma_m}{m} \cdot 100\% = 1,6\%$$

$$c = (300\,000 \pm 1000) \text{ km s}^{-1} \quad \frac{\sigma_c}{c} \cdot 100\% = 0,33\%$$

$$\lambda = (0,4760 \pm 0,0004) 10^{-6} \text{ m} \quad \frac{\sigma_\lambda}{\lambda} \cdot 100\% = 0,084\%$$

V zápise hodnoty bez udania chyby musí byť posledná číslica platná. Nepresnosť hodnoty má byť menšia alebo sa má rovnať jednotke posledného miesta. Je to dôležité správne chápať v prípade, keď zaokrúhlené číslo končí nulami – aj to sú platné číslice. Tak napr. rýchlosť svetla $c = 300\,000 \text{ km s}^{-1}$ je v zmysle predošlého zápisu nesprávne zapísaná hodnota. Z tohto zápisu totiž vyplýva, že chyba je 1 km s^{-1} . Správny zápis je $300 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}$, teda s presnosťou $\pm 1 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}$.

Posledná zapísaná číslica výsledku i chyby vznikne zaokrúhlením podľa hodnoty číslice ležiacej za ňou. Ak táto hodnota číslice je 1 až 4, zaokrúhľujeme smerom nadol, ak je 5 až 9, zaokrúhľujeme smerom nahor.

10. Zhodnotenie práce a výsledkov meraní

Účelom laboratórnej práce je nielen kvantitatívne vyšetovanie fyzikálnych veličín a overiť platnosť zákonov vyšetovaných javov, ale aj vedieť posúdiť podľa výsledkov merania a ich príslušných chýb celkove laboratórnu prácu. Ak chyba výsledku merania vyjde veľká, treba vedieť, čo bolo príčinou takej veľkej chyby. Či veľká nepresnosť výsledku merania nebola spôsobená napr. nepresnosťou pri meraní niektorej fyzikálnej veličiny, zlými podmienkami pri meraní, nevhodnými prístrojmi alebo pomôckami, vlastnou nepozornosťou alebo nedbalosťou počas merania alebo inými objektívnymi či subjektívnymi ťažkosťami.

11. Grafy

Hodnoty fyzikálnych veličín získané meraním môžeme zapisovať aj pomocou grafov. Grafy umožňujú vytvoriť si rýchlu a názornú predstavu o celkovom priebehu funkcie. Ukážeme si, ako grafy zostrojovať. Najčastejšie sa grafy robia v kartézskej (pravouhlej) sústave. Na danom nákrese si nakreslíme dve na seba kolmé priamky, ktoré označíme napr. x , y . Vodorovnú os, nazývanú tiež osou úsečiek, označíme x a zvislú os (os poradníc) značkou y . Smer stúpania hodnôt x_i a y_i označíme šípku na obidvoch osiach.

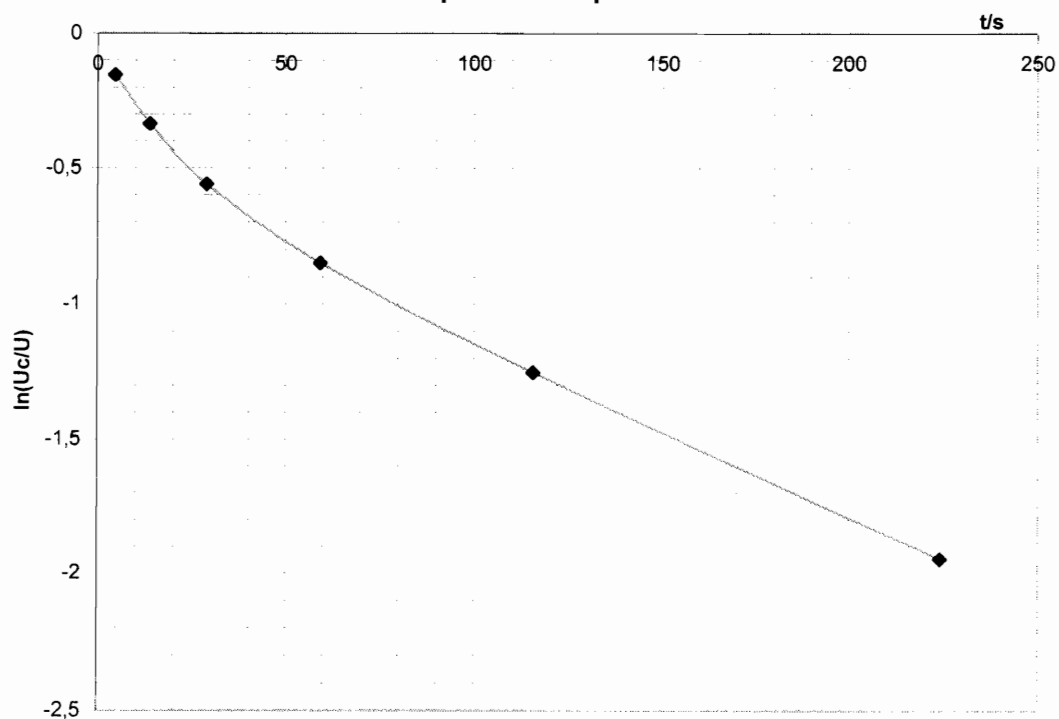
Na vodorovnú os (x) nanášame tú veličinu, od ktorej závisí veličina znázornená na zvislej osi (y). Dôležité je zvoliť si vhodnú mierku na oboch osiach. Najprv zvolíme mierku na vodorovnej osi a potom s prihliadnutím k nej mierku na zvislej osi. Mierky by mali byť zvolené tak, aby graf využíval čo najväčšiu časť príslušného kvadrantu.

Kóty na stupnici musia byť zakreslené tak, aby sme mohli súradnice ľubovoľného bodu na grafe odčítať rýchlo a pokiaľ možno čo najpresnejšie. Nesmú byť zakreslené a zapísané ani husto vedľa seba, aby sme si nemýlili jednotlivé kóty, ale ani príliš ďaleko od seba, čo by mohlo ísť zase na úkor presnosti a rýchlosti odčítania. Nikdy nevynášame kóty tak, že vynesieme na os len súradnice bodov, ktoré sme namerali. Kóty zakresľujeme na os bez ohľadu na súradnice meraných bodov. Musia byť vzdialené rovnomerne od seba. Ku každej osi na jej koniec (pri šípke) napíšeme značku príslušnej fyzikálnej veličiny, ktorá je použitá aj v texte referátu a jej jednotku.

Jednotlivé body merania, pokiaľ robíme graf na milimetrový papier, nespájame úsečkami s ich príslušnými kótami na osi, lebo graf sa stáva neprehľadný. Body merania zakresľujeme napr. pomocou takýchto značiek: \odot \bullet \times Δ \square $\#$ a iné. Čiaru grafu nekreslíme tak, aby prechádzala nameranými bodmi, lebo tie sú namerané s určitou chybou, a preto by bola nepravidelne zvlnená. Takýto priebeh závislosti nemôžeme predpokladať, lebo deje vo fyzike najčastejšie prebiehajú bez akýchkoľvek nespojitostí a zlomov, pokiaľ dej nepopisuje nejakú fázovú premenu. Preto aj čiaru musíme viesť plynule a spojite tak, aby vystihovala čo najlepšie fyzikálny zákon. Musí prechádzať v najtesnejšej blízkosti všetkých bodov získaných meraním. Grafy možno kresliť aj za pomoci počítačov, napr. pomocou programov EXCEL alebo ORIGIN.

Príklad grafu spracovaného počítačom je obr. 1.9.1. Graf na ňom predstavuje pokles napätia kondenzátora pri vybíjaní cez rezistor s veľkou rezistenciou. Na zvislej osi je vynesенý prirodzený logaritmus podielu okamžitého napätia kondenzátora v príslušnom čase a počiatočného napätia ($U = 35$ V). Na vodorovnej osi je vynesенý príslušný čas (kedy bolo odmerané napätie).

**Pokles napätia pri vybíjaní kondenzátora v závislosti na čase;
pôvodné napätie $U = 35\text{ V}$**



Obr. 1.9.1. Príklad grafu - Závislosť prirodzeného logaritmu podielu napätia pri vybíjaní kondenzátora ku počiatočnému napätiu od času

Návody na laboratórne cvičenia z mechaniky

1. URČENIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA REVERZNÝM KYVADLOM

Cieľ práce: Namerať tiažové zrýchlenie pomocou reverzného kyvadla.

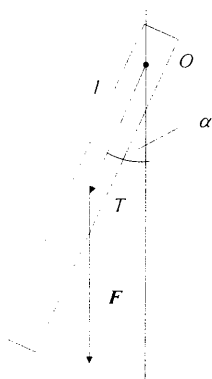
- Úlohy:**
1. Pomocou skrutiek nastavte reverzné kyvadlo pri kmitaní okolo oboch osí O_1 a O_2 do zvislej polohy pomocou vodováhy (olovnice).
 2. Vychýlením kyvadla nie viac ako 5° v oboch polohách merajte jeho doby kmitov pri rôznych polohách závažia od zvoleného bodu.
 3. Zo závislosti $T = F(d)$ zistíte podmienku nahradenia reverzného kyvadla matematickým kyvadlom.

Teoretický úvod:

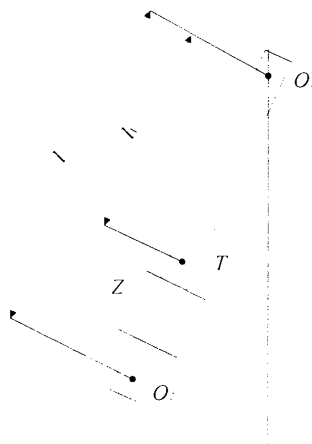
Tuhé teleso, ktoré môže vykonávať rotačný pohyb okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom, sa nazýva fyzikálne kyvadlo. Kyvadlo je v rovnovážnej polohe, ak jeho ťažisko zaujíma najnižšiu možnú polohu, t.j. ťažisko a os otáčania sú vo zvislej rovine. Ak teleso vychýlime zo zvislej roviny o uhol α_0 získa tým potenciálnu energiu

$$E_{p \max} = mgl(1 - \cos \alpha_0), \quad (1)$$

kde $l(1 - \cos \alpha_0)$ vyjadruje výšku ťažiska kyvadla po jeho vychýlení z rovnovážnej polohy. Ak teleso uvoľníme, tak sa otáča okolo osi otáčania, pričom sa potenciálna energia premieňa na kinetickú. Keď je ťažisko telesa v najnižšej (rovnovážnej) polohe bude kinetická energia telesa maximálna. Teleso zotrvačnosťou prejde túto polohu a bude sa vychyľovať na opačnú stranu až dosiahne výchylku $-\alpha_0$. Tento dej sa stále opakuje, je to periodický dej. V prípade kyvadla je charakterizovaný vzájomnou premenou kinetickej energie na potenciálnu a naopak. V reálnom prípade sa pri každom kmite časť kinetickej energie premení na teplo v dôsledku trenia kyvadla o vzduch a trením v ložisku. Ak sú tieto straty malé, tak počas určitého počtu kmitov môžeme straty zanedbať a kmity považovať za netlmené.



Obr. 1. Fyzikálne kyvadlo



Obr. 2. Reverzné kyvadlo.

Pre pohyb fyzikálneho kyvadla (obr. 1) platí pohybová rovnica $J\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, v skalárnom tvare

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha, \quad (2)$$

kde na pravej strane je moment sily vzhľadom na os otáčania (tá je označená bodom O), J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania násobený uhlovým zrýchlením telesa okolo tej istej osi. m je hmotnosť telesa, l je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania. Znamienko mínus vyjadruje, že moment sily \mathbf{M} je opačne orientovaný ako výchylka α . Rovnicu (2) upravíme

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

Táto rovnica je ťažko riešiteľná a jej riešenie $\alpha(t)$ má tvar nekonečného radu. Ak si však zvolíme malú počiatočnú výchylku α_0 , výchylky α budú malé a $\sin \alpha \approx \alpha$, rovnica sa zjednoduší

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0, \quad \text{kde} \quad \frac{mgl}{J} = \omega^2 \quad (4)$$

a jej riešenie bude (pri spôsobe uvedenia kyvadla do pohybu vychýlením o uhol $+\alpha_0$)

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t, \quad (5)$$

Veličina ω je uhlová frekvencia. Medzi ňou a frekvenciou f a periódou T platia vzťahy

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (6)$$

Doba kmitu fyzikálneho kyvadla

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (7)$$

sa môže využiť na výpočet tiažového zrýchlenia, pretože dobu kmitu vieme ľahko odmerať. Problémom je presná poloha ťažiska, t.j. dĺžka l a moment zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla voči osi otáčania. Tieto ťažkosti sa obídu použitím reverzného kyvadla, ktoré ako ďalej uvidíme, formálne prevedie fyzikálne kyvadlo na matematické.

Pre matematické kyvadlo

$$\omega_m^2 = \frac{g}{l_m}. \quad (8)$$

Reverzné kyvadlo (obr. 2) pozostáva z kovovej tyče opatrenej dvoma ložiskami, ktoré môžu postupne slúžiť ako osi otáčania O_1 a O_2 tak, aby ťažisko bolo medzi ložiskami O_1 a O_2 ,

ako je to znázornené na obr. 2. Na tyči je nasunuté závažie Z , ktoré možno posúvať a tak meniť polohu ťažiska T . Posunutím závažia možno vytvoriť také kyvadlo, ktoré kmitá s rovnakou periódou okolo osi O_1 aj osi O_2 – t.j. reverzné kyvadlo. S rovnakou periódou kmitá aj matematické kyvadlo, ktorého dĺžka závesu l_m sa rovná vzdialenosti medzi osami O_1 a O_2 reverzného kyvadla. To znamená, že obe kyvadlá sú formálne ekvivalentné. Pre uhlovú frekvenciu reverzného kyvadla potom môžeme použiť vzťah (8), ktorý už neobsahuje veličinu J , ani vzdialenosť ťažiska od osi otáčania. Vzdialenosť l_m sa rovná dĺžke závesu náhradného matematického kyvadla, t.j. vzdialenosti medzi osami reverzného kyvadla, ktorú môžeme presne zmerať.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že treba experimentálne hľadať takú polohu závažia na reverznom kyvadle, pri ktorej bude $\omega_1^2 = \omega_2^2$, t.j.

$$\frac{mgl_1}{J_1} = \frac{mgl_2}{J_2} = \frac{g}{l_m} \quad (9)$$

Ak kyvadlo kmitá okolo osi O_1 , platí pre uhlovú frekvenciu vzťah

$$\omega_1^2 = \frac{mgl_1}{J_1}, \text{ kde podľa Steinerovej vety je } J_1 = J_0 + ml_1^2 \quad (10)$$

Ak kyvadlo prevrátíme a zavesíme ho na ložisko O_2 (tzv. reverzia kyvadla), bude kmitať okolo osi O_2 , a vzťah pre uhlovú frekvenciu bude

$$\omega_2^2 = \frac{mgl_2}{J_2}, \text{ kde podľa Steinerovej vety je } J_2 = J_0 + ml_2^2 \quad (11)$$

J_0 je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os rovnobežnú s osami O_1 a O_2 , a prechádzajúcej ťažiskom T . Po dosadení momentov zotrvačnosti podľa Steinerovej vety do (10) a (11) dostaneme

$$\frac{l_1}{J_0 + ml_1^2} = \frac{l_2}{J_0 + ml_2^2} \quad (12)$$

Považujme os O_1 za pevnú (t.j. $l_1 = const$) a hľadáme takú polohu osi O_2 , t.j. takú vzdialenosť l_2 , pri ktorej platí rovnica (8). Dostaneme ju výpočtom z (12), ktorá je vzhľadom na l_2 kvadratickou rovnicou. Výsledok je

$$l_{21} = \frac{J_0}{ml_1} \quad \text{a} \quad l_{22} = l_1$$

Druhý koreň znamená, že ťažisko reverzného kyvadla je presne v strede medzi osami O_1 a O_2 a rovnaké sú aj momenty zotrvačnosti $J_1 = J_2$. Prvý koreň znamená, že poloha ťažiska nie je presne v strede medzi osami a $J_1 \neq J_2$, čo je náš prípad. Vzdialenosť medzi osami reverzného kyvadla je

$$l = l_1 + l_{21} = l_1 + \frac{J_0}{ml_1} = \frac{ml_1^2 + J_0}{ml_1} = \frac{J_1}{ml_1} .$$

Podobne by sme dostali $l = J_2 / ml_2$. l sa rovná dĺžke závesu l_m matematického kyvadla kmitajúceho s rovnakou uhlovou frekvenciou ako to vyplýva z rovnice (9). Tým sme dokázali, že je možná náhrada matematického kyvadla fyzikálnym reverzným kyvadlom.

Dobu kmitu matematického kyvadla vzhľadom na rovnicu (8) možno vyjadriť v tvare

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (13)$$

Opis aparátúry:

Opis reverzného kyvadla vyplýva z obr. 2.

Prístroje a pomôcky: reverzné kyvadlo, skrutkovač, dĺžkové meradlo, stopky, vodováha

Postup práce:

1. Nastavte skrutky ložiska kyvadla tak, aby v pokoji bola tyč vo zvislej polohe. Použite vodováhu.
2. Kyvadlo uveďte do pohybu vychýlením o malý uhol, t.j. nie viac ako o 5° (čo znamená, že dolný koniec tyče vychýlime maximálne o 7 cm).
3. Odmerajte dobu trvania 20 kmitov.
4. Zopakujte body 2, 3 ešte raz a vypočítajte priemernú dobu trvania 20 kmitov a dobu jedného kmitu.
5. Kyvadlo zaveste na druhé ložisko a zopakujte body 1, 2, 3, 4.
6. Zmeňte polohu závažia (celkove potrebujeme aspoň 4 rôzne polohy) a opakujte body 1, 2, 3, 4, 5. Závažie spoľahlivo zafixujte skrutkou do jamky na tyči! Pri každej polohe závažia odmerajte jeho vzdialenosť od zvoleného konca tyče (vzdialenosť d v tabuľke).

Spracovanie nameraných hodnôt:

1. Namerané hodnoty zapíšete do tabuľky

d /mm	1.mer: t_{20} /s	2. mer: t_{20} /s	$\overline{t_{20}}$ /s	T /s	os
					O_1
					O_2
atd.					

2. Zostrojte graf závislostí $T(d)$ tak, že na vodorovnú os nanesiete vzdialenosti d a na zvislú os dobu kmitu T . Pre každú vzdialenosť d máme dve doby kmitov T . Cez vynesené body vedieme dve krivky, ktoré sa pretnú. Priemet priesečníka oboch kriviek na časovú os udáva periódu

kmitu náhradného matematického kyvadla. Dosadíme ju do vzťahu (13) a vypočítame tiažové zrýchlenie. Vypočítanú hodnotu porovnáme s $g_n = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$ pre našu zemepisnú šírku.

Rozbor presnosti merania:

1. Určte relatívnu neistotu merania.
2. Zistite, s akou neistotou merajú jednotlivé prístroje a posúďte, ktorý údaj vnáša do výsledku najväčšiu neistotu merania.

Kontrolné otázky:

1. Aká musí byť dĺžka matematického kyvadla, aby kmitalo s rovnakou periódou ako fyzikálne kyvadlo?
2. V čom spočíva metóda merania tiažového zrýchlenia pomocou reverzného kyvadla?
3. Aký je vzťah medzi vzdialenosťou osí reverzného kyvadla a dĺžkou matematického kyvadla kmitajúceho s tou istou periódou ako reverzné kyvadlo?

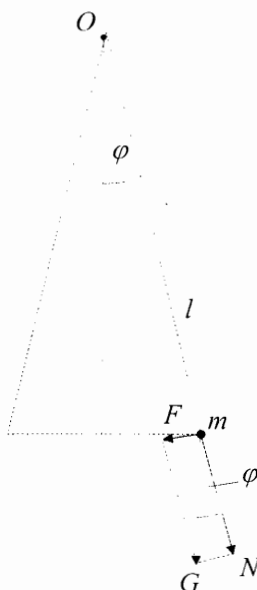
2. MERANIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA Z DÔB KMITOV MATEMATICKÉHO KYVADLA

Cieľ práce: Stanoviť tiažové zrýchlenie z meraní dôb kmitov matematického kyvadla.

- Úlohy:**
1. Namerajte tiažové zrýchlenie meraním dôb kmitov matematického kyvadla v závislosti od jeho dĺžky podľa rovnice (6), pre konštantnú výchylku z intervalu $\alpha \leq 2^\circ$ a meraním dôb kmitov v závislosti od veľkých uhlov $\alpha^\circ \in (5;60)$ pre konštantnú dĺžku kyvadla l .
 2. Oboma spôsobmi namerané hodnoty porovnajte s hodnotou $g_{tab} = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$ a meranie zhodnoťte relatívnymi chybami merania g .

Teoretický úvod:

Matematické kyvadlo je abstraktný mechanický oscilátor realizovaný guľôčkou hmotnosti m , stotožnenej s hmotným bodom, zaveseným na tenkom nepružnom vlákne (obr. 1).



Obr. 1 Matematické kyvadlo

Pohybová rovnica telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo osi otáčania neprechádzajúcej ťažiskom, vyplýva z druhej impulzovej vety. Ak moment sily vzhľadom na okamžitú os otáčania označíme M , potom

$$M = \frac{dL}{dt} = J \varepsilon \quad (1)$$

kde $\mathbf{L} = J \cdot \boldsymbol{\omega}$ je moment hybnosti hmotného bodu s momentom zotrvačnosti J , $\boldsymbol{\omega}$ je vektor uhlovej rýchlosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor uhlového zrýchlenia, $\boldsymbol{\varepsilon} = d^2 \boldsymbol{\varphi} / dt^2$.

V ďalšom sa obmedzíme na skalárne vyjadrenie (1)

$$M = J\varepsilon \quad (2)$$

Úlohou je nájsť moment sily M vyvolávajúci pohyb matematického kyvadla, ktoré kmitá pod vplyvom vlastnej tiaže \mathbf{G} . Tiaž \mathbf{G} rozložíme na dve zložky, na zložku \mathbf{N} pôsobiacu v smere nite (tá napína niť) a na zložku \mathbf{F} kolmú na niť. Zložka \mathbf{F} účinkuje v smere dotyčnice k oblúku pohybu hmotného bodu. Je to práve tá zložka, ktorá vyvoláva kmitanie a možno ju vyjadriť $F = G \sin \varphi = mg \sin \varphi$, kde uhol φ vyjadruje výchylku hmotného bodu z rovnovážnej polohy (obr.1). Moment sily M vzhľadom na okamžitú os otáčania je potom $M = mgl \sin \varphi$, kde l je dĺžka závesu hmotného bodu. Keďže moment zotrvačnosti hmotného bodu vzhľadom na os otáčania je $J = ml^2$, pohybová rovnica matematického kyvadla, vzhľadom na (2) bude

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad (3)$$

znamienko mínus súvisí s voľbou orientácie vektora \mathbf{M} v pravotočivej súradnicovej sústave.

Prípád malých uhlov

Kyvadlo vykonáva harmonický pohyb len pri malých výchylkách z rovnovážnej polohy, keď sila F je úmerná okamžitej výchylke z rovnovážnej polohy a smeruje proti nej. Vtedy $\sin \varphi \approx \varphi$ a rovnica (3) sa zjednoduší na tvar

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (4)$$

Riešením diferenciálnej rovnice (4) je harmonická funkcia

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

kde

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (5)$$

Ak za začiatok pozorovania pohybu kyvadla zvolíme okamih, keď má kyvadlo maximálnu výchylku potom pohybu kyvadla opisuje funkcia

$$\varphi(t) = \alpha \cos(\omega t) ,$$

kde α je amplitúda.

Doba kmitu pre malé uhly $\varphi \leq 2^\circ$ je daná rovnicou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

a nezávisí od amplitúdy α .

Prípád veľkých uhlov

Matematické kyvadlo koná harmonický pohyb vo vzduchu len pre malé uhly hmotného bodu z rovnovážnej polohy. Pre väčšie uhly $\alpha > 2^\circ$ pohyb kyvadla už nie je harmonický, nazývame ho aharmonický a opisuje ho pôvodná neaproximovaná rovnica (3). Teraz uvidíme riešenie diferenciálnej rovnice (3) pre veľké výchylky φ hmotného bodu z rovnovážnej polohy. Rovnicu (3) vynásobíme s $\dot{\varphi} = d\varphi / dt$

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

alebo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi}^2) = -\frac{g}{l} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad (7)$$

Po integrovaní (7) dostaneme

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} \cos \varphi + const. \quad (8)$$

Predtým sme položili $\dot{\varphi} = 0$, pre $\varphi = \frac{\pi}{2}$, takže $const = 0$. Toto zodpovedá 180° - kyvom o amplitúde 90° . Teraz budeme uvažovať kmity o ľubovoľnej amplitúde, povedzme α . Potom $\dot{\varphi} = 0$ a pre $\varphi = \alpha$ (8) nadobudne tvar

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (9)$$

Po integrovaní rovnice (9)

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{T(\alpha)}{4}, \quad (10)$$

kde $T(\alpha)$ je kmit od $-\alpha$ ku $+\alpha$ a späť. Integrál (10) možno vyjadriť pomocou eliptického integrálu $\sqrt{2}K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)$. Potom (10) možno vyjadriť takto:

$$T(\alpha) = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\sqrt{2}K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad (11)$$

Pre nie príliš veľké α , povedzme $\alpha < 90^\circ$, $\frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$, $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{1}{2}$, dostaneme v dobrej aproximácii

$$T(\alpha) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \dots\right) \quad (12)$$

Pre dostatočne malé α , pre ktoré $\sin\frac{\alpha}{2}$ možno aproximovať ako $\sin\frac{\alpha}{2} \doteq \frac{\alpha}{2}$ potom

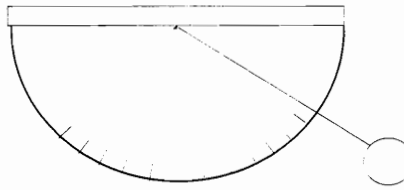
$$T(\alpha) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{64} + \dots\right) \quad (13)$$

Pre veľmi malé $\alpha \leq 2^\circ$ dostaneme pre jednoduchý harmonický pohyb známu rovnicu pre $T(\alpha)$ v tvare (6). Pre trochu väčšiu hodnotu α , napr. $\alpha = \frac{1}{2}$ rad ($\sim 30^\circ$), malá amplitúda kmitania sa dostane mimo fázu presne po 32 kmitoch.

$$T(\alpha) = T\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\sin^2(\alpha/2) \quad (14)$$

Vplyv tlmenia sa prejaví v znižovaní sa výchylky amplitúdy α s časom i zmenou uhlovej frekvencie ω a teda aj doby kmitov $T(\alpha)$.

Prístroje a pomôcky: matematické kyvadlo, elektrické stopky a dĺžkové meradlo. Matematické kyvadlo je realizované oceľovou guľôčkou zavesenou v pevnom bode na závese s meniteľnou dĺžkou. (Preto, pohyb hmotného bodu je viazaný na guľovú plochu s polomerom rovnajúcim sa dĺžke kyvadla so stredom v bode závesu. Pohyb kyvadla treba zabezpečiť tak, aby kmitalo len v zvislej rovine rovnobežnej s rovinou uhlomera (obr. 2).



Obr. 2. Kmitanie matematického kyvadla vo zvislej rovine pred uhlomerom.

Postup práce:

A. Prípád malých uhlov

V prípade malých uhlov voľte dĺžky závesu l_i ($i = 1,2$ až 10) s krokom 20 cm. Pre zvolenú dĺžku závesu l_i odmerajte dobu 25 kmitov $t_{25}(l_i)$ a zapíšte do tabuľky 1. Vypočítajte dobu kmitu $\bar{T}(l)$ matematického kyvadla pre danú dĺžku závesu l_i . Takto postupujte pre ostatné naplánované dĺžky závesu.

B. Prípád veľkých uhlov

Amplitúdu kmitov voľte postupne z intervalu $\alpha \in (5;60)$ s krokom 5° pre danú dĺžku závesu l . Odmerajte dobu 25 kmitov $t_{25}(\alpha_k)$ pre danú amplitúdu α_k a zapíšte do tabuľky 2. Vypočítajte dobu kmitu $\bar{T}(\alpha)$ matematického kyvadla pre danú amplitúdu α_k . Meranie vykonajte aspoň pre dve rôzne dĺžky l_i ($i = 1, 2$).

Spracovanie nameraných hodnôt:

A. Prípád malých uhlov

Zo smernice $k = 2\pi / \sqrt{g}$ priamky získanej grafickým znázornením nameraných hodnôt $\bar{T} = F(\sqrt{l_i})$ podľa rovnice (6), vypočítame zrýchlenie tiažovej sily $g(l)$. Alternatívne $g(l)$ možno získať aj numerickou metódou regresnej analýzy.

Tab. 1. Odčítané hodnoty: $\alpha_1/^\circ = \dots \alpha_2/^\circ = \dots \quad \alpha_3/^\circ = \dots$

l/m	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\sqrt{l} / m^{1/2}$										
$t_{25}(l)/s$										
$\bar{T}(l)/s$										

B. Prípád veľkých uhlov

Zo smernice $k = (\pi/2)\sqrt{l/g}$, alebo z úseku $2\pi\sqrt{l/g}$ priamky získanej grafickým znázornením nameraných hodnôt $\bar{T} = F(\sin^2 \alpha/2)$ podľa rovnice (13), vypočítajte zrýchlenie tiažovej sily $g(\alpha)$. Alternatívne $g(\alpha)$ možno získať aj numerickou metódou regresnej analýzy.

Tab. 2. Zvolené hodnoty: $l_1/\text{cm} =$, $l_2/\text{cm} =$

$\alpha / ^\circ$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$\sin^2(\alpha/2)$												
$t_{25}(\alpha)/\text{s}$												
$\bar{T}(\alpha)/\text{s}$												

Rozbor presnosti merania:

Dvoma spôsobmi odmerané tiažové zrýchlenie porovnajte s tabuľkovou hodnotou $g_{\text{tab}} = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$ a určte relatívnu neistotu merania

$$\delta(x) = \frac{g_{\text{tab}} - g(x)}{g_{\text{tab}}} \cdot 100\% , \text{ kde } x = l \text{ alebo } \alpha .$$

Kontrolné otázky:

1. Ktorá poloha hmotného bodu matematického kyvadla je najvhodnejšia pre meranie dôb kmitov?
2. V akých technických oblastiach našlo matematické kyvadlo uplatnenie?

3. MERANIE PRUŽINOVEJ KONŠTANTY STATICKOU METÓDOU

Cieľ práce: Pomocou pákového mechanizmu s pružinou a závažím zistíte závislosť medzi stlačením pružiny a zaťažujúcou silou. Z tejto závislosti určte pružinovú konštantu pružiny.

Úlohy: 1. Nakreslite graf závislosti sily pružiny od výchylky koncového bodu páky a z jeho smernice určte pružinovú konštantu.
2. Urobte štatistické spracovanie nameraných hodnôt.

Teoretický úvod:

V technických zariadeniach sa často používajú pružiny. Ich úlohou je premeniť potenciálnu energiu, ktorú získali pri deformovaní vonkajšou silou, na prácu. Podľa Hookovho zákona, je deformácia pružiny priamo úmerná sile, ktorá na pružinu pôsobí. Podľa zákona akcie a reakcie pružina pôsobí na druhé teleso silou

$$F = -kx, \quad (1)$$

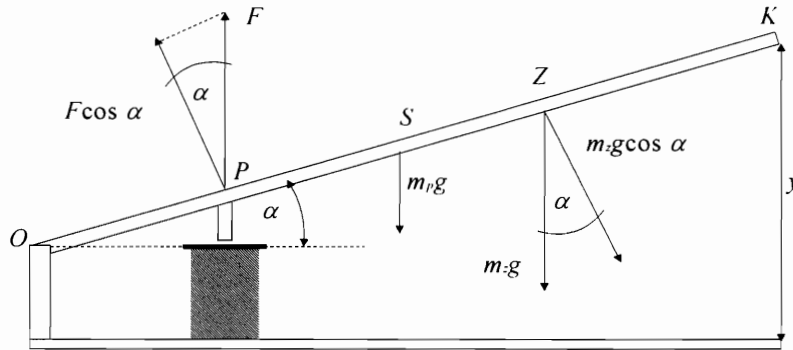
kde k je pružinová konštanta, ktorá závisí od materiálu pružiny, tvaru a rozmerov pružiny, x je výchylka konca pružiny meraná od polohy, v ktorej je pružina nedeformovaná. Znamienko mínus vyjadruje, že sila F a výchylka x majú opačnú orientáciu.

Potenciálnu energiu pružina získa prácou sily F , ktorá je potrebná na stlačenie pružiny o výchylku x . Stláčame ju silou, ktorá je v každom okamihu rovná odporu pružiny, ale opačne orientovaná, t.j.

$$E_p = \int_0^x F \cdot dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2)$$

Meranie spočíva v postupnom zaťažovaní pružiny a meraní výchylky (t.j. jej stlačenia). Je to statická metóda, pretože ani sila ani výchylka sa nemenia s časom.

Meracie zariadenie využíva pákový mechanizmus, jeho schéma je na obr. 1. Na obrázku O je os otáčania, P pôsobisko sily pružiny na páku, S je stred páky (pôsobisko tiaže páky) a Z je pôsobisko tiažovej sily závažia.



Obr. 1 – Schéma aparátury s vyznačenými silami a ramenami

Pre rovnováhu páky (tuhého telesa) musí byť súčet momentov síl voči osi O rovný nule:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{F} + (l/2) \times m_p \mathbf{g} + \mathbf{r} \times m_z \mathbf{g} = 0 \quad (3)$$

kde $\mathbf{a} = \overline{OP}$ je polohový vektor pôsobiska sily pružiny, $l/2 = \overline{OS}$ je polohový vektor pôsobiska tiaže páky a $\mathbf{r} = \overline{OZ}$ je polohový vektor pôsobiska tiaže závažia. Polohové vektory majú počiatky v osi O. m_p , m_z sú hmotnosti páky a závažia. Z rovnice (3)

$$aF \cos \alpha - \frac{l}{2} m_p g \cos \alpha - r m_z g \cos \alpha = 0 \quad , \quad (4)$$

odkiaľ veľkosť sily pružiny

$$F = \frac{g}{a} \left(\frac{l}{2} m_p + r m_z \right) \quad . \quad (5)$$

Na základe všeobecného vzťahu (1) je veľkosť sily pružiny

$$F = k \Delta y \quad , \quad (6)$$

kde Δy je stlačenie pružiny.

Stlačenie pružiny je lepšie merať nepriamo prostredníctvom výchylky Δy_K konca páky (bod K). Využijeme tu násobiaci účinok páky. Z podobnosti trojuholníkov

$$\frac{\Delta y}{\Delta y_K} = \frac{a}{l} \quad \text{odkiaľ} \quad \Delta y = \frac{a}{l} \Delta y_K \quad . \quad (7)$$

Výchylka konca páky je rozdiel medzi polohou bodu K pri nezatáženej pružine (hrot sa jemne dotýka tanierika pružiny), označíme ju y_0 , a polohou bodu K pri zatáženej pružine y_K

$$\Delta y_K = y_0 - y_K \quad . \quad (8)$$

Kombináciou vzťahov (5) až (8) dostaneme vzťah pre pružinovú konštantu

$$k = \frac{gl \left(\frac{l}{2} m_p + r m_z \right)}{a^2 (y_k - y_0)}, \quad (9)$$

alebo

$$F = k \frac{a}{l} \Delta y_k \quad (10)$$

Opis aparátúry:

Zariadenie sa skladá z podstavy, na ktorej je upevnená páka na osi. Na páke sa môže posúvať závažie známej hmotnosti, jeho poloha sa určuje podľa dĺžkového meradla na páke. Znárodnenie zariadenia je na obr. 1.

Prístroje a pomôcky: aparátúra na meranie pružinovej konštanty, dĺžkové meradlá, závažie, .

Postup práce:

1. Odmerajte rozmery závažia a vypočítajte jeho objem a potom hmotnosť zo vzťahu $m_z = \rho_{pb} V$, $\rho_{pb} = 11\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Podobne vypočítame hmotnosť páky m_p , $\rho_{dreva} = 650 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
2. Určte nulovú polohu bodu K a potom polohy bodu K pri zaťažení páky závažím.
3. Posúvajte závažie po páke a zaznamenávajte jeho polohu na páke r (aspoň 10 polôh).
4. Napíšte zoznam nameraných a vypočítaných veličín, ktoré sa nemenia: a , l , $l/2$, rozmery závažia a m_z , rozmery páky a m_p , y_0 . Prepíšte vzorec (9) tak, aby obsahoval konštantné číselné hodnoty z bodu 4.
5. Silovú konštantu určte zo smernice závislosti $F = \varphi(\Delta y_k)$, $s = k \frac{a}{l}$ podľa rovnice (10) alebo alternatívne numerickou metódou regresnej analýzy.

Spracovanie nameraných hodnôt:

1. Ostatné merané a počítané veličiny vpište do tabuľky 1.

Tab. 1.

č. mer.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y / cm										
r / cm										
F / N										
$\Delta y_K / \text{m}$										

2. Napíšte ukázkový výpočet F pre jeden vybratý stĺpec v tabuľke.

Rozbor presnosti merania:

1. Určte relatívnu neistotu merania silovej konštanty, ak bude k dispozícii materiálový list použitej pružiny.
2. Zistite, s akou neistotou merajú jednotlivé prístroje a posúďte, ktorý údaj vnáša do výsledku najväčšiu neistotu merania.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu výsledkov a zhodnotte neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Aký je vzťah medzi deformáciou pružiny a silou na ňu pôsobiacou?
2. Mohli by sme odvodiť vzťah pre pružinovú konštantu z potenciálnej energie pružiny a závažia?
3. Zvážte medze platnosti Hookovho zákona z hľadiska neporušiteľnosti pružiny.

4. OVERENIE PLATNOSTI STEINEROVEJ VETY NA ZÁKLADE STANOVENIA TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA A MOMENTU ZOTRVAČNOSTI FYZIKÁLNEHO KYVADLA

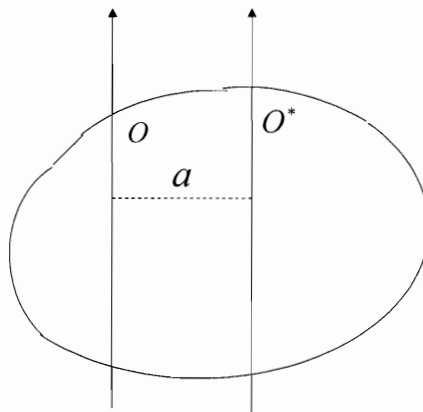
Cieľ práce: Overiť platnosť Steinerovej vety pomocou fyzikálneho kyvadla.

- Úlohy:**
1. Namerajte doby kmitov fyzikálneho kyvadla kmitajúceho vzhľadom na niekoľko osí neprechádzajúcich ťažiskom a na základe nich určite tiažové zrýchlenie a moment zotrvačnosti kyvadla
 2. Uvedené parametre fyzikálneho kyvadla zistíte graficky alebo metódou regresnej analýzy podľa rovnice (12), ktorá je rovnicou priamky.
 3. Hodnotu tiažového zrýchlenia g porovnajte s tabuľkovou hodnotou $g_{tab} = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$.

Teoretický úvod:

Zložky tenzora momentu zotrvačnosti sú dôležité fyzikálne veličiny jednak v dynamike telies, ale i v molekulovej fyzike. Určenie zložiek momentu zotrvačnosti sústavy hmotných bodov, resp. telesa v objeme ktorého je hmotnosť spojito rozložená vzhľadom na os otáčania, je často neľahkou úlohou. Výpočet momentu zotrvačnosti telies uľahčujú niektoré vety. Je to predovšetkým Steinerova veta: moment zotrvačnosti J telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom sa rovná momentu zotrvačnosti J_0 vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom s danou osou rovnobežnú, zväčšenému o ma^2 , kde m je hmotnosť telesa a a je vzájomná vzdialenosť obidvoch spomínaných osí (obr. 1)

$$J = J_0 + ma^2 \quad (1)$$



Obr. 1. Zobrazenie situácie momentu zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom J_0

Moment zotrvačnosti tuhého telesa vzhľadom na zvolenú os otáčania je definovaný integrálom

$$J = \int r^2 dm \quad (2)$$

kde r je kolmá vzdialenosť hmotného elementu dm od osi otáčania. Jednotkou momentu zotrvačnosti je kg m^2 . Z rovnice (1) vyplýva, že ak poznáme moment zotrvačnosti vzhľadom na priamku prechádzajúcu ťažiskom, potom podľa (1) možno vypočítať moment zotrvačnosti aj vzhľadom na inú ľubovoľnú priamku s prvou rovnobežnú.

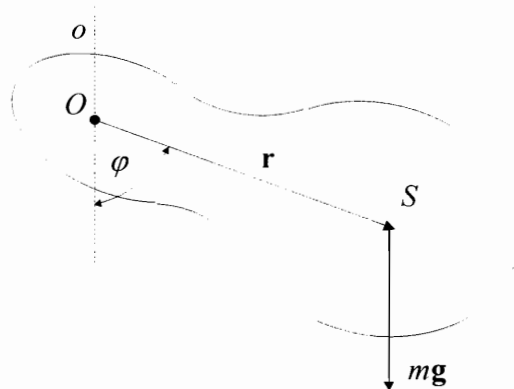
Momenty zotrvačnosti pravidelných telies vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom možno spravidla vypočítať podľa jeho definície (2). Pritom, ťažisko homogénneho pravidelného telesa je v jeho strede súmernosti. Napr. moment zotrvačnosti homogénnej štvorcovej dosky hmotnosti m o hrane a , hrúbke b vzhľadom na os kolmú na rovinu dosky ab a prechádzajúcu stredom homogénnej dosky, ktorý je v jej strede súmernosti, je $J_0 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$. Všeobecne

platí, že ťažisko homogénneho pravidelného telesa je v jeho strede súmernosti, ktorý je súčasne jeho geometrickým stredom. Inak výpočet momentov zotrvačností telies je doménou matematickej analýzy a technickej mechaniky. V prípade nepravidelných telies tento výpočet však je veľmi zložitý a na jeho určenie sa používajú iné, fyzikálne metódy. Napr. v najjednoduchšom prípade na určenie momentu zotrvačnosti sa používa metóda fyzikálneho alebo torzného kyvadla. O metóde torzného kyvadla pojednáva práca č.5. , v tejto laboratórnej práci na určenie momentu zotrvačnosti použijeme metódu fyzikálneho kyvadla.

Každé teleso upevnené tak, že sa môže otáčať bez trenia okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom S , sa nazýva fyzikálne kyvadlo. Kyvadlo je v rovnovážnej polohe vtedy, keď ťažisko sa nachádza pod osou otáčania na zvislej priamke pretínajúcej os otáčania. Po vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy (obr. 2) koná kyvadlo pôsobením tiažovej sily, ktorá naň pôsobí, otáčavý pohyb, pre ktorý, ako pre každé tuhé teleso uložené na pevnej osi, platí pohybová rovnica

$$M = J \varepsilon \quad (3)$$

kde M je moment vonkajšej sily a J moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na bod O , ktorý zvyčajne leží na osi otáčania a ε je uhlové zrýchlenie pohybu.



Obr. 2. Fyzikálne kyvadlo

Zvoľme si v smere osi otáčania jednotkový vektor ρ orientovaný pred rovinu nákresu. Vektor uhlovej výchylky kyvadla z rovnovážnej polohy je potom

$$\varphi = \varphi \rho$$

a vektor uhlového zrýchlenia

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \rho \quad (4)$$

V prípade fyzikálneho kyvadla vonkajšiu silu reprezentuje zemská tiaž. Účinok sily Zeme na pohybový stav telesa je taký, ako keby všetky sily pôsobili v ťažisku. Pre stav fyzikálneho kyvadla, znázornený na obr. 2, vyvolá výslednica tiažových síl otáčavý moment vzhľadom na os otáčania, daný rovnicou

$$\mathbf{M} = -\mathbf{r} \times m\mathbf{g} \quad (5)$$

kde m je hmotnosť telesa, \mathbf{r} polohový vektor ťažiska vzhľadom na bod O . Vzhľadom na (4) a (5), potom (3) nadobudne tvar

$$-mgr \sin \varphi = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (6)$$

Znamienko mínus súvisí s tým, že moment tiažovej sily \mathbf{M} je opačne orientovaný ako zvolený jednotkový vektor ρ . Pre malé výchylky $\sin \varphi \approx \varphi$ a po nahradení

$$\frac{mgr}{J} = \omega^2 \quad (7)$$

pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla (6) má tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \quad (8)$$

Rovnica (8) je homogénna diferenciálna rovnica druhého rádu, netlmeného harmonického pohybu. Všeobecné riešenie tejto rovnice je

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (9)$$

Ak vychýlime kyvadlo na maximálnu výchylku $\varphi(0) = \alpha$ potom meriame kmity kyvadla, riešenie (9) sa zjednoduší na tvar

$$\varphi(t) = \alpha \cos(\omega t) \quad (10)$$

Z tejto rovnice vyplýva, že kyvadlo kmitá okolo rovnovážnej polohy s uhlovou rýchlosťou ω definovanou rovnicou (7), ktorej zodpovedá doba kmitu fyzikálneho kyvadla

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr}} \quad (11)$$

Ak doba kmitu kyvadla vzhľadom na os O je $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$, potom kombináciou s (1) dostaneme rovnicu

$$T^2 a = \frac{4\pi^2 J^*}{mg} + \frac{4\pi^2}{g} a^2, \quad (12)$$

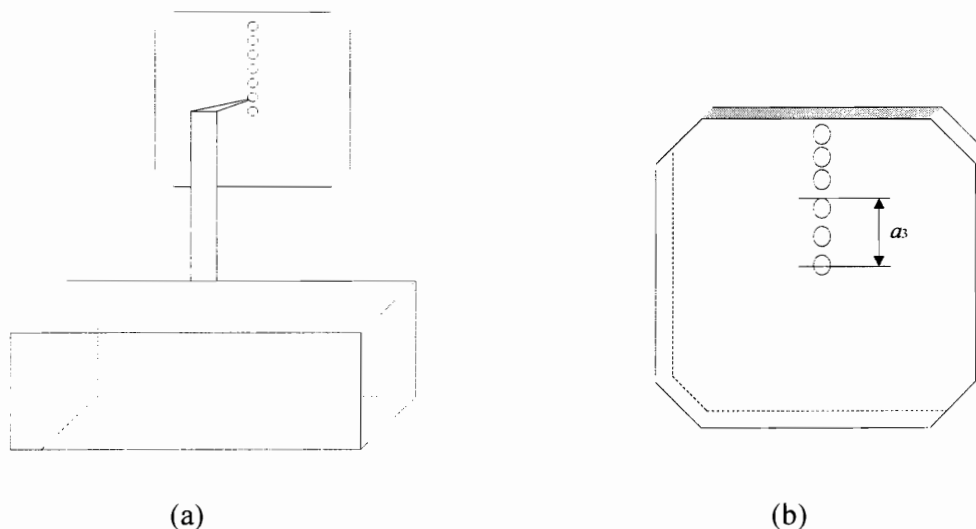
ktorá v závislosti premenných $T^2 a = F(a^2)$ je rovnicou priamky. Z veľkosti smernice tejto priamky ($4\pi^2/g$) možno určiť tiažové zrýchlenie g a z jej úseku ($4\pi^2 J_0 / mg$) moment zotrvačnosti kyvadla voči osi prechádzajúcej jeho ťažiskom, keď sme už určili g .

Prístroje a pomôcky: statív, uhlomer, oceľová doska s otvormi a zrezanými rohmi, dĺžkové meradlo, elektrické stopky a kilové váhy.

Opis aparatury:

Fyzikálne kyvadlo, na ktorom sa bude realizovať overenie Steinerovej vety, je zobrazené na obr. 3a. Skladá sa z masívneho statívu, v strede hornej hrany ktorého je upevnený držiak v tvare obráteného L . Rameno držiaka je tvorené trojbokým hranolom, ktorého horná ostrá hrana je závesným miestom fyzikálneho kyvadla (obr. 3b). Vlastné kyvadlo tvorí štvorcová doska, rohy ktorej sú symetricky urezané. Na osi idúcej stredom dosky a rovnobežnej s jej hranou je 7 malých kruhových otvorov. Otvory majú funkciu závesných bodov kyvadla. Otvory

tvoria jednorozmernú mriežku navzájom vzdialených o rovnakú vzdialenosť d , násobky ktorej nd , kde $n = 1, \dots, 7$, určujú vzdialenosť $a = nd$ osi otáčania od ťažiska dosky.



Obr. 3. Fyzikálne kyvadlo na overenie Steinerovej vety:
(a) statív s oceľovou doskou na ramene držiaka, (b) oceľová doska

Postup práce:

Zmeriame závislosť doby kmitu T fyzikálneho kyvadla, pre malé výchylky $\alpha \leq 5^\circ$, okolo $n = 1, \dots, 7$ rôznych osí otáčania. Doby kmitu sa merajú elektrickými stopkami. Merajte dobu 25-tich kmitov 3-krát a vypočítajte aritmetický priemer doby kmitu. Rovnako postupujte pre všetky a_1, \dots, a_7 osí otáčania voči osi prechádzajúcej ťažiskom $a_0 = 0$.

Nakoniec zo smernice priamkovej závislosti $\bar{T}_i^2 a_i = F(a_i^2)$ vypočítajte zrýchlenie tiažovej sily g na mieste Trnavskej Univerzity a z úseku moment zotrvačnosti J_0 oceľovej dosky voči ťažisku. Uvedené parametre možno nájsť metódou regresnej analýzy alebo jednoducho grafickou metódou hľadania parametrov priamky.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Stredné doby kmitov \bar{T}_i pre jednotlivé osi otáčania a_i zapíšeme do Tab. 1, tiež hodnoty premenných potrebných k zostrojeniu priamkovej závislosti $\bar{T}_i^2 a_i = F(a_i^2)$. Zo smernice $4\pi^2/g$ vypočítame zrýchlenie tiažovej sily g na mieste Trnavskej Univerzity a z úseku $4\pi^2 J^*/mg$ moment zotrvačnosti dosky vzhľadom na stred súmernosti. Vypočítané hodnoty zapíšete nad hlavičku Tab. 1. Alternatívne môžete numericky zhodnotiť namerané hodnoty metódou regresnej analýzy.

Tab. 1 Namerané hodnoty: $a_0 = 0$, $g / \text{m s}^{-2} =$, $J_0 / \text{kg m}^2 = \dots\dots\dots$

Poloha	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_i / m						
\bar{T}_i / s						
a_i^2 / m^2						
$T_i^2 a_i / \text{m s}^2$						

Rozbor presnosti merania:

Nameranú hodnotu tiažového zrýchlenia g porovnajte s tabuľkovou hodnotou $g_{tab} = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$. Meranie g zhodnoťte na základe relatívnej neistoty merania δ_g voči uvedenej tabuľkovej hodnote podľa vzťahu

$$\delta_g = \frac{g_{tab} - g}{g_{tab}} \cdot 100 \% .$$

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Diskutujte o výsledkoch merania a zhodnoťte ich neistoty.

Kontrolné otázky:

1. Koľko je najviac hlavných osí zotrvačností prechádzajúcich ťažiskom a navzájom na seba kolmých môže mať ľubovoľné teleso? Pre aké telesá momenty zotrvačnosti vzhľadom na uvedené osi sú rôzne a pre aké rovnaké? Demonštrujte to na príklade homogénnej gule a kužeľa.
2. Kedy je meranie doby kmitu presnejšie, ak dobu odčítame pre maximálnu výchylku ($\varphi \equiv \alpha$, $d\varphi/dt = 0$), alebo prechodom kyvadla cez rovnovážnu polohu, kde rýchlosť $d\varphi/dt$ je maximálna ?
3. Navrhните model torzného kyvadla, na ktorom by bolo možné overiť platnosť Steinerovej vety.
4. Ak by ste mali k dispozícii personálny počítač, ktorú metódu by ste zvolili na analýzu presnosti merania pri overovaní platnosti Steinerovej vety postupom uvedeným v práci?

5. MERANIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI A MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU TORZNÝM KYVADLOM

Cieľ práce: Meraním doby kmitu torzného kyvadla určiť moment zotrvačnosti telesa zložitého tvaru a modul pružnosti v šmyku materiálu, z ktorého je vyrobený záves torzného kyvadla.

- Úlohy:**
1. Namerajte moment zotrvačnosti J skúmaného telesa.
 2. Namerajte modul pružnosti v šmyku G materiálu, z ktorého je vyrobený ocelový drôt - záves torzného kyvadla.
 3. Urobte štatistické spracovanie získaných hodnôt veličín J a G .
 4. Získanú hodnotu modulu pružnosti v šmyku G porovnajte s tabuľkovou hodnotou.

Teoretický úvod:

Pohyb rotujúceho telesa opisuje pohybová rovnica

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M \quad (1)$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania, M je moment síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na os otáčania a α je uhol pootočenia. Moment zotrvačnosti telesa charakterizuje rozloženie hmotnosti v telese okolo osi otáčania. Ak r je vzdialenosť hmotného elementu dm od osi otáčania, potom moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na túto os je definovaný:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (2)$$

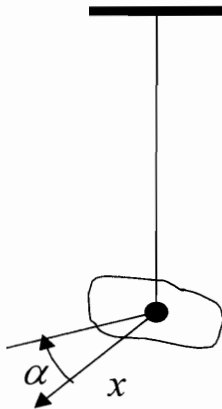
kde ρ je hustota telesa a dV je elementárny objem, pričom sa integruje cez celý objem telesa. Výpočet momentu zotrvačnosti telesa zložitého tvaru môže byť značne obtiažny. V takomto prípade možno moment zotrvačnosti telesa určiť experimentálne, napríklad meraním doby kmitu torzného kyvadla, kde skúmané teleso je zotrvačník.

Torzne kyvadlo je zotrvačník, ktorý je zavesený na drôte. Drôt je upevnený jedným koncom v zotrvačníku a druhým koncom v konzole, obr. 1. Pri kmitaní torzného kyvadla sa zotrvačník striedavo otáča v horizontálnej rovine okolo zvislej osi, ktorá je totožná s pozdĺžnou osou drôtu. Drôt hrá úlohu torznej pružiny. Moment sily M , ktorým pružina vracia zotrvačník do rovnovážnej polohy, je priamo úmerný uhlovej výchylke α

$$M = -k \alpha, \quad (3)$$

kde k je pružinová konštanta torznej pružiny. Pružinová konštanta závisí od dĺžky závesu l , od polomeru drôtu r a od modulu pružnosti v šmyku G materiálu, z ktorého je vyrobený drôt nasledovne

$$k = \frac{\pi r^4}{2l} G. \quad (4)$$



Pohybovú rovnicu zotrvačníka torzného kyvadla dostaneme, keď v rovnici (1.) moment sily M vyjadríme pomocou rovnice (3):

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -k \alpha ,$$

a po úprave

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{k}{J} \alpha = 0 \quad (5)$$

Obr. 1 Torzné kyvadlo

kde J je moment zotrvačnosti zotrvačníka. Riešením rovnice (5) je časová závislosť uhlovej výchylky α v tvare

$\alpha = A \cos \omega t$, čo zodpovedá periodickému pohybu s počiatočnou výchylkou α_0 a s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{k/J}. \quad (6)$$

Po úprave rovnice (6) s využitím vzťahu $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ možno napísať:

$$k = J \omega^2 = J \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2, \quad (7)$$

kde T je doba kmitu torzného kyvadla. Rovnica (7) umožňuje vypočítať konštantu pružnosti k , ak poznáme dobu kmitu T a moment zotrvačnosti J , alebo naopak: vypočítať moment zotrvačnosti J , ak poznáme dobu kmitu T a konštantu pružnosti k torzného kyvadla.

Metóda merania je založená na meraní doby kmitu. Najprv zistíme pružinovú konštantu závesu dĺžky l tak, že meriame dobu kmitu torzného kyvadla so zotrvačníkom so známym momentom zotrvačnosti – oceľový valec. Pružinová konštantu sa vypočíta použitím vzťahu (7). Po výmene zotrvačníka za neznáme teleso meriame znovu dobu kmitu a moment zotrvačnosti vypočítame opäť zo vzťahu (7), pričom využijeme znalosť pružinovej konštanty závesu danej dĺžky. Modul pružnosti sa meria rovnako ako pružinová konštantu a jeho hodnota sa vypočíta podľa (4).

Prístroje a pomôcky: konzola upevnená na stene, oceľový drôt, valcový zotrvačník, teleso, stopky, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, mikrometer

Opis aparatury:

Aparatúra sa skladá z konzoly, na ktorú sa zavesí sústava zložená z drôtu a zotrvačníka. Valcový zotrvačník je vyrobený z oceľovej guľatiny. V strede dĺžky valca sú prevrtnané dva navzájom kolmé priebežné otvory, do jedného je narezaný závit pre fixačnú skrutku, ktorou

sa upevní drôt prestrčený cez druhý otvor v zotrvačníku. Moment zotrvačnosti homogénneho valca vzhľadom na os, ktorá je kolmá na pozdĺžnu os valca a prechádza jeho ťažiskom je

$$J_z = m_z \left(\frac{d_z^2}{16} + \frac{l_z^2}{12} \right) \quad , \quad (8)$$

kde m_z je hmotnosť, d_z priemer a l_z dĺžka valca.

Postup práce:

1. Odmerajte posuvným meradlom rozmery valcového zotrvačníka.
2. Vypočítajte hmotnosť zotrvačníka: $m_z = \text{hustota ocele} \times \text{objem zotrvačníka}$ ($\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$) a jeho moment zotrvačnosti podľa rovnice (8).
3. Upevnite drôt v zotrvačníku a v konzole na stene. Mikrometrom odmerajte na 3 miestach priemer drôtu.
4. Odmerajte dĺžku drôteného závesu - meria sa od skrutky po skrutku.
5. Pootočte zotrvačník okolo zvislej osi asi o 45° a uvoľnite ho. Kmitanie sa musí javiť ako otáčanie zotrvačníka okolo zvislej osi (prechádzajúcej drôtom), nesmie to byť kývanie zotrvačníka na strany. Odmerajte dobu 15 kmitov T_{15} a meranie zopakujte 3 krát. Namerané a vypočítané veličiny zapíšte do Tab. 1. $T_z = T_{15} / 15$.
6. Zmeňte dĺžku závesu a opakujte body 4 a 5. Použite 5 rôznych dĺžok závesu.
7. Vymeňte valcový zotrvačník za skúmané teleso a opakujte body 4, 5 a 6. Použite rovnaké dĺžky závesu ako pri valcovom zotrvačníku. Namerané a vypočítané veličiny zapisujte do Tab. 2.
8. Pre danú dĺžku závesu l vypočítajte pružinovú konštantu k podľa rovnice (7) a z nej modul pružnosti v šmyku G podľa rovnice (4). Získané hodnoty uvedených veličín zapíšte do Tab 1.
9. Pre danú dĺžku závesu l vypočítajte moment zotrvačnosti J skúmaného telesa podľa rovnice (7). Použite pritom pružinovú konštantu k pre príslušnú dĺžku závesu z Tab. 1. Výsledky zapíšte do Tab. 2.
10. Napíšte celý výpočet pre jeden riadok Tab. 1 aj Tab. 2. Vypočítajte strednú hodnotu veličín G a J a ich štandardné odchýlky.
11. Zistite aká je závislosť medzi dobou kmitu T_z a dĺžkou závesu l . Zostrojte graf $T_z = f(l)$ a podľa tvaru krivky zistite akej analytickej funkcii graf vyhovuje. Prípíšte nájdenú funkciu k uvedenému grafu.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Meranie pružinovej konštanty k

Tab. 1. Namerané hodnoty: $d_z/m =$ $l_z/m =$ $r/m =$

l/m	T_{15}/s	T_z/s	$k/N\ m$	G/GPa

Meranie momentu zotrvačnosti J telesa z nameraných hodnôt

Tab. 2.

l /m	T_{15} /s	T_z /s	J /kg m ²

Zhodnotenie výsledkov merania:

Získanú hodnotu modulu pružnosti v šmyku ocele porovnajte s tabuľkovou hodnotou. Diskutujte možné zdroje neistôt merania.

Kontrolné otázky:

1. Ako vplýva priemer drôtu na pružinovú konštantu?
2. Môžeme touto metódou torzného kyvadla merať moment zotrvačnosti telies, ktoré nemajú rotačnú súmernosť vzhľadom na os otáčania?

6. MERANIE HUSTOTY KVAPALÍN A TUHÝCH LÁTOK

Cieľ práce: Stanoviť hustotu kvapalín a tuhých látok.

- Úlohy:**
1. Zmerajte hustotu kvapalín tromi nezávislými metódami: pyknometrickou metódou, hustomerom a ponorným telieskom.
 2. Zamerajte hustotu tuhých látok metódou ponorného telieska.
 3. Štatisticky spracujte namerané hodnoty.
 4. Ak sú to známe látky, namerané hustoty porovnajte s tabuľkovou hodnotou a zistite relatívnu neistotu merania.

Teoretický úvod:

Hustota je jedna zo základných fyzikálnych charakteristík látky vyjadrujúca hmotnosť určitej látky v jej jednotkovom objeme. Definovaná je vzťahom

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad (1)$$

alebo pre homogénnu látku

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (2)$$

tiež

$$\rho = \frac{M}{V_m}, \quad (3)$$

kde m je hmotnosť látky v objeme V , M je mólová hmotnosť a V_m mólový objem danej látky. Jednotkou hustoty je kg m^{-3} . Hustota je funkciou teploty a tlaku, pričom vplyv týchto stavových veličín na hustotu závisí od skupenského stavu látky. Najvýraznejší je pri plynách, pri ktorých zvyšovaním teploty pri stálom tlaku hustota klesá, zvyšovaním tlaku pri stálej teplote hustota stúpa. Napr. pri kvapalinách a pri tuhých látkach sa zmeny hustoty pri zmene tlaku o 10^5 Pa prejavujú až na 5. resp. 6. desatinnom mieste.

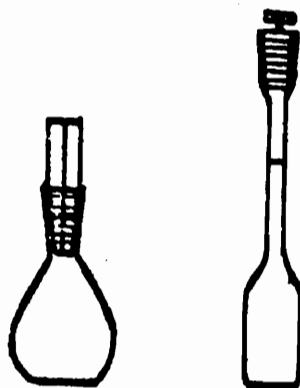
Zmena hustoty pri zvýšení teploty o 1°C , pri stálom tlaku, sa nazýva teplotný koeficient hustoty. Je funkciou teploty a jeho hodnota sa preto udáva len pre úzke teplotné intervaly. Hustota kvapalín a tuhých látok sa meria najčastejšie pyknometrami, Mohrovými – Westphalovými váhami, alebo metódou ponorného telieska. Na rýchle, nie príliš presné stanovenie hustoty kvapalín sa často používajú hustomery. Hodnoty hustôt niektorých dôležitých látok, pre štandardnú teplotu, sú uvádzané v tabuľkách a pre niektoré látky dôležité aj v závislosti od teploty, napr. vodu, vzduchu a pod.

A. MERANIE HUSTOTY KVAPALÍN

Metóda merania pyknometrom:

Opis aparatúry:

Najpresnejšou metódu merania hustoty kvapalín je pyknometrická metóda. Pyknometer je sklenená nádobka so zbrúseným hrdlom, do ktorého sa zasunie zbrúsená sklenená zátka s priechodným kapilárnym otvorom, cez ktorý po zasunutí vytečie prebytočná kvapalina (obr. 1). Presný objem pyknometra a teplota, pri ktorej údaj platí, sú na stene pyknometra vyznačené.



Obr. 1. Pyknometere

Postup práce:

Najprv si odvážite prázdny a suchý pyknometer, hmotnosť m_0 . Potom odvážime pyknometer naplnený destilovanou vodou pri teplote t dostaneme hmotnosť m_v . Vnútorný objem pyknometra $V(t)$ pri teplote t zistíme nasledujúcim postupom. Od hmotnosti pyknometra s vodou m_v , odčítate hmotnosť prázdneho pyknometra m_0 . Rozdiel $(m_v - m_0)$ je hmotnosť vody, ktorou bol pyknometer naplnený. Jej vydelením tabuľkovou hustotou vody $\rho(t, \text{H}_2\text{O})$:

$$V(t) = \frac{m_v - m_0}{\rho(t, \text{H}_2\text{O})} \quad (4)$$

je vnútorný objem pyknometra.

Pri ďalšom postupe odvážime pyknometer so skúmanou kvapalinou a dostaneme hmotnosť m_k . Z rozdielu $m_k - m_0$ dostaneme hmotnosť kvapaliny vyplňajúcu vnútorný objem pyknometra. Nakoniec hustotu skúmanej kvapaliny pri teplote t °C dostaneme z rovnice

$$\rho_k(t) = \frac{m_k - m_0}{V(t)}$$

alebo

$$\rho_k(t) = \frac{m_k - m_0}{m_v - m_0} \rho(t, \text{H}_2\text{O}) \quad (5)$$

Najčastejší zdroj chýb pri pyknomeetrickej metóde sú možné zmeny v hmotnosti „vodnej vrstvy“, ktorá sklenené nádoby obaluje z vonkajšej strany ich povrchu. Túto vrstvu najčastejšie vytvára adsorbovaná vodná para zo vzduchu. Jej hmotnosť závisí od vlhkosti vzduchu, s ktorou je pri danej teplote v rovnováhe. Namiesto vysušovania vonkajšieho povrchu steny pyknometra, je účelnejšie nasýtiť adsorbovanú vrstvu tak, že pred meraním sa pyknometer ponorí do vody. Prilipnutá vrstva kvapaliny sa starostlivo utrie filtračným papierom nepúšťajúcim chlípky celulózových vlákien a potom sa ponechá voľne na vzduchu, aby sa ustálila, adsorpčná rovnováha. Takýto postup je odôvodnený už aj preto, lebo ak sa má merať hustota pri určitej teplote odlišnej od laboratórnej teploty, je potrebné temperovať pyknometer vo vodnom kúpeli termostatu.

Pred každým meraním pyknometer i zátku dôkladne vyčistíme oxidačnou zmesou, vymyjeme niekoľkokrát destilovanou vodou a nakoniec sa vypláchne alkoholom a éterom. Potom sa vysuší vytváraním podtlaku v objeme pyknometra pohybujúc koncom kapiláry po vnútornom povrchu pyknometra pripojenou na vodnú vývevu alebo rotačnú vývevu. Koniec steny kapiláry sa opracuje plameňom, aby nedošlo k vzniku vrypov pri pohybe po stene. Ak je v laboratóriu k dispozícii bomba so stlačeným vzduchom, alebo potrubie so stlačeným vzduchom, potom pyknometer vysušíme preplachovaním silným prúdom vzduchu. Treba pritom zabrániť vzniku do pyknometra prachových častíc. Ak nie sú v laboratóriu uvedené zariadenia, potom v krajnom prípade možno použiť na sušenie pyknometra hustilku. Uvedený postup čistenia možno opatrne použiť aj pri ostatných metódach merania hustoty kvapalín a tuhých látok.

Metóda merania hustomerom

Opis aparatury:

Na rýchle meranie hustoty kvapalín sa používajú hustometry (aerometre). Hustometry sú založené na princípe plávania tuhých telies v kvapalinách. Sú to sklenené trubice, ktorých hlavnou hornou časťou je stopka, t. j. tenká rúrka po celej dĺžke s rovnakým priemerom, opatrená je stupnicou hustôt. V dolnej časti sa zužuje do valcového tvaru nádoby zaťaženej ortuťou, alebo malými olovenými guľôčkami. Vo valcovej časti býva zatavený teplomer (obr. 2). Červená ryska na teplomere udáva teplotu, pri ktorej bol hustomer ciachovaný. Správne hodnoty hustoty sa dostanú len vtedy, keď meriame pri tej istej teplote. Ak hustomer nie je opatrený teplomerom ciachovacia teplota je uvedená na stupnici hustôt.

Postup práce:

Princíp merania hustoty pomocou hustomeru sa zakladá na Archimedovom zákone. Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované silou, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny vytlačenej objemom ponorenej časti telesa. Teleso sa v kvapaline vznáša ak tiaž G telesa sa rovná Archimedovej vztlakovej sile F_A teda $G = F_A$. Keď označíme hustotu meranej kvapaliny $\rho(t)$, hmotnosť plávajúceho hustomera m a objem vytlačenej kvapaliny V , dostaneme:

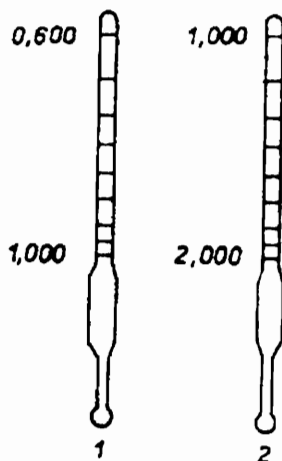
$$m = V \rho(t) ,$$

čiže

$$\rho(t) = \frac{m}{V} . \quad (6)$$

Hustota je teda nepriamo úmerná ponorenej časti objemu hustomera. Pretože merať tento objem by bolo obtiažné , pohodlne meriame hustotu podľa hĺbky ponorenia hustomera.

V kvapalinách s menšou hustotou sa hustomer ponorí hlbšie, v hustejších menej. Stupnica hustomera sa potom ciachuje pomocou kvapalín s presne známou hustotou. Aby stopka nemusela byť príliš dlhá, vyrábajú sa dva druhy hustomerov. Pre kvapaliny s menšou hustotou akú má voda - hustota vody je na nich naznačená v spodnej časti stopky a pre kvapaliny hustejšie ako voda – hustota vody je v hornej časti stopky (obr. 2)



Obr. 2 Hustomery

Z uvedených dôvodov sa zhotovujú sady hustomerov pre určitý interval hustôt kvapalín (napr. 0,600 až 0,670 g cm⁻³, 0,670 g cm⁻³ až 0,740 g cm⁻³ a pod.)

Pred meraním hustomer dobre umyjete alkoholovým roztokom mydla, opláchneme vodou a osušime čistou suchou handričkou. Hustomer držíte dvoma prstami za horný koniec stopky. Široký sklený valec dôkladne vyčistíte a prepláchnutý meranou kvapalinou, naplníte meranou kvapalinou. Kvapalinu lejete popri stene valca, aby sa nespénila. Naplnený valec vložte do kryštalizačnej misky na rovnú kovovú platňu, ktorú nastavíme pomocou kruhovej vodováhy do vodorovnej polohy. Potom pomaly ponárajte hustomer, ktorý pustíte v tom okamihu, keď cítite, že začína plávať. Hustomer nesmie klesnúť hlbšie ako 2 až 4 mm pod dielik, ktorý udáva hustotu kvapaliny. Stopka nad touto hodnotou nesmie prísť do styku s meranou kvapalinou! Po ustálení kmitania hustomeru, na dieliku stupnice, ktorý splyva s hladinou kvapaliny, odčítate hustotu kvapaliny definovanej rovnicou

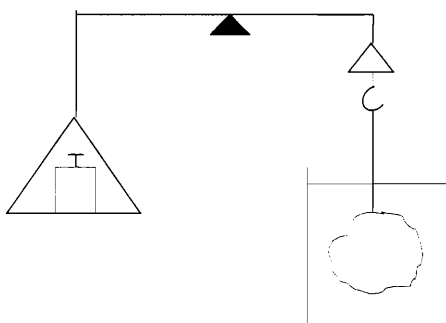
$$\rho_k(t) = \frac{m}{V(t)}. \quad (7)$$

B. MERANIE HUSTOTY TUHÝCH LÁTOK A KVAPALÍN

Archimedov zákon možno využiť na presné stanovenie hustoty tuhých látok a kvapalín pomocou ponorného telieska.

Hustota tuhých látok pomocou metódy ponorného telieska:

Ak máme namerať napr. hustotu nepravidelného telesa, určíme jeho tiaž vo vzduchu a jeho objem určíme nepriamo použitím Archimedovho zákona. Operatívne postupujeme nasledovne: Teleso zavesíme pomocou tenkého ľahkého závesu na vahadlo hydrostatických váh (obr. 3)



Obr. 3. Hydrostatické váhy

a ponoríme ho celé do kvapaliny známej hustoty $\rho_k(t)$, s ktorou materiál chemicky nereaguje a v ktorej nenapučia ani sa nerozpúšťa. Zistíme tak jeho tiaž G_k . Rozdiel tiaže telesa na vzduchu $G = mg$ a v kvapaline $G_k = m_k g$ je Archimedova vztlaková sila pôsobiaca na teleso $F_A = \rho_k(t)Vg$. Z rovnice

$$G - G_k = F_A$$

alebo

$$mg - m_k g = \rho_k(t)Vg \quad (8)$$

určíme objem telesa $V = (m - m_k) / \rho_k(t)$, ktorý dosadíme do vzťahu pre hustotu telesa $\rho = m / V$ a dostaneme

$$\rho = \frac{m}{m - m_k} \rho_k(t) \quad (9)$$

Postup práce:

Pri meraní hustoty tuhých látok metódou ponorného telieska zaveseného na ramene hydrostatických váh, najprv ho odvážime vo vzduchu hmotnosť m , potom napr. v destilovanej vode – hmotnosť – m_k . Za predpokladu, že poznáme tabuľkovú hodnotu hustoty destilovanej vody pri teplote experimentu $\rho_k(t)$, určíme objem telesa $V = (m - m_k) / \rho_k(t, \text{H}_2\text{O})$. Po vydelení hmotnosti telesa m , objemom V dostaneme hustotu telesa $\rho(t)$ pri teplote t .

Hustota kvapalín pomocou ponorného telieska

Pomocou tejto metódy pri meraní hustoty kvapalín postupujeme nasledovne. Ponorné teliesko odvážime na vzduchu pomocou váh a určíme jeho tiaž G , potom ho odvážime v kvapaline, ktorej hustotu ρ_k poznáme (napr. v destilovanej vode, pričom predpokladáme nerozpustnosť telieska v nej) čím určíme jeho tiaž G_k . Rozdiel tiaže telesa na vzduchu $G = mg$ a vo vode $G_k = m_k g$ je vztlaková sila $F_A = \rho_k(t)Vg$

$$G - G_k = F_A ,$$

alebo

$$m - m_k = \rho_k(t)V \tag{10}$$

Pri ďalšom postupe, ponorné teliesko ponoríme do kvapaliny hľadanej hustoty $\rho_{kv}(t)$ a určíme jeho tiaž G_x v nej, pri tej istej teplote ako v prípade destilovanej vody. Opäť rozdiel tiaže ponorného telieska na vzduchu $G = mg$ a v skúmanej kvapaline $G_x = m_x g$ určuje Archimedovu vztlakovú silu $F_A = \rho_{kv}(t)Vg$. Teda

$$G - G_x = \rho_{kv}(t)Vg ,$$

alebo

$$m - m_x = \rho_{kv}(t)V \tag{11}$$

Z porovnania rovníc (10) a (11) vyplýva, že

$$\frac{m - m_k}{\rho_k(t)} = \frac{m - m_x}{\rho_{kv}(t)} , \text{ alebo } \rho_{kv}(t) = \frac{m - m_x}{m - m_k} \rho_k(t) \tag{12}$$

Prístroje a pomôcky: súprava závaží, analytické váhy, pyknometer, hustomer, ponorné teliesko, odmerný valec, kryštalizačná miska, skúmaná kvapalina, destilovaná voda, filtračný papier, kruhová vodováha

Postup práce:

Pri meraní hustoty kvapalín metódou ponorného telieska postupujeme obdobne ako pri meraní hustoty tuhých látok metódou ponorného telieska. Najprv namerajte rozdiel hmotnosti tuhého telesa vo vzduchu a potom v destilovanej vode s tabelovanou hodnotou hustoty $\rho_k(t, H_2O)$: $(m - m_k) = \rho_k(t, H_2O)V$. Potom odvážite ponorné teliesko v skúmanej kvapaline, a namerajte rozdiel hmotností $(m - m_x) = \rho_{kv}(t)V$, kde $\rho_{kv}(t)$ je hľadaná hustota kvapaliny. Konečne z rovnice (12) ju možno vypočítať.

Uvedená metóda merania hustoty tuhých látok a kvapalín založená na metóde ponorného telieska poskytuje výsledky hustôt najvyššej presnosti – metrologickej presnosti.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Hustotu kvapalín ρ_k nameranú pyknometrickou metódou a hustotu kvapalín a tuhých látok ρ_k , ρ_l namerané metódou ponorného telieska vypočítajte podľa rovníc (5), (9) a (12).

Do Tab. 1 zapíšte namerané vstupné dáta potrebné k určeniu hustoty kvapalín a tuhých látok.

Tab. 1. Namerané hodnoty vstupných a nameraných veličín:

$$m_0/\text{kg} = \rho(t, H_2O)/\text{kg m}^3 = \rho_k(t)/\text{kg m}^{-3} = t/^\circ\text{C} =$$

č. m. $k = 1,2$	$m_v - m_0/\text{kg}$	$m_k - m_0/\text{kg}$	$m - m_k/\text{kg}$	$m - m_0/\text{kg}$	$m - m_k/\text{kg}$

Rozbor presnosti merania:

Namerané hodnoty hustôt známych kvapalín a tuhých látok porovnajte s tabelovanými hodnotami. Relatívnu chybu merania $\Delta\rho_r$ voči tabuľkovej hodnote určite z rovnice

$$\Delta\rho_r = \frac{\rho_{tab}(X) - \rho(X)}{\rho_{tab}(X)} \cdot 100\% , \text{ kde } X \text{ je skúmaná látka.} \quad (13)$$

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Výsledky merania hustôt budú obsahovať názov látky, ktorej hustota bola určená, hodnotu hustoty s neistotou merania a teplotu na ktorú sa hustota vzťahuje. Tiež poznámky, v ktorých vyjadrite ťažkosti s ktorými ste sa stretli pri meraní hustôt meraných vzoriek.

Diskutujte výsledky meraní a zhodnoťte ich neistoty.

Kontrolné otázky:

1. Ktoré fyzikálne parametre vplyvajú na hustotu látok? Osobitne pojednajte o plynoch, kvapalinách a tuhých látkach. Pokúste sa tieto vplyvy aj matematicky vyjadriť.
2. Z akého dôvodu je pyknometer opatrený zabrúsenou sklenenou zátkou s priechodným kapilárnym otvorom?
3. Ktorý z kapilárnych javov (elevácia, depresia) na medzifázovom rozhraní tenký ľahký záves – kvapalina, znižuje resp. zvyšuje presnosť merania hustoty tuhých látok a kvapalín metódou ponorného telieska? Svoje stanovisko fyzikálne zdôvodnite!
4. Ako možno automatizovať meranie hustoty kvapalín?
5. Navrhnite metódu merania hustoty práškových materiálov.

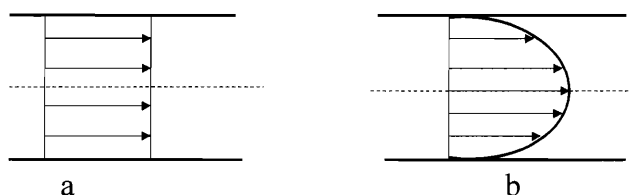
7. MERANIE VIZKOZITY KVAPALÍN

Cieľ práce: Stanoviť dynamickú viskozitu newtonovských kvapalín na základe parametrov stacionárneho pohybu telies guľového tvaru vo veľmi viskózných kvapalinách.

- Úlohy:**
1. Namerajte parametre stacionárneho pohybu guľičiek v glyceríne pri laboratórnej teplote.
 2. Z nameraných dát vypočítajte viskozitu glycerínu na základe rovnice (9) ktorá platí pre pohyb guľičky v neohraničenom prostredí a tiež empirickej rovnice(11) kde je už zohľadnený vplyv polomeru trubice konečnej veľkosti.

Teoretický úvod:

Reálne kvapaliny sa líšia od ideálnej, ktorá je nestlačiteľná tým, že majú vnútorné trenie alebo väzkosť a sú stlačiteľné. Toto trenie prekonáva kvapalina na úkor tlakovej potenciálnej energie. V prípade ideálnej kvapaliny je rýchlosť pozdĺž prierezu trubice všade rovnaká (1a), v prípade reálnej kvapaliny je rozloženie rýchlosti nerovnomerné (obr. 1b).



Obr. 1 Rozloženie rýchlosti a) v ideálnej kvapaline
b) v reálnej kvapaline

Pri pohybe kvapaliny v trubici sú rýchlosti jednotlivých častíc v rôznych miestach rôzne. Tým sa líši pohyb kvapalín od pohybu tuhých telies. Prúdenie, napr. vody si môžeme predstaviť ako pohybujúce sa vrstvy rovnobežne rozdelené v smere prúdenia. Tieto vrstvy sa pohybujú rôznou rýchlosťou, preto kľžu jedna po druhej. Pritom pôsobia navzájom na seba silou, ktorá brzdí ich pohyb. Túto silu ako sme už uviedli, nazývame vnútorným trením kvapaliny. Rôzne kvapaliny majú rôzne veľké vnútorné trenie. Prúdenie kvapaliny v určitom bode charakterizuje rýchlosť a tlak. Prúdenie kvapaliny je ustálené čiže stacionárne, keď rýchlosť prúdenia kvapaliny nezávisí od času. Pohyb kvapaliny sa popisuje pomocou prúdnic. Keď prúdnic sú navzájom rovnobežné, takéto prúdenie sa nazýva laminárne. Pri laminárnom prúdení vzájomná poloha prúdnic kvapaliny sa s časom nemení. Keď rýchlosť je dostatočne veľká, vnútorné trenie spôsobí, že sa vzájomné rozloženie častíc prúdiacej kvapaliny mení a vzniká vírové, čiže turbulentné prúdenie. V dôsledku trenia rýchlejšia vrstva kvapaliny zrýchľuje vrstvu pomalšiu a naopak, pomalšia sa pohybujúca vrstva pôsobí na rýchlejšiu brzdiacou silou. Podľa skúsenosti, medzi dvoma susednými vrstvami v mieste x od stredu potrubia účinkuje dotyčnicové napätie τ , t. j. sila účinkujúca na jednotkovú dĺžku stykovej plochy. Dotyčnicové napätie τ je priamo úmerné zápornému gradientu rýchlosti $-\frac{dv}{dx}$, t. j. rozdielu rýchlostí dvoch vrstiev vzdialených navzájom o jednotkovú dĺžku a vyjadruje ho Newtonova rovnica

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dx} \quad (1)$$

kde η je konštanta úmernosti charakterizujúca dynamické vlastnosti kvapaliny, nazýva sa dynamická viskozita. Všetky tekutiny, ktorých správanie popisuje rovnica (1), sú newtonovské kvapaliny. Kvapaliny, ktorých vnútorné trenie nepopisuje uvedená rovnica sú nenewtonovské. Z rovnice (1) vyplýva, že dynamická viskozita η je dotyčnicová sila prepočítaná na jednotkovú dĺžku stykovej plochy kvapaliny je úmerná gradientu rýchlosti. Jednotkou dynamickej viskozity v SI sústave je Pa.s, alebo menšia jednotka mPa.s. Pre kvapaliny má hodnotu $10^{-3} - 10^{-4}$ Pa.s. V praxi sa zvykne používať tiež kinematická viskozita μ , ktorá je definovaná pomerom

$$\mu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (2)$$

kde ρ je hustota kvapaliny pri danej teplote, ktorej zodpovedá aj viskozita η . Jednotkou kinematickej viskozity je $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Viskozitu kvapalín možno namerať pomocou telieskových (guličkových), kapilárnych alebo rotačných viskozimetrov.

Na meranie viskozity kvapalín použijeme Stokesovu metódu, ktorá sa zakladá na tom, že v sklenenej vertikálnej trubici, naplnenej kvapalinou odmeriame dobu, za ktorú guľička (kovová, sklenená) rovnomerne a priamočiario maximálnou rýchlosťou prebehne dráhu vyznačenú dvoma ryskami na trubici.

Uvažujme guľičku hmotnosti m , objemu V , polomeru r a hustoty $\rho = m/V$, ktorá voľne padá v pokojovej kvapaline hustoty $\rho_k < \rho$. Pri páde na guľičku pôsobia tri sily: tiažová sila $G = mg = (4/3)\pi r^3 \rho g$, Archimedova vztlaková sila $F_A = V\rho_k g = (4/3)\pi r^3 \rho_k g$ a Stokesova odporová sila prostredia o viskozite η a rýchlosti guľičky v je

$$F_s = 6\pi\eta r v \quad (3)$$

Výslednica týchto troch síl je

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_s \quad (4)$$

Sila \mathbf{F} udeľuje guľičke zrýchlenie \mathbf{a} možno ju vyjadriť v skalárnom tvare

$$ma = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g - 6\pi\eta r v \quad (5)$$

Guľička koná spočiatku zrýchlený pohyb, jej rýchlosť sa postupne zväčšuje, tým sa však súčasne zväčšuje aj Stokesova sila F_s . Akonáhle však rýchlosť guľičky nadobudne takú hodnotu, že Stokesova sila

$$\mathbf{F}_s = -(\mathbf{G} + \mathbf{F}_A) \quad (6)$$

alebo

$$6\pi\eta r v_o = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g \quad (7)$$

potom zrýchlenie guľičky $a = 0$. Od tohoto okamihu bude mať guľička konštantnú, maximálnu rýchlosť v_o a bude sa pohybovať len zotrvačnosťou rovnomerne priamočiario.

Z rovnice (7) pre viskozitu kvapaliny vyplýva

$$\eta = \frac{2 r^2}{9 v_0} (\rho - \rho_k) \quad (8)$$

Keď s je dĺžka dráhy, ktorú prebehne guľička za dobu t , potom $v_0 = s/t$ a

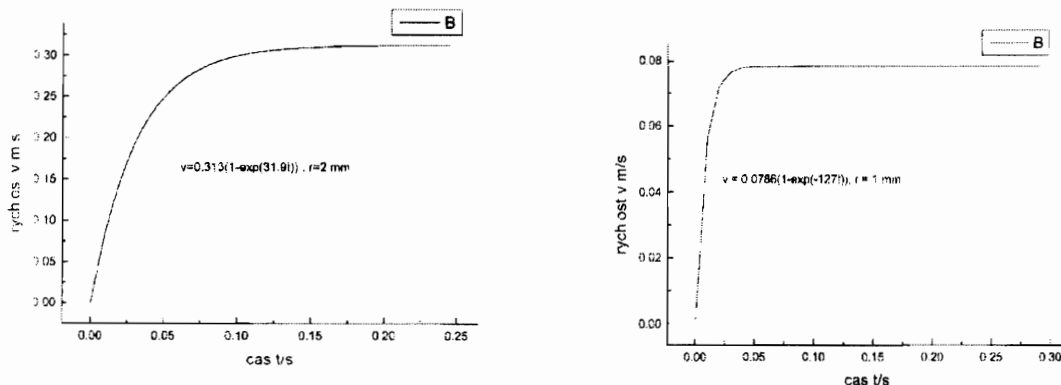
$$\eta = \frac{2 r^2 g}{9 s} (\rho - \rho_k) t, \quad (9)$$

alebo

$$\eta = K (\rho - \rho_k) t, \quad (10)$$

kde $K = \frac{2r^2 g}{9s}$ je tzv. guľičková konštanta. Túto vypočítame z uvedených veličín.

Z riešenia diferenciálnej rovnice (5) za určitých zjednodušených predpokladov vyplýva, že relatívne po veľmi krátkom čase, ktorý závisí od polomeru guľičky, hustoty materiálu, z ktorého je zhotovená guľička a viskozity kvapaliny dôjde k stacionárnemu pohybu guľičky (obr. 2)



Obr. 2. Rýchlosť pohybu guľičky v oleji o viskozite $\eta = 0,22 \text{ Pa s}$, pre $r = 2 \text{ mm}$, $v/\text{m s}^{-1} = 0,313 (1 - \exp(-31,9.t))$ a pre $r = 1 \text{ mm}$, $v/\text{m s}^{-1} = 0,786 (1 - \exp(-127.t))$

Treba uviesť, že Stokesova rovnica platí presne len pre neohraničené prostredia, t. j. v tak veľkom objeme kvapaliny, aby guľôčka bola dostatočne vzdialená od stien trubice. Ak meranie robíme v trubici s polomerom R a rýchlosť guľičky zisťujeme z doby jej pohybu medzi dvoma ryskami na trubici, ktorých vzdialenosť je s , potom na výpočet viskozity kvapaliny treba použiť empirický vzorec

$$\eta = \frac{g(m - V\rho_k)}{6\pi r \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right) s} t, \quad (11)$$

kde m je hmotnosť guľičky a V jej objem.

Prístroje a pomôcky: posuvné (kontaktné) meradlo, dĺžkové meradlo, mikrometer, elektrické stopky, glycerínom naplnená sklenená trubica vertikálne zavesená na stene, guľičky, odmerný valec, jednomiskové technické váhy, hustomer, teplomer.

Opis aparátúry:

Meranie pohybu guľičky sa robí v sklenenej trubici s jedným koncom zataveným vo vertikálnej polohe zavesenej na stene. Dĺžka trubice je väčšia ako 1 m, vzdialenosť medzi značkami väčšia ako 50 cm a vnútorný polomer trubice nie je väčší ako 5 cm.

Postup práce:

Mikrometrom odmeriame priemer d 10 guľičiek, posuvným (kontaktným meradlom) určíme vnútorný polomer trubice R a dĺžkovým meradlom vzdialenosť s medzi značkami. Všetky uvedené veličiny zapíšeme nad hlavičku Tab. 1.

Tab. 1 . Namerané hodnoty: $\bar{r}/m =$, $\bar{V}/m^3 =$, $\bar{m}/kg =$, $R/m =$, $s/m =$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_k/m										

Určíme jedným vážením hmotnosť všetkých 10 guľičiek, ktorých už poznáme priemery (Tab. 1). Guľičky opatrne, bez udelenia hybnosti, vpustíme tesne nad povrchom glycerínu do trubice a zistíme dobu pohybu t_k guľičky medzi pevnými značkami. Elektrické stopky spustíme pri prechode guľičky hornou značkou a zastavíme v okamihu prechodu guľičky spodnou značkou. Takto určený čas zaznamenáme do Tab. 2. Odmeriame teplotu a hustotu glycerínu, ktorým je naplnená trubica, stanovíme hustomerom v odmernom valci alebo metódou pyknometra. Po ukončení merania hustoty glycerín z valca nalejeme do zásobnej fľaše. Z nameraných hodnôt priemerov desiatich guľičiek d_k v Tab. 1 sa vypočíta stredná hodnota polomeru \bar{r} jednej guľôčky. Zo známej hodnoty \bar{r} vypočíta sa stredný objem \bar{V} a tiež stredná hmotnosť \bar{m} jednej guľičky. Všetky tieto parametre reprezentatívnej guľičky sa zapíšu nad hlavičku Tab. 1. Do Tab. 1 zapíšeme tiež nameranú vzdialenosť medzi značkami a vnútorný polomer trubice R . Z hodnôt dôb t_k uvedených v Tab. 2 sa vypočíta stredný čas pohybu guľičky medzi značkami a zaznamená sa nad hlavičku Tab. 2. Na základe uvedených dát sa vypočíta dynamická viskozita glycerínu a) podľa teoretickej rovnice (9) a za b) podľa empirickej rovnice (11).

Spracovanie nameraných hodnôt:

Na základe nameraných hodnôt uvedených veličín sa vypočítané hodnoty viskozity pre danú teplotu zaznamenajú nad hlavičku Tab. 2.

Tab. 2. Namerané hodnoty: $\bar{t}/s =$, $\rho(\text{glycerín})/kg\ m^{-3} =$, $t/^\circ C =$, $\eta_1/Pa\ s =$, $\eta_2/Pa\ s =$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_k/s										

Rozbor presnosti merania:

Namerané hodnoty dynamickej viskozity η_1 , η_2 olejov pri teplote $t/^\circ\text{C}$ porovnajte s tabuľkovou hodnotou η_{tab} (bude zadaná na cvičení) a zhodnoťte meranie na základe ich relatívnych neistôt. Relatívnu neistotu merania $\delta_i(\eta)$, voči tabuľkovej hodnote $\eta_{tab}/\text{Pa s}$,

vypočítajte z rovnice $\delta_i(\eta) = \frac{\eta_{tab} - \eta(i)}{\eta_{tab}} \cdot 100\%$, kde $i = 1, 2$, $t/^\circ\text{C} =$.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Diskutujte výsledky meraní a zhodnoťte ich z hľadiska neistoty merania.

Kontrolné otázky:

1. Ktoré fyzikálne veličiny vplývajú na presnosť určenia viskozity kvapalín metódou stacionárneho pohybu guľičky v sklenenej trubici končených rozmerov naplnenej kvapalinou? Ktorá z nich má najväčšiu chybu?
2. Ako vplýva teplota na viskozitu?
3. Navrhňte automatický záznam merania dôb pohybu guľičky. Načrtnite schému rotačného viskozimetra a pokúste sa opísať fyzikálny princíp jeho činnosti.

Návody na laboratórne cvičenia z termiky a molekulovej fyziky

8. MERANIE TEPLOTNEJ ROZŤAŽNOSTI TUHÝCH LÁTOK

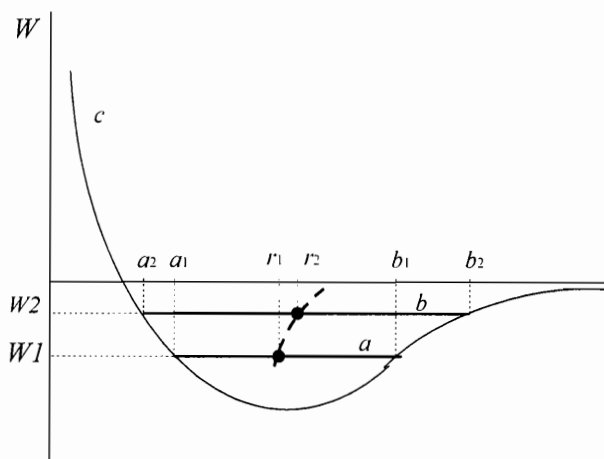
Cieľ práce: Určiť koeficient lineárnej teplotnej rozťažnosti kovovej tyče metódou merania absolútneho predĺženia vzorky.

- Úlohy:**
1. Odmerajte predĺženie vzorky Δl v závislosti od teploty. Meranie vykonajte pre jednu z troch vzoriek tyčí (mosadzná, oceľová, hliníková).
 2. Pomocou metódy najmenších štvorcov, nájdite lineárnou regresiou z nameraných údajov rovnicu priamky a koeficient teplotnej rozťažnosti danej meranej vzorky.

Teoretický úvod:

Pri zvyšovaní teploty telies pozorujeme zväčšovanie ich rozmerov. Tento jav nazývame teplotná rozťažnosť. Tepelný pohyb častíc v tuhej látke je obmedzený na malé kmity okolo rovnovážnych polôh. Vzďialenosť medzi rovnovážnymi polohami dvoch susedných častíc je vlastne stredná medzičasticová vzďialenosť v tuhej látke. Na obr. 1. je znázornený priebeh potenciálnej energie v tvare Morseho potenciálu v tuhej látke v závislosti od medzičasticovej vzďialenosti r .

Ak pri teplote T_1 má častica energiu tepelného pohybu W_1 , potom kmitá v oblasti medzi polohami a_1 a b_1 . Amplitúda kmitov zodpovedá veľkosti tejto oblasti a stredná medzičasticová vzďialenosť v tuhej látke je r_1 . Pri vyššej teplote T_2 má častica energiu tepelného pohybu W_2 a kmitá v oblasti medzi a_2 a b_2 . Pritom sa zväčšila amplitúda kmitov častice a väčšia je aj stredná medzičasticová vzďialenosť r_2 v tuhej látke. Nárast strednej medzičasticovej vzďialenosti so zvyšovaním teploty sa prejavuje zväčšovaním rozmerov telesa – teplotnou rozťažnosťou.



Obr. 1. Potenciálna energia častice v závislosti od medzičasticovej vzďialenosti r .

Kvantitatívne teplotnú rozťažnosť tuhého telesa charakterizuje koeficient lineárnej teplotnej rozťažnosti, ktorý je definovaný vzťahom

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta T} \quad (1)$$

a rovná sa relatívnej zmene dĺžky $\Delta l/l$ pri zmene teploty o 1 K, t.j. $\Delta T = 1$ K.

Na základe vzťahu (1) môžeme vyjadriť dĺžku telesa l_T pri teplote T nasledovne

$$l_T = l_0(1 + \alpha\Delta T), \text{ pričom } \Delta T = T - T_0$$

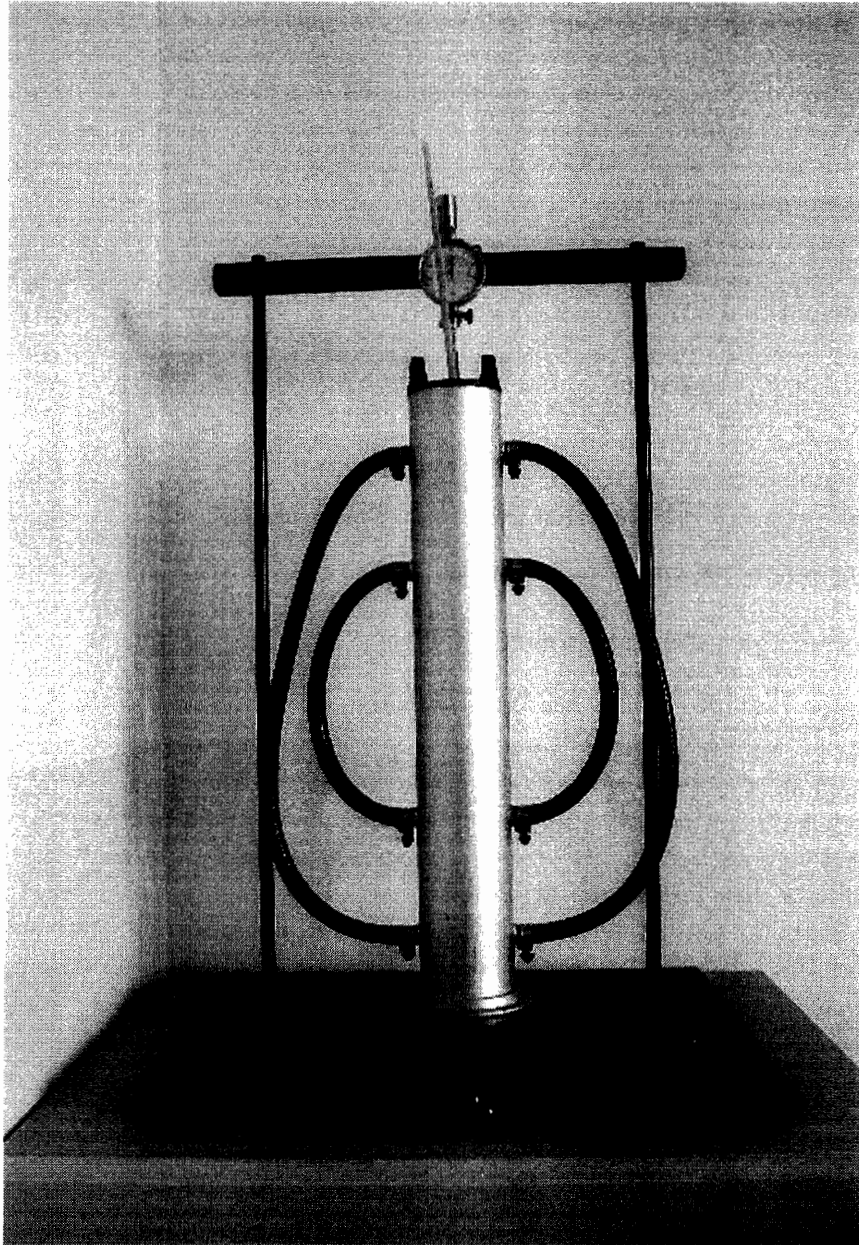
kde l_0 je počiatočná dĺžka vzorky pri teplote T_0 .

Koeficienty lineárnej teplotnej rozťažnosti tuhých látok sú obyčajne veľmi malé, nadobúdajú hodnoty 10^{-5} až 10^{-6} K⁻¹. Ich znalosť má veľký význam pri konštrukcii zariadení, ktoré pracujú v širokom teplotnom rozsahu tam, kde sa spájajú rôzne materiály. Prístroj na meranie koeficientov lineárnej teplotnej rozťažnosti sa nazýva dilatometer. V praxi sa používajú dilatometre rôznej konštrukcie.

Prístroje a pomôcky: dilatometer s lineárnym výchylkomerom a teplomerom, dĺžkové meradlo,

Opis aparatury:

Dilatometer, ktorý sa používa v tomto laboratórnom cvičení, je založený na princípe merania absolútneho predĺženia vzorky. Vzorka je kovová tyč, ktorá je uložená vo vodnom kúpeli v zvislej mosadznej trubke. Voda v mosadznej trubke sa ohrieva dvomi vyhrievacími telesami prechodom elektrického prúdu, čím dochádza aj k ohrievaniu meranej vzorky tyče. Jeden jej koniec je upevnený o podstavec rámu a druhý koniec sa dotýka pohyblivej časti hrotu výchylkomera s citlivosťou 0,01mm/dielik. Výchylkomer je uchytený a spojený s mikrometrickou skrútkou, takže sa dá veľmi presne nastaviť nulová poloha výchylkomera. Pohľad na dilatometer je na obr. 2. V hornej časti sú pripojovacie zdierky na dve vyhrievacie telesá, ktoré sú uložené v dolnej časti mosadznej trubice. Jeden koniec meranej vzorky tyče je uložený v osi mosadznej trubice a na dne zapadá do presne vyhlbeného otvoru, druhý koniec prechádza cez stred veka mosadznej trubice a dotýka sa pohyblivého hrotu výchylkomera. Vyhrievací prúd sa odoberá z regulovateľného stabilizovaného zdroja 24V/4A. Teplotu vody meráme ortuťovým teplomerom, ktorý je ponorený do vody a vyčnieva pred výchylkomerom. Aby sme sa čo najviac priblížili k dokonalému rovnovážnemu stavu (Edelmanov dilatometer, kde vo vodorovnej polohe meraná vzorka v olejovom kúpeli má po celej dĺžke konštantnú teplotu), vidieť na zvislej mosadznej trubici z oboch strán po dve spojovacie hadice v rôznych výškach za účelom vyrovnania teploty vody po celej výške.



Obr. 2. Dilatometer s výchylkomerom a teplomerom.

Postup práce:

1. Pri teplote v laboratóriu vynulujte výchylkomer pomocou mikrometrickej skrutky.
2. Odmerajte dĺžku vzorky l_0 pri laboratórnej teplote.
3. Postupne s krokom $5\text{ }^\circ\text{C}$ zapíšte teplotu vody v mosadznom valci a ku každej teplote zapíšte príslušné predĺženie Δl vzorky tyče do tabuľky.

Pozor: Počas merania sa nedotýkajte mosadzného valca, najmä pri vyšších teplotách nad $50\text{ }^\circ\text{C}$, pretože je horúci! Kovové časti aparatury sú pod elektrickým napätím, len do 30 V !

4. Zostrojte graf závislosti relatívneho predĺženia $\Delta l/l_0$ od teploty T a graficky určte koeficient lineárnej teplotnej rozťažnosti α , ako smernicu priamky preloženej cez body grafu. Ak graf závislosti nie je lineárny, rozdeľte ho na lineárne úseky a metódou najmenších štvorcov určte koeficient lineárnej teplotnej rozťažnosti α pre každý úsek.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Tabuľka 1. Namerané hodnoty: $l_0/\text{mm} =$, $\alpha/\text{K}^{-1} =$

$T / ^\circ\text{C}$	$\Delta l/\text{mm}$	$\Delta l/l_0$

Zhodnotenie výsledkov merania:

Diskutujte o možných zdrojoch neistôt merania.

Kontrolné otázky:

1. Ktorá veličina kvantitatívne opisuje teplotnú rozťažnosť?
2. V akých jednotkách sa udáva koeficient lineárnej teplotnej rozťažnosti?
3. Ovplyvnia dĺžkové jednotky, v ktorých sa meria predĺženie a dĺžka vzorky, hodnotu koeficientu lineárnej teplotnej rozťažnosti?
4. Vypočítajte hodnotu dĺžkového koeficientu teplotnej rozťažnosti a porovnaním s tabuľkovými hodnotami sa pokúste identifikovať materiál, z ktorého je vyrobená meraná vzorka tyče.

9. URČENIE HMOTNOSTNEJ TEPELNEJ KAPACITY TUHÝCH LÁTOK A KVAPALÍN

Cieľ práce: Určiť hmotnostnú tepelnú kapacitu neznámej tuhej látky a neznámej kvapaliny

- Úlohy:**
1. Určte hmotnostnú tepelnú kapacitu neznámej tuhej látky a neznámej kvapaliny
 2. Získať skúsenosti a naučiť sa pracovať s kalorimetrom.

Teoretický úvod:

Na rovnaké zvýšenie teploty rôznych látok s rovnakými hmotnosťami sa spotrebuje rôzne množstvo tepla. Teplo, ktoré je potrebné na zvýšenie teploty 1 kg látky o jeden stupeň Celzia, sa nazýva hmotnostná tepelná kapacita látky. Meria sa v Jouloch na kg a Kelvin ($\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ resp. $\text{Jkg}^{-1}\text{°C}^{-1}$). Tepelná kapacita látky závisí od zmien, ktorým je látka vystavená pri zohrievaní. Teplo, ktorá sa spotrebuje pri zohrievaní látky za stáleho tlaku, je vždy väčšie ako teplo, ktoré sa spotrebuje na rovnaké zohriatie tej istej látky pri jej stálom objeme. Hodnoty oboch tepelných kapacít sa najviac od seba líšia pre plyny. Pre pevné látky aj kvapaliny je rozdiel ich hodnôt veľmi malý a preto sa v praxi nerozlišujú. Tepelná kapacita závisí aj od teploty látky. Pri pevných látkach sa znižuje s klesajúcou teplotou.

Hmotnostnú tepelnú kapacitu značíme obvykle c a jej jednotkou v sústave SI je $[\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}]$.

Množstvo tepla, ktoré je potrebné na zohriatie ľubovoľného telesa hmotnosti m o jeden stupeň Celzia, nazývame jeho tepelnou kapacitou a značíme ju C . Môžeme potom písať:

$$C = m \cdot c \quad (1)$$

Tepelnú kapacitu telies meriame v Jouloch na Kelvin JK^{-1} .

Množstvo tepla Q , ktoré treba dodať telesu, aby sa jeho teplota t_0 zvýšila na t je

$$Q = \int_{t_0}^t m \cdot c \cdot dt = \int_{t_0}^t C \cdot dt$$

Ak sa teploty t_0 a t od seba nevelmi líšia, možno hmotnostnú tepelnú kapacitu aj tepelnú kapacitu pokladať za nezávislé od teploty a možno písať:

$$Q = mc(t - t_0) = C(t - t_0)$$

Teplo Q' , ktoré odovzdá látka pri znížení teploty t na teplotu t_0 , je rovnako veľké ako teplo, ktoré sa spotrebuje na zvýšenie z teploty t_0 na teplotu t ($Q = Q'$):

$$Q' = mc(t - t_0) = C(t - t_0)$$

Ak sústava telies je navonok tepelne izolovaná, takže výmena tepla môže nastať len medzi nimi a nie s ich okolím, potom sa ich teploty po určitom čase vyrovnajú. Tento jav sa vysvetľuje prechodom tepla z telies teplejších na chladnejšie, pričom celkové množstvo tepla sústavy telies sa nemení (zákon zachovania energie). Množstvo tepla prijatého chladnejším telesom sa rovná množstvu tepla odovzdaného teplejším telesom.

$$\sum_{i=1}^{I=II} Q_i = \sum_{j=1}^{J=III} Q_j$$

Vyrovňavanie teploty telies za uvedených podmienok umožňuje merať množstvo tepla pomocou merania začiatkovej a výslednej teploty telies. Prístroje používané na meranie množstva tepla sa nazývajú kalorimetre. Na určenie hmotnostnej tepelnej kapacity tuhých látok sa obvykle používa kalorimeter. Vyšetrovanému telesu je dodávané (resp. odoberané) teplo v kalorimetri inou látkou známej hmotnostnej tepelnej kapacity napr. destilovanou vodou. Základnou časťou kalorimetra je kalorimetrická nádoba spravidla Dewarova nádoba (sklenená alebo kovová termoska), medzi stenami ktorej je vákuum.

Teplo, ktoré je potrebné na zvýšenie teploty kalorimetra o $1\text{ }^{\circ}\text{C}$, nazývame vodnou hodnotou kalorimetra, alebo tepelnou kapacitou kalorimetra. Rovná sa súčtu tepelných kapacít jednotlivých častí kalorimetra. Ak hmotnosti jednotlivých častí kalorimetra sú m_1, m_2, \dots a ich hmotnostné tepelné kapacity c_1, c_2, \dots . C_k tepelná kapacita kalorimetra je

$$C_k = m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots \quad (2)$$

Teplo Q , ktoré kalorimeter prijme pri zvýšení teploty z t_0 na teplotu t je:

$$Q = C_k (t - t_0)$$

Ak pôvodná teplota kalorimetra t_0 je menšia ako začiatková teplota t_1 vyšetrovaného telesa, ktorého merné skupenské teplo určíme a ak výsledná teplota je t , potom kalorimeter prijal od telesa teplo: $Q = C_k (t - t_0)$ a teleso odovzdalo kalorimetru teplo $Q' = mc(t_1 - t)$. Podľa zákona o zachovaní energie sa tieto teploty navzájom rovnajú:

$$C_k (t - t_0) m = mc(t_1 - t) \quad (3)$$

Zo vzťahu (3) pre hmotnostnú tepelnú kapacitu látky vyplýva

$$c = \frac{C_k}{m} \cdot \frac{t - t_0}{t_1 - t} \quad (4)$$

Pre určovanie hmotnostnej tepelnej kapacity kvapaliny sa používa elektrický kalorimeter. Teplo do kalorimetra je dodávané odporovou špirálou vyhrievacieho telesa, ktorá je ponorená do vyšetrovanej kvapaliny v kalorimetri. Z nameranej hodnoty elektrického prúdu I a napätia U na špirále a doby T trvania zohrievania, môžeme vypočítať množstvo tepla Q , dodané kalorimetru a kvapaline zo vzťahu $Q = UIT$.

Hmotnostnú tepelnú kapacitu vyšetrovanej kvapaliny o hmotnosti m potom určíme zo vzťahu

$$c = \frac{UIT}{m(t_2 - t_1)} - \frac{C_k}{m} \quad (5)$$

kde t_1 je teplota kalorimetra a meranej kvapaliny pred dodaním tepla výhrevným telesom, t_2 je ich teplota po dodaní tepla

Prístroje a pomôcky: Kalorimeter, vyhrievacie teleso, vzorky meraného telesa, vzorka meranej kvapaliny, stopky, zdroj jednosmerného prúdu.

Postup práce:

1. Určenie tepelnej kapacity kalorimetra (vodnej hodnoty kalorimetra) nasledovným spôsobom: Do kalorimetra dajte destilovanú vodu o hmotnosti m_1 a ponechajte ju v ňom dostatočne dlhú dobu, aby sa teplota všetkých častí kalorimetra aj s pridanou vodou ustálila na teplote t_1 . Potom pridáme ďalšie množstvo vody o hmotnosti m_2 a teploty t_2 . Po zmiešaní oboch množstiev vody v kalorimetri po dostatočnom čase ustáli sa teplota vody na hodnotu, ktorú označíme t . Hmotnostnú tepelnú kapacitu vody označme c_v . Potom z kalorimetrickej rovnice pre tepelnú kapacitu (vodnú hodnotu) kalorimetra dostaneme

$$C_k = \frac{m_2(t_2 - t)c_v - m_1(t - t_1)c_v}{t - t_1} \quad (6)$$

2. Hmotnosť telesa m s neznámou hmotnostnou tepelnou kapacitou c určíme vážením. Vzorka vyšetřovaného telesa sa zohreje v špeciálnej piecke na $90\text{ }^\circ\text{C}$. Teleso nezohrievame nad $100\text{ }^\circ\text{C}$, lebo po vložení do kalorimetra vznikom vodných pár by sa značne mohla zhoršiť presnosť merania. Vzhľadom nato, že vzorka telesa je kovová stačí ju ohrievať v špeciálnej piecke 5 minút. Teplotu vodnej náplne kalorimetra odčítame tesne pred vložením skúmanej vzorky telesa. Hmotnostnú tepelnú kapacitu vyšetřovanej vzorky telesa určíme zo vzťahu (4).

3. Hmotnostnú tepelnú kapacitu skúmanej kvapaliny určíme zo vzťahu (5), ale pri zohrievaní dbáme nato, aby výhrevná špirála bola celá ponorená v kvapaline a aby nedochádzalo počas ohrievania k varu. Dbáme nato aby pretekajúci meraný prúd I a napätie U na špirále boli konštantné. Čas ohrievania T zmeriame stopkami.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Namerané hodnoty potrebné do vzťahov (4) a (5) zapíšte do tabuľky a vykonajte príslušné výpočty aj výpočtom neistoty merania.

Rozbor presnosti merania:

Štandardnú odchýlku σ_c určíme podľa známeho vzťahu (1. 7. 18), ako pri nepriamom meraní.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnoťte chyby meraní a vypočítajte neistotu merania.

Kontrolné otázky:

1. Čo je to hmotnostná tepelná kapacita, mólová kapacita, tepelná kapacita telesa.
2. Stručne pojednajte o šírení tepla vedením, prúdením a žiarením.
3. Vysvetlite dobré tepelnoizolačné vlastnosti vákua.

4. Zamerajte sa na maximálne zníženie systematických chýb meracej metódy a prístrojov. Aspoň niektoré možné systematické chyby zdôvodnite. Zamerajte sa aj na maximálne zníženie neistoty merania.

10. OVERENIE PLATNOSTI BOYLEOVHO - MARIOTTEOVHO ZÁKONA

Ciel' práce: Overiť platnosť Boyleovho-Mariotteovho zákona, podľa ktorého pri stálej teplote a konštantnom látkovom množstve plynu súčin jeho tlaku a objemu je konštantný t. j. $pV = \text{const}$.

- Úlohy:**
1. Overte platnosť Boyleovho - Mariotteovho zákona pre vzduch uzavretý v kapiláre rovnakého prierezu a dĺžke l , určením konštanty $pl = K$, pre laboratórnu teplotu, aspoň pre desať rôznych polôh Meldeho trubice.
 2. Z dvoch rôznych polôh Meldeho trubice vypočítajte barometrický tlak a jeho hodnotu zapíšete nad hlavičku tabuľky.
 3. Presnosť nameranej konštanty K zhodnotíte veľkosťou štandardnej odchýlky merania.

Teoretický úvod:

Ideálny plyn je najjednoduchší termodynamický systém vytvorený za účelom jednoduchého matematického opisu stavových vlastností reálnych plynov. Ak je objem molekúl plynu zanedbateľný vzhľadom na objem, v ktorom sa molekuly pohybujú translačným pohybom, ale pritom nekonajú rotačný ani vibračný pohyb ak medzi molekulami nepôsobia medzimolekulové príťažlivé sily ani odpudivé sily a molekuly nepodliehajú vplyvu vonkajších síl, takýto plyn nazývame ideálnym plynom. Molekuly ideálneho plynu sú v nepretržitom tepelnom pohybe, ale bez vzájomného silového pôsobenia. Pri zrážkach sa správajú ako dokonalé pružné gule, t. j. zachovávajú si hybnosť i kinetickú, prípadne rotačnú energiu. Dráha medzi jednotlivými zrážkami je priamočiara.

Vzťah medzi tlakom p a objemom V ideálneho plynu pri stálom látkovom množstve n a stálej teplote T vyjadruje Boyleov - Mariotteov zákon - jeden zo základných zákonov ideálneho plynu, podľa ktorého *súčin tlaku p a objemu V ideálneho plynu je pri stálej teplote a stálom látkovom množstve plynu konštantný*

$$pV = \text{const.} \quad T = \text{const.}, \quad n = \text{const} \quad (1)$$

alebo

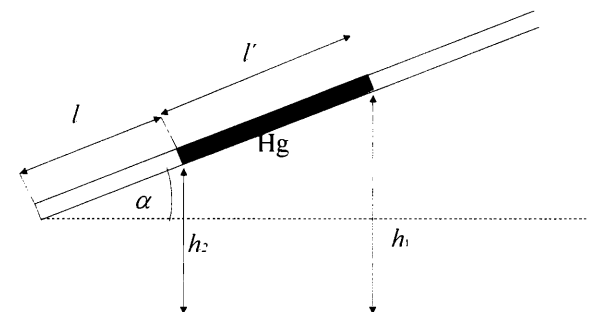
$$pV = p_0V_0, \quad T = \text{konst.}, \quad n = \text{konst.}, \quad (1')$$

kde V_0 je napr. začiatkový objem plynu a p_0 príslušný tlak. Zmenu tlaku plynu pri stálej teplote nazývame zmenou izotermickou. Boyleov - Mariotteov zákon možno graficky zobrazit' závislosťou $pV = F(p)$ alebo $pV = F(V)$, ako priamku paralelnú s osou tlaku alebo objemu. Zákon formuloval v r. 1662 R. Boyle a neskôršie nezávisle od neho r. 1679 Mariotte. Neskôr bolo zistené, že závislosť (1) platí dostatočne presne pre dostatočne nízke tlaky a dostatočne vysoké teploty aj pre reálne plyny, keď stav plynu je vzdialený od fázového prechodu, skvapalňovania príslušného plynu. Pri laboratórnej teplote a atmosferickom tlaku väčšinu reálnych plynov, pri uvedených podmienkach možno pokladať za ideálne.

Prístroje a pomôcky: Meldeho trubica, dĺžkové meradlo, teplomer.

Opis aparátúry:

Na overenie Boylevho - Mariotteovho zákona pri laboratórnej teplote použijeme Meldeho trubicu. Meldeho trubica je hrubostenná kapilára s rovnakým vnútorným prierezom S po celej dĺžke kapiláry, na jednom konci zatavenej (obr. 1).



Obr. 1. Meldeho trubica

V strednej časti kapiláry je ortuťový stĺpec, ktorý uzatvára vzduch pri zatavenom konci trubice. Objem V takto uzavretého plynu – vzduchu je určený polohou ortuťového stĺpca v trubici. Jeho tlak je súčtom barometrického tlaku b a hydrostatického tlaku ortuťového stĺpca

$$p = b + h\rho(\text{Hg})g, \quad (2)$$

kde $h = h_1 - h_2$ je rozdiel výšok koncov ortuťového stĺpca o veľkosti l'

$\rho(\text{Hg})$ - hustota ortuti pri danej teplote

g - tiažové zrýchlenie .

Súčin tlaku a objemu stĺpca plynu v Meldeho trubici o veľkosti l možno vyjadriť v tvare

$$pV = (b + \Delta p)Sl = [b + (h_1 - h_2)\rho(\text{Hg})g]Sl, \quad (3)$$

kde $\Delta p \geq 0$ alebo $\Delta p < 0$ čo závisí od polohy trubice.

Súčin tlaku a objemu plynu sme vyjadrili súčinom objemu $V = Sl$ a tlaku $p = b + (h_1 - h_2)\rho(\text{Hg})g$. Význam výšok h_1 a h_2 je zrejmý z obr. 1. Vzhľadom k tomu, že prierez S po celej dĺžke kapiláry je konštantný, z (3) pri konštantnej teplote vyplýva

$$[b + (h_1 - h_2)\rho(\text{Hg})g]l = K, \text{ ak } S = \text{const}, T = \text{const} \text{ a } n = \text{const} \quad (4)$$

Meranie tlaku vzduchu v trubici možno uskutočniť aj z hodnoty uhla, ktorý zvierá os trubice s referenčnou rovinou. Potom tlak vzduchu v trubici možno vyjadriť v tvare

$$p = b - \rho(\text{Hg})gl' \sin \alpha, \quad (5)$$

Ak barometrický tlak bude vyjadrený v mm Hg stĺpca, potom ho prepočítame na tlak v jednotkách Pa, použijeme prevodový vzťah- konvenčný milimeter ortuti, t. j. 1 mm Hg = 133,322 387 4 Pa.

Pomocou Meldeho trubice najprv nameriame aktuálny barometrický tlak z dvoch jej možných vertikálnych polôh a zaznamenáme ho do tab. 1. Keď je Meldeho trubica orientovaná so zataveným koncom nahor, potom vzdušný stĺpec o výške l_1 je pod tlakom

$$p_1 = b - h(\text{Hg})\rho(\text{Hg})g \text{ a má objem } V_1 = Sl_1 \quad (6)$$

a pri orientácii so zataveným koncom nadol, vzdušný stĺpec výšky l_2 je pod tlakom

$$p_2 = b + h(\text{Hg})\rho(\text{Hg})g \text{ a má objem } V_2 = Sl_2, \quad (7)$$

kde b je barometrický tlak a $h = l'$. Podľa Boyleovho-Mariotteovho zákona platí $p_1V_1 = p_2V_2$, alebo

$$[b - h(\text{Hg})\rho(\text{Hg})g]l_1S = [b + h(\text{Hg})\rho(\text{Hg})g]l_2S$$

odkiaľ pre barometrický tlak dostaneme

$$b = h(\text{Hg})\rho(\text{Hg})g \frac{(l_1 + l_2)}{(l_1 - l_2)} \quad (8)$$

Postup práce:

Pri rôznych polohách Meldeho trubice začínajúc so zataveným koncom hore vo vertikálnej polohe a končiac so zataveným koncom dole vo vertikálnej polohe, ktoré nastavujeme postupným otáčaním trubice na stojane, odmeriame dĺžku vzduchového stĺpca l a výšky hladín h_1 a h_2 od zvolenej vodorovnej referenčnej roviny (obr. 1). Pred začiatkom a na konci merania určíme barometrický tlak na základe rovnice (8) a odmeriame teplotu. Pri vyhodnocovaní merania použijeme aritmetický priemer obidvoch nameraných barometrických tlakov a teplôt (Tab. 1). Meranie vyhodnotíme použitím rovnice (4). Pri meraní dbáme na to, aby boli dodržané podmienky platnosti Boyleovho-Mariotteovho zákona, preto po každej zmene polohy trubice počkáme, kým sa teplota plynu v trubici nevyrovná s teplotou okolia. Teplota vzduchu uzavretého v kapiláre musí byť počas celého merania stála.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do Tab. 1. zaznamenáme hodnoty výšok koncov ortuťového stĺpca, a jeho tlaky pre jednotlivé polohy Meldeho trubice.

Tab. 1 Namerané hodnoty: $\bar{b}/\text{Pa} =$ $\bar{t}/^\circ\text{C} =$

č. m. k	h_1/m	h_2/m	l/m	$(h_1-h_2)/\text{m}$	p/Pa	$K/\text{m Pa}$	$\Delta K / \text{m Pa}$	$(\Delta K)^2/\text{m}^2$ Pa^2

Rozbor presnosti merania:

Nameranú hodnotu konštanty K zhodnot'te metódou regresnej analýzy a zapíšte ju v tvare

$$(\bar{K} \pm \sigma_{\bar{K}}) \text{ Pa}$$

kde \bar{K} je stredná hodnota a $\sigma_{\bar{K}}$ je štandardná odchýlka vypočítaná zo súboru nameraných hodnôt.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnot'te neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Za akých predpokladov možno stanoviť barometrický tlak použitím Meldeho trubice ?
2. Akú dĺžku má mať ortuťový a vzduchový stĺpec Meldeho trubice, aby overenie Boyleovho - Mariotteovho zákona bolo čo najpresnejšie?
3. Akú fyzikálnu veličinu by bolo potrebné určiť, aby bolo možné z jednej polohy Meldeho trubice stanoviť barometrický tlak ?

11. MERANIE POISSONOVEJ KONŠTANTY VZDUCHU

Ciel' práce: Stanoviť Poissonovu konštantu, pomocou klasickej Clémentovej - Désormesovej metódy, založenej na expanzii plynu do okolia.

- Úlohy:**
1. Namerajte Poissonovu konštantu vzduchu za podmienky adiabatickej expanzie vzduchu do okolia.
 2. Výsledky merania spracujte podľa Clémentovej - Désormesovej metódy presne podľa rovnice (14) a približne podľa zjednodušenej rovnice (15).
 3. Vykonajte analýzu presnosti merania konštanty κ štandardnou odchýlkou a tiež relatívnou chybou merania voči tabuľkovej hodnote 1,400.

Teoretický úvod:

Experimentálnym štúdiom správania sa plynov bolo zistené, že ich termodynamické vlastnosti sú pre väčšinu plynov veľmi podobné. Z uvedených dôvodov bol definovaný všeobecný model plynu, tzv. ideálny plyn, pre ktorý z meraní vyplynulo, že súčin tlaku a objemu ideálneho plynu závisí len od teploty a vnútorná energia závisí tiež len od teploty. Pod vnútornou energiou plynu rozumieme potenciálnu a kinetickú energiu všetkých častíc (atómov, molekúl, iónov a pod.) z ktorých sa skladá plyn. Prvú vlastnosť možno vyjadriť stavovou rovnicou ideálneho plynu

$$pV = nRT, \quad (1)$$

kde p je tlak, V - objem plynu, n - látkové množstvo v móloch, T - absolútna teplota, R - univerzálna plynová konštanta.

Z druhej vlastnosti, ktorú zahrňuje prvá veta termodynamická, vyplýva Mayerov vzťah pre rozdiel molárnych tepelných kapacít pri stálom tlaku C_p a stálom objeme C_V :

$$C_p - C_V = R. \quad (2)$$

Stavová rovnica zahrňuje všetky tri základné termodynamické deje: zmenu tlaku a objemu pri stálej teplote - izotermický dej, zmenu objemu od teploty pri stálom tlaku - izobarický dej, zmenu tlaku a teploty pri stálom objeme - izochorický dej. Okrem uvedených dejov je pre správanie plynov a ich technické využitie dôležitý adiabatický dej, ktorý charakterizuje takú zmenu termodynamického stavu plynu, pri ktorej neprebíha prenos tepla medzi plynom a okolím. Na základe prvého termodynamického zákona a stavovej rovnice pre ideálny plyn (1) a (2) za podmienok adiabatického deja možno odvodiť Poissonovu rovnicu vyjadrujúcu závislosť $p = p(V)$

$$pV^\kappa = \text{const}. \quad (3)$$

kde κ je Poissonova konštanta definovaná pomerom C_p molárnej tepelnej kapacity pri stálom tlaku a C_V pri stálom objeme:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} . \quad (4)$$

Z pozorovania vyplýva, že $C_p \neq C_V$. To súvisí s tým, že pri ohrievaní plynu za konštantného objemu sa dodané teplo spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie plynu, kým pri ohrievaní za konštantného tlaku okrem zväčšenia vnútornej energie sa časť dodaného tepla spotrebuje na konanie objemovej práce proti vonkajšiemu tlaku. Z toho vyplýva, že izobarická tepelná kapacita C_p v porovnaní s izochorickou tepelnou kapacitou C_V je väčšia o objemovú prácu jedného mólu plynu pri jeho zohriatí o 1 K. Riešením uvedeného problému je rovnica (2).

Pomer molárnych tepelných kapacít vyjadrený rovnicou (4) možno jednoducho vyjadriť pomocou stupňov voľnosti pohybu častíc plynu. Počtom stupňov voľnosti pohybu častice plynu nazývame počet od seba nezávislých premenných (súradníc), ktoré jednoznačne určujú jeho polohu. Tak postupný pohyb jednoatómovej častice po priamke má jeden stupeň voľnosti, lebo jej poloha je jednoznačne určená iba jednou veličinou t. j. vzdialenosťou od začiatkovej polohy. Polohu častice v priestore pravouhlej súradnicovej sústave určujú tri súradnice (x, y, z). Teda častica má tri stupne voľnosti. Pri časticiach dvoj a viac atómových, sa k uvedeným trom stupňom voľnosti pridajú ďalšie dva alebo až tri stupne voľnosti otáčania okolo troch navzájom kolmých súradnicových osí. Teda molekuly spolu sa môžu vyznačovať piatimi alebo šiestimi stupňami voľnosti postupného a rotačného pohybu. Uvedenú úvahu budeme aplikovať na jedno a viac atómové častice plynu. Pre mólovú kinetickú energiu molekúl jednoatómového plynu s tromi stupňami voľnosti možno písať

$$E_k = \frac{Mv^2}{2} = \frac{M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} , \quad (5)$$

kde M je mólová hmotnosť plynu a v_x, v_y, v_z sú zložky rýchlosti v smere troch súradnicových osí. V dôsledku dokonalej neusporiadanosti pohybu molekúl možno predpokladať, že

$$v_x = v_y = v_z = v ,$$

takže na každý stupeň voľnosti pripadá jedna tretina kinetickej energie molekuly, t. j. $\frac{E_k}{3}$.

Vzhľadom k tomu, že stredná kinetická energia jedného mólu jednoatómových molekúl je $E_k = \frac{3RT}{2}$, na jeden stupeň voľnosti postupného pohybu molekúl pripadá $\frac{RT}{2}$. Z ekvipartičného princípu vyplýva, že bez ohľadu na to o aký stupeň voľnosti ide, postupný či rotačný, pripadá na jeden mól častíc energia $\frac{RT}{2}$. Táto hodnota prispieva k izochorickej tepelnej kapacite C_V hodnotou $R/2$ ($R = 8,3144 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$). Teda pre častice plynu s m stupňami voľnosti

$$C_V = \frac{m}{2} R , \quad (6)$$

resp. s ohľadom na (2)

$$C_p = \frac{m+2}{2} R , \quad (7)$$

a pre κ máme

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{m+2}{m} R . \quad (8)$$

Podľa tohto vzťahu pre jednoatómové molekuly,

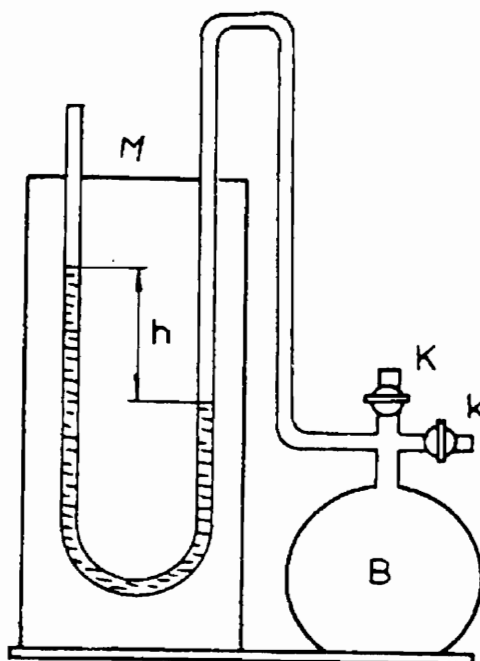
$$m = 3, C_V = 12,472 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}, C_p = \frac{5R}{2} = 20,786 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ a teda } \kappa = 1,666.$$

Pri dvojatómových lineárnych molekulách k trom stupňom voľnosti postupného pohybu prístupujú dva stupne voľnosti otáčania okolo dvoch osí kolmých na spojnicu jadier atómov, teda spolu $m = 5$ stupňov voľnosti a $\kappa = 1,400$. Pri vyšších teplotách sú mólové teploty neizolovaných molekúl podstatne vyššie. To je zapríčinené prijímaním energie na ďalšie stupne veľkosti patriace vibračnému pohybu jednotlivých väzieb v molekule. Pri pokusoch v tejto práci o nich nemusíme uvažovať.

Prístroje a pomôcky: sklenený prístroj obr. 1, barometer, hustilka, teplomer, lievik

Opis aparatúry:

Clémentovu - Désormesovu metódu adiabatickej expanzie vzduchu do okolia, možno realizovať na aparatúre znázornenej na obr. 1. Skladá sa z väčšieho skleneného balóna B , ku ktorému je pripojený manometer M naplnený vodou (obr. 1)



Obr. 1. Clémentov - Désormesov sklenený prístroj

Postup práce:

Hodnotu konštanty κ nemožno s dostatočnou presnosťou určiť podľa rovnice (4), pretože prakticky nemožno odmerať kalorimetricky s požadovanou presnosťou hodnotu C_v . Na meranie sa preto používajú rôzne nepriame metódy. V jednej z nich sa na to využívajú vlastnosti adiabatických dejov, ktoré prebiehajú v plyne pri šírení zvuku. Tým sa prevádza meranie κ na meranie rýchlosti zvuku v plynách (pozrite úlohu číslo 25 v časti z optiky). Pri iných metódach sa meria κ pozorovaním adiabatických zmien, ktoré v plynách sa zámerne vyvolávajú (pozrite úlohu číslo 25 v časti z optiky). Už sme uviedli, že adiabatický dej prebieha v sústave izolovanej od okolia. Z iného pohľadu na problém, ak dej prebieha tak rýchlo, že nestačí dôjsť k pozorovateľnej výmene tepla medzi plynom a okolím, možno pokladať taký dej v určitom priblížení za adiabatický. Takáto realizácia adiabatického deja je podstatou Clémentovej - Désormesovej metódy stanovenia κ .

Jednoduchú metódu založenú na adiabetickej expanzii plynu navrhli Clément a Desormes (1819). Dvojcestným kohútkom K možno do balóna pripúšťať skúmaný plyn - vzduch a tiež vnútro balóna možno spojiť s okolím. Voľbou vhodného kanála kohúta cez kohútik K nahustíme do balóna B meraný plyn, takže manometer M ukáže rozdiel výšok hladín h_1 , a teda pretlak nad tlakom barometrickým b . Začiatkový tlak plynu v balóne je

$$p_1 = b + p'_1 = b + \rho(H_2O)gh_1 \quad (9)$$

kde $\rho(H_2O)$ je hustota vody.

Ak nakrátko otvoríme kohút K a ihneď ho zase zatvoríme, tlak vzduchu sa rýchlo vyrovná s vonkajším barometrickým tlakom b . Táto expanzia prebieha veľmi rýchlo, takže ju môžeme pokladať za adiabatickú. Tá časť látkového množstva vzduchu, ktorá zostala v balóne má v okamihu uzatvorenia kohúta K tlak b a objem V_2 . Na začiatku expanzie bol tlak p_1 a neznámy objem V_1 , podľa Poissonovej rovnice musí platiť

$$p_1 V_1^\kappa = b V_2^\kappa, \quad n = const. \quad (10)$$

Keďže pri adiabetickej expanzii sa vzduch ochladil, postupom času začne jeho teplota stúpať, až pri rovnováhe s okolím dosiahne teplotu okolia. Pretože pri tomto ohrievaní sa objem vzduchu nemení, tlak nadobudne hodnotu

$$p_2 = b + p'_2 = b + \rho(H_2O)gh_2, \quad (11)$$

kde h_2 je rozdiel hladín vodného stĺpca v oboch ramenách manometra po expanzii vzduchu do okolia.

Pretože uvažované látkové množstvo plynu n má tú istú teplotu ako na začiatku adiabetickej expanzie, možno z Boyleovho - Mariottovho zákona pre obidva stavy plynu písať

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad T = const, \quad n = const. \quad (12)$$

a určiť neznámy objem V_1 . Dosadením za V_1 z rovnice (12) do (10) dostaneme po úprave pre Poissonovu konštantu κ rovnicu

$$\kappa = \frac{\ln \frac{p_1}{b}}{\ln \frac{p_1}{p_2}} . \quad (13)$$

Pri praktickom meraní býva pretlak p_1 a potom aj p_2 oveľa menší ako barometrický tlak b , čo nám umožňuje podstatne zjednodušiť vzťah (13).

Po dosadení do rovnice (12) za tlaky p_1 a p_2 vyjadrené rovnicami (9) a (11) pre κ , dostaneme pre Poissonovou konštantu κ

$$\kappa = \frac{\ln\left(1 + \frac{p_1'}{b}\right)}{\ln\left(1 + \frac{p_1'}{b}\right) - \ln\left(1 + \frac{p_2'}{b}\right)} . \quad (14)$$

Pretože $\frac{p_1'}{b} \ll 1$ aj $\frac{p_2'}{b} \ll 1$, možno logaritmy vystupujúce v (14) rozvinúť do Taylorovho radu podľa týchto malých parametrov a uvážiť len prvý nenulový člen radu. Dostávame tak pre κ približný vzťah

$$\kappa = \frac{\frac{p_1'}{b}}{\frac{p_1'}{b} - \frac{p_2'}{b}} = \frac{\rho g h_1}{\rho g h_1 - \rho g h_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} , \quad (15)$$

alebo rovnicu

$$h_1 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} h_2 , \quad (16)$$

ktorá predstavuje lineárnu závislosť vodného stĺpca výšky h_1 od h_2 .

Na začiatku aj na konci merania odčítame na laboratórnom barometri tlak a teplotu. Ak sa počas merania vyskytla zmena, počítame s jeho strednou hodnotou.

Hustilkou pripojenou ku kohútiku K nahustíme do balóna B vzduch, aby manometer ukázal pretlak 25 až 30 cm vodného stĺpca a počkáme, kým sa hladiny vodného stĺpca v manometri ustália. Po ustálení odčítame rozdiel hladín h_1 vodného stĺpca v oboch ramenách manometra. Potom nakrátko otvoríme a zvolíme polohu kohúta K spájajúcu balón B s okolím a hneď ho zasa zavrieme. Po vyrovnaní teploty vzduchu v balóne s teplotou okolia, čo poznáme z ustálenia vodného stĺpca v manometri M , odčítame zasa rozdiel hladín h_2 . Meranie opakujeme 10-krát pri rôznych začiatkových hodnotách h_1 a rôznych rýchlostiach otáčania kohúta K .

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do Tab. 1 zapíšte namerané dvojice hodnôt h_1 , h_2 odčítané zo stupnice manometra. Získané výsledky spracujte graficky alebo alternatívne metódou regresnej analýzy. Pre

grafickom spracovaní výsledkov Poissonovu konštantu κ zistíte zo smernice $k = \frac{\kappa}{(\kappa - 1)}$ priamkovej závislosti $h_1 = F(h_2)$ vyjadrenej podľa rovnice (16).

Tab. 1. Namerané hodnoty: $b =$, $t/^\circ\text{C} =$

i	h_1 / cm	h_2 / cm	κ_k	$\Delta\kappa_k$	$(\Delta\kappa_k)^2$

Upozornenie:

Pri nahusťovaní vzduchu musíme dávať pozor, aby klesajúca hladina vodného stĺpca v manometri neklesla príliš blízko k dolnému ohybu U trubice manometra. Inak z manometra vystrekne.

Rozbor presnosti merania:

Nameranú hodnotu zapíšte v tvare

$$\kappa \pm \sigma\kappa$$

kde $\sigma\kappa$ je štandardná odchýlka vypočítaná z nameraných hodnôt. Výslednú hodnotu porovnajte s teoretickou hodnotou $\kappa_{tab} = 1,400$. Relatívnu neistotu δ voči tabuľkovej hodnote vypočítajte z rovnice

$$\delta = \frac{\kappa_{tab} - \kappa}{\kappa_{tab}} 100 \%$$

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Diskutujte o nameranej hodnote Poissonovej konštanty a zhodnoťte neistotu merania.

Kontrolné otázky:

1. Odvodte rovnicu (2) pre rozdiel molárnych tepelných kapacít pri stálom tlaku C_p a objeme C_V .
2. Odvodte rovnicu (13) pre Poissonovu konštantu!
3. Vytipujte, ktoré sú možné zdroje chýb Clémentovej - Désormesovej metódy!
4. Nájdite hodnotu Poissonovej konštanty pre
 - a) lineárne dvojatómové molekuly
 - b) lineárne a nelineárne trojatómové molekuly plynu z počtu postupných, rotačných a vibračných stupňov voľností.

12. MERANIE KOEFICIENTU TEPLOTNEJ ROZPÍNAVOSTI VZDUCHU

Ciel' práce: Namerat' koeficient teplotnej rozpínavosti vzduchu na základe platnosti Gay - Lussacovho zákona.

- Úlohy:** 1. Z nameranej dvojice dát (p_k, t_k) zostrojte priamkovú závislosť $p = F(t)$ zo smernice ktorej vypočítajte koeficient teplotnej rozpínavosti vzduchu. Alternatívne meranie môžete zhodnotiť numerickou metódou regresnej analýzy.
2. Nameranú hodnotu koeficienta teplotnej rozpínavosti vzduchu porovnajte s tabuľkovou hodnotou a vypočítajte relatívnu chybu merania.

Teoretický úvod:

Plyn, súbor častíc (napr. atómov, iónov a molekúl), pri danej teplote a tlaku v určitom objeme, nemá tvarovú pružnosť, je stlačiteľný a rozpínajúci. Malá hustota plynov spôsobuje, že plyny sa riadia niekoľkými osobitnými zákonmi, ktoré neplatia pre kondenzované systémy. Jeden zo základných zákonov ideálneho plynu je Gay - Lussacov zákon, podľa ktorého *objem plynu pri stálom tlaku a látkovom množstve plynu sa mení s teplotou lineárne*. Túto jeho vlastnosť možno vyjadriť v tvare

$$V = V_0(1 + \gamma t), \quad p = p_0, \quad n = konst, \quad (1)$$

kde V_0 je objem plynu pri definovanej teplote a tlaku, γ je teplotný koeficient objemovej rozťažnosti, ktorý predstavuje relatívne zväčšenie objemu pri zohriatí plynu o 1°C . Je definovaný podľa vzťahu

$$\gamma = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_p, \quad (2)$$

Obe rovnice (1) a (2) vyjadrujú zmenu objemu za podmienok izobarického deja. Analogicky možno vyjadriť aj závislosť tlaku plynu p od teploty t pri konštantnom objeme V_0

$$p = p_0(1 + \beta t), \quad V = V_0, \quad n = konst, \quad (3)$$

kde β je koeficient teplotnej rozpínavosti plynu, definovaný nasledovne

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_V. \quad (4)$$

Rovnica (3) a (4) vyjadruje zmenu tlaku plynu s teplotou za podmienok izochorického deja. Kombináciou rovníc (1) a (3) dostaneme Boyleov - Mariotteov zákon

$$pV = p_0V_0, \quad T = konst \quad (5)$$

Ďalej, z rovnice (1) a (3) vyplýva, že $p/p_0 = T/T_0$, $V = const$ a $V/V_0 = T/T_0$, $p = const$, kde $T_0 = 273,15 \text{ K} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, čo vedie k tomu, že teplotný koeficient objemovej rozťažnosti plynu (krátka objemová rozťažnosť) a koeficient teplotnej rozpínavosti (krátka tlaková rozpínavosť) sa navzájom rovnajú, t. j.

$$\alpha = \beta. \quad (6)$$

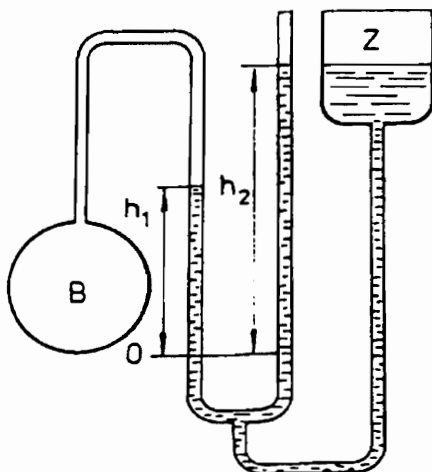
Teda z Gay - Lussacovho zákona vyplýva, že v oblasti platnosti Boyleovho - Mariotteovho zákona sú koeficienty γ a β prakticky rovnaké. Meraním pre dostatočne zriedené plyny bola experimentálne nájdená hodnota

$$\gamma = \beta = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1} = 3,661 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} = 3,661 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}. \quad (7)$$

Prístroje a pomôcky: sklený prístroj na meranie koeficienta rozpínavosti vzduchu (obr. 1), vodný termostat, varič, teplomer, barometer.

Opis aparatúry:

Meranie sa realizuje pomocou aparatúry znázornenej na obr. 1.



Obr. 1. Sklenený prístroj na meranie teplotného koeficienta rozpínavosti

V banke B je uzavretý vzduch. Banka je spojená s trubicou v tvare písmena U , v ktorej je voda. Poloha hladiny vody v ľavom ramene U trubice určuje objem vzduchu v banke B . K trubici U je pripojený zásobník vody Z . Zmenou polohy zásobníka vody možno regulovať výšku hladiny vody v trubici U . Banka B je ponorená do termostatu s vodou.

Postup práce:

Ohrievaním vody v termostate zvyšujeme teplotu vzduchu v banke, v dôsledku čoho sa vzduch rozpína a vytlačá vodu do pravého ramena trubice U . Zmenou polohy zásobníka zásobíme trubicu U takým množstvom vody, aby poloha hladiny vody v ľavom ramene trubice U zostala v pôvodnej výške h_1 . Udržiavaním hladiny vody na konštantnej hodnote

h_1 realizujeme podmienku platnosti Gay - Lussacovho zákona (3), teda aby objem vzduchu sa nemenil. Súčasne sa však ohrievaním zväčšuje tlak vzduchu v banke a v časti U trubice manometra. Jeho hodnota sa rovná barometrickému tlaku b a hydrostatickému tlaku vodného stĺpca v trubici

$$p_k = b + (h_2 - h_1)\rho(\text{H}_2\text{O})g, \quad k = 1, 2, \dots, 10, \quad (8)$$

kde h_1 je výška vodného stĺpca v ľavom a h_2 v pravom ramene U trubice. Hustotu vody pri danej teplote zistíme metódou pyknometra. Z praktických dôvodov referenčnú hladinu vodného stĺpca položíme $h_l = 0$ a volíme ju v najnižšej ešte odčítateľnej polohe ľavého stĺpca. Keď barometrický tlak b bude k dispozícii v jednotkách dĺžky mm Hg, potom ho prepočítame na tlak v Pa podľa prevodovej rovnice- konvenčný milimeter ortuti t. j. $1 \text{ mm Hg} = 13,5951 \text{ mm H}_2\text{O} = 133,322 \text{ 387 Pa}$.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Namerané dáta zapíšeme do Tab. 1. Takto nameraná závislosť tlaku vzduchu od teploty pri stálom objeme má byť podľa rovnice (3) priamková. Nameranými bodmi (p_k, t_k) preložíme priamku a z jej smernice určíme hľadaný teplotný koeficient rozpínavosti vzduchu. Možno ho však nájsť aj metódou regresnej analýzy. Extrapoláciou závislosti $p = F(t)$ na teplotu $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, odčítame tlak p_0 .

Ešte treba poznamenať, že meriame teplotu kúpeľa - termostatu a nie vzduchu v banke B . Z uvedeného dôvodu treba postupovať tak, aby teplota vzduchu pri každom odčítaní dvojice k (p_k, t_k) bola totožná s teplotou termostatu. Nie je to však jednoduché, pretože časť trubice U , kde je tiež vzduch, nie je temperovaná ani izolovaná. Iný praktický postup je ten, že konštantnou rýchlosťou sa zvyšuje teplota termostatu a spojíte sa odčítava dvojica hodnôt (p_k, t_k). Je to rýchla a spoľahlivá metóda pri dodržaní uvedenej podmienky.

Na začiatku merania odčítame na barometri tlak v Pa a teplotu vody v termostate. Zapojíme termostat do elektrickej siete a pri rôznych teplotách začínajúc laboratórnou teplotou, zväčšujeme po krokoch $\Delta t = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ teplotu vody v termostate, v ktorom je ponorená banka B . Odmeriame výšku vodného stĺpca h_k v cm voči $h_l = 0$ aj výšku hladiny vodného stĺpca h_1 udržiujeme počas celého merania na stálej zvolenej hodnote. Takto vykonáme aspoň 10 meraní h_k . Po skončení merania opäť odčítame na barometri atmosferický tlak a vypočítame jeho aritmetický priemer

Tab. 1. Namerané hodnoty: $b/\text{Pa} =$, $\rho(\text{H}_2\text{O})/\text{kg m}^{-3} =$

k	$t_k/^\circ\text{C}$	$h_k(\text{H}_2\text{O})/\text{cm}$	p_k/Pa

Rozbor presnosti merania:

Nameranú hodnotu koeficientu rozpínavosti vzduchu porovnajte s tabuľkovou hodnotou (teoretická hodnota) $\beta = 3,661 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Presnosť merania zhodnot'te veľkosťou relatívnej neistoty merania δ voči tabuľkovej hodnote.

$$\delta = \frac{\beta_{\text{tah}} - \beta}{\beta_{\text{tah}}} \cdot 100\%$$

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch merania a zhodnoťte neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Možno sklenenú aparatúru (obr. 1) použiť aj na stanovenie koeficienta izotermickej stlačiteľnosti plynov? Ak nie, ako treba pozmeniť konštrukciu prístroja?
2. Akú fyzikálnu veličinu by bolo potrebné namerať, aby sme určili hodnotu molárneho objemu vzduchu ?
3. Ktorý parameter merania koeficientu rozpínavosti v najväčšej miere ovplyvňuje veľkosť jeho relatívnej neistoty?

13. MERANIE TERMOFYZIKÁLNYCH VELIČÍN

Cieľ práce: Zmerajte koeficienty teplotnej a tepelnej vodivosti pomocou impulzných metód.

Úlohy: Použite postupne bodový, priamkový a plošný zdroj tepla na určenie teplotnej vodivosti plexiskla.

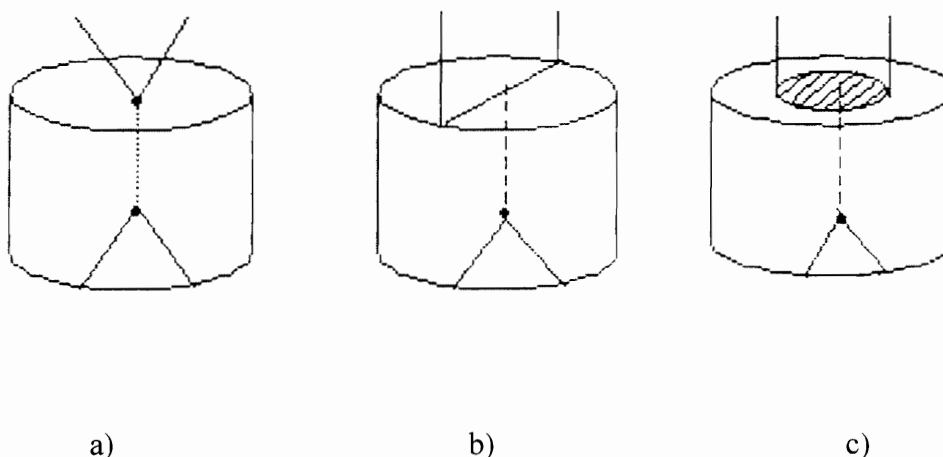
Teoretický úvod:

Na meranie termofyzikálnych veličín bolo vypracovaných veľké množstvo metód, z ktorých každá má určité prednosti a súčasne aj určité nedostatky. Príčina tohto stavu je v tom, že interval týchto hodnôt v prakticky dostupných materiáloch je v porovnaní s elektrickými vlastnosťami relatívne veľmi úzky. Nejestvujú dokonalé tepelné vodiče ani dokonalé tepelné izolanty, z čoho vyplýva skutočnosť, že presnosť merania termofyzikálnych veličín je vždy značne nižšia, ako presnosť merania elektromagnetických veličín.

V praxi je žiadúce meranie najmä koeficientu teplotnej a tepelnej vodivosti, ako aj merného tepla. Tieto veličiny možno merať v dvoch režimoch: stacionárnom a nestacionárnom. Stacionárny režim poskytuje síce presnejšie hodnoty, ale je veľmi náročný na čas merania, kým nestacionárny režim poskytuje možnosti na rýchle meranie, ale so zníženou presnosťou. V rámci nestacionárnych metód sú zaujímavé tzv. impulzné metódy merania, ktoré využívajú na meranie tepelné impulzy. Tieto metódy budú predmetom testovania v rámci tejto úlohy.

Princíp impulzných metód merania

Impulzné metódy merania termofyzikálnych veličín využívajú tepelné impulzy generované spravidla tromi druhmi zdrojov: bodovým, líniovým (priamkovým) a plošným. Keď sa na povrchu polonekonečnej meranej vzorky vytvorí impulz (teoreticky nekonečne krátky) tepelného kontaktu bodovým, priamkovým resp. plošným zdrojom (obr. 1),



Obr. 1. Bodový (a), priamkový (b) a plošný (c) zdroj tepla

v kolmej vzdialenosti r od zdroja vznikne teplotná odozva vyjadrená funkciami

$$T_1(r, t) = \frac{Q}{4\pi^{3/2} \lambda (kt^3)^{1/2}} e^{-r^2/4k_B T} \quad (1a)$$

$$T_2(r, t) = \frac{Q_0}{2\pi\lambda t} \phi\left(\frac{b}{4(kt)^{1/2}}\right) e^{-r^2/4k_B T} \quad (1b)$$

$$T_3(r, t) = \frac{Q^x(k)^{1/2}}{\lambda(\pi t)^{1/2}} e^{-r^2/4k_B T} \quad (1c)$$

kde Q je množstvo tepla vygenerované bodovým zdrojom, Q_0 množstvo tepla vygenerované z jednotkovej dĺžky priamkového zdroja, Q^x množstvo tepla vygenerované z plošnej jednotky plošného zdroja, b dĺžka priamkového zdroja, k koeficient teplotnej vodivosti, λ koeficient tepelnej vodivosti, t čas, k_B Boltzmannova konštanta. Vidíme, že tieto funkcie majú extrémne hodnoty v časoch

$$t_{1m} = \frac{r^2}{6k} \quad (2a)$$

$$t_{2m} = \frac{r^2}{4k} \quad (2b)$$

$$t_{3m} = \frac{r^2}{2k} \quad (2c)$$

Z týchto vzťahov vyplývajú jednoduché vzorce vhodné pre meranie teplotnej vodivosti. Majú tvar

$$k_1 = \frac{r^2}{6t_{1m}} \quad (3a)$$

$$k_2 = \frac{r^2}{4t_{2m}} \quad (3b)$$

$$k_3 = \frac{r^2}{2t_{3m}} \quad (3c)$$

Ak chceme zmerať aj tepelnú vodivosť, musíme poznať aj množstvo tepla odovzdané do vzorky pri meraní a veľkosť extrémnej zmeny teploty. Príslušné vzorce majú tvar

$$\lambda_1 = 2,44 \cdot 10^{-2} \frac{Q}{rt_{1m}T_{1m}} \quad (4a)$$

$$\lambda_2 = 5,86 \cdot 10^{-2} \frac{Q_0}{t_{2m}T_{2m}} \quad (4b)$$

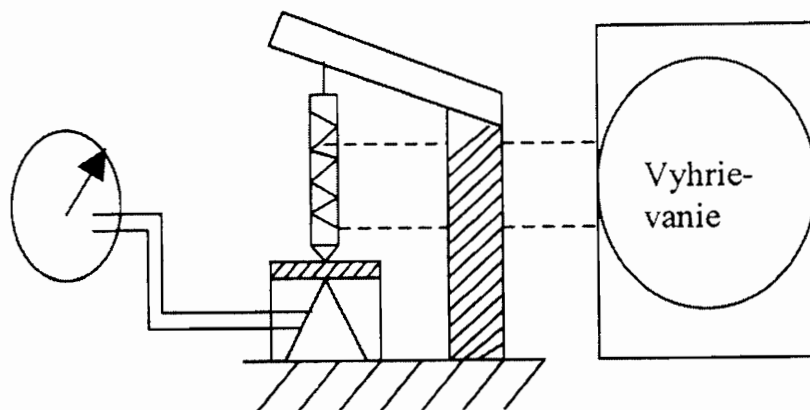
$$\lambda_3 = 0,121 \frac{Q^x r}{t_{3m}T_{3m}} \quad (4c)$$

Pri známej hodnote veličín k a λ možno stanoviť aj hodnotu merného tepla materiálu a to pomocou definičného vzťahu $k = \lambda / c\rho$, kde ρ je hustota, teda vzorcom

$$c = \frac{\lambda}{k\rho} \quad (5)$$

Meracie zariadenie

Na preverenie možnosti merania termofyzikálnych veličín impulznými metódami bol skonštruovaný prípravok, ktorého schéma je na obr. 2.



Obr. 2. Schéma prípravku na meranie termofyzikálnych veličín impulznými metódami

Pohyblivé rameno nesie vhodne profilovaný (bodovo, priamkovo alebo plošne) a vyhrievaný segment, ktorého krátkotrvajúcim pritlačením na meranú vzorku sa realizuje bodový, priamkový resp. plošný tepelný impulz. Termočlánkom umiestneným medzi dvoma blokmi meraného materiálu sa sníma teplotná zmena. Hrúbka horného bločku musí byť zvolená tak, aby čas teplotného extrému nadobudol ľahko merateľné hodnoty (niekoľko sekúnd). Dĺžka tepelného impulzu by nemala prekročiť desatinu času extrému – v opačnom prípade treba používať korekcie. Pri meraní slabo tepelne vodivých materiálov sa vhodná hrúbka horného bločku pohybuje okolo 1 mm, dobre tepelne vodivé materiály by vyžadovali neúmerne veľké hrúbky, čím by sa značne znížila citlivosť merania, preto uvedené impulzné metódy sa na meranie takýchto materiálov nehodia.

Vyhrievanie príslušných segmentov sa uskutočňuje výhrevným telieskom zabudovaným do pohyblivého ramena, napájaným z transformátora. Zariadenie umožňuje tri rýchlosti ohrevu, pričom na začiatku možno použiť najväčšiu rýchlosť, pri samotnom meraní možno nechať zdroj trvale zapnutý na najmenší výkon.

Prístroje a pomôcky:

Meracie zariadenie na vyhrievanie bodového, plošného a priamkového zdroja, citlivý galvanometer, merané vzorky plexiskla, bodový, priamkový a plošný segment.

Postup práce:

Použite postupne bodový, priamkový a plošný zdroj tepla na zmeranie teplotnej vodivosti plexiskla. S nevyhnutnými prestávkami potrebnými na ustálenie galvanometra vykonajte pri zvolenej vhodnej hodnote času δt sériu meraní časov extrému teplotnej odozvy, vypočítajte koeficient teplotnej vodivosti podľa vzťahov (6).

Spracovanie nameraných hodnôt a vyhodnotenie merania:

Pri meraní možno zvoliť tri režimy:

- a) Dĺžku trvania tepelného impulzu zvoliť kratšiu ako $0,1 t_m$. V takom prípade možno pre vyhodnotenie merania použiť priamo vzťahy (3) a (4).

- b) Ak dĺžka impulzu nepresiahne $0,3 t_m$, možno čas maxima merať od ukončenia impulzu a dosadiť do vzťahov (3) a (4), čím dostaneme približné výsledky.
- c) Ak z dôvodu nedostatočnej citlivosti galvanometra treba použiť dlhšie doby trvania impulzu, treba pre vyhodnotenie teplotnej vodivosti použiť vzťahy

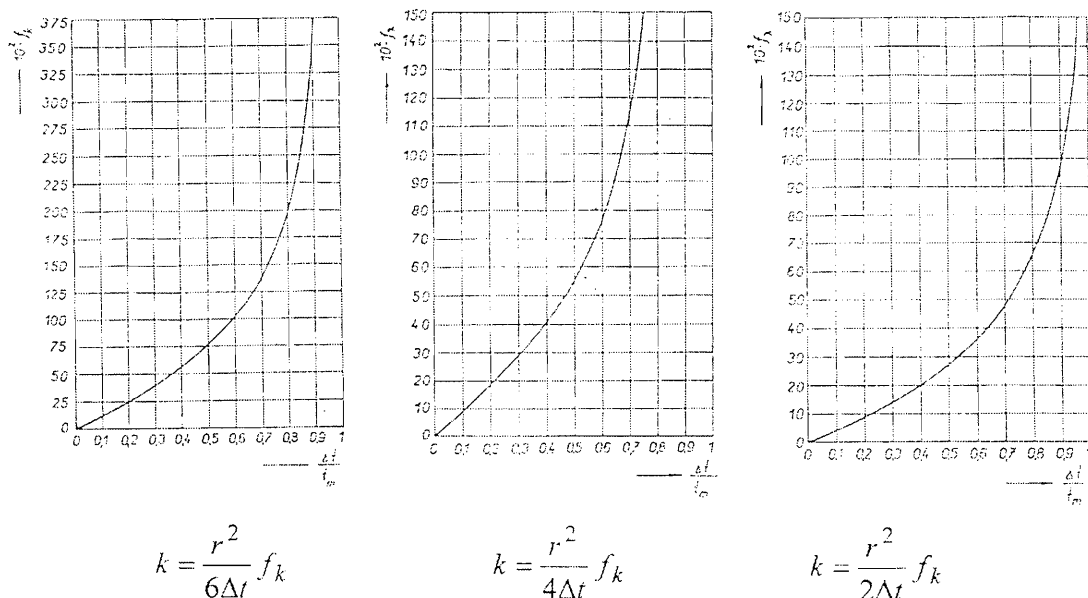
$$k_1 = \frac{r^2}{6\delta t} f_{k1} \quad (6a)$$

$$k_2 = \frac{r^2}{4\delta t} f_{k2} \quad (6b)$$

$$k_3 = \frac{r^2}{2\delta t} f_{k3} \quad (6c)$$

kde δt je doba trvania impulzu a f_{k1} , f_{k2} , f_{k3} korekčné faktory, ktoré sú graficky znázornené na obr. 3.

Vzhľadom na to, že vizuálnym pozorovaním galvanometra sa nedá dostatočne presne zmerať čas t_m , pre presnejšie merania sa používa zapisovač a meranie sa vyhodnocuje analýzou záznamovej krivky.



Obr. 3. Korekčné faktory pre merania s bodovým zdrojom (a), s priamkovým zdrojom (b) a plošným zdrojom (c).

Použitím grafov na obr. 3 a vzťahov (6) určte príslušné teplotné vodivosti, nájdite ich strednú hodnotu a pravdepodobnú neistotu merania. Porovnajte výsledky získané jednotlivými zdrojmi tepla. Konfrontujte získané výsledky s údajmi získanými v režime b).

Kontrolné otázky:

1. Vysvetlite nízku presnosť merania termofyzikálnych veličín.
2. Definujte pojem koeficientu teplotnej a tepelnej vodivosti, ako aj tepelnej kapacity.
3. Vysvetlite princíp impulzných metód merania termofyzikálnych veličín.

Návody na laboratórne cvičenia z elektriny a magnetizmu

14. KONTROLA VOLTMETRA NORMÁLOVÝM AMPÉRMETROM

Ciel práce: Skontrolovať triedu presnosti voltmetra a zostrojiť jeho korekčnú krivku

Úlohy: 1. Skontrolujte triedu presnosti voltmetra normálovým ampérmetrom o triede presnosti aspoň o jeden rád lepšej.
2. Zostrojte korekčnú krivku a rozhodnite v ktorých bodoch prístroj vyhovuje predpísanej triede presnosti a v ktorých nie.

Teoretický úvod:

Trieda presnosti všetkých používaných elektrických prístrojov je stanovená v určitých medziach výrobcom. Bežným používaním po určitej dobe môže dôjsť k situácii, že v niektorých meracích bodoch prístroj už nespĺňa predpísané parametre a treba vykonať kontrolu triedy presnosti. Po vykonaní kontroly môžeme zaviesť určitú korekciu, ktorá spočíva v pripočítaní, alebo odpočítaní určitej hodnoty k údaju odčítanému zo stupnice prístroja pre daný merací bod. Stupnice kontrolujeme prístrojom, ktorý považujeme za dokonale presný, teda normálový prístroj (normál). Predpokladajme, že na koncoch vodiča s elektrickým odporom R je potenciálový rozdiel:

$$U = V_1 - V_2$$

pričom ním preteká elektrický prúd I . Uvažujme situáciu ktorá vznikne po pripojení ampérmetra a voltmetra do obvodu so známym odporom R . V obvode zapojenom podľa obr. 1 je na odpore R napätie:

$$U = RI,$$

kde I je intenzita prúdu prechádzajúceho odporom R , ktorú meriame ampérmetrom A . Po pripojení do obvodu voltmetra V s vnútorným odporom R_v (obr. 2) prechádza týmto odporom časť prúdu, idúceho pôvodne daným vodičom. Odporom R preteká prúd :

$$I_R = \frac{U}{R}$$

a voltmetrom tečie prúd :

$$I_v = \frac{U}{R_v}$$

Ampérmeter A meria súčet týchto prúdov:

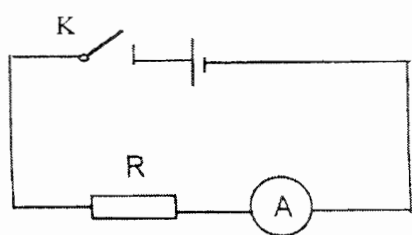
$$I = I_R + I_v$$

Po dosadení:

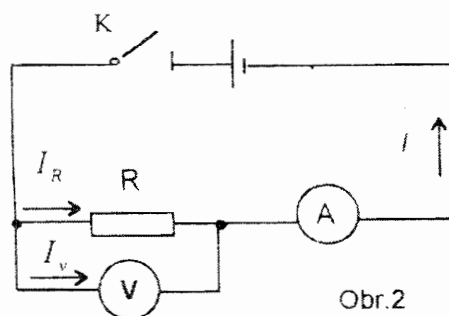
$$I = U \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \right) = \frac{U}{R} \left(1 + \frac{R}{R_V} \right).$$

Kontrolu voltmetra vykonáme pomocou vzťahu:

$$U = \frac{I}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}} = \left(\frac{RR_V}{R + R_V} \right) I. \quad (1)$$

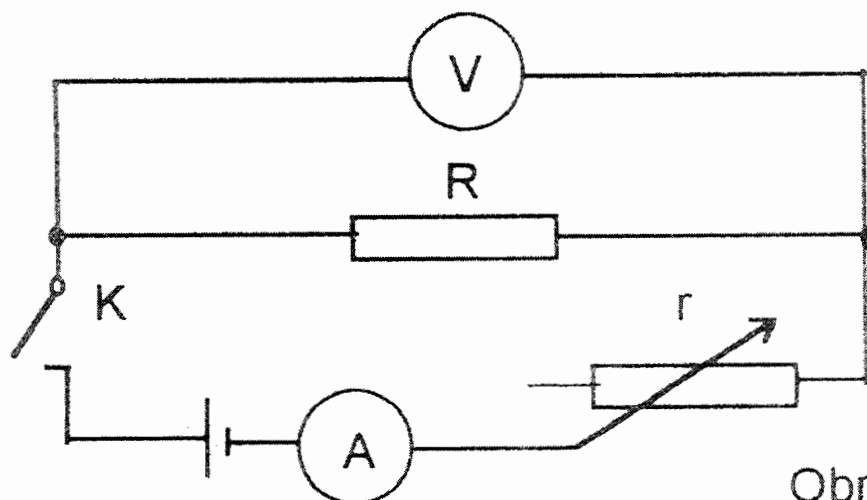


Obr. 1



Obr.2

Kontrolu voltmetra vykonáme normálovým ampérmetrom a odporovým normálom tak, že normálovým ampérmetrom meriame prúd I prechádzajúci vodičom so známym odporom R a voltmetrom na základe vzťahu (1). Presnosť tejto metódy však závisí od presnosti, s akou poznáme veľkosti odporov R a R_V a od presnosti použitého normálového ampérmetra. Aby sme mohli prekontrolovať celú stupnicu vyšetřovaného voltmetra, použijeme zapojenie podľa obrázku 3. Podľa tohto zapojenia môžeme plynule meniť napätie (od začiatku po koniec zvoleného rozsahu kontrolovaného voltmetra) a príslušný prúd pomocou reostatu r .



Obr.3

Prístroje a pomôcky: Kontrolovaný voltmeter, normálový ampérmetr, rezistor so známym odporom (odporová dekáda), kľúč, reostat, zdroj jednosmerného napätia.

Postup práce:

1. Reostatom nastavujeme napätie U na zvolenom rozsahu voltmetra vo vhodných intervaloch (na 12 V rozsahu avometu od 1 V do 12 V postupne po 1 V).
2. Ku každému údaju voltmetra U_i zapíšeme údaj ampérmetra I_i .
3. Aby sme zvýšili presnosť merania, celý kontrolovaný rozsah voltmetra premeriame aj pre klesajúce napätia v tých istých bodoch ako pre stúpajúce. Takto dostaneme pre každú zvolenú hodnotu napätia dve intenzity prúdu.
4. Ak nie je uvedený údaj vnútorného odporu voltmetra na prístroji, tak ho jednoduchým spôsobom zmeriame (vnútorný odpor voltmetra môže byť rôzny na rôznych rozsahoch, závisí od výrobcu).
5. Pre každý kontrolovaný bod rozsahu voltmetra vypočítame podľa vzťahu (1) napätia U_1 a U_2 (z údajov I_1, I_2, R, R_V). Ich aritmetický priemer U^* porovnáme s údajom kontrolovaného voltmetra.
6. Hodnotu korekcie ΔU vypočítame zo vzťahu:

$$\Delta U = U^* - U.$$

7. Urobte 10 meraní a nakreslite korekčnú krivku kontrolovaného voltmetra:
 $\Delta U = f(U)$.
8. Pomocou korekčnej krivky zistíte, či voltmeter na vyšetřovanom rozsahu vyhovuje vyznačenej triede presnosti.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnotte neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Čo je podstatou kontroly voltmetra ampérmetrom?
2. Navrhните tabuľku na meranie
3. Navrhните jednoduchú metódu na zmeranie vnútorného odporu voltmetra R_V .
4. Vysvetlite spôsob konštrukcie a význam korekčnej krivky prístroja.
5. Vysvetlite praktický význam chyby prístroja vyznačenej na voltmetri a význam ostatných symbolov, ktoré sú na ňom vyznačené a charakterizujú jeho elektrické vlastnosti.

15. KONTROLA WATTMETRA

Cieľ práce: Vykonajte kontrolu wattmetra pomocou presného voltmetra a presného ampérmetra.

- Úlohy:**
1. Overte presnosť wattmetra, ktorej stupnica je kalibrovaná priamo vo wattoch pomocou presného voltmetra.
 2. Urobte korekciu stupnice wattmetra ako rozdiel vypočítanej a nameranej hodnoty výkonu.
 3. Zostrojte korekčný diagram wattmetra pre celý pre celý merací rozsah.

Teoretický úvod:

Ak pôsobí v okruhu s odporom R , so samoindukciou L a s kapacitou striedavé harmonické napätie

$$U = U_0 \sin \omega t$$

vznikne v okruhu harmonický striedavý prúd

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

kde U_0 a I_0 sú maximálne hodnoty napätia a prúdu, φ je fázové posunutie napätia voči prúdu.

Pre výkon jednosmerného prúdu I pri prechode vodičom, na koncoch ktorého je napätie U , platí vzťah

$$N = U \cdot I.$$

Ak sa však napätie i prúd harmonicky s časom menia, výrazom $N = U \cdot I$ je daný iba okamžitý výkon prúdu a teda platí

$$N = U \cdot I = U_0 I_0 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (1)$$

V skutočnosti je dôležitejšie poznať priemerný výkon striedavého harmonického prúdu za dobu jednej periódy, ktorý je definovaný vzorcom

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt. \quad (2)$$

Po úprave výrazu za integračným znamienkom vzorca (2) podľa známeho vzorca

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

ak v ňom položíme

$$\omega t = \alpha; \quad \omega t - \varphi = \beta$$

dostaneme

$$N = \frac{1}{2T} U_0 I_0 \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi \quad (3)$$

pretože

$$\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0.$$

Ako vidieť zo vzorca (3), priemerný výkon harmonického striedavého prúdu závisí od maximálnych hodnôt napätia a prúdu U_0 , I_0 a od fázového posunu medzi napätím a prúdom. V praxi však nemožno prístrojmi priamo merať maximálne hodnoty U_0 a I_0 , pretože prístroje zaznamenávajú len kvadratický priemer premenlivých hodnôt napätia a prúdu. Preto sa zaviedli veličiny: efektívna hodnota napätia U_{ef} a efektívna hodnota prúdu I_{ef} , a to ako kvadratický priemer napätia, resp. intenzity prúdu rovnicami

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2 \omega t dt \quad (4)$$

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2(\omega t - \varphi) dt$$

Výpočtom výrazov (4) dostaneme

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Pomocou efektívnych hodnôt môžeme teda priemerný výkon striedavého prúdu napísať v tvare

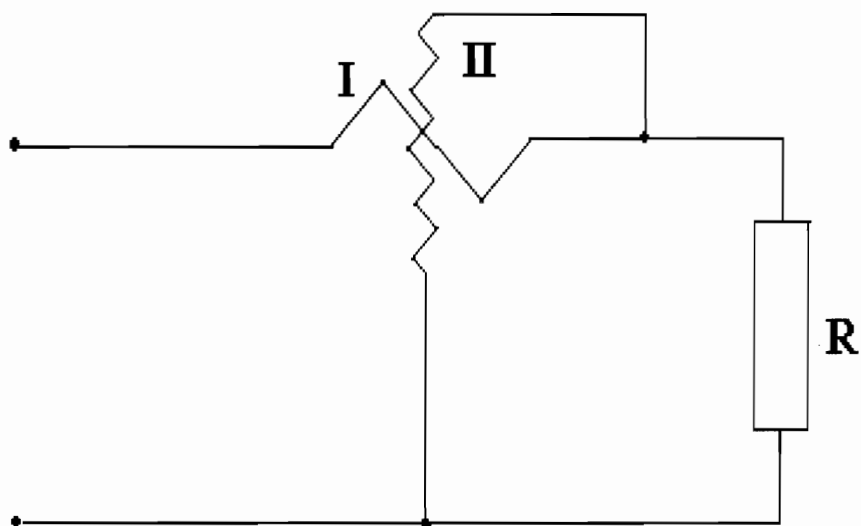
$$N = U_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi$$

Ak v prúdovom okruhu je len elektrický odpor, je v ňom prúd vo fáze s napätím, čiže $\varphi = 0$. Výkon prúdu v takomto okruhu je daný výrazom

$$N = U_{ef} \cdot I_{ef}$$

Strednú hodnotu výkonu striedavého prúdu meriame pomocou špeciálnych prístrojov, wattmetrov. Zostrojenie a zapojenie elektrodynamického wattmetra je na obr. 1. Pozostáva z dvoch cievok, jednej pevnej a druhej otáčavej. Pevná cievka s malým odporom vinutia je

zapojená do okruhu sériovo so spotrebičom, ktorého výkon určujeme, a cievka otáčavá, ktorá má veľký odpor, sa k nemu pripojí paralelne. Podľa zákonov o vzájomnom pôsobení vodičov,



Obr. 1. Náčrt prúdovej a napät'ovej cievky wattmetra.

ktorými preteká prúd, cievky pôvodne skrížené sa otáčajú. Otáčavý moment, ktorým je pohyblivá cievka vychýľovaná z rovnovážnej polohy skrížených cievok, je úmerný súčinu prúdov obidvoma cievkami prechádzajúcich $I_1 \cdot I_2$, možno dokázať, že je úmerný aj súčinu $U \cdot I_1$ (pričom I_1 je prakticky celý prúd pretekajúci spotrebičom a U je napätie na ňom), t.j. výkonu prúdu v spotrebiči. Hodnotu výkonu odčítame teda priamo na stupnici prístroja.

Prístroje a pomôcky: Kontrolovaný wattmeter, presný ampérmeter, presný voltmeter, posuvný reostat, spotrebič (žiarovka), kľúč.

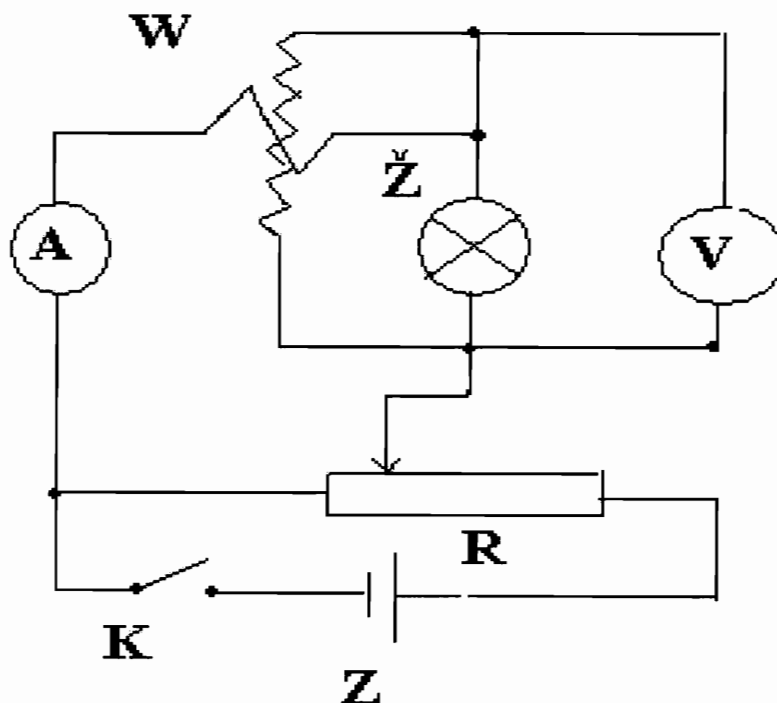
Postup práce:

V zapojení podľa obrátka meníme reostatom vo vhodných intervaloch napätie a odčítavame jeho hodnotu na voltmetri. Príslušnú hodnotu intenzity prúdu odčítavame na ampérmetri. Súčasne odčítavame hodnoty výkonu na kontrolovanom wattmetri. Namerané hodnoty zostavujeme do pripravenej tabuľka, kde označíme ako N^* výkon vypočítaný z nameraných hodnôt ($N^* = U \cdot I$) a korekciu $\Delta N = N^* - N$.

k	E	I	N_{odc}	N_{vyp}^*	ΔN

Metóda merania a opis aparatúry:

Stupnica wattmetra je upravená tak, že výchylka na stupnici, odčítaná priamo, určuje výkon prúdu vo wattoch. Aby sme tento údaj mohli skontrolovať musíme súčasne merať intenzitu prúdu v pevnej cievke sériovo k nej pripojeným presným voltmetrom. Údaj správne okalibrovaného wattmetra má súhlasiť so súčinom nameraných hodnôt $U \cdot I$. Rozdiel vypočítanej a nameranej hodnoty ($\Delta N = N^* - N$) nazývame korekciou – opravou

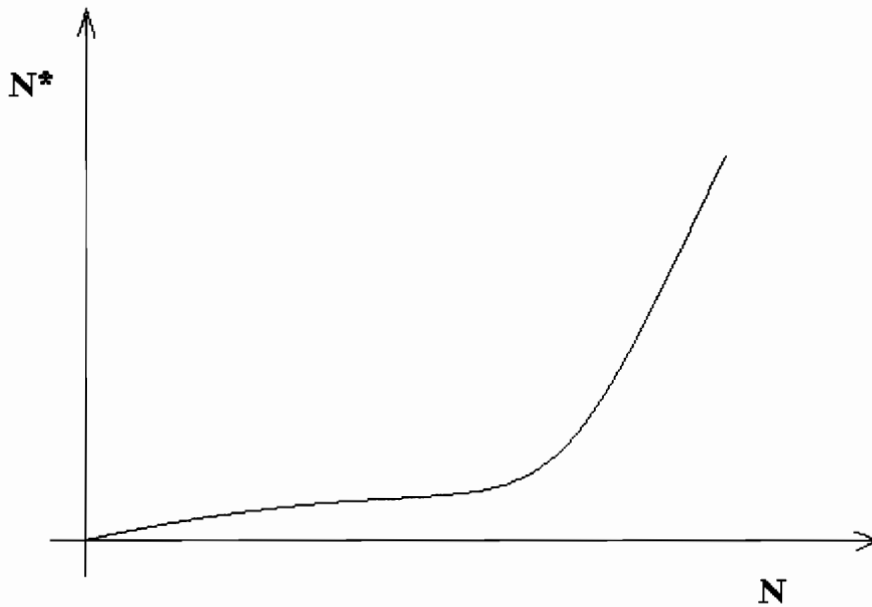


Obr. 2. Schéma zapojenia na kontrolu wattmetra.

Na meranie použijeme zapojenie podľa obr. 2, v ktorom Z je prúdový zdroj, A – presný ampérmeter, V – presný voltmeter, W – kontrolovaný wattmeter, R – posuvný reostat, Ž – spotrebič.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Namerané hodnoty zostavené do tabuľky spracujeme tak, že zostrojíme z nich diagram (obr. 3). Na jednu os nanášame hodnoty výkonu namerané wattmetrom (W), na druhú os hodnoty výkonu vypočítaného ($N^* = U \cdot I$). Bodmi preložíme krivku.



Obr. 3 . Korekčný graf wattmetra.

Rozbor presnosti merania:

Nameranú hodnotu výkonu ohodnoťte chybou merania na základe triedy presnosti použitých prístrojov. Urobte krátku diskusiu a stručný rozbor presnosti merania výkonu na základe triedy presnosti použitých prístrojov.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Získaný graf na obr. 3. slúži na to, aby sme nemuseli wattmeter pri každom použití znovu kontrolovať, ale aby sme mohli jednoducho pre každý získaný údaj zistiť z neho správnu hodnotu. Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnoťte chyby meraní.

Kontrolné otázky:

1. Čo je to korekcia wattmetra?
2. Aký je význam triedy presnosti wattmetra?
3. Porovnajme triedu presnosti voltmetra, ampérmetra a wattmetra.

16. MERANIE ZÁVISLOSTI REZISTANCIE KOVOVÝCH VODIČOV OD TEPLoty

Ciel' práce: Namerať teplotný koeficient rezistancie dvoch vzoriek kovových vodičov.

- Úlohy:**
1. Namerajte závislosť rezistancie od teploty pre dva vodiče.
 2. Zo smernice závislosti $R = F(t)$ vypočítajte teplotný koeficient rezistancie. Alternatívne namerané výsledky môžete zhodnotiť aj numerickou metódou regresnej analýzy.

Teoretický úvod:

Vodiče sa definujú ako látky, v ktorých existujú voľne pohyblivé náboje. Môžu existovať voľné kladné i záporné elektrické náboje. Keď sa vo vodičoch vytvorí elektrické pole, voľné náboje sa dostanú do pohybu – kladné v smere intenzity elektrického poľa, záporné proti nej. Takýto pohyb elektrického náboja vytvára elektrický prúd. Nevyhnutnou podmienkou vzniku elektrického prúdu je teda prítomnosť voľných nosičov náboja v látkach. Ukazuje sa však, že pojem „voľný“ nosič náboja je veľmi zložitý. V prírode sa totiž nenachádzajú látky, v ktorých by všetky nosiče náboja boli dokonale voľné, resp. dokonale nepohyblivé. Ak uvažujeme kovové vodiče a nie dielektriká ani polovodiče, potom nepohyblivými nábojmi v kovoch sú ióny kryštálovej mriežky a pohyblivými nábojmi sú vodivostné elektróny. V rámci klasických predstáv, z mikro-fyzikálneho hľadiska, pod energiou elektrického prúdu sa rozumie súčet kinetických energií usporiadaného pohybu všetkých elektricky nabitých častíc, ktoré sa na vedení elektrického prúdu vo vodiči zúčastňujú. Pri toku elektrického prúdu vodičom vznikajú zrážky vodivostných elektrónov s iónmi kryštálovej mriežky kovu. V dôsledku toho sa kinetická energia usporiadaného pohybu vodivostných elektrónov, t. j. energia elektrického prúdu, postupne odovzdáva iónom mriežky. Neusporiadaný pohyb častíc vodiča – viazaných iónov a voľne pohyblivých elektrónov, tým zvyšuje svoju energiu. Zvyšuje sa teda vnútorná energia vodiča a tým aj jeho teplota. Hovoríme, že elektrický prúd má tepelné účinky. Premena energie elektrického prúdu na vnútornú energiu vodiča sa však nerealizuje prostredníctvom mechanickej interakcie, ale špeciálnej interakcie medzi vodivostnými elektrónmi a iónmi kryštálovej mriežky. Zo skúsenosti sa vie, že pri prechode elektrického prúdu vodičom sa vodič ohrieva, zvyšuje sa jeho teplota. Teplotný koeficient α rezistora R je definovaný

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1)$$

a je vo všeobecnosti funkciou teploty $\alpha = \alpha(t)$. Vyjadruje relatívnu zmenu rezistancie pripadajúcu na zmenu teploty o 1 K. Pre kovové vodiče je $\alpha > 0$, z čoho vyplýva, že rezistencia vodičov s rastúcou teplotou rastie. Táto skúsenosť potvrdzuje uvedenú predstavu, že zvyšovaním teploty zvyšuje sa intenzita kmitavého pohybu iónov kovovej mriežky a tak dochádza k zvyšovaniu frekvencie vzájomných zrážok vodivostných elektrónov a vodivostných elektrónov s iónmi kovovej mriežky. To znamená, že s rastúcou teplotou rastie v elektrickom poli neusporiadaný pohyb vodivostných elektrónov, ktorý sa nakoniec prejaví v raste rezistancie vodičov s rastúcou teplotou. V širokom intervale teplôt α , má približne konštantnú hodnotu. Za uvedenej podmienky, integráciou (1) dostaneme

$$R(T) = R_0 e^{\alpha(T-T_0)} \quad (2)$$

kde R_0 je elektrický odpor vodiča pri teplote $t_0 = 0$ °C. Závislosť rezistancie kovových vodičov od teploty sa v širokom intervale teplôt používa na meranie teploty pomocou platinového odporového teplomera (pozri úlohu č. 20). Doposiaľ sme rezistanciu vodičov opisovali z pohľadu klasickej mechaniky. Na druhej strane, z kvantovomechanického opisu vodivosti kovov vyplýva, že pokiaľ sú ióny kovov uložené periodicky, t. j. tvoria dokonalú kryštalickú mriežku, je pohyb elektrónov taký, akoby voľnej častice, avšak s inou hmotnosťou než akú by mal vodivostný elektrón z pohľadu klasickej fyziky. Takáto hmotnosť sa nazýva efektívna hmotnosť a označuje sa m^* . Tepelné kmity mriežky narušujú však periodický charakter rozloženia iónov, podobne aj prímiesové atómy. Poruchy mriežky spôsobujú, že sa na nich elektróny rozptyľujú. Pohyb vodivostného elektrónu je teda voľným pohybom za nejakú strednú dobu τ , ktorá sa nazýva stredná doba voľného pohybu.

Teraz naznačíme odvodenie Ohmovho zákona pre elektrický obvod z predstavy elektrónov pohybujúcich sa v odporovom prostredí. Elektrický prúd vo vodiči je vyvolaný elektrickým poľom. Uvažujeme jeden elektrón a vyšetříme účinok elektrického poľa naň vo vodiči. Na elektrón bude pôsobiť sila

$$F = ma = eE, \quad (3)$$

kde m a e je hmotnosť a náboj elektrónu, E je intenzita elektrického poľa. Táto sila je konštantná, a teda pohyb elektrónu bude rovnomerne zrýchlený. Rýchlosť elektrónu účinkom poľa sa vektorovo pripočíta k jeho rýchlosti tepelného pohybu. Získaný prírastok kinetickej energie vyvolaný elektrickým poľom sa pri zrážkach odovzdá nakoniec kovovej mriežke, čím sa zväčší teplota vodiča. Možno predpokladať, že po zrážkach elektrónu s časticami vodiča zaniká zložka rýchlosti nadobudnutá pôsobením elektrického poľa. Uvažovaný elektrón pred nasledujúcou zrážkou získa rýchlosť v_{max} . Strednú rýchlosť vyvolanú elektrickou silou medzi dvoma zrážkami možno vyjadriť jednoducho

$$v_0 = (0 + v_{max})/2 = \frac{a\tau}{2} = \frac{eE\tau}{2m}, \quad (4)$$

kde a je zrýchlenie elektrónu a τ je doba medzi dvoma nasledujúcimi zrážkami, t. j. čas potrebný na prebehnutie voľnej dráhy λ . Túto vzdialenosť elektrón prebehne rýchlosťou tepelného pohybu \bar{v} , ktorá je omnoho väčšia ako stredná rýchlosť vyvolaná elektrickou silou ($v_0 \ll \bar{v}$), preto čas $\tau = \lambda/\bar{v}$. Táto úvaha umožňuje prúdovú hustotu vyjadriť v tvare

$$j = nev_0 = ne \frac{eE}{2m} \frac{\lambda}{\bar{v}} = \frac{ne^2 \lambda}{2m\bar{v}} E = \sigma E, \quad (5)$$

kde n je koncentrácia elektrónov vo vodiči a σ konduktivita. Pritom (5) $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ vyjadruje Ohmov zákon v diferenciálnom tvare. Zmenou teploty sa mení aj stredná doba voľného pohybu, a tým aj pohyblivosť, zatiaľ čo koncentrácia voľných elektrónov n je konštantná.

Rozptyl voľných elektrónov závisí od toho, na čom sa pohybujúce elektróny rozptyľujú (atómy, ióny, prímiesy, atď.). Ak je rozptyl spôsobený prevažne kmitmi mriežky, tak so zvyšujúcou sa teplotou vzrastá pravdepodobnosť rozptylu a doba τ klesá $\tau \sim 1/t$, čo sa prejaví poklesom konduktivity s narastaním teploty. Táto skutočnosť sa premieta aj do

známej lineárnej závislosti rezistencie väčšiny kovov od teploty v určitom teplotnom intervale. Pretože koeficient rezistencie α nadobúda pre kovy hodnoty rádoe 10^{-3} K^{-1} , rozvineme výraz $R = R(t)$ (2) do Taylorovho radu

$$R(t) = R_0 \left[1 + \alpha \frac{(t-t_0)}{1} + \alpha^2 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots \right] , \quad (6)$$

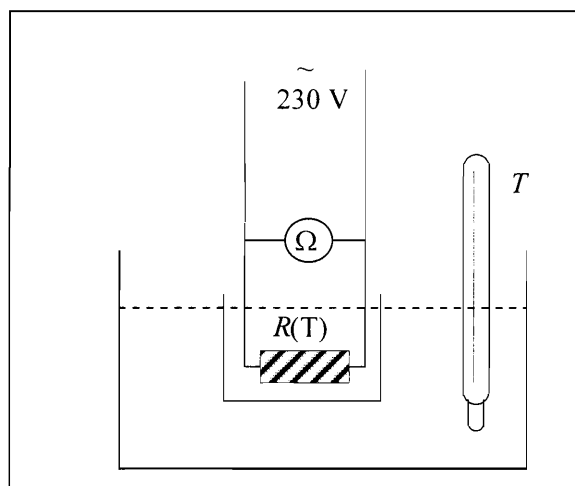
po zanedbaní vyšších členov, ako je lineárny, dostaneme

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha(t-t_0)] , \quad (7)$$

Prístroje a pomôcky: ortuťový teplomer, spojovacie vodiče, olejový kúpeľ – termostat, dva známe rezistory, multimeter.

Opis aparatury:

Na obr. 1 je znázornený zdroj striedavého prúdu, termostat naplnený so silikónovým olejom, do ktorého je ponorená cievka kovového vodiča $R(T)$ a ortuťový teplomer T . Odpor vodiča sa meria pomocou číslicového Ω -metra.



Obr. 1. Schéma merania teplotnej závislosti odporu

Postup práce:

Rezistencia vodičov závisí od celého radu vonkajších činiteľov (teploty, tlaku, elektrického a magnetického poľa, svetla atď.), čo sa prejavuje v zmenách pretekajúceho elektrického prúdu. Tu sa obmedzíme len na meranie vplyvu teploty na elektrický odpor. Meranie závislosti rezistencie vodiča od teploty spočíva v meraní dvojice hodnôt (R_i , t_i) rezistencie číslicovým Ω -metrom a teploty teplomerom.

Teplota sa v termostate v olejovom kúpeli zvyšuje z hodnoty laboratórnej teploty najviac na teplotu $100 \text{ }^\circ\text{C}$ v krokoch približne po $5 \text{ }^\circ\text{C}$. Po každom zvýšení teploty treba čakať, kým sa teplota v termostate ustáli. Po ustálení teploty odmeria sa rezistencia vodiča.

Tab. 1 Namerané hodnoty rezistancií a teplôt.

č. m. <i>i</i>	$t_i / ^\circ\text{C}$	R_i / Ω

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do Tab. 1 zapíšte dvojice parametrov (t_i, R_i) odčítané zo stupnice číslicového Ω -metra a ortuťového teplomera. Z nameraných hodnôt zostrojte závislosť $R = F(t)$ v súhlase s rovnicou (7) a preložte nameranými bodmi priamku, zo smernice ktorej určíte teplotný koeficient rezistencie rezistora. Alternatívne meranie môžete zhodnotiť numerickou metódou regresnej analýzy.

Rozbor presnosti merania:

Výsledné hodnoty $\alpha(i)$ porovnajte s tabuľkovými hodnotami. Relatívnu neistotu merania $\delta_\alpha(i)$ voči tabuľkovej hodnote vypočítajte z rovnice

$$\delta_\alpha(i) = \frac{\alpha_{tab}(i) - \alpha(i)}{\alpha_{tab}(i)} 100\%, \quad i = 1, 2$$

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Diskutujte o výsledkoch meraní a zhodnoťte ich neistoty a chyby.

Kontrolné otázky:

1. V čom je zásadný rozdiel medzi vysvetlením závislosti rezistencie kovových vodičov z hľadiska klasickej fyziky a kvantovej mechaniky?
2. Pouvažujte o teplotnej závislosti rezistancií polovodičov. V čom je zásadný rozdiel v porovnaní s kovmi?
3. Aké metódy merania rezistencie vodičov a polovodičov poznáte?

17. MERANIE REZISTANCIÍ

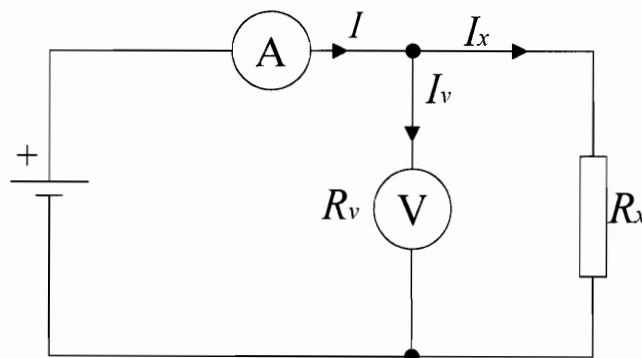
Cieľ práce: Zoznámiť sa s princípmi V-A metódy a Wheatstonovho mostíka merania rezistancie rezistorov.

- Úlohy:**
1. Pomocou V-A metódy (schéma zapojenia obr. 1) namerajte hodnoty rezistancií neznámych rezistorov R_{x1}, \dots, R_{x5} .
 2. Namerajte hodnoty rezistancií neznámych rezistorov R_{x1}, \dots, R_{x5} pomocou Wheatstonovho mostíka.
 3. Určte výslednú rezistanciu rezistora vzniknutého rôznou kombináciou nasledujúcich rezistorov a zapíšte ich hodnoty do tab. 1
 - a) R_{x1}, R_{x2} zapojených paralelne
 - b) R_{x1}, R_{x5} zapojených paralelne
 - c) R_{x1}, R_{x2} zapojených sériovo
 - d) R_{x1}, R_{x5} zapojených sériovo
 - e) R_{x1}, R_{x2}, R_{x5} zapojených sériovo-paralelne podľa schémy na obrázku 3Namerané hodnoty zapíšte do tab. 1

Teoretický úvod:

Meranie rezistancií V-A metódou

Je to metóda, kde sa merajú rezistancie rezistorov pomocou voltmetra a ampérmetra. Najčastejšie sa používa schéma podľa obr. 1



Obr. 1.

Na schéme sú vyznačené prúdy I_x prechádzajúce cez rezistor R_x a prúd I_V cez voltmeter Prúd cez V-meter poznáme – vypočítame ho podľa Ohmovho zákona z vnútornej rezistancie V-metra pre zvolený rozsah a z napätia, ktoré V-meter ukazuje (vnútorná rezistancia V-metra je udaná zvyčajne na spodnom veku prístroja, niekedy vedľa stupnice, a to v tvare ... Ω/V . Číselný údaj treba vynásobiť rozsahom V-metra). Zo schémy na obr. 1 vidieť, že

$$I = I_V + I_x = \frac{U}{R_V} + \frac{U}{R_x} ,$$

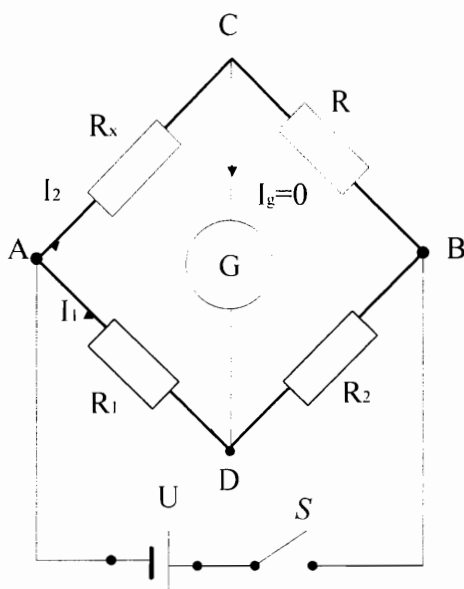
odkiaľ pre meranú rezistanciu dostaneme

$$R_x = \frac{UR_1}{IR_1 - U} \quad (1)$$

V tomto vzťahu sú I a U údaje odčítané zo stupníc A-metra a V-metra. Tento vzťah zahrňuje tzv. korekciu na V - meter a musí sa vždy použiť, ak nemáme istotu, že vnútorná rezistencia V-metra nie je aspoň 100 krát väčší ako neznáma rezistencia.

Meranie rezistancií Wheatstonovým mostíkom

Wheatstonov mostík sa používa na presné meranie rezistancií neznámych rezistorov. Úlohou bude presvedčiť sa o presnosti určenia rezistancií jednotlivých rezistorov, ktoré budeme spájať sériovo, alebo paralelne a kombinovane. Pri podobných meraniach sa používa Wheatstonov mostík, ktorého princíp uvedieme podrobnejšie.



Obr. 2.

Uvažujeme zapojenie rezistorov R_1 , R_2 , R a R_x podľa obr. 2. Po zapojení spínača preteká vetvou CD prúd, ktorý je úmerný rozdielu potenciálov v bodoch C a D. Ak rozdiel potenciálov v bodoch C a D sa rovná nule, potom aj prúd vo vetve CD je nulový. Vtedy úbytky napätia na rezistore R_x a R_1 sú rovnaké, t. j. platí

$$R_x I_2 = R_1 I_1 \quad (2)$$

Analogicky súčasne platí

$$RI_2 = R_2 I_1 \quad (3)$$

Delením rovnic (2) a (3) dostaneme

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_1}{R_2} \quad (4)$$

Zo známých rezistorov R_1 , R_2 a R môžeme vypočítať rezistanciu R_x podľa vzťahu

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R \quad (5)$$

Súčasťou Wheatstonovho mostíka je homogénny odporový drôt s konštantným prierezom S a zvyčajne dĺžky 1 m. Drôt je napnutý na drevenej late s dĺžkovým meradlom so sto dielikmi. Po meradle sa posúva jazdec, ktorý rozdeľuje drôt na dve časti. Odpor jednej časti je R_1 , druhej R_2 . Pretože drôt je konštantného prierezu, odpory R_1 a R_2 sú priamo úmerné dĺžkam a nepriamo úmerné prierezu S drôtu, t. j. platí

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l}{S} = k \cdot l$$

$$R_2 = \rho \cdot \frac{100-l}{S} = k \cdot (100-l)$$

ρ - je rezistivita,

S - prierez drôtu,

l - dĺžka drôtu, odčítaná na dĺžkovom meradle, a

$k = \rho/S$

Platí teda aj

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l}{(100-l)} \quad (6)$$

Obidva konce drôtu a jazdec majú svorky, ku ktorým zapájame: meraný rezistor R_x , známy rezistor R (býva to odporový normál), galvanometer a zdroj napätia. Schéma zapojenia Wheatstonovho mostíka je na obr. 2.

Pre zostavenie Wheatstonovho mostíka použijeme namiesto homogénneho odporového drôtu s konštantným prierezom dve odporové dekády.

Pre výslednú rezistanciu R sériovo zapojených rezistorov platí vzťah

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (7)$$

Pre výslednú rezistanciu R paralelne zapojených rezistorov platí vzťah

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (8)$$

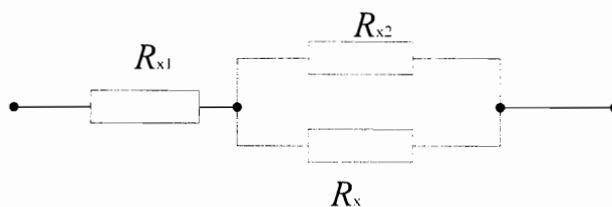
Prístroje a pomôcky: Wheatstonov mostík, odporové dekády, voltmeter, ampérmeter, galvanometer, zdroj napätia, regulačný reostat, spínač, spojovacie drôty, neznáme rezistory.

Opis aparatury:

Na obrázku 1 je uvedená schéma zapojenia pre meranie rezistancií voltampérovou metódou. Na obr. 2 je uvedená schéma na meranie odporov Wheatstonovým mostíkom.

Postup práce:

1. Zapojte prístroje podľa schémy na obr. 1.
2. Zmerajte napätie a prúd na príslušných prístrojoch pre 5 rôznych napätí napájacieho zdroja
3. Podľa bodu 2 zmerajte rezistancie 5-ich rôznych rezistorov R_{x1}, \dots, R_{x5} .
4. Urobte zapojenie podľa schémy na obr. 2 a namiesto rezistora R_x postupne zapájajte jednotlivé rezistory $R_{x1}, R_{x2}, R_{x3}, R_{x4}, R_{x5}$.
5. Namiesto rezistorov R_1, R_2 sú zapojené odporové dekády. Zmenou rezistancií odporových dekád dostaneme $R_x/R = R_1/R_2$, aby prúd pretekajúci galvanometrom bol nulový, potom zo vzťahu (5) vypočítame neznámu rezistanciu R_{xi}



Obr. 3. Schéma sériovo-paralelne zapojených rezistorov.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do vami prispôsobenej tabuľky 1 zapíšte hodnoty odčítané z meracích prístrojov ampérmetra, voltmetra a galvanometra. Z nameraných hodnôt vypočítajte odpory podľa zadania úlohy.

Tab. 1 Namerané hodnoty odporov rezistorov V-A metódou a Wheatstonovým mostíkom

B	V-A metóda	Wheatstonova metóda	
R_{x1} / Ω			a) R_{x1}, R_{x2} paralelne
R_{x2} / Ω			b) R_{x1}, R_{x5} paralelne
R_{x3} / Ω			c) R_{x1}, R_{x2} seriove
R_{x4} / Ω			d) R_{x1}, R_{x5} seriove
R_{x5} / Ω			e) R_{x1}, R_{x2}, R_{x5} seriove-paralelne

Rozbor presnosti merania:

1. Orientačne určte multimetrom hodnoty rezistancií meraných rezistorov a porovnajte ich s experimentálne zistenými.

2. Na základe teórie chýb zistíte, ktorý rezistor (najmenší či najväčší) najviac zaťažuje výslednú hodnotu neistoty rezistancie rezistora pri a) sériovom b) paralelnom zapojení rezistorov?

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní najmä s dôrazom na bod 3 úlohy.

Kontrolné otázky:

1. Zdôvodnite, ktorá z uvedených metód je vhodnejšia na meranie malých rezistancií.
2. Aké metódy sa používajú na meranie veľkých rezistancií?
3. V čom sú výhody a nevýhody merania rezistancií číslicovými Ω - metrami?

18. MAPOVANIE ELEKTRICKÉHO POĽA V ROZTOKOCH SILNÝCH ELEKTROLYTOV

Cieľ práce: Mapovať elektrické pole na základe rozloženia ekvipotenciálnych hladín v homogénnom vodivom prostredí.

- Úlohy:**
1. Vyšetrite elektrické pole stacionárneho prúdu v roztokoch silných vodných elektrolytov NaCl, KCl, alebo vodovodnej vody.
 2. Modelujte rozloženie ekvipotenciálnych hladín stacionárneho prúdu v homogénnom vodivom prostredí medzi dvoma kovovými elektródami.
 3. Výsledky merania spracujte graficky.

Teoretický úvod:

Elektrické pole je priestor silových účinkov v okolí elektrických nábojov. Ak tieto náboje sú nehybné, je to elektrostatické pole. Intenzita elektrického poľa v okolí náboja Q , je sila pripadajúca na jednotkový kladný náboj Q'

$$E = \frac{F}{Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} . \quad (1)$$

Potenciál elektrického poľa prislúchajúceho náboju Q je potenciálna energia delená nábojom Q' . Číselne sa teda rovná práci, ktorú vykonáme pri prenesení jednotkového kladného náboja zo vzťažného miesta na dané miesto. Absolútny potenciál elektrického poľa dostaneme, ak vzťažná hladina je v nekonečne

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} . \quad (2)$$

Intenzita elektrického poľa súvisí s potenciálom vzťahom

$$E = - \text{grad} \varphi . \quad (3)$$

Graficky sa elektrické pole zobrazuje pomocou sústavy siločiar a ekvipotenciálnych hladín. Na rozhraní dvoch rozličných prostredí musia byť splnené určité podmienky, ktoré možno formulovať pomocou zákona lomu siločiar. Siločiar v elektrickom poli je orientovaná čiara, ktorá je v každom svojom bode súhlasne rovnobežná so smerom intenzity elektrického poľa. Siločiar vždy vychádzajú z kladného náboja a končia v zápornom náboji. Keďže majú smer sily, určujú aj smer zrýchlenia kladného náboja vloženého do elektrického poľa. Ďalším dôležitým pojmom je ekvipotenciálna hladina. Je to plocha resp. čiara, ktorej každý bod má rovnaký potenciál. Siločiar sú v každom bode poľa kolmé na ekvipotenciálne hladiny. V priestore, kde sú ekvipotenciálne hladiny husto rozložené, je veľký gradient potenciálu (3). Aj siločiar elektrického poľa v priestore s veľkou intenzitou poľa sú nahustené. Rozloženie siločiar resp. ekvipotenciálnych hladín poskytuje obraz o elektrickom poli.

Mapovanie elektrického poľa sa zakladá na experimentálnom zistení rozloženia ekvipotenciálnych hladín alebo siločiar poľa v určitom prostredí. Meranie sa zakladá na predstave, že zisťovanie rozloženia ekvipotenciálnych hladín v elektrickom poli možno

nahradiť vyšetovaním elektrického poľa stacionárneho prúdu v homogénne vodivom prostredí. Vo vodivom prostredí elektrické pole vyvoláva prenos elektrických nábojov, podľa Ohmovho zákona charakterizovaný vektorom prúdovej hustoty \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} , \quad (4)$$

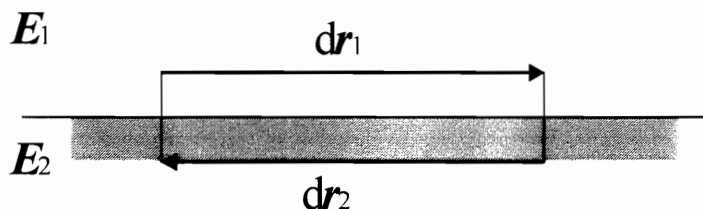
kde σ je konduktivita prostredia

Podmienky na rozhraní dvoch rozličných prostredí, keď na rozhraní nie je prítomný voľný elektrický náboj, dostaneme na základe nasledujúceho zjednodušeného postupu. Keďže elektrické pole je potenciálové, integrál z elektrickej intenzity po uzavretej dráhe sa vždy rovná nule

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 . \quad (5)$$

Ak si integračnú dráhu zvolíme v podobe obdĺžnika zapadajúceho do obidvoch stýkajúcich sa prostredí (obr. 1), potom z (5) vyplýva

$$E_1 dr_1 + E_2 dr_2 = 0 . \quad (6)$$

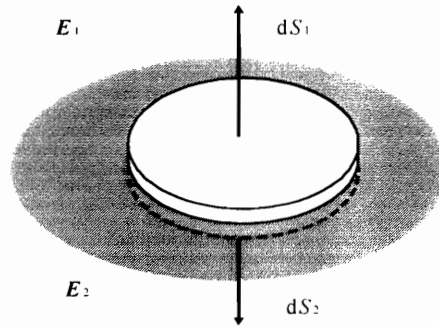


Obr. 1

Príspevky bočných strán obdĺžnika sa vzájomne zrušia. Ak označíme jednotkový vektor v smere diferenciálu polohového vektora $d\mathbf{r}_1$ ako $\boldsymbol{\rho}$, potom $d\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho} ds$ a tiež $d\mathbf{r}_2 = -\boldsymbol{\rho} ds$. Pritom, keďže $E_1 \boldsymbol{\rho}$ a $E_2 \boldsymbol{\rho}$ vyjadrujú priemety príslušných intenzít do roviny rozhrania, čiže do smeru tangenty, podmienku pre tangenciálne zložky intenzít $E_{t1} = E_{t2}$ dostaneme z rovnice (5). Podmienku pre normálové zložky elektrickej indukcie D_{n1} a D_{n2} dostaneme z príslušných vektorov indukcie na rozhraní dvoch prostredí.

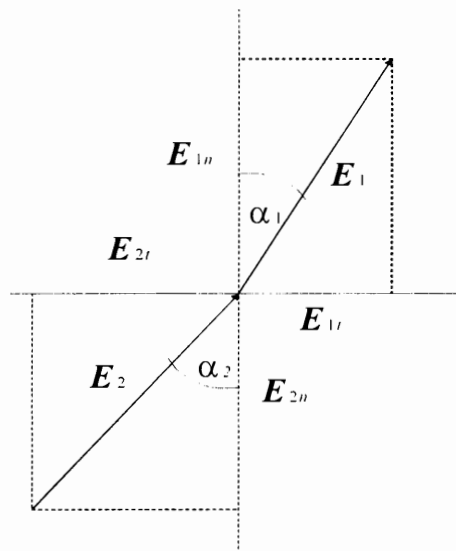
Zvoľme si valček so základňou dS , ktorý zasahuje do obidvoch stýkajúcich sa prostredí (obr. 2). Keďže podľa predpokladu nie je na rozhraní voľný elektrický náboj, Gaussovu vetu pre uvedenú situáciu valčeka možno vyjadriť v tvare

$$D_1 dS_1 + D_2 dS_2 = 0 . \quad (7)$$



Obr. 2

Toky elektrickej indukcie bočnými stenami nie je potrebné uvažovať. Ak zavedieme jednotkový vektor \mathbf{n} kolmý na rovinu rozhrania smerujúcu do prvého prostredia, možno písať $d\mathbf{S}_1 = \mathbf{n}dS$, $d\mathbf{S}_2 = -\mathbf{n}dS$ a keď uvažíme, že skalárne súčiny $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}$ a $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}$ sú normálové zložky príslušných vektorov indukcie, dostaneme z rovnice (7) podmienku pre normálové zložky vektora indukcie v tvare $D_{n1} = D_{n2}$. Podľa obr. 3



Obr.3

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}, \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}, \quad (8)$$

takže rovnica

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{1t}}{E_{2t}} \cdot \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1 D_{2n}}{\varepsilon_2 D_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (9)$$

vyjadrujúca zákon lomu siločiar na rozhraní dvoch prostredí s rôznymi permitivitami ε_1 a ε_2 . Tento zákon lomu siločiar je podobný lomu siločiar na rozhraní dvoch prostredí s rôznou konduktivitou, teda

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (10)$$

Táto podobnosť a stacionárny charakter elektrického poľa prúdov umožňujú modelovať elektrické pole rozličných systémov, ak je splnená uvedená podmienka. V prípade, že máme v pláne vyšetrovať rozloženie siločiar na rozhraní vodič – dielektrikum, kde siločiarly vystupujú kolmo na povrch vodiča, je potrebné, aby bola splnená podmienka

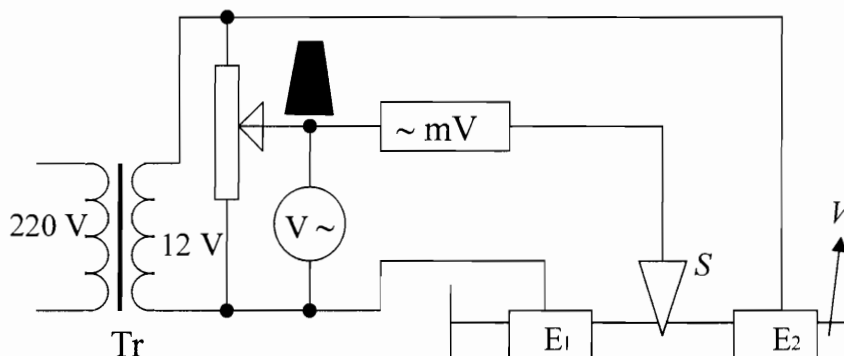
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} \cong 0, \text{ t. j. } \sigma_2 \ll \sigma_1 \quad (11)$$

Túto podmienku možno realizovať na rozhraní kov – silný elektrolyt. Toto sa využíva v laboratórnych podmienkach za účelom nájdenia rozloženia elektrických polí zložitých systémov elektricky nabitých telies.

Prístroje a pomôcky: transformátor Tr, voltmeter V (~), potenciometer, milivoltmeter, elektrolytická vaňa V, dve elektródy E₁, E₂ elektrolyt alebo len voda z vodovodu

Opis aparatúry:

Na obr. 4 je znázornený transformátor Tr a 12 V zdroj, regulovaný odpor R, ktorým sa nastavuje požadované napätie medzi elektródami. Sonda S, ktorou sa hľadá bezprúdový stav- nulová výchylka na stupnici mV-metra , alebo galvanometra.



Obr. 4

Postup práce:

Elektrické pole medzi dvoma elektródami sa mapuje tak, že sondou S (obr. 4) sa hľadajú medzi elektródami E_1 a E_2 ponorenými do elektrolytu body rovnakého potenciálu indikované nulovou výchylkou na milivoltmetri. Na začiatku merania na milimetrový papier treba zaznačiť súradnice elektród (E_1 , E_2) v elektrolytickej vani. Kostru elektronického mV-metra treba vodivo spojiť s jazdcou potenciometra. Potom mV-meter meria napätie sondy voči tomuto ukostrenému (uzemnenému) bodu. Postup merania možno zhrnúť do nasledujúcich bodov:

1. Jazdcou na regulovanom odpore nastavíme na voltmetri V_{\sim} určité napätie, napr. $U_1 = 2$ V.
2. Sondou S nájdeme bod, v ktorom milivoltmeter mV ukáže nulovú výchylku, cez obvod neprebíha prúd. Toto miesto má potenciálový rozdiel U_1 .
3. Podľa bodu 2, sondou hľadáme v elektrolytickej vani aspoň 10 takých bodov pre zvolené napätie ($U_{11}, U_{12}, U_{13}, \dots, U_{110}$).
4. Nastavte iné napätie $U_2 > U_1$ a opakujte body 2 a 3.

Takýmto postupom nájdeme 7 – 10 ekvipotenciálnych čiar, ktoré sú približne rovnomerne rozložené po celej ploche mapovaného poľa, pričom na každej ekvipotenciálnej hladine nájdeme aspoň 10 bodov pre zvolený potenciál.

Spracovanie nameraných hodnôt:

1. Pospájaním bodov tvoriacich jednotlivé ekvipotenciálne hladiny nakreslite na plochu mm-papiera mapu elektrického poľa medzi elektródami.
2. Do siete ekvipotenciálnych čiar zakreslite siločiaru, kolmé na ekvipotenciálne hladiny, ktoré znázorňujú priebeh intenzity elektrického poľa v danom bode.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Diskutujte o metóde mapovania elektrického poľa a kvalitatívne zhodnot'te neistoty, ktoré ovplyvňujú nameranú mapu ekvipotenciálnych hladín.

Kontrolné otázky:

1. Rovnica (4) platí všeobecne alebo len pre stacionárne polia prúdov? Platila by aj v prípade elektromotorických napätí existujúcich v homogénnom prostredí elektrolytov?
2. Ak viete, že podstatnou zložkou svetla je kmitanie vektora elektrickej intenzity, vysvetlite, prečo pri odraze alebo pri lome svetla dochádza k potlačeniu kmitania elektrického vektora v určitých rovinách, čiže k polarizácii svetla? Odpoveď na otázku dáva zákon lomu siločiar na rozhraní dvoch prostredí.
3. Prečo siločiaru elektrického poľa majú vždy svoj začiatok a koniec, kým magnetické indukčné čiary magnetického poľa sú vždy uzavreté?

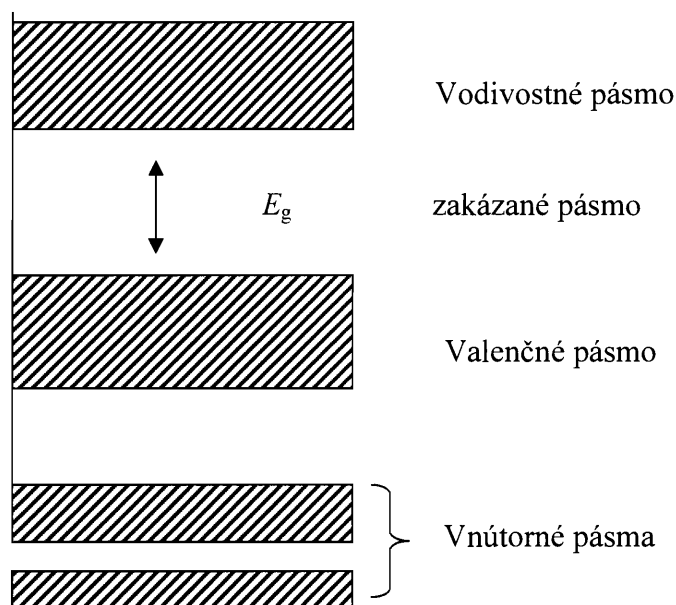
19. MERANIE VOLTAMPÉROVÝCH CHARAKTERISTÍK DIÓD

Cieľ práce: Namerať voltampérové charakteristiky žiarovky a diód.

- Úlohy:**
1. Odmerajte a graficky znázorníte voltampérovú charakteristiku žiarovky.
 2. Odmerajte a graficky znázorníte voltampérovú (VA) charakteristiku kremíkovej diódy v priepustnom i závernom smere.
 3. Odmerajte a graficky znázorníte VA charakteristiku Zenerovej diódy v priepustnom i závernom smere.
 4. Z grafu funkcie $\ln I = f(U)$ pre $U > 0$ určte parametre kremíkovej usmerňovacej diódy I_0 ; α .

Teoretický úvod:

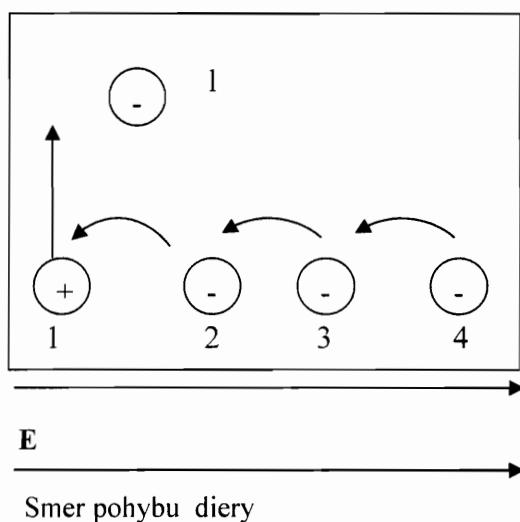
Súčasná technológia umožňuje pripraviť látky, ktorých rezistancia sa takmer spojíte mení od hodnôt charakteristických pre najlepšie izolanty ($1 \cdot 10^{17} \Omega \cdot m$) až po hodnoty typické pre najlepšie vodiče ($1 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$). Pre látky s rezistancia medzi $1 \cdot 10^{-4}$ až $1 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$ sa zaužíval názov polovodiče. Z kvantovomechanickej teórie vyplýva, že elektróny v pevných látkach môžu obsadzovať len určité, tzv. dovolené energetické stavy, čo sa aj experimentálne potvrdilo. Pre kryštál je energetické spektrum zložené z pásiem zakázaných a dovolených energií (obr. 1). Vnútorne pásma patria elektrónom pevne lokalizovaným v priestore jadier atómov. Z hľadiska určenia základných vlastností polovodičov sa stačí zaoberať vodivostným, valenčným a zakázaným pásmom, ktorého šírku energie označujeme E_g . V polovodičoch bývajú tieto pásma široké rádovo 1eV. E_g vyjadruje zároveň veľkosť aktivačnej energie zodpovedajúcej prechodu elektrónu z valenčného do vodivostného pásma.



Obr. 1. Energetické spektrum polovodičov

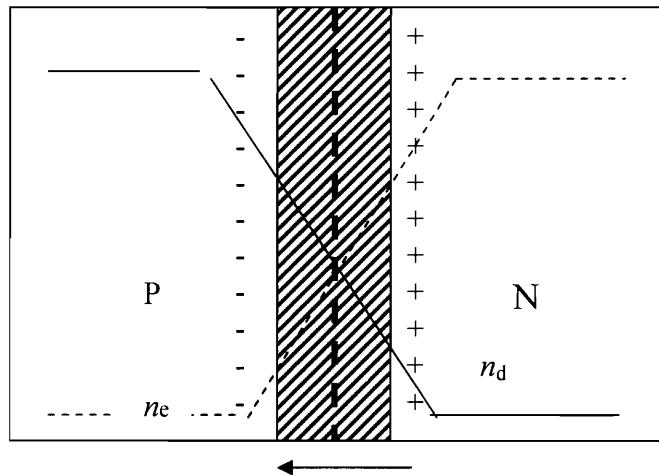
Vodivosť polovodičov

Z teórie vyplýva, že pri teplote $T \approx 0$ K je plne obsadené valenčné pásmo. Vodivostné pásmo je prázdne, t. j. nenachádzajú sa v ňom nosiče elektrického náboja a polovodič za týchto podmienok sa chová ako izolant. Ak elektrónom vo valenčnom pásme dodáme (napr. zvýšením teploty) energiu rovnajúcu sa šírke zakázaného pásma, môžu preskočiť niektoré elektróny do vodivostného pásma, v ktorom sú prakticky voľné a môžu sprostredkovať prenos náboja v prítomnosti vonkajšieho elektrického poľa. Opísaný prípad nastáva pri tzv. čistých polovodičoch. Reálne polovodiče však obsahujú rôzne prímеси v malých koncentráciách. Tieto vytvárajú v zakázanom pásme tzv. prímesové hladiny. Prímesové hladiny, ktoré sú v základnom stave obsadené elektrónmi, sa vytvárajú blízko dna vodivostného pásma. Nazývame ich donorové hladiny. Donorové hladiny sa vyznačujú malou aktivačnou energiou a v bežných polovodičoch sú už pri izbovej teplote ionizované, t. j. elektróny z nich preskočia do vodivostného pásma. Polovodič potom vykazuje elektrónovú vodivosť. Označujeme ho ako polovodič typu N. Prímesné hladiny, ktoré sa vytvoria tesne nad valenčným pásom, obsahujú neobsadené hladiny, na ktoré sa môžu dostať absorbovaním malej energie elektróny z valenčného pásma. Tieto hladiny nazývame akceptorové. Elektróny vo valenčnom pásme sa podieľajú na vytváraní chemických väzieb medzi atómami. V prípade, že sa elektrón z takejto väzby uvoľní a zachytí na akceptorovej hladine, valenčný stav zostane neobsadený. Pri opise mechanizmu vedenia elektrického prúdu v takýchto polovodičoch sa úspešne využíva formalizmus fiktívnej častice – diery. Na diery sa pozeráme ako na kladné častice, ktoré môžu sprostredkovať prenos náboja vo valenčnom pásme. Polovodič v tomto prípade je typu P. Prenos náboja dierami je zrejмый z obr. 2.



Obr. 2. Dierová vodivosť polovodiča

Predstavme si, že valenčný elektrón “1” sa nejakým spôsobom uvoľnil. Zostala po ňom diera. Ak vytvoríme v polovodiči elektrické pole s intenzitou E , bude toto pôsobiť na všetky valenčné elektróny. V dôsledku tohto elektrón “2” preskočí do diery “1”. Tým sa diera, t. j. kladný náboj, posunie na miesto “2” atď. Výsledkom je pohyb diery, kladného náboja v smere intenzity vonkajšieho elektrického poľa.



Obr. 3. PN priechod s vyznačením smeru E_p

PN priechod

Pre technické použitie polovodičov sú veľmi významné vlastnosti tzv. PN priechodu. Je to oblasť polovodiča, v ktorej sa mení elektrická vodivosť jedného typu na opačný. Názorne to vidíme na obr. 3. Krivka n_d znázorňuje priebeh koncentrácie dier vo valenčnom pásme pozdĺž polovodiča a n_e priebeh koncentrácie voľných elektrónov vo vodivostnom pásme. Priebeh koncentrácií nosičov na samotnom styku P a N oblastí nezodpovedá tomuto rozdeleniu. V blízkom okolí priechodu, vďaka nehomogennému rozloženiu, začnú elektróny a diery difundovať z miest s vyššou koncentráciou do miest s nižšou koncentráciou nosičov náboja. Následkom toho vzniká tzv. priestorový náboj (šrafovaná časť obr. 3) a kontaktné elektrické pole intenzity E_p , ktoré difúziu postupne zoslabuje a nakoniec ju zastaví. Snahou kontaktného poľa je vtlačiť elektróny hlbšie do elektrónovej oblasti a diery do dierovej oblasti polovodiča. Samotná priechodová oblasť má preto podstatne menšiu koncentráciu nosičov náboja, a teda aj podstatne väčšiu rezistanciu ako zvyšok polovodiča.

Ak pripojíme na polovodič vonkajšie pole, toto sa prakticky celé sústreďuje v priechodnej oblasti. Ak je polarita vonkajšieho poľa s intenzitou E_v súhlasne orientovaná s E_p .

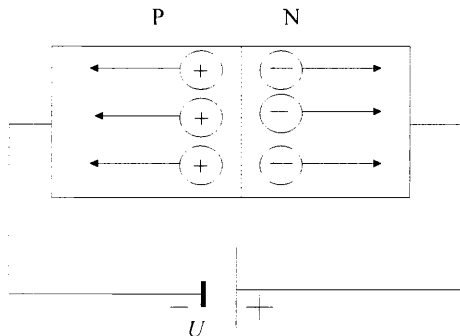
$$E_v \uparrow \uparrow E_p,$$

budú elektróny i diery silnejšie vytláčané od stredu PN priechodu, t. j. oblasť zväčšenej rezistencie sa rozšíri a rezistancia vzrastie. Hovoríme, že je vonkajšie pole (dióda, priechod PN) zapojené v nepriepustnom (závernom) smere (obr. 4).

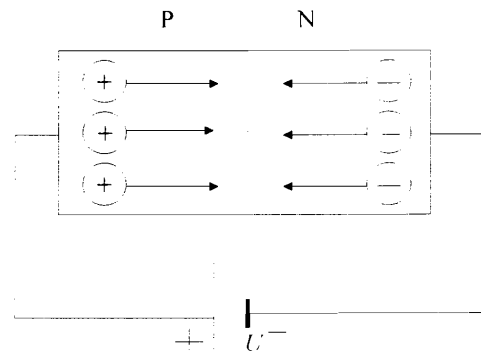
V prípade, že

$$E_v \uparrow \downarrow E_p,$$

t. j. vonkajšie pole má opačnú polaritu ako kontaktové, potenciálovým rozdielom na PN priechode sa zoslabuje a pri určitej kritickej hodnote (1 V) sa úplne vykompenzuje.



Obr. 4. Pripojenie vonkajšieho napätia v nepriepustnom v smere



Obr. 5. Pripojenie vonkajšieho napätia v priepustnom smere

Dôsledkom bude značný pokles rezistancie PN oblasti a priechod prepúšťa elektrický prúd. Hovoríme, že priechod PN je zapojený v priepustnom smere (obr. 5)

Opísané javy sa využívajú v tzv. polovodičových diódach na usmerňovanie striedavých elektrických prúdov. Polovodičová dióda je polovodič s jedným PN priechodom. Prúd I prechádzajúci diódou je funkciou napätia U

$$I = I(U) .$$

Pre voltampérovú závislosť vyplýva z teórie vzťah

$$I = I_0 (e^{\alpha U} - 1) \tag{1}$$

kde I_0 je konštanta prúdu, závislá od vlastností polovodiča a od kontaktných potenciálov medzi polovodičom a kovovými prívodmi a U je napätie diódy, prakticky sústredené na priechodnej oblasti. Koeficient α udáva vzťah:

$$\alpha = H \frac{e}{kT} , \tag{2}$$

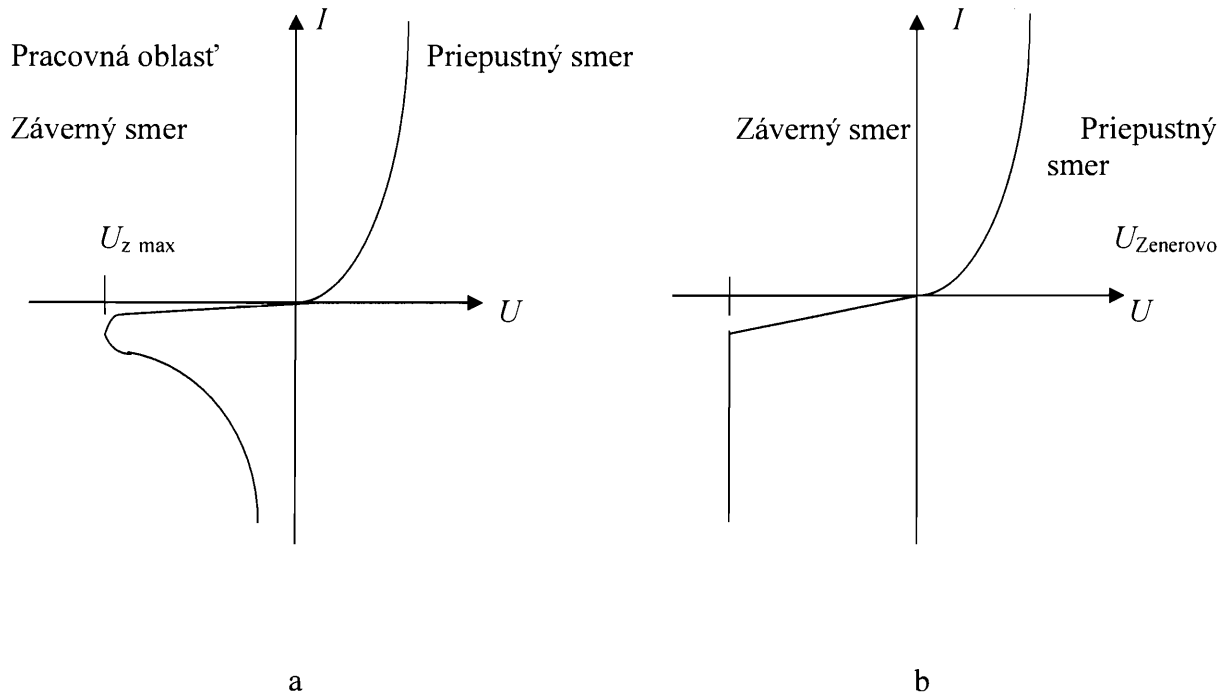
kde H je parameter závislý od kontaktového potenciálu (pri izbovej teplote $H \sim 1$), e je náboj elektrónu, k Boltzmannova konštanta a T termodynamická teplota.

Rovnica (1) v prípade záverného smeru zapojenia diódy pre dosť veľké $U < 0$ ($e^{\alpha U} \ll 1$) prejde do tvaru

$$I = -I_0$$

a v priepustnom smere pre dostatočne veľké U ($e^{\alpha U} \gg 1$) do tvaru

$$I = I_0 e^{\alpha U} \quad (3)$$



Obr. 6 Voltampérová charakteristika kremíkovej usmerňovacej (a) a Zenerovej diódy (b)

Logaritmovaním posledného výrazu dostaneme

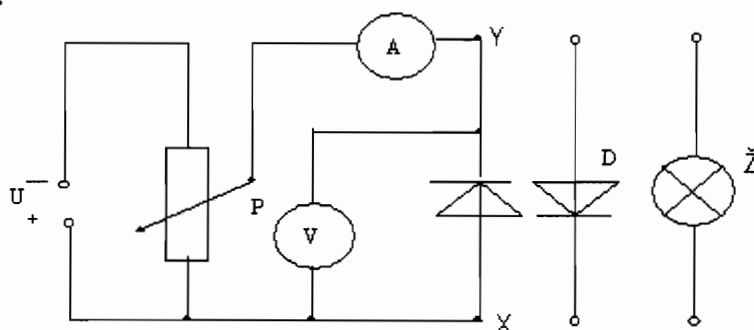
$$\ln I = \ln I_0 + \alpha U \quad (4)$$

Grafické zobrazenie (4) umožňuje určiť konštanty I_0 a α .

Zenerova dióda je špeciálny druh polovodičovej diódy. Využíva tzv. Zenerov efekt. Pripojením zdroja napätia v nepriepustnom smere vzniká v oblasti PN prieschodu veľmi silné elektrické pole, ktoré má za následok vytrhávajúce valenčných elektrónov z väzieb a ich prechod do vodivostného pásma. Tým sa prudko zvyšuje koncentrácia nosičov náboja vo vodivostnom pásme, rezistancia PN prieschodu klesá a prúd diódou stúpa. Prúd rastie pri prakticky nemeniacom sa napätí. Táto oblasti takmer „vertikálnej“ časti VA charakteristiky sa v praxi výhodne využíva na stabilizáciu napätia. Ukážka voltampérovej charakteristiky kremíkovej usmerňovacej a Zenerovej diódy je na obr. 6.

Prístroje a pomôcky: vyšetrované diódy, žiarovka, zdroj napätia, voltmeter, ampérmeter.

Opis aparátúry:



Obr. 7 Schéma zapojenia prístrojov

Na obr. 7 je znázornený zdroj napätia U s potenciometrom P (ten je už zabudovaný v zdroji), voltmeter V , ampérmetr A , polovodičová dióda (kremíková usmerňovacia i Zenerova) D , resp. v jednom z meraní použijeme namiesto diódy žiarovku.

Postup práce:

1. Zapojte obvod podľa obr. 7 a namerajte dvojice hodnôt $[U, I]$ potrebné pre voltampérové charakteristiky polovodičových diód a žiarovky.
2. Namerajte aspoň 10 dvojíc $[U, I]$ zvyšujúc napätie asi po 0,1 V v priepustnom smere zapojenej diódy a po 1 V v závernom smere tak, aby sa neprekročili nominálne hodnoty prúdu udané pre diódy v priloženom liste. Pri meraní VA charakteristiky žiarovky zvyšujte napätie po 1 V až do 12 V.
3. Odmerajte tak V-A charakteristiky kremíkovej diódy a Zenerovej diódy v priepustnom a závernom smere.
4. Z nameraných hodnôt zostrojte príslušné grafy.

Spracovanie nameraných hodnôt :

1. Zostavte tabuľku usporiadaných dvojíc $[U_i ; I_i]$ a zostrojte graf funkcie $I = f(U)$ pre meranie so žiarovkou.
2. Pri meraní VA charakteristiky oboch diód zapisujte údaje do tabuľky 1.

Tab. 1.

Č. mer. i	U/V	I/A	$\ln I$

Konštanty I_0 a α určte z parametrov grafu lineárnej funkcie (4) alebo alternatívne metódou regresnej analýzy.

Rozbor presnosti merania:

Namerané parametre diódy I_0 a α porovnajete s tými, ktoré udáva výrobca, ak sú k dispozícii.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu k výsledkom merania.

Kontrolné otázky:

1. Vysvetlite, prečo preteká diódou aj nepatrný prúd pri jej zapojení v závernom smere.
2. Kde treba umiestniť ampérmeter v obvode, v ktorom je dióda zapojená:
 - (a) v priepustnom smere
 - (b) v závernom smere ?

20. KALIBROVANIE TERMOČLÁNKU A TERMISTORA

Cieľ práce: Zoznámiť sa s princípmi merania teploty termočlámkami a termistormi..

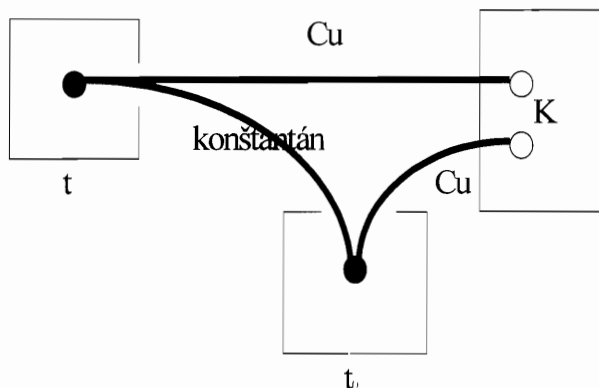
- Úlohy:**
1. Namerajte termoelektrické napätie termočlátku a rezistanciu termistora v závislosti od teploty
 2. Zobraďte graficky kalibračnú krivku termočlátku a termistora.

Teoretický úvod:

Termočlátky

Na rozhraní dvoch kovov sa ich dotykom vytvorí kontaktné - dotykové elektromotorické napätie, ktoré je pre danú dvojicu kovov charakteristickou veličinou.

A. Volta, ktorý kontaktné napätie objavil, usporiadal kovy do radu +Zn, Pb, Sb, Fe, Cu, Au, Ag, Pt, C-, v ktorom predchádzajúci kov sa nabíja kladne voči nasledujúcim kovom. Zistil tiež, že vzniknuté napätie medzi dvoma kovmi nezávisí od toho, či sú medzi nimi zapojené iné kovy alebo nie sú.



Obr. 1 Termočlánok

Ak vytvoríme uzavretý elektrický obvod spojením dvoch kovových vodičov a ich spoje udržiavame na nerovnakých teplotách, v obvode vznikne elektromotorické napätie a prechádza ním elektrický prúd. Vzniknuté napätie sa nazýva termoelektrické a takýto element sa nazýva termoelektrický článok alebo jednoducho termočlánok.

Ak má jeden spoj teplotu t_0 a druhý (prípadne obidva konce vodičov) teplotu $t \neq t_0$ (obr. 1), termoelektrické napätie môžeme vyjadriť vzťahom

$$U_{ct} = a(t - t_0) + \frac{1}{2} b(t - t_0)^2 \quad , \quad (1)$$

kde a , b sú tzv. Seebeckove konštanty, závisiace od zloženia a štruktúry kovov a ich zliatín; udávajú sa vzhľadom na referenčný kov-olovo. Ak je $t_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$, potom

$$U_{et} = at + \frac{1}{2}bt^2 \quad (2)$$

Termočlánky sa používajú predovšetkým na meranie teploty. Jeden spoj je v mieste, kde meriame teplotu a druhý tzv. chladený spoj, v termostate, udržiavanom napr. na $0\text{ }^\circ\text{C}$ pomocou zmesi ľadu a vody. Citlivosť býva okolo 10 až $40\text{ }\mu\text{V K}^{-1}$. V špeciálnych prípadoch možno termočlánky použiť aj ako generátory prúdu do nízkoodporovej záťaže.

Termoelektrické napätie sa meria obvykle kompenzačnými metódami (bezprúdovo), alebo iným citlivým prístrojom na meranie jednosmerného napätia.

Závislosť termoelektrického napätia U_{et} od teplotného rozdielu ($t-t_0$) medzi spojmi sa nazýva kalibračná krivka termočlánku (1).

Termočlánky sú veľmi praktické teplomery, lebo veľmi ľahko sa zhotovujú a nepotrebnú pomocný elektrický obvod, ktorý je nevyhnutný pri meraní teploty pomocou odporových teplomerov. Na druhej strane však vyžadujú realizáciu referenčnej teploty, najčastejšie $0\text{ }^\circ\text{C}$, túto teplotu realizujeme napr. zmesou ľadu a vody. Niektoré moderné digitálne prístroje na meranie teploty majú zabudovaný pomocný obvod na meranie teploty pomocou odporových teplomerov i elektronicky realizovanú referenčnú teplotu.

Termistory

Skupinu odporových teplomerov tvoria termistory, ktoré sú vyrábané z polovodičových materiálov. Najčastejšie sa používajú oxidy alebo sulfidy kovov Mn, Ni, Ti, Cu, Zn. Na rozdiel od kovov (pozri úlohu č. 16) rezistencia polovodičov so vzrastajúcou teplotou exponenciálne klesá podľa vzťahu

$$R_t = R_0 \exp\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{T_0}\right)$$

kde R_t je rezistencia pri teplote $t/^\circ\text{C}$ ($T = t + 273,15$), R_0 – odpor pri teplote t_0 a B – látková konštanta.

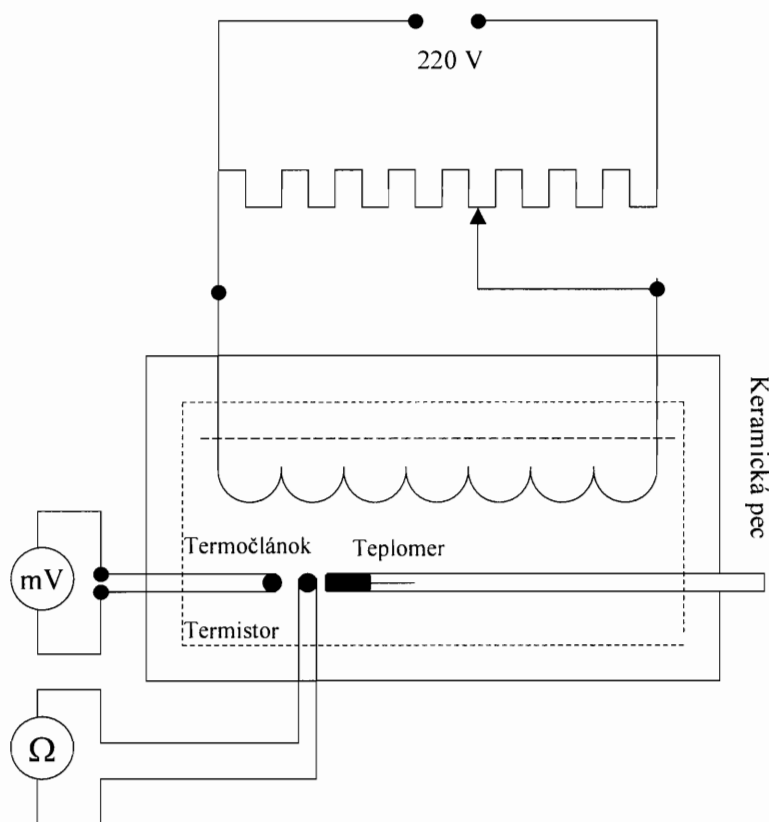
Termistory sú oveľa citlivejšie ako kovové odporové teplomery. Napríklad pri vzraste teploty o 200 K klesne rezistencia termistora o niekoľko rádov, kým rezistencia Pt teplomera vzrastie len dva krát. Termistory môžu mať veľmi malé rozmery (napr. perličkový termistor má priemer asi $0,5\text{ mm}$), takže sú vhodné na dynamické meranie teploty. Na druhej strane majú však menšiu stabilitu, s časom sa ich rezistencia mení a tým reprodukovateľnosť merania teploty klesá a preto treba termistory opakovane kalibrovať.

Prístroje a pomôcky: termočlánok, termistor, ortuťový teplomer, autotransformátor, milivoltmeter, keramická pec s výhrevným telesom

Opis aparatury:

Na obrázku 2 je znázornené usporiadanie prístrojov a pomôcok. Z obrázku je zrejme aj elektrické zapojenie ohmmetra s termistorom, termočlánku s milivoltmetrom a zapojenie transformátora na vyhrievanie piecky.

Meranie teplotnej závislosti rezistancie termistora a termoelektrického napätia termočlánku nazývame kalibrovanie a nameranú závislosť nazývame *kalibračná krivka*. Pri tomto meraní určujeme teplotu pomocou presnejšieho teplomeru, ktorý nazývame *normál*. Ako normál sa bude na cvičení pri kalibrácii používať sklenený ortuťový teplomer.



Obr. 2. Zapojenie prístrojov

Postup práce:

1. Zapojte zariadenia podľa schémy na obr. 2.
2. Vložte termočlánok resp. termistor a teplomer do keramickej piecky.
3. Zapojte koncové vodiče termočlánku na milivoltmeter a koncové vodiče termistora na číslcový ohmmeter.
4. Keramicú piecku zapojte na transformátor a mierne zvyšujte teplotu piecky od laboratórnej teploty 25°C na teplotu do 170°C . Nárast teploty zapisujte s krokom 5°C a ku každej hodnote teploty zaznamenajte termoelektrické napätie U_t termočlánku resp. rezistanciu R termistora.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do tabuľky 1 zapíšte hodnoty odčítané z ortuťového teplomera, ohmmetra a milivoltmetra. Z nameraných hodnôt zostrojíte kalibračnú krivku termistora a termočlánku.

Tab. 1 Namerané hodnoty rezistancií termistora a termoelektrického napätia termočlánku v závislosti od teploty

$t/^\circ\text{C}$	25	30	35		170
R_t/Ω					
U_{et}/mV					

Rozbor presnosti merania:

1. Rozbor presnosti merania vykonajte odhadom na základe presností udávaných na použitých meracích prístrojoch výrobcom. Teda na základe výrobcom udanej presnosti teplomera, ohmmetra a milivoltmetra.
2. Na základe rovnice (1) považujte, za akých podmienok relatívna neistota merania teploty ortuťovým teplomerom by bola totožná s neistotou merania teploty termočlánkom?

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a odhadnutú neistotu jednotlivého merania teploty vyznačte aj na príslušných kalibračných krivkách.

Kontrolné otázky:

1. Aké má výhody meranie teploty termočlánkami v porovnaní s odporovými kovovými teplomerami?
2. Zdôvodnite, prečo rezistencia termistorov s rastúcou teplotou klesá, ale rezistencia kovových teplomerov s rastúcou teplotou rastie.
3. Navrhnite prístroj merania teploty priamo v $^\circ\text{C}$ na princípe termočlánku.

21. OVERENIE PLATNOSTI FARADAYOVÝCH ZÁKONOV

Ciel' práce: Overiť platnosť Faradayových zákonov z množstva vylúčenej medi v coulometri na meď.

- Úlohy:**
1. Vážením zistíte množstvá vylúčenej medi na katóde coulometra na meď naplnenom Oettelovým roztokom.
 2. Porovnajete množstvo prešlého náboja medzi elektródami coulometra s teoretickým množstvom náboja.
 3. Z hodnoty ekvivalentovej hmotnosti medi, náboja elektrónu a vylúčeného množstva medi určíte Avogadrovu konštantu N_A .
 4. Štatisticky spracujte namerané hodnoty.

Teoretický úvod:

Vieme, elektrolyza súvisí so skutočnosťou, že pri prechode prúdu elektrolytom elektróny, ktoré sa nemôžu voľne pohybovať roztokom, reagujú na rozhraní kovového vodiča-elektrody a elektrolytu s časticami roztoku. Na zápornej elektróde (katóde) sa s nimi zlučujú a na kladnej elektróde (anóde) sa z nich uvoľňujú. Tieto prenosy elektrónu na povrchu kovovej elektródy sú *elektrochemické reakcie*. Reakcie, pri ktorých častice (ióny, molekuly) priberajú elektróny, sa nazývajú redukčné. Napríklad 1 000 C vylúči na katóde vždy 0,3294 g medi z roztoku meďnatej soli alebo 1,1183 g striebra z roztoku striebornej soli. Množstvo chemicky pozmenenej (vylúčenej) látky m je úmerné množstvu prejdeného náboja Q

$$m = AQ = A \int_0^t I dt \quad , \quad (1)$$

resp. pri konštantnom prúde I :

$$m = AIt \quad (2)$$

kde t je doba a konštanta úmernosti A , tzv. *elektrochemický ekvivalent*, značí množstvo látky chemicky pozmenené nábojom 1 C.

Faraday zistil, že jedno a to isté množstvo elektrického náboja vylúči z roztokov rôznych látok množstvá, ktoré sú úmerné ich ekvivalentovým hmotnostiam E (t. j. molekulovým resp. atómovým hmotnostiam M reagujúcich iónov delených počtom elektrónov v , ktoré ión pri elektródovej reakcii prijme alebo odovzdá, teda $E = \frac{M}{v}$).

Ekvivalentovú hmotnosť treba počítať vždy s ohľadom na príslušnú elektródovú reakciu. Napríklad pri vylučovaní kovov z roztoku ich solí je ekvivalentová hmotnosť daná podielom atómovej váhy a mocnosta iónov. Tu bude pre ekvivalentové váhy iónov platiť napr.: $E_{Ag^+} = 107,870$, $E_{Cu^{2+}} = 63,54 : 2 = 31,77$, $E_{Fe^{3+}} = 55,847 : 3 = 18,61$. Pri redukcii $Fe^{3+}(aq) + e \rightarrow Fe^{2+}(aq)$ je, pravda, $v = 1$, a teda $E = 55,847$.

Množstvo vylúčené nábojom 1 C, t. j. elektrochemický ekvivalent A , je úmerné ekvivalentovej hmotnosti E a tým aj veľkosti jedného gramekvivalentu (resp. kilogramekvivalentu)

$$E\left(= \frac{M}{\nu}\right).$$

Je dané vzťahom

$$A = kE = k \frac{M}{\nu}, \quad (3)$$

čo po dosadení do (2) dáva všeobecný Faradayov zákon

$$m = kEQ. \quad (4)$$

Množstvá látok chemicky pozmenených pri elektrolýze sú úmerné množstvu prejdeného náboja a ekvivalentovej hmotnosti príslušných iónov.

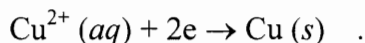
Na vylúčenie jedného gramekvivalentu (resp. kilogramekvivalentu) hociktorej látky ($m = E$) treba teda vždy to isté množstvo náboja $Q_0 = \frac{1}{k}$. Toto elektrické množstvo sa označuje ako Faradayova konštanta (skrátene F), platí teda $\frac{1}{k} = F$, čo po dosadení do (4) dáva Faradayov zákon v tvare

$$m = \frac{E}{F} Q = \frac{M}{\nu F} Q \quad (5)$$

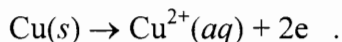
Na katóde teda pri elektrolýze prebieha redukcia, pri ktorej sa oxidačné číslo príslušnej látky znižuje. Naopak, na anóde anióny elektróny odovzdávajú, takže ich oxidačné číslo rastie. Pri elektrolýze tu teda prebieha oxidácia.

Ak sa elektróda na elektrochemickej reakcii nezúčastňuje, napr. platina, slúži len ako odovzdávač elektrónov. Produkty primárnych elektrochemických reakcií sa môžu zúčastňovať na ďalších, sekundárnych reakciách, ktoré už s odovzdaním alebo priberaním elektrónov bezprostredne nesúvisia. Rozoberme si niekoľko typických príkladov.

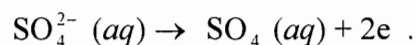
Pr. 1. Pri elektrolýze roztoku CuSO_4 medzi medenými elektródami sa na katóde zlúčia dva elektróny s meďnatým iónom a vzniká atóm medi, ktorá sa na katóde vylučuje



Na anóde prebieha súčasne opačný dej (aq - roztok meďnatej soli vo vode, s – pevná/kovová forma medi, odvodené od slova solid)



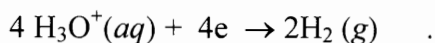
Medená anóda teda prechádza do roztoku (rozpúšťa sa). Proces na anóde má v skutočnosti zložitejší mechanizmus. Ióny $\text{SO}_4^{2-} (aq)$ tu odovzdávajú svoj náboj



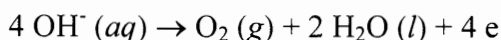
Elektricky neutrálny radikál SO_4 (aq) je však nestabilný a sekundárne reaguje s kovovou meďou elektródy



Pr. 2. Pri elektrolýze roztoku NaOH medzi platinovými elektródami na katóde prebieha reakcia

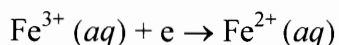


a na anóde súčasne oxidácia

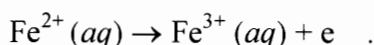


Prebieha tu teda rozklad vody, pričom ióny Na^+ slúžia ako nosiče elektrického prúdu a ich koncentrácia ostáva v priebehu elektrolýzy nezmenená.

Pr. 3. Pri elektrolýze roztoku $\text{FeCl}_2 + \text{FeCl}_3$ medzi platinovými elektródami prebieha na katóde redukcia



a na anóde prebieha oxidácia



V tomto prípade sa teda na elektróde žiadna látka nevyučuje, ale prebieha iba chemická zmena v roztoku. M. Faraday (1833) experimentálne zistil, že rovnaké množstvo elektrického náboja vylúči (chemicky pozmení) na elektróde vždy rovnaké množstvo látky (5)

Číselnú hodnotu Faradayovej konštanty možno nájsť jednoducho napr. z experimentálne nameranej hmotnosti striebra vylúcenej nábojom 1 C. Keďže toto množstvo je 0,001 118 3 g a gramekvivalent striebra je 107,870 g, treba na vylúčenie jedného gramekvivalentu $107,870 \text{ g val}^{-1}$: $0,001 118 3 \text{ g C}^{-1} = 96 500 \text{ C val}^{-1}$. Na vylúčenie 1 kilogramekvivalentu treba pravda 1 000 krát väčší náboj. Presné merania dávajú pre Faradayovu konštantu $F = (9,648 70 \pm 0,000 16) \cdot 10^7 \text{ C kval}^{-1} = (9, 648 70 \pm 0,000 16) \cdot 10^4 \text{ C. val}^{-1}$. Jeden Faraday je zrejme také elektrické množstvo, ktoré treba dodať jednému gramekvivalentu (kilogramekvivalentu) látky (napr. 1 gramatému jednomocných iónov), aby sa vylúčila, t. j. prešla do elektroneutrálneho stavu. Jeden gramekvivalent iónov musí preto niesť rovnaký náboj opačného znamienka. Veľkosť 1F číselne sa rovná náboju jedného gramekvivalentu iónov. Jeden gramekvivalent obsahujúci N_A jednomocných iónov s jedným nábojom e alebo $\frac{N_A}{2}$ dvojmocných iónov s nábojom $2e$ alebo $\frac{N_A}{3}$ iónov s nábojom $3e$ atď., nesie celkove elektrický náboj $N_A e$, čo sa podľa uvedeného číselne rovná F , teda

$$F = N_A e \quad , \quad (6)$$

kde e je náboj elektrónu $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Zo známej hodnoty Avogadrovej konštanty a náboja F možno teda vypočítať náboj elektrónu e (pozrite úlohu č. 31).

Z meraní overovania Faradayových zákonov však možno stanoviť hodnotu Avogadrovej konštanty N_A . Kombináciou (5) a (6) dostaneme rovnicu pre Avogadrovu konštantu:

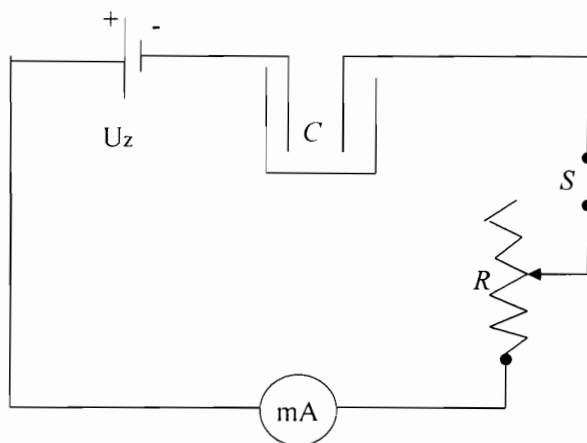
$$N_A = \frac{E}{m} \cdot \frac{Q}{e} \quad (7)$$

ktorá je priamo namerateľná pomocou merateľných veličín (m , It) spojených s overovaním všeobecného Faradayovho zákona. Faradayov zákon patrí medzi nemnohé empirické zákony, ktoré platia presne. Možno ho preto použiť na veľmi presné meranie elektrického množstva prechádzajúceho elektrickým obvodom. Metóda, ktorá umožňuje určiť množstvo prejdeného náboja na základe množstva látky vylúčenej na elektróde, sa nazýva coulometria.

Prístroje a pomôcky: coulometer na meď, zdroj jednosmerného prúdu, reostat, miliampérmetr, spojovacie vodiče, Oettelov roztok zloženia: 120 g CuSO_4 , 26 cm^3 koncentrovaný roztok H_2SO_4 , 60 cm^3 96% objem. $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ doplnené do 1000 cm^3 dest. vodou a dôkladne premiešané až kým nedostaneme homogénny roztok, elektrické stopky, jednomiskové váhy, lieh na oplachovanie a elektrický varič na osušenie katódy.

Opis aparatury:

Coulometer na meď pozostáva zo sklenenej nádoby naplnenej Oettelovým roztokom, v ktorom sú ponorené medené elektródy. Na obr. 1 je znázornený zdroj napätia U_z , spínač S , a reostat R . Prúd prechádzajúci coulometrom sa meria miliampérmetrom mA a doba elektrolýzy elektrickými stopkami.



Obr. 1. Zapojenie prístrojov

Postup práce:

1. Zapojíme prístroje podľa obr. 1.
2. Opláchneme katódu najprv destilovanou vodou, potom liehom a nakoniec ešte v prúde horúceho vzduchu nad varičom alebo žiarovky a zvážeme ju.

3. Katódu upevníme do držiaka coulometra naplneného Oettelovým roztokom.
4. Spínačom sa prístroj zapojí na zdroj jednosmerného prúdu a regulačným odporom sa nastaví potrebný prúd.
5. Coulometer sa zapojí v sérii k ostatným elektrickým prvkom v meranom obvode a to s miliampérmetrom mA a regulačným odporom R na zdroj jednosmerného prúdu (obr. 1). Regulačným odporom sa prúd nastaví na zvolenú hodnotu z intervalu 80 až 100 mA. Súčasne po zapojení na zdroj začne sa zaznamenávať čas elektrolýzy elektrickými stopkami. Elektrolýza má prebiehať asi 1 h, maximálne 2 h. V dôsledku reakcií na elektródach sa mení koncentrácia roztoku elektrolytu, čo sa prejavuje v zmene jeho rezistancie. Z uvedených dôvodov je potrebné trvale reostatom regulovať prúd na hodnotu zvolenú na začiatku merania. Po ukončení elektrolýzy obvod prerušíme a medenú katódu uvoľníme z nádoby coulometra.
6. Na základe zmeraného času a prúdu sa určí náboj prejdený elektrickým obvodom pri elektrolýze.
7. Po ukončení elektrolýzy už uvedenou procedúrou sa katóda prichystá na odváženie vylúčenej medi. Zo vzťahu (7) vypočítajte hodnotu Avogadrovej konštanty N_A .

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do Tab. 1 zapíšte namerané hodnoty príslušných veličín: Doba trvania elektrolýzy t , prúd I pri ktorom elektrolýza prebiehala, množstvo vylúčenej medi m , množstvo prejdeného náboja Q , teoretické množstvo náboja určené Q_0 na základe množstva vylúčenej medi $m(\text{Cu})$. Na základe vzťahu (7) vypočítajte hodnotu Avogadrovej konštanty N_A .

Tab. 1. Namerané hodnoty

I/mA	t/s	m/g	Q/C	Q_0/C	N_A/mol^{-1}

Rozbor presnosti merania:

Vypočítajte relatívnu chybu prejdeného náboja $\delta_Q = (Q - Q_0)/Q_0 \cdot 100\%$. Presnosť určenia Avogadrovej konštanty vyjadrite pomocou relatívnej chyby nameranej hodnoty N_A voči tabuľkovej hodnote $N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, podľa vzťahu

$$\delta_{N_A} = \frac{N_{A_{\text{tab}}} - N_A}{N_{A_{\text{tab}}}} \cdot 100\%$$

Kontrolné otázky:

1. Definujte elektrochemický ekvivalent.
2. Aké iné metódy, okrem Faradayovho zákona, poznáte na určenie náboja elektrónu?
3. Aký v súčasnosti dôležitý kov sa vyrába elektrolýzou?
4. Na akom princípe sú založené technologické postupy rafinácie kovov (Cu), galvanostégia (poniklovanie, chrómovanie a pod.)?

22. MERANIE VEĽKÝCH REZISTANCIÍ METÓDOU VYBÍJANIA KONDENZÁTOROV

Ciel' práce: Namerať veľké rezistencie metódou vybíjania kondenzátorov.

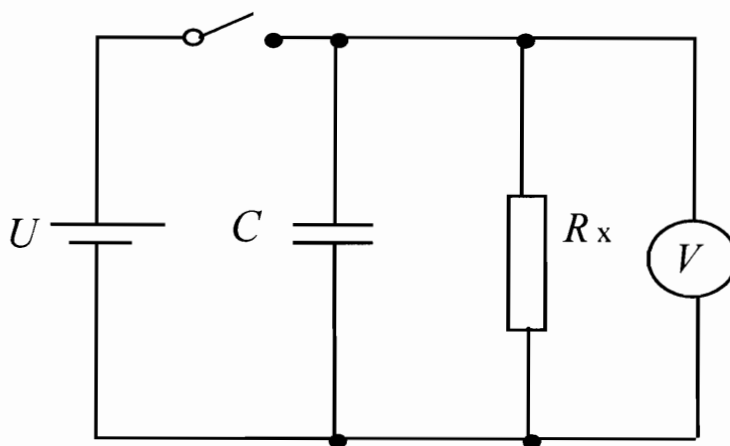
- Úlohy:**
1. Podľa uvedenej schémy (obr. 1) zapojte do obvodu kondenzátor a číslicový voltmeter. Kondenzátor nabite a zapisujte dvojicu veličín (u_C, t)
 2. Podľa schémy (obr. 1) pripojte paralelne ku kondenzátoru a voltmetru rezistor R_x a potom pokračujte ako v bode 1.
 3. Zo smernice lineárnych závislostí $\ln u_C = F(t)$ vypočítajte hodnoty rezistancií rezistorov R_{KV} a R_x .

Teoretický úvod:

V niektorých elektronických zariadeniach sú v schémach zapojené rezistory s vysokými hodnotami rezistancií (napr. v elektrometrických zosilňovačoch). Tiež súčiastky plniace izolačnú funkciu sa vyznačujú vysokými rezistanciami. Za veľké rezistencie podľa dohody sa považujú hodnoty väčšie ako 100 k Ω . Meranie takýchto veľkých rezistancií si vyžaduje špeciálne metódy a prístroje. Jestvujú však jednoduché metódy, ktoré umožňujú merať rezistencie do 10 M Ω pomocou bežných prístrojov.

Veľké rezistencie môžeme tiež merať metódou nabíjania, alebo vybíjania kondenzátora. Uvedieme len schému a príklad merania pre vybíjanie kondenzátora.

Teoretický základ merania spočíva na riešení prechodového javu v elektrickej sieti (obr. 1) po odpojení zdroja od RC obvodu. Skrátene uvedieme postup riešenia.



Obr. 1. Schéma zapojenia merania veľkých rezistancií metódou vybíjania kondenzátora

Po odpojení zdroja ostane obvod, v ktorom sú zapojené kondenzátor a rezistor pre ktorý platí druhý Kirchoffov, zákon pre okamžité hodnoty bude mať tvar

$$u_C + iR = 0. \quad (1)$$

Do tejto rovnice dosadíme vzťahy pre napätie na kondenzátore a prúd, t.j. $u_C = Q/C$ a $i = dQ/dt$. Dostaneme diferenciálnu rovnicu pre náboj $Q(t)$, ktorú upravíme na tvar

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt, \quad (2)$$

ktorej riešenie je

$$Q = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (3)$$

kde Q_0 je dané počiatočnou podmienkou $Q_0 = Q(0) = UC$. Vyjadríme napätie na kondenzátore z rovnice $Q = u_C C$ a po úprave dostaneme

$$u_C = U \exp(-t / RC) . \quad (4)$$

Pre praktické využitie vzťahu (4) je výhodné ho prepísať do tvaru

$$\ln u_C = \ln U - \frac{t}{RC} . \quad (5)$$

Keďže nemáme V-meter s vysokou vnútornou rezistenciou (napr. elektrostatický) a tiež nemáme kondenzátor s ideálne izolujúcim dielektrikom (t.j. s nekonečne veľkou rezistenciou medzi elektródami, tzv. zvodovou rezistenciou), musíme najprv určiť tieto rezistencie. Meranie sa rozdelí na dva kroky. V prvom sa do schémy zapojí len kondenzátor a číslicový voltmeter (obr. 1). Vo výpočte rezistenciu R_{KV} predstavuje rezistor paralelne zapojeného zvodového rezistoru kondenzátora a vnútornej rezistencie rezistora voltmetra. To znamená, že technický kondenzátor predstavuje v paralelnej náhrade za ideálny kondenzátor s kapacitou C a rezistor s rezistenciou R_C , cez ktorý prechádza zvodový prúd.

Kondenzátor nabijeme a vypneme vypínač. Od tohoto okamihu budeme merať závislosť napätia u_C od času. Ak použijeme elektrolytický kondenzátor s kapacitou nad 10 μF , vybíjanie bude natoľko pomalé, že ho môžeme plynule zaznamenávať. Získame tak exponenciálnu závislosť - 1. Podľa vzťahu (4) bude

$$u_C = U \exp(-t / R_{KV} C) \quad \text{alebo} \quad \ln u_C = \ln U - \frac{t}{R_{KV} C} . \quad (6)$$

V druhom kroku pripojíme paralelne ku kondenzátoru a voltmetru neznámy rezistor R_x . Postup zopakujeme a získame exponenciálnu závislosť - 2, ktorá bude

$$u_C = U \exp(-t / RC) \quad \text{alebo} \quad \ln u_C = \ln U - \frac{t}{RC} , \quad \text{kde} \quad R = \frac{R_{KV} R_x}{R_{KV} + R_x} \quad (7)$$

Hodnotu rezistencií R a R_{KV} zistíme zo smerníc priamok závislostí typu (5) a (7). Druhá možnosť je zvoliť v exponenciálnom vzťahu takú hodnotu rezistencie, aby vypočítaná závislosť podľa (13.4) čo najtesnejšie prechádzala cez namerané body t.j. aby sme dosiahli

$$\sum_{i=1}^n (u_{Cnam} - u_{Cvyp})_i^2 \rightarrow \text{minimum} , \quad (8)$$

kde v zátvorke sú rozdiely napätí na kondenzátore nameraného a vypočítaného pre ten istý čas (i -te meranie), n je počet meraní.

Prístroje a pomôcky: kondenzátory s rôznymi kapacitami, rezistor s neznámou rezistanciou (5 až 20 M Ω), vypínač, stopky, zdroj jednosmerného napätia, číslicový V-meter, vodiče.

Opis aparatury:

Meracia aparatura sa skladá z neznámeho rezistora o rezistancii R_x , ktorý je pripojený paralelne ku kondenzátoru so známou kapacitou. Kondenzátor a rezistor sú pripojené k zdroju jednosmerného napätia. Ďalším prvkom je vypínač, ktorý sa po nabití kondenzátora odpojí od zdroja. Čas sa meria stopkami, napätie na kondenzátore V-metrom.

Postup práce:

1. Zapojte schému podľa obr. 1 a dajte ju skontrolovať.
2. Nabite kondenzátor (napätie by malo byť zhodné s napätím zdroja).
3. Odpojte zdroj a súčasne spust'ite stopky. Zapisujte dvojice hodnôt (u_C, t) do tabuľky spolu s vypočítanou hodnotou $\ln u_C$.
4. Nakreslite grafy $u_C(t)$ podľa (5) a (7). Zo smerníc grafov určíte hodnoty odporov R_{KV} a R_x .

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do tabuľky 1 zapíšte hodnoty odčítané zo stupníc voltmetra a stopiek

Tab. 1. Kapacity kondenzátorov: 5 μ F, 10 μ F, 20 μ F, $R_{KV}/\Omega =$, $R_x/\Omega =$

meranie R_{KV}	$\ln u_C$	t/s	meranie R_x	$\ln u_C$	t/s
u_C/V			u_C/V		

Zo smerníc lineárnych závislostí $\ln u_C = F(t)$ vypočítajte hodnoty odporov rezistorov R_{KV} a R_x . Orientačne zmerajte multimetrom rezistanciu daného rezistora a porovnajte ju s experimentálne zistenou.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Diskutujte o hodnotách nameraných rezistancií R_{KV} a R_x a zhodno'te neistotu merania.

Kontrolné otázky:

1. Uved'te najbežnejšie metódy merania malých rezistancií a rezistancií nie väčších ako 100 k Ω .
2. Aké sú výhody (nevýhody) merania rezistancií číslicovým Ω - metrom.
3. V čom spočívajú odlišnosti merania veľkých rezistancií metódou vybíjania kondenzátorov v porovnaní s metódou nabíjania kondenzátorov

23. MERANIE INDUKCIE MAGNETICKÉHO POĽA SOLENOIDU TESLAMETROM

Cieľ práce: Zmapovať magnetické pole solenoidu teslametrom s Hallovou sondou.

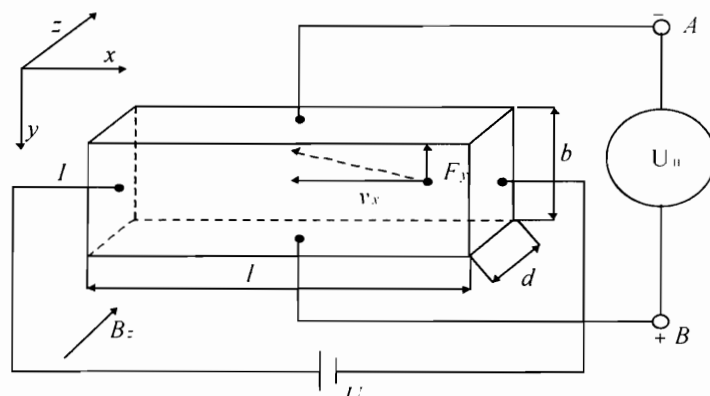
- Úlohy:**
1. Odmerajte a graficky zobrazte závislosť indukcie magnetického poľa solenoidu od polohy sondy teslametra pozdĺž solenoidu pre konštantný prúd (15A) a pozdĺž troch rôznych priamok 1, 2, 3 (jedna z nich je osou sondy)
 2. Odmerajte a zobrazte závislosť $B = B(I)$ indukcie magnetického poľa solenoidu v strede (S) a na konci (K) solenoidu.
 3. Preverte približnú závislosť v strede solenoidu $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$ a na kraji $B = \mu_0 \frac{NI}{2l}$.

Teoretický úvod:

Hallov jav je najznámejší z galvanomagnetických javov, spôsobených magnetickým poľom vo vodičoch, ktorými preteká elektrický prúd. Prejavuje sa vznikom elektromotorického tzv. Hallovoho napätia U_H vo vodiči v smere kolmom na smer prúdu a na smer indukcie magnetického poľa. Prvý ho pozoroval E. H. Hall v roku 1879. Hallov jav je dôsledkom pôsobenia magnetického poľa na pohybujúce sa nosiče náboja vo vzorke materiálu. Možno ho pozorovať v kovoch, polovodičoch, kvapalinách i v plazme.

Okrem klasického Hallovoho javu je známy aj kvantový Hallov jav, objavený Klitzingom v roku 1980, za čo mu bola udelená Nobelova cena. Tento jav možno pozorovať v polovodičových látkach pri nízkych teplotách okolo 4,2 K a v silnom magnetickom poli (14 T).

Hallov vodivosť v dvojrozmerných systémoch sa nemení so zmenou magnetického poľa spojite, ale skokom. Veľkosť skokov určuje uvedená konštanta.



Obr. 1. Princíp Hallovoho javu

Uvažujeme vzorku polovodiča v tvare hranola s výškou b , dĺžkou l a hrúbkou d , ktorou prechádza v smere osi x elektrický prúd (obr. 1). Predpokladajme, že na prenos náboja sa zúčastňujú len nosiče jediného typu, napr. elektróny, ktoré sa pohybujú v smere osi x rýchlosťou v_x . Potom pre prúdovú hustotu j_x platí

$$j_x = e n v_x \tag{1}$$

kde e je náboj elektrónu a n koncentrácia elektrónov. Nech na túto vzorku pôsobí v smere osi z magnetické pole s indukciou B_z . Na elektróny pôsobí v smere osi y Lorentzova sila

$$F_y = ev_x B_z \quad (2)$$

Táto sila bude elektróny vychýľovať z pôvodného smeru k okraju vzorky – k ploche rovnobežnej s rovinou xz doľady, kým vznikajúce elektrické pole intenzity E_y , ktoré je vytvárané vychýlenými elektrónmi, nevykompenzuje silový účinok magnetického poľa. V rovnováhe bude platiť

$$eE_y = F_y \quad (3)$$

Po úprave rovníc (1) až (3) môžeme napísať vznikajúce (elektromotorické) Hallovo napätie

$$U_H = \int_{(-)}^{(+)} E_y dy = \int_0^b v_x B_z dy = \int_0^b \frac{j_x}{en} B_z dy = \frac{I}{bden} B_z \int_0^b dy = \frac{1}{en} \frac{IB_z}{d} = R_H \frac{IB_z}{d} \quad (4)$$

kde U_H je Hallovo napätie a konštanta R_H je Hallova konštanta (v uvedenom prípade $R_H = 1/ne$), závislá od materiálu vzorky. Pri polovodičových vzorkách, ktoré majú v porovnaní s kovmi malú koncentráciu voľných nosičov náboja ($n \approx 10^{19} - 10^{26} \text{ cm}^{-3}$) je Hallova konštanta R_H veľká a meria sa pomerne ľahko. Kovy majú veľkú koncentráciu voľných elektrónov ($n \approx 10^{28} \text{ cm}^{-3}$), čo spôsobuje, že R_H je pomerne malá a meria sa ťažšie ako pri polovodičoch.

Ak elektrický prúd prenášajú prevažne elektróny, R_H je záporná, pri prevažujúcej dierovej vodivosti je R_H kladná. Znamienko R_H je dôležité kritérium pre typ vodivosti, využívané vo fyzike a v technológii polovodičov.

Úmernosť Hallovoho napätia U_H , prúdu I a indukcie B_y magnetického poľa umožňuje využiť tento jav na veľké množstvo technických aplikácií. Najčastejšie sa využíva na meranie indukcie magnetického poľa v regulačnej a automatizačnej technike.

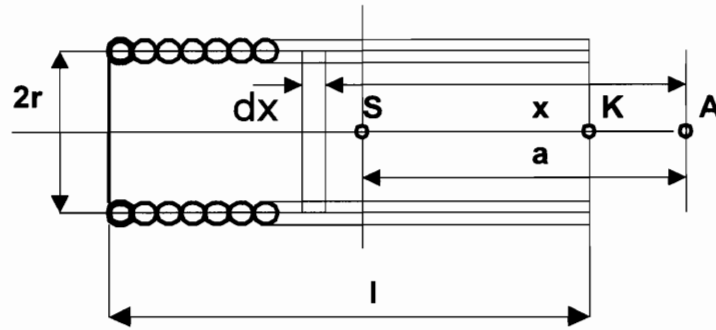
Hallove sondy sú zväčša polovodičové elementy s dvojicou prívodov na napájanie prúdom a kontaktami na snímanie Hallovoho napätia. Konštrukčne sondu tvorí doštička malých rozmerov z vhodného polovodičového materiálu (Ge, Si). Dĺžka vzorky uložená v ochrannom puzdre býva bežne 10 – 20 mm, šírka 2 – 4 mm, hrúbka niekoľko desiatín mm. Silové pôsobenie magnetického poľa charakterizuje vektor magnetickej indukcie \mathbf{B} .

Magnetické pole solenoidu

Solenoid je jednovrstvová cievka kruhového prierezu. Býva navinutá na valcovej kostre, alebo je tzv. samonosná. Pri odvodení veľkosti vektora magnetickej indukcie na osi solenoidu v jeho strede (bod S) a na okrajoch solenoidu (bod K) použijeme vzťah pre výpočet veľkosti vektora magnetickej indukcie B na osi kruhového závitú polomeru r , ktorým preteká prúd I . Táto je vyjadrená vzťahom (5)

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5)$$

kde a je vzdialenosť bodu, v ktorom určujeme indukciu od stredu závitú.



Obr. 2. K odvodeniu veľkosti vektora B

Pre solenoid dĺžky l a s počtom závitov N na obrázku 2 počítame veľkosť vektora magnetickej indukcie v ľubovoľnom bode A. Vyjadríme element dĺžky solenoidu dx a zavedieme veličinu $\frac{N}{l}$, ktorá vyjadruje počet závitov na jednotku dĺžky solenoidu.

Potom príspevok tohto elementu do indukcie v bode A bude

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{l} dx. \quad (6)$$

Celková indukcia v bode A bude

$$B = \int_{a-\frac{l}{2}}^{a+\frac{l}{2}} \frac{\mu_0 I R^2}{2(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{l} dx = \frac{\mu_0 I N}{2l} \left[\frac{\frac{l}{2} - a}{\sqrt{r^2 + \left(a - \frac{l}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + a}{\sqrt{r^2 + \left(a + \frac{l}{2}\right)^2}} \right]. \quad (7)$$

V strede solenoidu je $a = 0$ a preto dostaneme

$$B_S = \frac{\mu_0 I N}{l \sqrt{1 + \left(\frac{2r}{l}\right)^2}} \quad (8)$$

A na konci solenoidu je $a = \frac{l}{2}$

$$B_K = \frac{\mu_0 I N}{2l \sqrt{1 + \left(\frac{2r}{l}\right)^2}} = \frac{B_0}{2}. \quad (9)$$

Magnetické pole na osi rovnomerne husto navinutého nekonečne dlhého solenoidu umiestneného vo vákuu vyjadruje vzťah

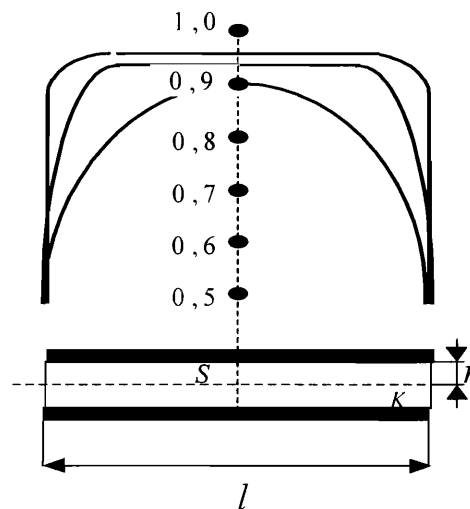
$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{NI}{l}, \quad (10)$$

kde n vyjadruje počet závitov solenoidu na jednotku dĺžky, t.j. $\left(\frac{N}{l}\right)$.

Ak vezmeme do úvahy vzťahy (8) a (9), potom veľkosť vektora magnetickej indukcie na konci solenoidu bude

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2l}. \quad (11)$$

Je zrejmé, že veľkosť magnetickej indukcie pozdĺž osi x v smere od stredu solenoidu ku jeho okraju bude klesať. Na obr. 3 je graficky znázornená klesajúca závislosť veľkosti indukcie od polohy pozdĺž osi solenoidu.

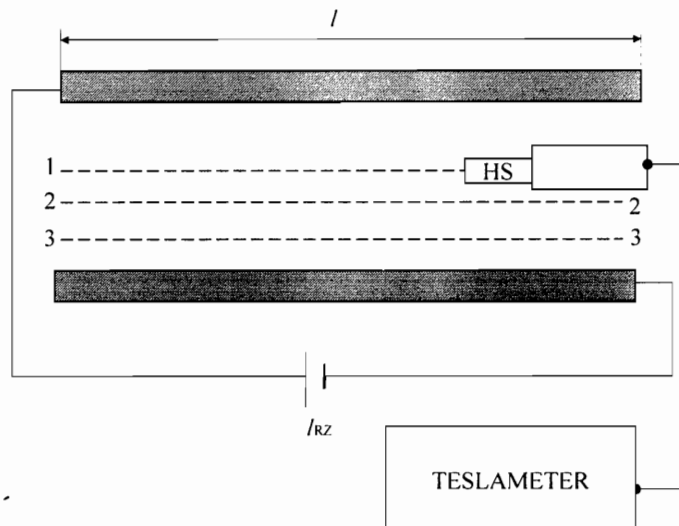


Obr. 3. Znázornenie poklesu veľkosti B pozdĺž osi solenoidu

Prístroje a pomôcky: Prúdový zdroj do 20 A, teslameter s Hallovou sondou, variačný solenoid, prírodné vodiče.

Opis aparatúry:

Príprava merania s teslametrom: Hallovu sondu pripojíme k teslametru ku konektoru „SONDE“ a hlavný vypínač na pravej strane prepne z polohy „A“ do polohy „M“. V ľavom hornom rohu prepínač prepne do polohy „MEASURE“ a prepínač vedľa neho do polohy 1/10 (o jeden rád vyššia presnosť). V strede prístrojovej dosky na displeji možno odčítať nameraný údaj v mT. Prístroj treba nechať po zapnutí asi 5 minút stabilizovať sa. Po stabilizácii prístroja prepínač v strede panela prepne do polohy B_x a B_y a potenciometrami „TARAGE“ vynulujeme údaj v mT na displeji. Náčrt merania indukcie magnetického poľa s Hallovou sondou a teslametrom je na obr. 4.



HS- Hallova Sonda
 I_{RZ} – regulovateľný zdroj prúdu

Obr. 4. Náčrt merania indukcie magnetického poľa solenoidu s Hallovou sondou a teslametrom

Postup práce:

1. Hallovu sondu vložíte do vodiacej lišty „U“ a upevníme skrutkami do polohy 1 a zmeriame závislosť B_x od l teslametrom (obr. 4). Priamka 1 zodpovedá osi solenoidu, priamka 2 je paralelne posunutá voči osi solenoidu o $\Delta x (\approx 1,5 \text{ cm})$ a priamka 3 je paralelne posunutá voči osi solenoidu o $2\Delta x (\approx 3 \text{ cm})$. Sondu posúvame pozdĺž osi solenoidu krokom 3 cm. Sondu potom preložíte do polohy 2 a 3 a meriame rovnako ako pre priamku 1. Prúd pretekajúci solenoidom nastavíte na hodnotu $\approx 15 \text{ A}$. V polohách (2) a (3) meriame ako B_x , tak i B_y .
2. Sondu umiestnite s vodiacou lištou „U“ na priamku 1 a vykonajte meranie závislosti $B = B(I)$ magnetickej indukcie od prúdu v strede S a na konci K solenoidu (obr. 3.) Hodnotu prúdu meňte od 1 A do 15 A s krokom 1 A.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Do tabuľky 1 zapíšte hodnoty závislosti B_x , resp. B od l pre konštantný prúd a priamky 1, 2, 3.

Návody na laboratórne cvičenia z optiky, kmitov a vlnení

24. ŠTÚDIUM SKLADANIA ROVNOBEŽNÝCH KMITOV POMOCOU SPRIAHNUTÝCH KYVADIEL

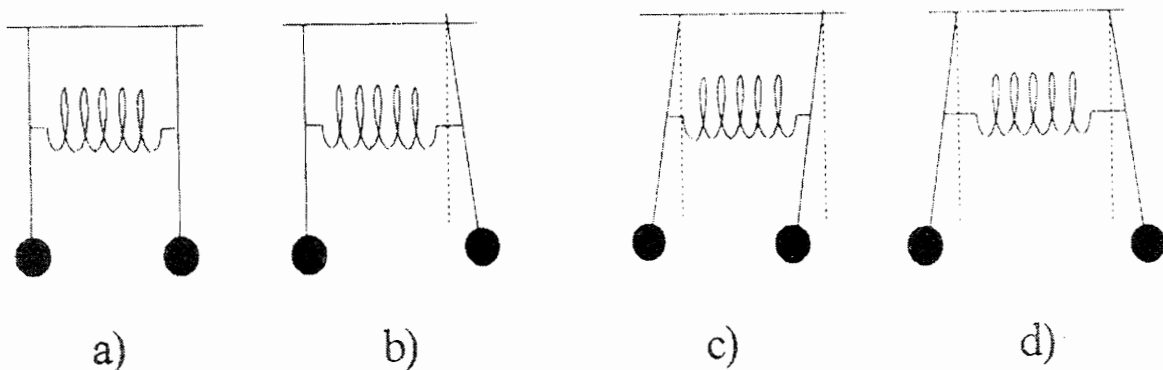
Cieľ práce: Skúmanie procesov skladania rovnobežných kmitov dvoch oscilátorov, reprezentovaných spriahnutými kyvadlami a určenie koeficientu väzby kyvadiel.

- Úlohy:** 1. Zmerajte potrebné doby kyvu kyvadiel.
2. Vypočítajte koeficient väzby spriahnutých kyvadiel.

Teoretický úvod:

Z teórie kmitania vieme, že pri skladaní dvoch alebo viacerých kmitov vzniknú vo všeobecnosti zložité, výsledné pohyby. Ich charakter závisí od viacerých faktorov: od vzájomnej smerovej orientácie skladaných kmitov (rovnobežnosť, kolmost' atď.), ich fázového posunu, frekvencií, amplitúd a pod.

Ideálnym zariadením na sledovanie skladania rovnobežných kmitov sú spriahnuté kyvadlá. Sú to dve rovnaké fyzikálne (napr. reverzné) kyvadlá, spojené pružinou, ktorá sprostredkuje ich vzájomné spriahnutie (obr. 1a).



Obr. 1 Rôzne možnosti experimentovania so spriahnutými kyvadlami.

Ak rozkývame jedno kyvadlo (obr. 1b), pozorujeme zaujímavý jav – „prelievanie“ energie z jedného kyvadla do druhého. Vplyvom väzby sa pomaly rozkýva i druhé kyvadlo, pričom postupne preberá energiu kyvadla prvého, ktorého kyvy sa znižujú, až sa na okamih zastaví. V tomto momente prešla celá energia na druhé kyvadlo, ktoré sa kýva s najväčšou amplitúdou kyvov. Opísaný dej prebieha potom v opačnom zmysle a kyvadlá si znovu vymenia úlohy.

Preskúmame pohyb dvoch spriahnutých kyvadiel, ktoré sú z fyzikálneho hľadiska presne rovnaké. Keby boli obe kyvadlá voľné, pôsobila by na každé z nich pri jeho uhlovej výchylke μ zo zvislej rovnovážnej polohy sila, ktorej moment vzhľadom na os otáčania kyvadla je úmerný výchylke μ a ktorého otáčavý účinok je namierený proti tejto výchylke:

$$M = -D \cdot \mu ,$$

kde D je tzv. direkčný moment. Je to taký moment sily, ktorý je potrebný na vychýlenie kyvadla o jednotkový uhol 1 rad.

Spriahnutie oboch kyvadiel znamená, že pri výchylke μ_1 a μ_2 pôsobí na každé z nich okrem uvedenej sily s momentom M ešte väzbová sila, ktorej moment M' je v prvom priblížení úmerný rozdielu okamžitých hodnôt oboch výchyliek

$$M' = D'(\mu_1 - \mu_2)$$

kde D' je konštanta úmernosti závislá od kvality pružiny.

Pohybové rovnice zostavíme s ohľadom na to, že na obidve kyvadlá pôsobia väzbové sily navzájom opačným smerom (podľa princípu akcie a reakcie), a preto ich momenty musíme pri jednom kyvadle uvažovať s kladným a pri druhom so záporným znamienkom

$$\begin{aligned} J \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} &= -D\mu_1 - D'(\mu_1 - \mu_2), \\ J \frac{d^2 \mu_2}{dt^2} &= -D\mu_2 + D'(\mu_1 - \mu_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Sú to diferenciálne rovnice 2. rádu. Ich riešenia majú tvar:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t, \\ \mu_2 &= A_1 \sin \omega_1 t - A_2 \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (2)$$

A_1 a A_2 sú integračné konštanty, závislé od počiatočných podmienok, ω_1 a ω_2 predstavujú tzv., prvú a druhú základnú frekvenciu spriahnutých kyvadiel. Sú dané vzťahmi:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad \text{a} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}}. \quad (3)$$

ω_1 má význam kruhovej frekvencie vlastných kmitov kyvadiel bez väzby, ω_2 zahŕňa aj účinok väzby. Súčtom oboch kmitaní teda vznikne harmonický pohyb s periodicky sa meniacou amplitúdou - tzv. rázy. Ich časový priebeh je graficky znázornený na obr. 2. Význam jednotlivých symbolov z obrázku je v nasledovný:

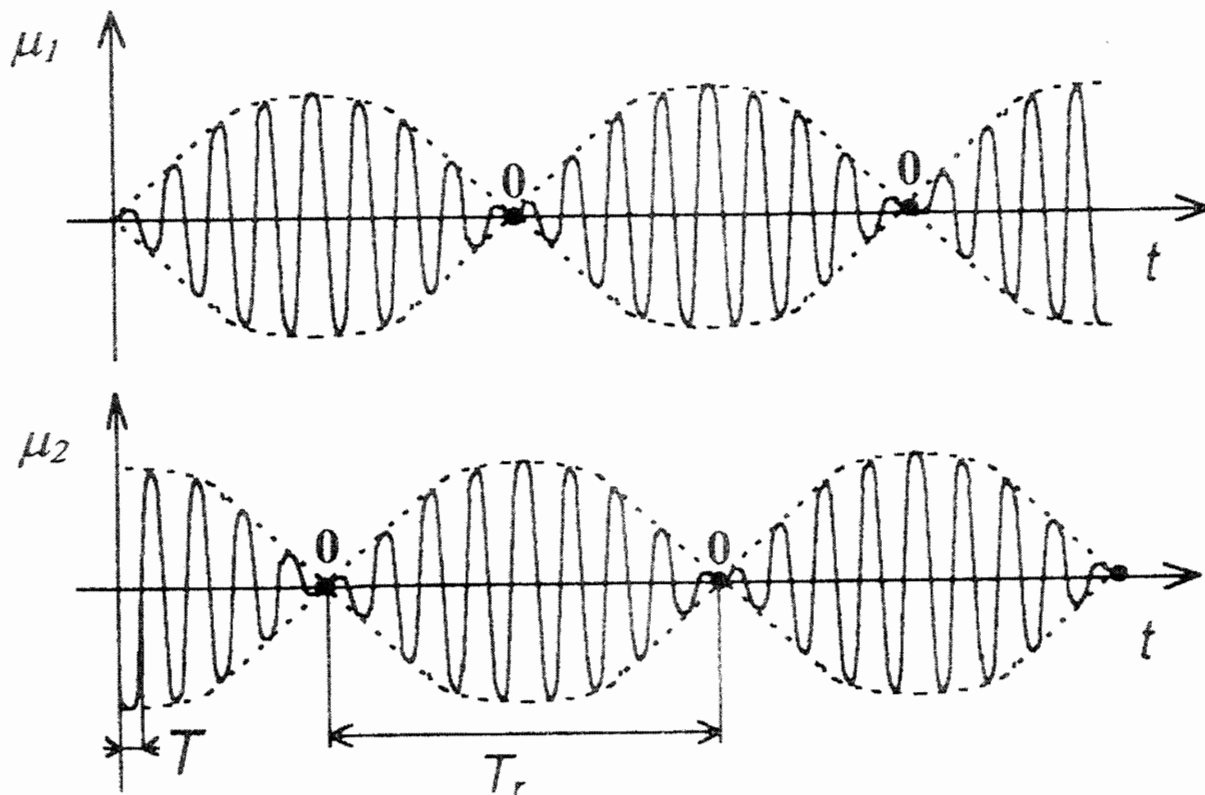
μ_1 - okamžitá výchylka prvého kyvadla

μ_2 - okamžitá výchylka druhého kyvadla

T - doba kyvu spriahnutých kyvadiel

T_r - perióda rázov

O - nulové body



Obr. 2. Priebeh rázov na spriahnutých kyvadlách.

Obrázok zodpovedá najznámejšiemu prípadu, keď fázový posun skladaných kmitavých pohybov kyvadiel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (resp. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$). Nulové body na grafoch zodpovedajú okamihom, keď sa príslušné kyvadlo dočasne zastaví a nekýva sa. Oba kmitavé pohyby sú totiž vtedy v protifáze. Výchylka druhého kyvadla je v tomto momente maximálna. Časový rozdiel medzi dvoma nulovými bodmi predstavuje periódu rázov T_r . Na obrázku je znázornená aj doba kyvu (pol perióda) T spriahnutých kyvadiel. Veličiny T a T_r súvisia s kruhovými frekvenciami sústavy ω_1 a ω_2 vzťahmi:

$$T = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$$

kde $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ je výsledná kruhová frekvencia kmitov sústavy, a

$$T_r = \frac{\pi}{\omega_r}, \text{ kde } \omega_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \text{ je kruhová frekvencia rázov.}$$

Prvá základná frekvencia ω_1 je tiež frekvencia kmitov sústavy, keď $\varphi = 0$; obe kyvadlá kmitajú vtedy vo fáze. Ľahko ju zmeriame tak, že kyvadlá vychýlime o rovnakú výchylku na súhlasné

strany a naraz pustíme (obr. 1c). Druhá základná frekvencia ω_2 zasa zodpovedá prípadu, keď $\varphi = \pi$ a kyvadlá kývajú v protifáze. Pri jej experimentálnom určení vychýlime kyvadlá o rovnakú výchylku na nesúhlasné strany a naraz pustíme (obr. 1d). Pripomenieme ešte, že fázové posuny $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ predstavujú jediné prípady, keď rázy nevznikajú a energia medzi oscilátormi sa nevymieňa.

Prelievanie energie medzi kyvadlami prebieha rýchlejšie pri tesnej väzbe (silnejšia pružina, alebo je ďalej od závesov kyvadiel) a pomalšie pri voľnej väzbe (slabšia pružina, alebo je bližšie k závesom). Stupeň väzby kyvadiel vyjadruje tzv. koeficient väzby K , definovaný vzťahom:

$$K = \frac{D'}{D + D'} < 1. \quad (4)$$

Po použití výrazov (3) prejde tento vzťah na tvar:

$$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \text{ resp. } K = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \quad (4')$$

kde T_1 a T_2 sú doby kyvov prislúchajúce frekvenciám ω_1 a ω_2 (t.j. $T_1 = \frac{\pi}{\omega_1}$ a $T_2 = \frac{\pi}{\omega_2}$).

S prihliadnutím na veličiny T a T_r dostaneme pre K tiež vzťah:

$$K = \frac{2TT_r}{T^2 + T_r^2} \quad (4'')$$

Vidíme teda, že hodnotu K môžeme určiť dvoma spôsobmi:

1. Z pokusu podľa obr. 1 b zmeraním veličín T a T_r a ich dosadením do vzťahu (4''). Tento spôsob je menej presný, pretože tvorenie rázov je proces časovo pomerne nestabilný. Už po niekoľkých rázoch sa môže ich periodicita narušiť, takže presnosť merania veličiny T_r je zaťažená pomerne veľkou chybou.
2. Z pokusov podľa obr. 1c a 1d určením základných frekvencií ω_1 a ω_2 , resp. časov T_1 a T_2 , a ich dosadením do vzťahov (4'): Procesy popísané v tejto metóde majú lepšiu časovú stálosť, takže pri zväčšení počtu meraných kyvov sa zväčší aj presnosť merania. Hodnota koeficientu K narastá so vzdialenosťou d pružiny od osi kyvov, pričom je vždy menšia ako 1.

Prístroje a pomôcky: Spriahnuté reverzné kyvadlá s pružinou, stopky, kalkulačka.

Postup práce:

1. Začneme s meraním rázov podľa obr. 1 b. Pružinu nastavte v určitej vzdialenosti d od osi kyvov. Jedno z kyvadiel rozkývajte (druhé na chvíľu pridržite rukou) a počítajte jeho kyvy. Počítajte kyvy a merať čas začnite od okamihu, keď jedno z kyvadiel je v nulovom bode. Jeden zo študentov počítaj kyvy, druhý rázy. Meranie ukončíte po uplynutí piatich rázov a z odmeraného času určte dobu jedného kyvu T a dobu jedného rázu T_r . Výsledky zapíšte do tabuľky. Meranie urobte pre štyri rôzne polohy pružiny. Dosadením do vzťahu (4'') určte koeficient spriahnutia K .
2. Zmerajte základnú frekvenciu sústavy ω_1 . Najskôr rozkývajte obe kyvadlá súhlasne (podľa

obr.1c.) a odmerajte dobu 100 kyvov. Vypočítajte dobu jedného kyvu T_1 , resp. príslušnú kruhovú frekvenciu ω_1 . Keďže táto frekvencia nezávisí od polohy pružiny, stačí ju zmerať len pre jednu polohu d .

- Zmerajte základnú frekvenciu ω_2 . Rozkývajte obe kyvadlá nesúhlasne (podľa obr. 1 d) a odmerajte dobu 100 kyvov. Určte dobu jedného kyvu T_2 , resp. príslušnú kruhovú frekvenciu ω_2 . Tieto merania musíme urobiť pre všetky štyri polohy pružiny. Výsledky zapíšte do tabuľky a vypočítajte koeficient spriahnutia K podľa vzťahov (4').
- Do spoločného grafu vyneste závislosti koeficientu spriahnutia K od polohy pružiny d pre obidva spôsoby merania a porovnajte ich.

Tabuľky nameraných hodnôt

Tab. č. 1.

Pokus 1 b			
poloha pružiny d [cm]	doba kyvu T [s]	doba rázu T_r [s]	$K = \frac{2 \cdot T \cdot T_r}{T^2 + T_r^2}$
20			
25			
30			
35			

Tab. Č. 2.

Pokus 1 c		$T_1 =$ $\omega_1 =$		
Pokus 1 d	poloha pružiny d [cm]	doba kyvu T_2 [s]	frekvencia ω_2 [s ⁻¹]	$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}$
	20			
	25			
	30			
	35			

Spracovanie nameraných hodnôt:

Na základe opísaného experimentu môžeme približne určiť aj tuhosť pružiny k . Ak využijeme známy Hookov zákon $F = k \cdot x$ (F - pôsobiaca sila, x - predĺženie pružiny) a uvážime, že moment sily M pružiny, pôsobiacej kolmo na kyvadlo vo vzdialenosti d od osi je $M = F \cdot d$, po nenáročných úpravách dostaneme pre tuhosť pružiny vzťah

$$k = \frac{D'}{d^2}$$

Pre koeficient D' z výrazov (3) vyplýva $D' = \frac{1}{2} J (\omega_2^2 - \omega_1^2)$. Moment zotrvačnosti kyvadla J môžeme určiť z doby jeho kyvu T_1 , hmotnosti m a odmeraním vzdialenosti ťažiska. Pre hľadanú tuhosť pružiny takto dostaneme výsledný vzťah:

$$k = \frac{mga}{2d^2} \left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1 \right)$$

(g - tiažové zrýchlenie).

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnoťte neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Vysvetlite pojem "prelievanie" energie.
2. Čo sú to rázy a kedy vznikajú?
3. Čo je doba výmeny energie?
4. Ktorý spôsob merania koeficientu väzby K je presnejší a prečo?
5. Je pomocou opísaného merania možné určiť aj tuhosť pružiny?
6. Určte relatívnu neistotu merania koeficientu spriahnutia kyvadiel δ_k .

25. MERANIE RÝCHLOSTI ZVUKU VO VZDUCHU

Ciel' práce: Určiť rýchlosť zvuku c na základe rýchlosti šírenia pozdĺžneho vlnenia o známej frekvencií vo vzdušnom stĺpci pri laboratórnej teplote.

- Úlohy:**
1. Na uzavretej trubici pri konštantnej frekvencii zvukového signálu z reproduktora zistíte polohy kmitní alebo uzlov.
 2. Z polôh kmitní alebo uzlov vypočítajte vlnovú dĺžku stojatej vlny v trubici.
 3. Zistite rýchlosť zvuku vo vzduchu.
 4. Zistite Poissonovu konštantu.

Teoretický úvod:

Na meranie rýchlosti šírenia pozdĺžneho vlnenia (zvuku) v plynch sa môže využiť kmitanie plynového (v našom prípade vzduchového) stĺpca v trubici. Ak je vzduchový stĺpec v trubici uvádzaný do kmitania na jednej strane zdrojom zvuku a na druhej strane je trubica uzatvorená, vlnenie sa od tohoto konca odráža a v dôsledku interferencie vzniknú v trubici stojaté vlny. Na uzatvorenom konci je uzol a pozdĺž trubice sa rovnomerne rozložia kmitne a ďalšie uzly tak, aby na otvorenom konci trubice bola kmitňa. Tento stav sa dá dosiahnuť pri presne stanovenej dĺžke trubice a frekvencii zvuku f . Ak máme možnosť meniť dĺžku trubice napr. pomocou piestu (frekvencia ostáva konštantná), potom po každej polovici vlnovej dĺžky budeme nachádzať uzol(kmitňu). Z nameranej vzdialenosti medzi uzlami (kmitňami, resp. medzi uzlom a susednou kmitňou) môžeme určiť vlnovú dĺžku λ a z nej rýchlosť zvuku c zo vzťahu

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} \quad . \quad (1)$$

Predstavme si, že máme plyn s hustotou ρ v trubici kruhového prierezu S . Ďalšie úvahy urobíme pre element stĺpca vzduchu s dĺžkou dx . Rovinná zvuková vlna pôsobí na tento element a v dôsledku tlakových síl na jeho čelných plochách (prierezoch) sa zmení objem elementu o hodnotu $dV = V - V_0$. Relatívna zmena objemu je priamo úmerná zmene tlaku

$$\boxed{\quad} \quad , \quad (2)$$

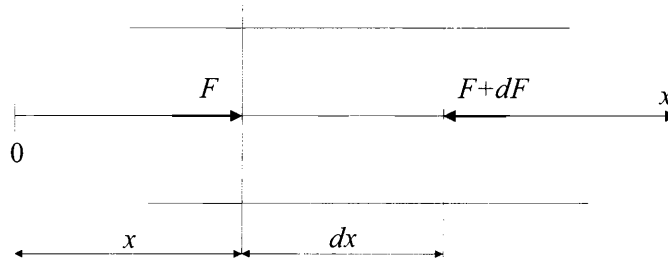
kde V_0 je pôvodný objem elementu a K je konštanta úmernosti, v našom prípade objemový modul pružnosti (jeho prevrátená hodnota je stlačiteľnosť). Zmenšenie objemu je vyvolané zvýšením tlaku, preto je vo vzťahu (2) znamienko mínus. Zmena dV je vyvolaná posunutím prierezu v smere osi x o vzdialenosť du , t.j. $dV = duS$. Pôvodný objem bol $V_0 = S \cdot dx$. Počiatočný tlak p_0 zodpovedajúci rovnovážnemu stavu, v ktorom je plyn nestlačený formálne položíme $p_0 = 0$, potom je $dp = p - p_0 = p$. Vzťah (2) bude

$$p = -K \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad (3)$$

kde sme použili parciálnu deriváciu, lebo tlak nie je len funkciou miesta, ale v danom mieste sa mení aj s časom. Tlaková sila bude

$$F = S \cdot p = -K \frac{\partial u}{\partial x} S . \quad (4)$$

Na prierezy elementu plynového stĺpca pôsobia sily (obr. 1) F a $(F + dF)$, pričom



Obr. 1 Element vzduchového stĺpca a sily naň pôsobiace

$$F + dF = F + \frac{\partial F}{\partial x} dx = F + \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial u}{\partial x} \right) S dx = F - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S dx .$$

Podľa 2. Newtonovho zákona je pohybová rovnica elementu plynu s hmotnosťou dm

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho S \cdot dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F - (F + dF) = -dF = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S dx . \quad (5)$$

Z rovnice (5) už priamo dostávame vlnovú rovnicu kmitania plynového stĺpca

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (6)$$

Koeficient vystupujúci vo vlnovej rovnici označíme ako $c^2 = K / \rho$, kde c je rýchlosť šírenia zvuku v plyne a ρ je hustota plynu

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} . \quad (7)$$

Doterajšie úvahy sme robili za predpokladu, že teplota v plyne je všade rovnaká. V skutočnosti je teplota rozdelená nerovnomerne, miesta, kde je plyn stlačený sú teplejšie. Teplota sa nestačí vyrovnávať medzi susednými elementami plynu v trubici, lebo dej pri kmitaní je na to príliš krátky. Keďže nenastáva výmena tepla, dej je adiabatický. Rovnica adiabaty je $pV_0^\kappa = const$, odkiaľ vyplýva $dpV_0^\kappa + p\kappa V_0^{\kappa-1} dV = 0$, po úprave

$$dp = -p\kappa \frac{dV}{V_0} .$$

Veličina κ je Poissonova konštanta rovnajúca sa pomeru tepelných kapacít C_p/C_v . Ak poslednú rovnicu porovnáme s rovnicou (2), vidíme, že oprava vzorca (7), uvažujúca adiabatickosť deja, spočíva v zámene K za $p\kappa$. Opravená rýchlosť zvuku je

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}}, \quad (8)$$

kde p je tlak plynu a ρ jeho hustota pri teplote okolia.

Prístroje a pomôcky: RC generátor, striedavý mV-meter, frekventometer, trubica s piestom, mikrofón, dĺžkové meradlo.

Opis aparatury:

Aparatúra sa skladá z trubice, v ktorej je zasunutý piest s mikrofónom. Piest sa dá premiestňovať a dá sa merať zmena jeho polohy v trubici. Na opačnom konci trubice je reproduktor napájaný z RC generátora (zdroja striedavého napätia s laditeľnou frekvenciou). Hodnota frekvencie sa odčíta na číslicovom frekventometri. Vytvorenie uzla, alebo kmitne, sa zistí mV-metrom ako minimum, alebo maximum signálu z mikrofónu.

Postup práce:

1. Zvoľte si frekvenciu zvuku a nastavte malú hlasitosť.
2. Pomocou tiahla premiestňujte piest a pozorujte stupnicu mV-metra. Maximálne hodnoty odpovedajú polohám kmitní.
3. Odmerajte polohy kmitní x_1, x_2, \dots podľa vysunutia tiahla z trubice.
4. Vypočítajte strednú hodnotu vlnovej dĺžky (vzdialenosť medzi dvomi susednými kmitňami je $\lambda/2$) a vypočítajte rýchlosť zvuku podľa (1).
5. Zmeňte frekvenciu a opakujte body 2, 3, 4. Vyberte aspoň 5 frekvencií z intervalu 500 – 3000 Hz.

Spracovanie nameraných hodnôt:

1. Výsledky a vypočítané hodnoty zapíšte do tabuľky

Tab. 1. Namerané hodnoty: $t/^\circ\text{C} =$, $p/\text{Pa} =$, $\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3} =$

f / Hz	x_1 / m	x_2 / m	x_3 / m	x_4 / m	λ / m	$c / \text{m/s}$

2. Z nameraných hodnôt vypočítajte strednú hodnotu rýchlosti zvuku \bar{c} a vypočítajte štandardnú odchýlku σ_c .
3. Zistíte z tabuliek hustotu vzduchu pre teplotu a tlak vzduchu v laboratóriu. Vypočítajte objemový modul pružnosti vzduchu podľa (7) a Poissonovu konštantu κ podľa (8).

Rozbor presnosti merania:

1. Určte strednú štandardnú odchýlku merania a rýchlosť zvuku vo vzduchu zapíšte v tvare $(\bar{c} \pm \sigma_c)$ m/s . Výslednú hodnotu porovnajte s tabuľkovou hodnotou.
2. Zistite s akou neistotou merajú jednotlivé prístroje a posúďte, údaj ktorého prístroja vnáša do výsledku najväčšiu neistotu merania.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Diskutujte o získaných výsledkoch meraní a zhodnot'te neistoty merania.

Kontrolné otázky:

1. Ako sa nazýva jav, pri ktorom sa vytvorí stojaté vlnenie?
2. Prečo je na pieste uzol?
3. Ako sa určí rýchlosť zvuku iným spôsobom (napr. ak máte k dispozícii svetelný signál)?

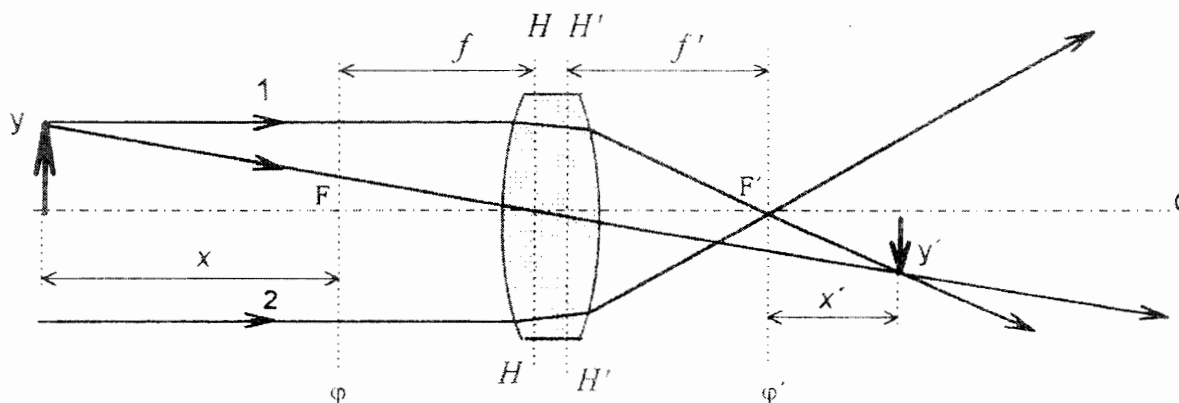
26. MERANIE OHNISKOVEJ VZDIALENOSTI ŠOŠOVKY

Ciel' práce: Zmerať ohniskovú vzdialenosť tenkej spojnej a rozptylnej šošovky využitím základných poznatkov z geometrickej optiky.

- Úlohy:**
1. Zmerajte ohniskovú vzdialenosť spojnej šošovky priamou metódou.
 2. Zmerajte ohniskovú vzdialenosť spojnej šošovky Besselovou metódou.
 3. Zmerajte priamou metódou ohniskovú vzdialenosť rozptylnej šošovky pomocou spojnej šošovky.

Teoretický úvod:

Šošovka je homogénne a izotropné priehľadné optické prostredie, ohraničené dvoma guľovými plochami, resp. jednou guľovou a jednou rovinnou plochou. Ak sa rovnobežné svetelné lúče po prechode šošovkou zbierajú, nazýva sa šošovka spojná, ak sa rozbiehajú, tak sa nazýva rozptylná. Medzi základné charakteristiky šošoviek, ako zobrazovacích prvkov, patria: Optická os šošovky o je spojnica stredov krivosti ohraničujúcich guľové plochy. Svetelné lúče (napr. 1 a 2 z obr.1) dopadajúce na spojnú šošovku rovnobežne s optickou osou sa pretínajú v obrazovom priestore v jednom bode F , tzv. obrazovom ohnisku šošovky.



Obr.1. Základné zobrazenie svetelných lúčov spojnou šošovkou

Aby po prechode šošovkou boli lúče rovnobežné s jej optickou osou, musia podobne vychádzať z jedného bodu na optickej osi v predmetovom priestore šošovky, z tzv. ohniska predmetového F . Rovina idúca príslušným ohniskom šošovky a kolmá na optickú os sa nazýva ohnisková rovina φ, φ' .

Rovina kolmá na optickú os v predmetovom priestore, ktorá má tú vlastnosť, že úsečka v nej ležiaca sa šošovkou zobrazí v priradenej obrazovej rovine ako úsečka s rovnakou dĺžkou a pritom na tej istej strane od optickej osi, nazýva sa kladná hlavná rovina predmetová H . Obrazová rovina, ktorá je k nej šošovkou priradená, je kladná hlavná rovina obrazová H' .

Body hlavnej roviny dostaneme ako priesečníky lúčov na šošovku dopadajúcich a z nej vychádzajúcich.

Priesečníky hlavných rovín s optickou osou nazývame hlavnými bodmi.

Vzdialenosť kladnej hlavnej roviny od príslušného ohniska je ohnisková vzdialenosť f, f' (obr. 1). Spojná šošovka je v podstate centrovaná sústava dvoch lámavých guľových plôch (s polomerami krivosti r_1, r_2). Ak je na obidvoch stranách šošovky rovnaké prostredie, sú ohniskové vzdialenosti f, f' rovnaké a platí:

$$f = f' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r_1 r_2}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)} \quad (1)$$

kde polomer vypuklej plochy r_1 sa berie kladne, polomer dutej guľovej plochy r_2 záporne, d je hrúbka šošovky a n je index lomu prostredia šošovky vzhľadom na jej okolie. Pre ohniskové vzdialenosti tenkej šošovky ($d \ll r_1, r_2$), z výrazu (1) dostaneme:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (2)$$

Ak tenkú spojku nahradíme spoločnou hlavnou rovinou, idúcou stredom šošovky O (obr. 2), vzdialenosť predmetu od stredu šošovky označíme a , vzdialenosť obrazu od toho istého stredu označíme b , potom podľa Newtonovej zobrazovacej rovnice:

$$xx' = f^2$$

pre $x = a-f, x' = b-f$ dostávame

$$(a-f)(b-f) = f^2$$

Úpravou predchádzajúcej rovnice dostaneme zobrazovaciu rovnicu tenkej šošovky:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (3)$$

Určenie ohniskovej vzdialenosti tenkej spojnej šošovky

A) Pomocou zobrazovacej rovnice. Na meranie ohniskovej vzdialenosti použijeme jednoduchú metódu, pri ktorej predmet veľkosti y umiestnime do vzdialenosti a od stredu šošovky, jeho ostrý obraz veľkosti y' dostaneme na tienidie vo vzdialenosti b , meranej tiež od stredu šošovky (obr. 2). Úpravou zobrazovacej rovnice (3) vypočítame ohniskovú vzdialenosť nasledovne:

$$f = \frac{a \cdot b}{a + b} \quad (4)$$

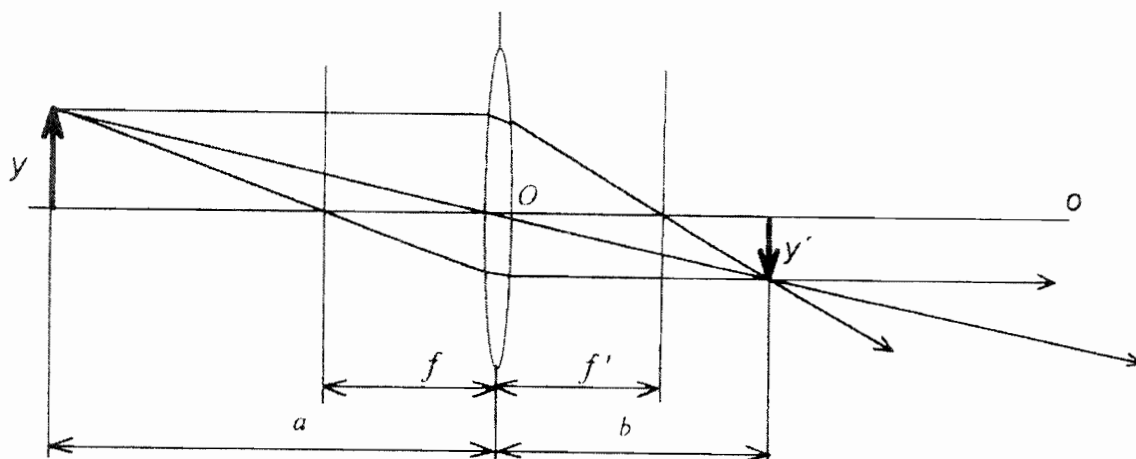
Ak označíme $z = \frac{y'}{y}$ zväčšenie šošovky, na základe podobnosti trojuholníkov z obr. 2

vyplýva: $z = \frac{y'}{y} = \frac{b}{a}$

Úpravou rovnice (4) a zohľadnením posledného výrazu môžeme napísať:

$$f = \frac{1}{1+z}b \quad (5)$$

Pri použití opísanej metódy sme vzdialenosti a a b merali od stredu šošovky (spoločnú hlavnú rovinu sme umiestnili do stredu šošovky), čím sme sa dopustili chyby v prípadoch, ak $r_1 \neq r_2$. Tomuto nedostatku sa vyhneme použitím nasledujúcej metódy.



Obr. 2. Určenie ohniskovej vzdialenosti pomocou zobrazovacej rovnice

B) Besselovou metódou. Ohniskovú vzdialenosť určíme pomocou veličín, ktoré nezávisia od presného určenia polohy hlavných rovín.

Umiestnime teda predmet P vo vzdialenosti $d > 4f$ od tienidla. Ak medzi predmet a tienidlo vložíme tenkú spojku, môžeme nájsť dve polohy spojky (pri $d = \text{konšt}$), pri ktorých dostaneme na tienidlo ostrý obraz predmetu P . Raz zväčšený p , raz zmenšený p' . Označme vzdialenosť predmetu a obrazu od šošovky v prvom prípade a_1 , b_1 , v druhom prípade a_2 , b_2 (obr. 3).

Pre tieto situácie platia nasledujúce rovnice:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \quad (6)$$

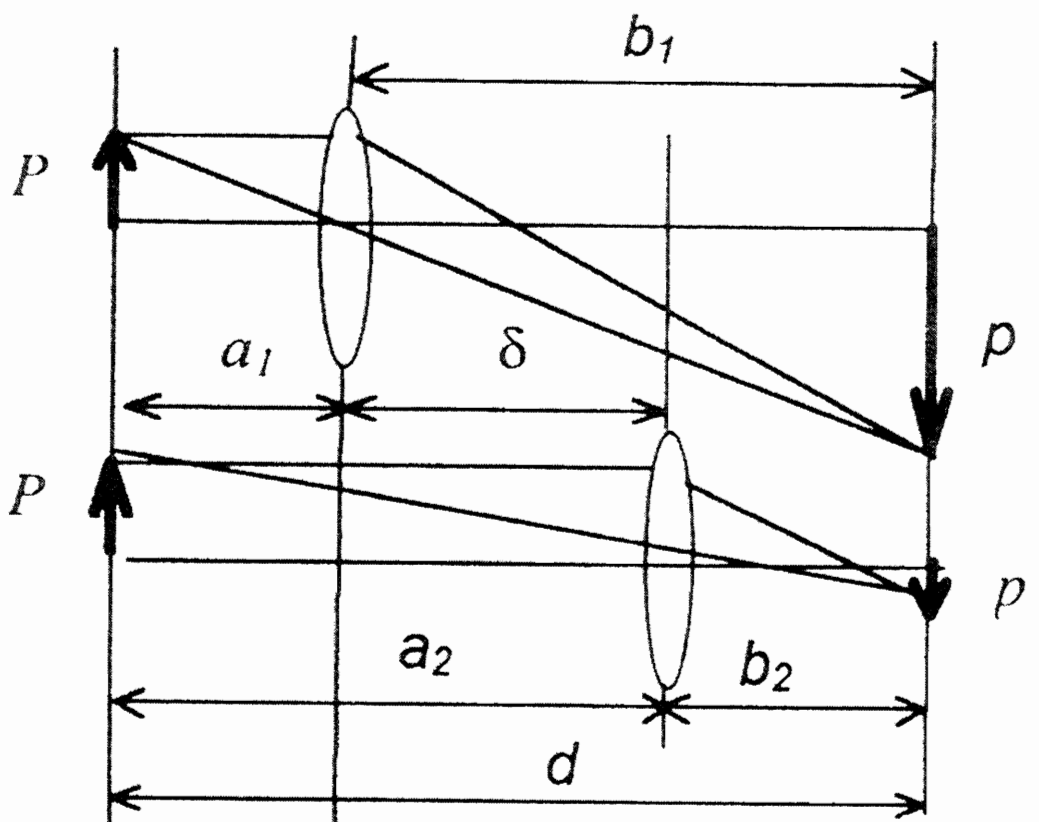
$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f}$$

ktoré môžeme napísať aj v tvare:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{d - a_1} = \frac{1}{f}$$

(7)

$$\frac{1}{b_2} + \frac{1}{d - b_2} = \frac{1}{f}$$



Obr. 3. Určenie ohniskovej vzdialenosti Besselovou metódou

Jednoduchou úpravou rovníc (7) dostaneme:

$$a_1(d - a_1) = b(d - b_2) \tag{8}$$

Rovnica (8) je splnená, ak platí $a_1 = b_2$.

Použitím rovníc (6) môžeme podobne ukázať, že:

$$b_1 = a_2. \tag{9}$$

Z obr. 3 vidíme, že δ je vzdialenosť medzi dvomi polohami šošovky poskytujúcimi ostrý obraz a platí:

$$d = a_1 + b_1 \quad (10)$$

$$\delta = a_2 - a_1$$

Z rovníc (10) a (9) vyplýva:

$$a_1 = \frac{d - \delta}{2} \quad (11)$$
$$b_1 = \frac{d + \delta}{2}$$

Aplikáciou označenia fyzikálnych veličín vo vzťahu (3) k situácii na obr. 3 a dosadením (11) dostávame:

$$f = \frac{(d - \delta)(d + \delta)}{4d} = \frac{d^2 - \delta^2}{4d} \quad (12)$$

Táto metóda umožňuje určiť ohniskovú vzdialenosť tenkej šošovky meraním posunutia šošovky (o vzdialenosť δ) a vzájomnej vzdialenosti predmetu a jeho obrazu (vzdialenosti d). Tieto údaje sú skutočne nezávislé od polohy hlavných kladných rovín.

Určenie ohniskovej vzdialenosti rozptylky

Pri meraní ohniskovej vzdialenosti rozptylky použijeme pomocnú spojku, pretože obraz vytvorený rozptylkou, je virtuálny. Spojka musí byť taká, aby výsledná kombinácia meranej rozptylky a pomocnej spojky bola ešte spojná sústava (obr. 4).

Vytvoríme najskôr na tienidle ostrý obraz P' predmetu P pomocou spojky. Ak potom medzi spojkou a ňou vytvorený ostrý obraz predmetu P' vsunieme meranú rozptylku, posunie sa ostrý obraz bodu A do bodu B a dostaneme obraz p . Reálny obraz predmetu P vytvorený spojkou v bode A slúži ako virtuálny predmet pre rozptylku, ktorou sa reálne zobrazí v bode B (obr. 4)

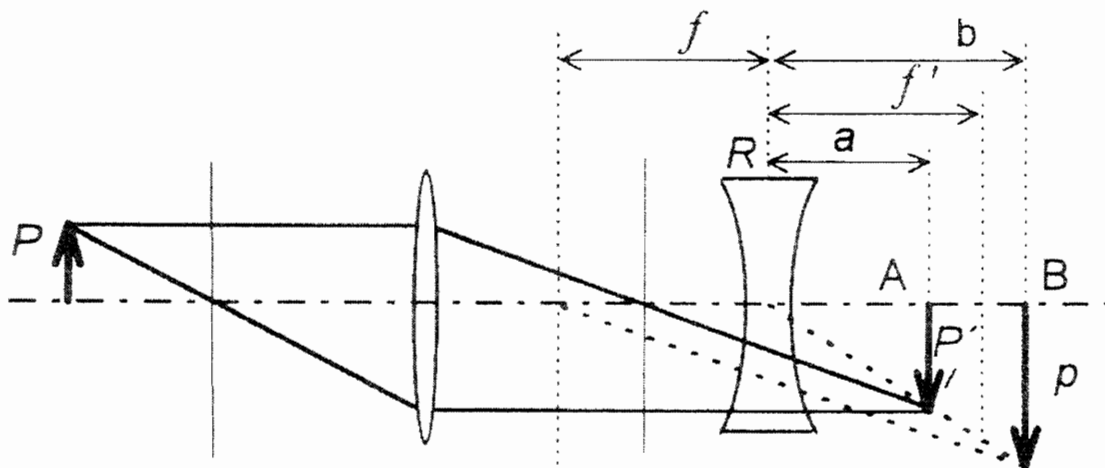
Označme vzdialenosti medzi bodmi:

$$RA = a$$

$$RB = b$$

Vzťah (3) aplikujeme na rozptylku a po jednoduchej matematickej úprave dostávame:

$$f = \frac{ab}{b - a} \quad (13)$$



Obr. 4. Určenie ohniskovej vzdialenosti použitím pomocnej spojky

Prístroje a pomôcky:

Optická lavica s príslušenstvom, merané šošovky, zdroj svetla, oceľové pravítko.

Postup práce:

1. Meranie ohniskovej vzdialenosti spojky

A) Na optickú lavicu dáme medzi predmet a tienidlo s milimetrovou stupnicou meranú šošovku. Posúvaním šošovky nastavíme polohu, pri ktorej vznikne na tienidle ostrý obraz stupnice a odmeriame vzdialenosť obrazu od stredu šošovky b . Zväčšenie šošovky určíme nasledovne:

$$z = \frac{n_2}{n_1}$$

kde n_1 je výška predmetu, n_2 je výška obrazu predmetu.

Tienidlo potom málo posunieme. Posunom šošovky nájdeme znovu ostrý obraz predmetu a určíme b a zväčšenie z . Ohniskovú vzdialenosť f počítame pre každú dvojicu z a b podľa vzťahu (5). Meranie opakujeme desaťkrát, údaje zapíšeme do tabuľky. Vypočítame aritmetický priemer ohniskovej vzdialenosti a príslušné chyby.

B) Pevne zvolíme polohu predmetu a tienidla tak, aby vzdialenosť d medzi nimi bola väčšia ako $4f$ (f sme určili pomocou zobrazovacej rovnice v časti A). Medzi predmet a tienidlo dáme spojnú šošovku a nájdeme takú polohu spojky, pri ktorej na tienidle dostaneme ostrý zväčšený obraz predmetu. Zaznačíme polohu spojky δ_1 na stupnici. Šošovku posunieme tak, aby sme na tienidle dostali ostrý zmenšený obraz predmetu a túto polohu δ_2 opäť zmeriame. Z rozdielu polôh δ_1 a δ_2 , zistíme vzdialenosť δ . Ohniskovú vzdialenosť určíme podľa vzťahu (12). Meranie opakujeme desaťkrát, údaje zapíšeme do tabuľky. Vypočítame aritmetický priemer ohniskovej vzdialenosti a príslušné neistoty merania.

2. Meranie ohniskovej vzdialenosti rozptylky

Pomocnú spojku dáme na optickú lavicu do štvornásobnej alebo väčšej vzdialenosti ($4f$) od predmetu. Tienidlom posúvame dovtedy, kým na ňom nevznikne ostrý zmenšený obraz predmetu. Na optickej lavici odčítame polohu tienidla t_s . Potom vložíme medzi tienidlo a spojku meranú rozptylku a jej posúvaním smerom od tienidla k spojke obraz na tienidle rozostříme. Posúvaním tienidla obraz znova zaostríme (spojkou už nehýbeme). Odčítame polohu rozptylky d_R a tienidla t_R , údaje zapisujeme do tabuľky. Vypočítame vzdialenosti:

$$a = t_s - d_R$$

$$b = t_R - d_R$$

a ohniskovú vzdialenosť rozptylky dosadením do vzťahu (13). Meranie opakujeme desaťkrát. Vypočítame aritmetický priemer ohniskovej vzdialenosti a príslušné chyby. Vo všetkých prípadoch (1., 2.) uče štandardnú odchýlku a relatívnu neistotu merania.

Otázky a úlohy:

1. Definujte pojem ohnisko spojnej šošovky.
2. Aký je rozdiel medzi reálnym a virtuálnym obrazom, vytvoreným šošovkami?
3. Nakreslite a vysvetlite priebeh významných lúčov spojnou a rozptylnou šošovkou .
4. Navrhните tabuľky pre zápis nameraných hodnôt.
5. Odvodte vzťahy pre výpočet štandardnej odchýlky a relatívnej neistoty merania pre jednotlivé prípady merania ohniskovej vzdialenosti.

27. MERANIE MRIEŽKOVEJ KONŠTANTY OPTICKEJ MRIEŽKY

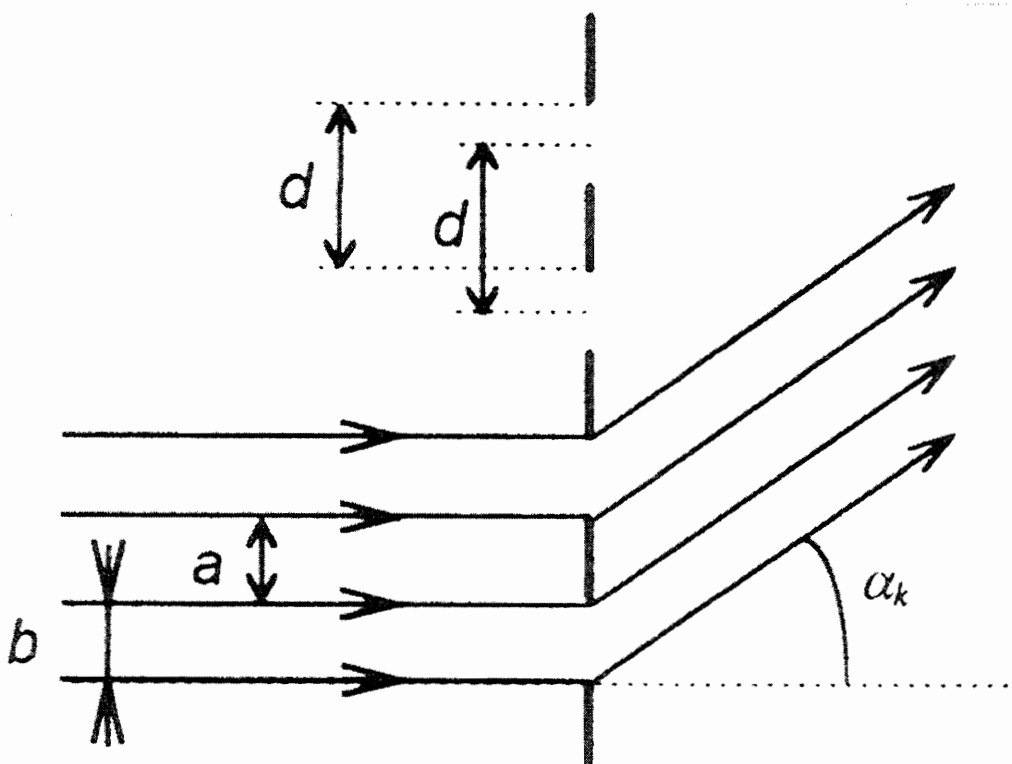
Ciel' práce: Zmerať hodnotu mriežkovej konštanty ohybovej mriežky pomocou lasera so známou vlnovou dĺžkou a naopak zo známej hodnoty mriežkovej konštanty ohybovej mriežky vypočítať vlnovú dĺžku lasera .

Úlohy: 1. Zistiť hodnotu mriežkovej konštanty ohybovej mriežky pomocou lasera.
2. Zo známej hodnoty mriežkovej konštanty vypočítať vlnovú dĺžku lasera .

Teoretický úvod:

Významným pokrokom vedy a techniky posledných desaťročí je konštrukcia lasera. Oproti tradičným zdrojom elektromagnetického žiarenia je svetlo lasera prísne monochromatické, koherentné a polarizované. Má obyčajne pomerne veľkú intenzitu, pričom žiarivá energia je sústredená do zväzku so zanedbateľne malou rozbiehavosťou.

Optická mriežka pre prechádzajúce svetlo je sklenená doska, do ktorej je vyrytá jemným hrotom sústava čiar šírky a vzájomne rovnobežných vrypov (obr. 1).



Obr.1. Náčrt optickej mriežky

Keď na optickú mriežku dopadá kolmo rovnobežný zväzok monochromatického svetla, na štrbinách mriežky šírky b nastáva ohyb svetla. Laserové lúče sa po prechode mriežkou šíria na všetky strany, pričom dochádza medzi nimi k interferencii.

Dva lúče, ktoré vychádzajú zo zodpovedajúcich si bodov susedných štrbín (obr. 1) a šíria sa v smere zvierajúcom s normálou mriežky uhol α_k , majú dráhový rozdiel:

$$\delta = (a + b)\sin \alpha_k = d \sin \alpha_k, \quad (1)$$

kde d je vzdialenosť stredov dvoch susedných štrbín - t.j. mriežková konštanta. Jej

prevrátená hodnota je $N = \frac{1}{d}$ udáva počet vrypov pripadajúcich na jednotku dĺžky. Nazýva sa hustota mriežky.

Spomínané lúče sa zosilnia v prípadoch, keď sa ich dráhový rozdiel δ rovná celočíselnému násobku vlnovej dĺžky svetla λ , teda, ak platí:

$$\delta = k \cdot \lambda \quad (2)$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots$,

Z rovnice (1) a (2) dostávame:

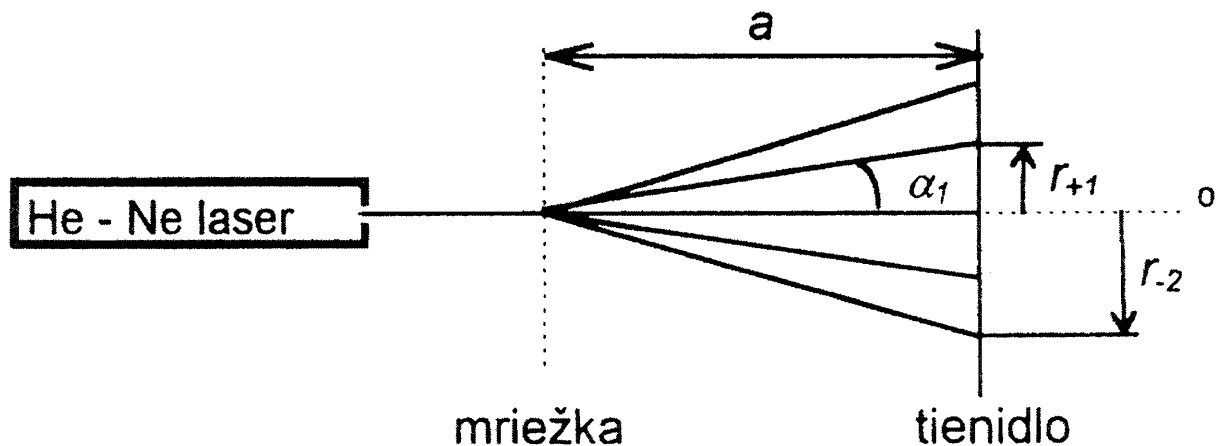
$$k \cdot \lambda = d \sin \alpha_k$$

Z poslednej rovnice môžeme vypočítať mriežkovú konštantu d podľa vzťahu

$$d = \frac{k \cdot \lambda}{\sin \alpha_k} \quad (3)$$

Číslo k udáva rád maxima. Maximum nultého rádu vzniká v smere dopadajúceho lúča. Maximá prvého rádu sú prvé svetelné stopy po obidvoch stranách stopy nultého rádu. Rozdiel príslušných optických dráh interferujúcich vln vytvárajúcich maximá prvého rádu sa rovná práve vlnovej dĺžke λ laserového zdroja.

Vzhľadom na to, že laser poskytuje úzky rovnobežný zväzok monochromatického žiarenia, môžeme meranie uskutočniť pomocou veľmi jednoduchej zostavy. Ak v istej vzdialenosti a za optickou mriežkou umiestnime tienidlo, môžeme na ňom pozorovať ostro ohraničené stopy interferenčných maxim, vzdialených od optickej osi o o hodnotu r_{+1} a r_{-1} pre maximá prvého rádu, o hodnotu r_{+2} a r_{-2} pre maximá druhého rádu (obr. 2).



Obr.2. Náčrt usporiadania merania

Pre uhly α_k platí

$$\sin \alpha_k = \frac{r_k}{\sqrt{r_k^2 + a^2}} \quad (4)$$

Jednoduchou úpravou a dosadením vzťahu (4) do vzťahu (3) pre ľubovoľné k dostávame

$$d = k \cdot \lambda \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{r_k^2}} \quad (5)$$

Na zisťovanie mriežkovej konštanty optickej mriežky použijeme vzťah č. (5).

Prístroje a pomôcky: He - Ne laser (s vlnovou dĺžkou $\lambda = 632,8$ nm), optická lavica s držiakom na mriežku, optická mriežka, tienidlo s horizontálnou dĺžkovou stupnicou, dĺžkové meradlo.

Postup práce:

Sústavu zostavenú podľa obr. 2 vycentrujeme tak, aby svetlo prechádzalo stredom mriežky a maximum nultého rádu bolo v nule tienidla. Mriežku nastavíme do určitej vzdialenosti a od tienidla na tienidle odčítame hodnoty polôh maxim prvého a druhého rádu vpravo a vľavo. Údaje a a r_k zapíšeme do tabuľky. Meranie opakujeme pre desať rôznych polôh mriežky. Vypočítame priemerné hodnoty polôh maxim r_1 a r_2 a podľa vzťahu (5) mriežkové konštanty pre jednotlivé rády. Metódami matematickej štatistiky vypočítame výslednú hodnotu d , respektíve N a príslušné neistoty merania.

Tabuľka nameraných hodnôt..

Č. m.	a [m]	r_{-1} [m]	r_{+1} [m]	r_{-2} [m]	r_{+2} [m]	r_1 [m]	r_2 [m]	d_1 [m]	d_2 [m]	d [m]
1										

Kontrolné otázky:

1. Vysvetlite, ako vzniká interferencia svetla.
2. Vysvetlite pojem interferenčného minima a maxima.
3. Čo nazývame optickou mriežkou?
4. Akú povahu svetla potvrdzuje jav interferencie ?
5. Odvod'te vzťah pre výpočet štandardnej odchýlky a relatívnej neistoty merania mriežkovej konštanty.
6. Určite štandardnú odchýlku a relatívnu neistotu výsledku uskutočneného merania.

28. MERANIE PRIEMERU TENKÉHO VLÁKNA POMOCO UHYBU SVETLA

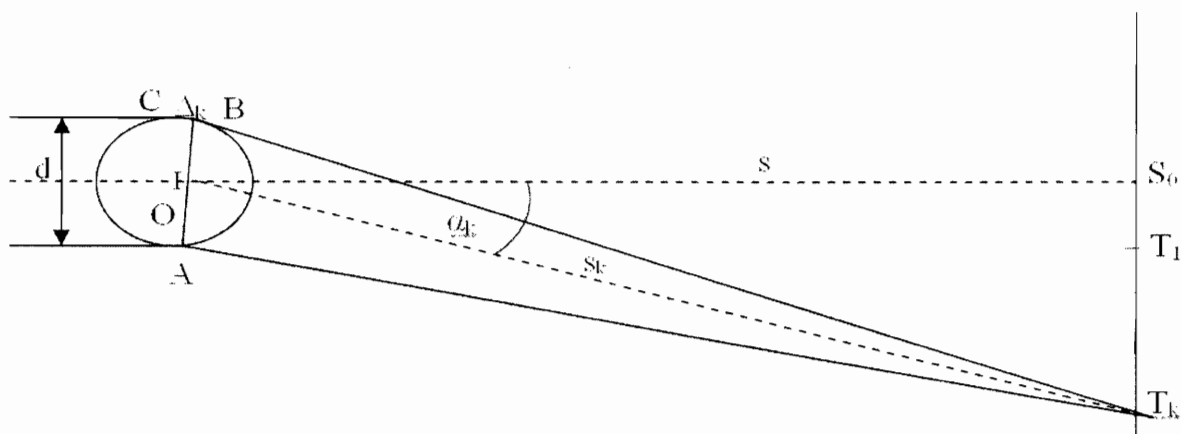
Cieľ práce: Zmerať priemer tenkého vlákna použitím hélum-neónového laserového zdroja a využitím ohybu svetla.

- Úlohy:**
1. Zoznámiť sa s prácou, parametrami a vlastnosťami He-Ne laserového zdroja.
 2. Zmerajte priemer tenkého vlákna pomocou ohybu svetla na ňom.
 3. Presnosť nameraného priemeru zhodnoťte veľkosťou štandardnej odchýlky merania.

Teoretický úvod:

Ak svetlo z koherentného zdroja pri svojom šírení narazí na prekážku, ktorej rozmer je porovnateľný s vlnovou dĺžkou svetla, nastáva ohyb svetla na tejto prekážke. Takáto situácia nastáva napríklad v prípade, keď do cesty lasera vychádzajúceho rovnobežnému zväzku svetla vložíme tenké vlákno o priemere d . Na tienidle umiestnenom za vláknom vo vzdialenosti s môžeme pozorovať ohybový obrazec pozostávajúci zo systému svetlých a tmavých prúžkov. Svetlé prúžky zodpovedajú maximám svetelnej intenzity a tmavé naopak minimám svetelnej intenzity. Vzájomná vzdialenosť maxim resp. vzájomná vzdialenosť miním je nepriamo úmerná priemeru vlákna d . Využitím tejto vlastnosti môžeme pomocou ohybu svetla zmerať priemer vlákna.

Z teórie interferencie svetla vyplýva, že pre rozloženie polôh maxim resp. miním je rozhodujúci dráhový rozdiel Δ medzi vlneniami dopadajúcimi do príslušného bodu. Na obr. 1 vidieť náčrt dopadajúceho vlnenia na tenké vlákno a následný ohyb tohto vlnenia pozorovateľný na tienidle.



Obr. 1. Náčrt dopadajúceho vlnenia na tenké vlákno

Ak vo zvolenom bode na tienidle je dráhový rozdiel dopadajúcich vlnení rovný celočíselnému násobku vlnovej dĺžky λ , potom môžeme písať pre tento prípad

$$\Delta_k = d \sin \alpha_k = k\lambda \quad (1)$$

a v tomto mieste pozorujeme maximum svetelnej intenzity (svetlý prúžok).

Naopak, ak v danom mieste je dráhový rozdiel rovný nepárnemu násobku polovice vlnovej dĺžky λ , potom môžeme písať pre tento prípad

$$\Delta_k = d \sin \alpha_k = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

a v tomto mieste pozorujeme minimum svetelnej intenzity (tmavý prúžok). V rovniciach (1) a (2) celé číslo k resp. $(k+1)$ predstavuje tzv. rád maxima resp. minima ohybového obrazca. V strede ohybového obrazca by podľa zákona o priamočiariom šírení by mal byť stred tieňa vlákna. Avšak v dôsledku ohybu bude práve v tomto mieste jasný prúžok - maximum nultého rádu ($k = 0$).

Na odvodenie približného vzťahu medzi priemerom vlákna d ako funkcie vzdialenosti dvoch susedných miním ($z_{k+1} - z_k$), vzdialenosti s vlákna od tienidla a vlnovej dĺžky λ vyjdeme z obr. 1. Označme vzdialenosť vlákna od k - teho minima ako s_k . Potom z pravouhlého trojuholníka $OS_\rho T_k$ vidíme, že

$$s_k \cos \alpha_k = s \quad (3)$$

Avšak z podobných trojuholníkov ABC a $OS_\rho T_k$ vidíme, že

$$\frac{d}{\Delta_k} = \frac{s_k}{z_k} \quad (4)$$

Z toho, za použitia (3) dostaneme

$$\frac{d}{\Delta_k} = \frac{s}{z_k \cos \alpha_k} \quad (5)$$

Takýmto spôsobom dostaneme pre vzdialenosť k - teho minima od stredu ohybového obrazca z_k

$$z_k = \frac{s}{d} \frac{\Delta_k}{\cos \alpha_k} \quad (6)$$

Pre vzdialenosť dvoch susedných miním teda odvodíme vzťah

$$z_k - z_{k-1} = \frac{s}{d} \left(\frac{\Delta_k}{\cos \alpha_k} - \frac{\Delta_{k-1}}{\cos \alpha_{k-1}} \right) \quad (7)$$

Potom pre priemer vlákna d dostávame

$$d = \frac{s}{z_k - z_{k-1}} \left(\frac{\Delta_k}{\cos \alpha_k} - \frac{\Delta_{k-1}}{\cos \alpha_{k-1}} \right) \quad (8)$$

Po dosadení z podmienky minima (2) a vzťahu (3) spolu s použitím Pytagorovej vety dostaneme

$$d = \frac{\lambda}{2(z_k - z_{k-1})} \left((2k+1)\sqrt{z_k^2 + s^2} - (2k-1)\sqrt{z_{k-1}^2 + s^2} \right) \quad (9)$$

V prípade, že $z \ll s$ môžeme písať

$$d = \frac{s\lambda}{z_k - z_{k-1}} \quad (10)$$

Opis aparatury a metódy merania:

Aparatúru zostavíme podľa postupu uvedeného v časti Postup práce. Po zapnutí hélíum-neónového zdroja, ak sa vlákno nachádza v ceste zväzku lúčov, budeme pozorovať ohybový obrazec – sústavu tmavých a svetlých prúžkov. Svetlé prúžky sa nachádzajú v miestach maxima intenzity a tmavé naopak v miestach minima intenzity. V mieste priesečníka optickej osi (pôvodného smeru tenkého zväzku lúčov) s tienidlom pozorujeme ohybové maximum nultého rádu. Po jeho obidvoch stranách v smere kolmom na os aj na vlákno pozorujeme ako tmavé prúžky minimá prvého rádu vo vzdialenosti z_1 od stredu ohybového obrazca, druhého rádu vo vzdialenosti z_2 od stredu ohybového obrazca, atď.

Meranie hrúbky vlákna d vykonáme na základe približného vzťahu (10).

Prístroje a pomôcky:

Laserová dióda s napájacím zdrojom, optická lavica, tenké vlákno (drôtik) upevnený v rámečku, oceľové meradlo.

Postup práce:

Na optickú lavicu umiestnime postupne zdroj svetla (laserovú diódu), rámček s tenkým rovným vláknom a tienidlo tak, aby vlákno bolo v ceste úzkeho zväzku lúčov. Pomocou oceľového meradla zmeriame vzdialenosti z_k aspoň päť miním vpravo a aspoň päť miním vľavo od stredu ohybového obrazca. Z príslušného minima vpravo a vľavo vypočítame aritmetický priemer. Vzdialenosť tienidla od vlákna s zmeriame opakovane päťkrát. Zistíme si údaj výrobcu o vlnovej dĺžke svetla hélíum – neónovej laserovej diódy.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Na výpočet priemeru d vlákna použijete vzťah (10), hodnotu vlnovej dĺžky svetla hélíum – neónovej laserovej diódy (údaj výrobcu), vypočítané priemery vzdialeností susedných miním ($z_{k+1} - z_k$) a vzdialenosť tienidla od vlákna s . Z experimentálne získaných hrúbok vypočítajte aritmetický priemer, ktorý ohodnotíme strednou neistotou merania.

Rozbor presnosti merania:

Vypočítanú hodnotu priemeru vlákna d zapíšte tvare $(d \pm \sigma_d)$ pomocou neistoty merania.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnot'te neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Za akých podmienok dochádza k ohybu svetla na prekážkach?
2. Aký je koherentný zdroj svetla (vlnenia)?
3. Ako by ste určili zo známeho priemeru vlákna vlnovú dĺžku laserového zdroja?

29. HOLOGRAFIA, ZÁZNAM A REKONŠTRUKCIA HOLOGRAMU

Cieľ práce: Demonštračným pokusom poukázať na význam holografie a zoznámiť študentov so základmi holografie.

- Úlohy:**
1. Stručné zoznámenie sa so základnou teóriou holografie.
 2. Pomocou laserového zdroja vykonajte rekonštrukciu hologramu.
 3. Štúdium možností záznamu hologramu.

Teoretický úvod:

Perspektívna metóda záznamu optickej informácie tzv. **holografia**, je úplný záznam o vlne, teda záznam amplitúdy aj fázy. Prakticky to znamená, že pomocou holografie možno zaznamenať priestorové objekty odrážajúce svetlo aj priestorové transparentné objekty, a to trojrozmerné na rozdiel od fotografie alebo záznamu kamerou, ktoré priestorové objekty zaznamenávajú len dvojrozmerné. **Optická holografia** je založená na interferencii koherentného svetla.

Pozn.: Koherencia je pojem, charakterizujúci pravidelné zmeny alebo stálosť základných charakteristík vlny (frekvencie, amplitúdy, fázy, polarizácie, kmitov a vlnení) v priestore.

Záznamovým prostredím budeme nazývať prostredie, v ktorom pôsobením svetla dochádza k trvalým zmenám jeho fyzikálnych vlastností, t. j. nevratný spôsob záznamu. Môžeme sem zaradiť fotografické emulzie na báze svetlocitlivých zlúčenín striebra, ktoré patria k najstarším ale v súčasnosti stále najčastejšie používaným záznamovým prostrediam holografickej interferometrie.

Holografiu nie je možné pochopiť v rámci geometrickej optiky, v ktorej sa zaoberá so svetlom, akoby bolo zložené z diskretných častíc (fotónov). Holografia vyžaduje, aby svetlo bolo chápané ako vlnenie. Pri odraze a lome svetla využíva fotografický prístroj intenzitu svetla, ale nie jeho fázu. Pri zobrazovaní predmetov na princípe holografie sa uplatňuje vlnová povaha svetla. Táto metóda nepotrebuje šošovky, ale je viazaná na nutnú podmienku, aby bol predmet osvetlený koherentným zväzkom, ktorého jednotlivé časti majú časovo nemenný fázový rozdiel. Povrch predmetu rozptyľuje dopadajúce svetlo a ak dopadne na fotografickú dosku, spôsobí v emulzii sčernanie, zodpovedajúce výslednej amplitúde svetelných kmitov v príslušnom mieste. Výsledná amplitúda je výsledkom pôsobenia lúčov rozptýlených na všetkých bodoch telesa, ktoré následkom „dokonalejšie“ koherencie interferujú. Takýto záznam na fotografickej doske dáva informácie o intenzitách a fázach svetelných lúčov rozptýlených na celom telese.

Záznam a rekonštrukcia hologramu

Na holograme sa nezaznamenáva samotný obraz predmetu, ale štruktúra svetelnej vlny, ktorá sa odrazila a rozptýlila na predmete. Na získanie hologramu je potrebné, aby na fotografickú emulziu dopadali súčasne dva zväzky svetelných lúčov: zväzok rozptýlený na predmete (alebo ktorý prešiel transparentným predmetom), ktorý nesie informáciu o predmete –

objektový zväzok a zväzok vychádzajúci z toho istého zdroja **referenčný zväzok**, ktorému v ceste nestojí nijaká prekážka.

Tieto dva zväzky musia spolu interferovať. Ďalej je potrebný záznamový materiál, ktorý je citlivý na vlnovú dĺžku použitého laserového žiarenia a má dostatočné rozlíšenie (min. 1500 čiar/mm). Interferenčný obraz sa zaznamená na holografickú dosku. Tento prvý krok sa nazýva **záznam na holografickú dosku**. Exponovaná a fotochemicky spracovaná holografická doska sa nazýva **hologram**.

Zjednodušene možno princíp holografie nasledovne opísať: **Z lasera vychádza úzky zväzok lúčov, ktorý sa na deliči rozdelí na dva zväzky. Zväzok, ktorý prejde deličom je odrazený od zrkadla a usmernený do rozptylnej šošovky, ktorou je rozšírený a dopadá na predmet, na ktorom sa difúzne odráža k holografickej doske (holograme).**

Tento zväzok tvorí predmetovú vlnu. Druhý zväzok, referenčný, vznikne odrazom od deliacej doštičky a je odrazený od zrkadla a ďalej usmernený do mikroobjektívu, ktorým je rozšírený a ďalej objektívom pretransformovaný na rovinné svetelné vlny, ktoré dopadajú na holografickú dosku. Vybraný bod M predmetu je zdrojom svetelnej vlny, ktorá interferuje s referenčnou vlnou. Takto s referenčnou vlnou interferujú všetky svetelné zväzky odrazené od jednotlivých bodov osvetlenej časti predmetu. Výsledné interferenčné pole možno zaznamenať v na holografickú dosku alebo film.

Po vyvolaní filmu je hologram vložený do pôvodnej polohy ako pri jeho zázname a osvetlený len referenčným zväzkom, pričom pôvodný predmet je odsunutý mimo optickú sústavu. Pozorovateľ v dôsledku difrakcie osvetľujúceho referenčného zväzku vidí cez hologram v dôsledku mriežkovej štruktúry hologramu predmet v pôvodnej polohe, pričom ho vidí trojrozmerné ako v skutočnosti.

Tento druhý krok sa nazýva rekonštrukcia hologramu.

Ak je namiesto oka použitý fotografický aparát alebo videokamera, možno predmet fotograficky alebo iným spôsobom zdokumentovať.

Ak je hologram obrátený fotografickou emulziou k pozorovateľovi, potom sa skutočný obraz nachádza na tej strane hologramu, kde je aj pozorovateľ. Takéto zobrazenie sa nazýva **pseudoskopickým**. Toto zobrazenie je skutočné, preto je možné zaznamenať ho bez pomoci šošoviek – umiestnením holografickej dosky do roviny, kde sa zobrazenie vytvára.

Pre technickú realizáciu experimentu musí byť rozdiel optických dráh referenčnej a predmetovej vlny menší ako je koherentná dĺžka lasera. Viditeľnosť interferenčných prúžkov, tvoriacich hologram sa znižuje, ak sa zväčšuje rozdiel optických dráh lúčov a to vedie k zhoršeniu kvality rekonštruovaného holografického zobrazenia.

Koherentná dĺžka je najväčší dráhový rozdiel, pri ktorom je ešte pozorovateľná interferencia v poli dvoch optických zväzkov vzniknutých delením jedného zväzku a potom sa šíriacich po rôznych dráhach.

Vlastnosti hologramov

Hologram nemá nijaké znaky, ktoré by pripomínali zobrazovaný predmet. Je to systém svetlých a tmavých miest (vzniknutých interferenciou dvoch zväzkov lúčov), ktorý ani pod mikroskopom neposkytuje nijakú informáciu o zobrazovanom predmete. Ak je hologram osvetlený obyčajným svetlom, voľným okom nie je možné určiť predmet, ktorý je na holograme zaznamenaný (výnimku tvorí napr. dúhový hologram). Napriek tomu je v holograme zašifrovaný priestorový (dokonca farebný) obraz predmetu.

Ako už bolo vyššie spomenuté, vytvorenie viditeľného obrazu pomocou hologramu sa nazýva **rekonštrukcia obrazu**. Aby bolo možné vidieť v priestore obraz predmetu, hologram treba

presvietiť porovnávacím (referenčným) zväzkom svetla. Vtedy pod určitým uhlom k dopadajúcemu zväzku vzniká obraz. Pozorovateľ vidí pôvodný trojrozmerný predmet v priestore. Na takýto predmet možno hľadiť z rôznych smerov ako cez okno, ktoré je ohraničené rozmermi hologramu. Viditeľnosť objektu cez hologram je spôsobená difrakciou osvetľujúceho referenčného zväzku na mriežkovej štruktúre hologramu. Takéto pozorovanie je sprevádzané *paralaxou* – ak sa zmení bod pozorovania, pozorovaný objekt zmení svoju polohu. Ak v čase expozície nejaké blízke predmety zakrývali predmety vzdialenejšie, zmenou polohy svojich očí môže pozorovateľ nerušene vidieť vzdialenejšie predmety.

Pri holografii sa teda jedná o záznam priestorovej štruktúry svetelnej vlny, ktorá je rozptýlená predmetom. Tento záznam sa získava pomocou interferenčného obrazu, ktorý zachováva súčasne amplitúdové pomery rozptýleného svetla, t.j. relatívne intenzity, od ktorých závisí miera sčernenia tmavých oblastí interferenčného obrazu, ako aj jeho fázové pomery, ktoré určujú vzájomné rozloženie tmavých a svetlých oblastí.

Pri fotografii sa zaznamenáva len intenzita rozptýleného svetla, t.j. jeho amplitúdové charakteristiky. Informácie o fázovom rozdieloch lúčov, t.j. informácie o vzdialenostiach rôznych bodov objektu, ktoré charakterizujú jeho „trojrozmernosť“, sa strácajú.

Obrazy, získané holografiou, majú aj ďalšie zaujímavé vlastnosti:

Ak je hologram rozrezaný na niekoľko častí, z každej sa po presvietení získa ten istý obraz ako je na celom holograme, ak sa neberie do úvahy, že sa so zmenšovaním rozmerov hologramu znižuje ostrosť zobrazenia a zhoršuje sa priestorový vnem. Táto vlastnosť hologramu súvisí s tým, že pri expozícii je výsledný optický stav v každom bode holografickej dosky určený pôsobením svetla, ktoré bolo rozptýlené všetkými bodmi povrchu predmetu a naopak, svetlo rozptýlené každým bodom predmetu, osvetľuje celú plochu holografickej dosky. Preto je na ľubovoľne malej časti hologramu zašifrovaný celý obraz predmetu.

Ďalšia zvláštnosť hologramu je v tom, že pri rekonštrukcii vznikajú len pozitívne obrazy. Táto zaujímavá vlastnosť súvisí s tým, že obraz je na holograme zašifrovaný pomocou variácií kontrastu interferenčných prúžkov a vzdialeností medzi nimi, ktoré sa so zmenou negatív na pozitív (alebo naopak) nezmenia.

Na tú istú holografickú dosku možno zaznamenávať viac obrazov a každý z nich sa dá rekonštruovať bez akýchkoľvek porúch ostatných záznamov.

Ak sú holografické obrazy zaznamenávané každý z iného uhla, potom ich možno získať pri rekonštrukcii selektívne jeden po druhom a oddelene od seba z tej istej emulzie filmu tak, že sú presne napodobnené pôvodné podmienky (uhol laserového lúča) použité pri expozícii. Jednotlivé holografické obrazy možno vnímať ako navzájom oddelené individuálne formy, avšak takýto záznam možno považovať za úplne nediferencované pole svetla, ktoré následkom špecifickej interferenčnej štruktúry vytvára dojem oddelenosti objektu.

Využitie hologramu

Holografiu možno využiť pre výskum objektov odrážajúcich svetlo, napr. výskum mechanických deformácií, tepelných deformácií, vibrácií malých posuvov a pod., pre interferometrický výskum nehomogenít v transparentných objektoch a pre priestorový záznam častíc v tekutinách.

Holografia využíva interferenciu svetla pre záznam trojrozmerných obrazov, preto vyžaduje použitie koherentných svetelných zdrojov, pričom celé zariadenie musí byť kompaktné, chránené proti otrasom z okolitého prostredia a obvykle vyžaduje zatemnenie pracoviska. Holografia vyžaduje „dokonalé“ optické zdroje s vysokým stupňom koherencie, aby sa

dodržali javy interferencie a ohybu svetla. Jedná sa o priestorovú, ako aj o časovú koherenciu. Priestorová koherencia je tým väčšia, čím je zdroj „bodovejší“ a časová koherencia je tým väčšia, čím je svetlo monochromatickejšie. Ideálnym monochromatickým zdrojom je **laser** – generátor elektromagnetického žiarenia v optickej oblasti vlnových dĺžok.

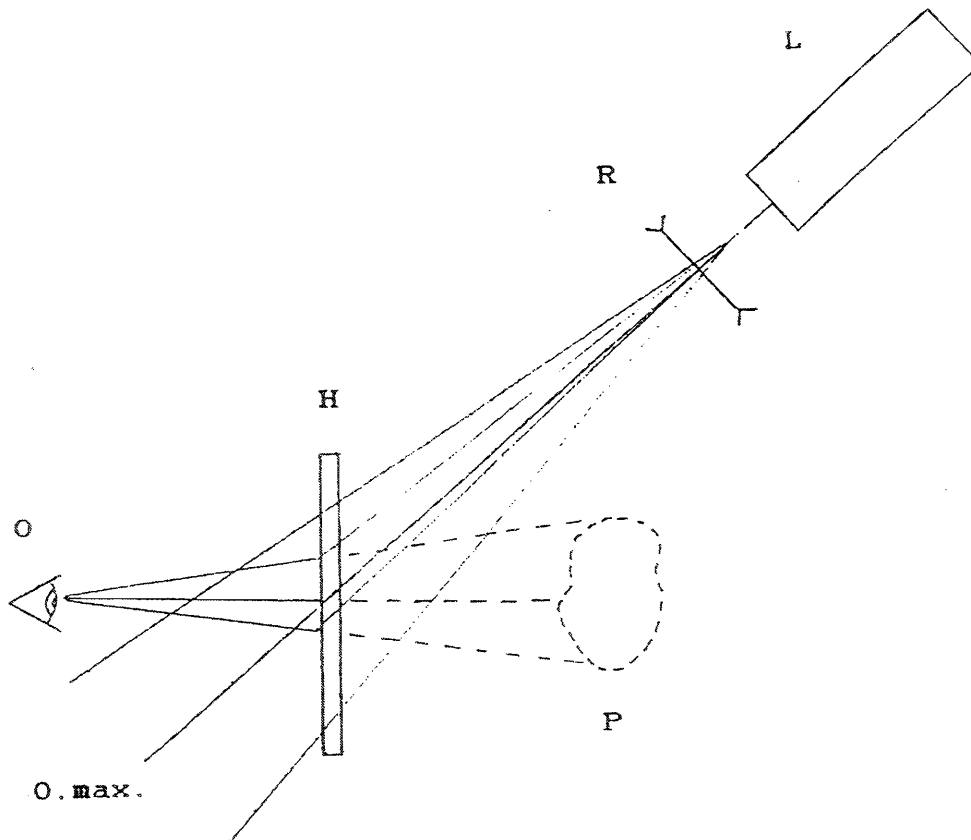
Laser zabezpečuje časovú a priestorovú koherenciu, ktorá umožňuje získať stabilnú a zreteľnú štruktúru v rovine hologramu a tiež zabezpečuje dostatočný výkon pri zodpovedajúcej vlnovej dĺžke svetla, meraný v ľubovoľnom bode za ľubovoľný časový interval.

Skôr vyrobené lasery produkujú svetlo jedinej frekvencie (vlnovej dĺžky), teda produkujú jednofarebné (**monochromatické**) svetlo. Pre holografiu sa najčastejšie používa helium-neónový laser (He-Ne), s vlnovou dĺžkou $\lambda = 0,6328 \cdot 10^{-6}$ m, s kontinuálnym osvitom.

Podmienky pre záznam hologramu musia byť volené tak, aby sa skutočne získal hologram a aby mal dobrú kvalitu. Jedným z najdôležitejších predpokladov je voľba záznamového prostredia, ktorého rozlišovacia schopnosť musí umožniť záznam jemnej štruktúry hologramu. Vzdialenosť prúžkov mriežky, ktorá vznikne interferenciou dvoch rovinných vln závisí na uhle medzi týmito dvoma vlnami. Preto prostredie pre holografiu musí byť upravené tak, aby použitý materiál dovolil zaznamenať túto mriežku.

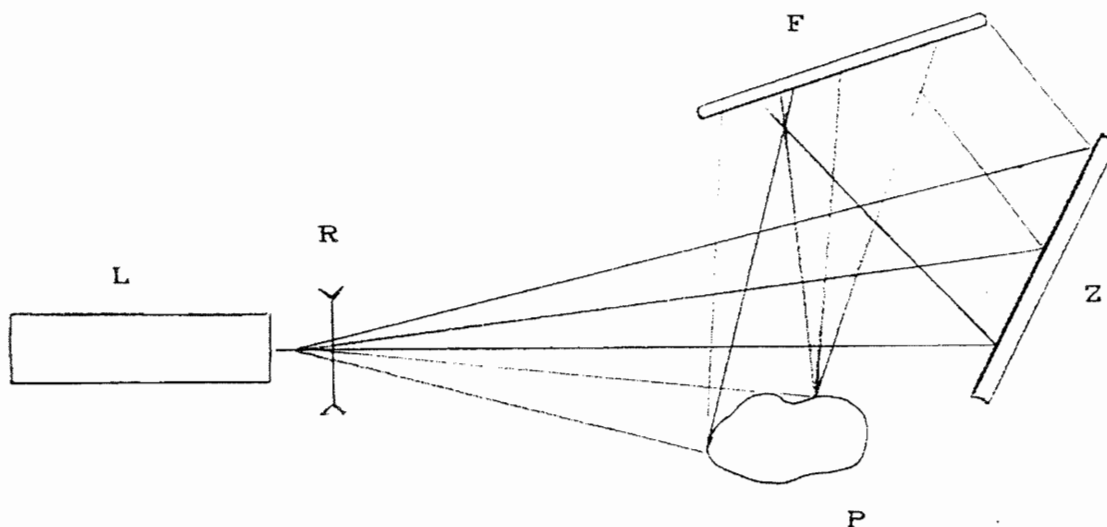
V experimentálnej praxi sa štandardne používajú záznamové prostredia, ktoré je možné klasifikovať z rôznych hľadísk podľa mechanizmu interakcie svetelného žiarenia s materiálom s predpokladaným využitím. Podľa toho, či dopadajúca vlna ovplyvňuje priepustnosť, index lomu alebo hrúbku prostredia poznáme **amplitúdové** alebo **fázové** záznamy.

Toto delenie platí pre interakciu záznamu s rekonštrukčnou vlnou, pri ktorej sa ovplyvňuje amplitúda alebo fáza vlny. V praxi sa vyskytujú komplexné záznamy vplyvajúce na obidve charakteristiky.



Obr. 1. Optická schéma rekonštrukcie hologramu.

- L – He-Ne laser,
- R – rozšírenie zväzku pomocou šošovky s krátkou ohniskovou vzdialenosťou (silná rozptylka, alebo spojka S6 – $\Phi = 5 \text{ mm}$, $f = +5 \text{ mm}$),
- P – vytvorenie neskutočného rekonštruovaného obrazu,
- H – hologram,
- O – oko pozorovateľa



Obr. 2. Optická schéma záznamu hologramu.

- L – He-Ne laser,
 R – rozšírenie zväzku pomocou šošovky s krátkou ohniskovou vzdialenosťou
 (silná rozptylka, alebo spojka S6 – $\Phi = 5$ mm, $f = +5$ mm),
 Z – zrkadlo,
 P – zaznamenávaný predmet,
 F – fotocitlivá platňa.

Hologram vzniká zaznamenaním interferenčného poľa vytvoreného interferenciou svetelnej vlnoplochy rozptýlenej na predmete (tzv. predmetová vlnoplocha) a vlnoplochy odrazenej od zrkadla (tzv. referenčná vlnoplocha) na fotocitlivé záznamové prostredie (fotografická platňa) a vyvolaním bežným fotografickým procesom. Holografický záznam tvorí obrovské množstvo zaznamenaných interferenčných miním a maxím. Pri rekonštrukcii dochádza na týchto mikroskopických útvaroch k ohybu svetla takým spôsobom, že nám vytvára obraz zaznamenaného predmetu.

Prístroje a pomôcky: He-Ne laser, šošovka s krátkou ohniskovou vzdialenosťou, hologram, zrkadlo, fotocitlivý platňa, zaznamenávaný predmet

Postup práce:

1. Na optickú lavicu upevníme He-Ne laser.
2. Pred He-Ne laser v približnej vzdialenosti 20 cm upevníme šošovku s krátkou ohniskovou vzdialenosťou.
3. Do vzdialenosti asi 50 cm pred šošovku upevníme hologram asi pod uhlom 60 stupňov upevníme hologram hladšou stranou k pozorovateľovi.
4. Zapnutím lasera osvetlíme hologram a pozorujeme rekonštruovaný obraz na holograme.

Pozn. 1. : Pri rekonštrukcii hologramu je potrebné aby bol hologram správne orientovaný smerom k laseru, t.j. hladšia lesklá strana skla (zistíte pomocou odrazu svetla) musí smerovať

k pozorovateľovi, šikmo k laseru má byť strana emulzie. Pri manipulácii dávajte pozor na emulziu hologramu, chráňte ju pred priamym dotykom prstov a poškrábaním, nemožno ju čistiť ani handričkou. Čistenie môžete vykonávať len jemne štetcom. S holografickou platňou manipulujte len uchytením za hrany. Pri manipulácii s hologramami a difrakčnými štruktúrami dodržiavajte ďalšie podobné zásady, ako pri manipulácii s optickými prvkami a zrkadlami.

Pozn. 2.: Počas expozície fotografickej platne je potrebné zabezpečiť optické prvky proti vibráciám pevným uchytením a v a v tichom kludnom prostredí (napr. v blízkosti silných motorov, strojov, intenzívnej prevádzky je realizácia holografického záznamu skoro nemožná). Dĺžka expozície je závislá od intenzity lasera, citlivosti fotografickej platne i samotnej optickej schémy.

Kontrolné otázky:

1. Vymenujte základné princípy holografie a na čom je založená optická holografia.
2. Charakterizujte koherentný zdroj vlnenia.
3. Je možné hologram reprodukovat' fotoaparátom, alebo videokamerou? Ak áno, tak kedy?
4. Ako sa rekonštruje hologram?
5. Vymenujte vlastnosti hologramu.
6. Vymenujte oblasti využitia hologramu a holografie.

Návody na laboratórne cvičenia z atómovej a jadrovej fyziky

30. MERANIE VÝSTUPNEJ PRÁCE TERMOEMISNÉHO ELEKTRÓNU

Cieľ práce: Namerať výstupnú prácu elektrónu z povrchu žeraviacej katódy.

- Úlohy:**
1. Na vákuovej dióde namerajte V-A charakteristiky pre rôzne teploty žeraviacej katódy.
 2. Z hodnôt V-A charakteristík zostrojte lineárne závislosti $\ln(I/T^2) = F(T^{-1})$ pre rôzne teploty katódy. Zo smerníc získaných priamok určte výstupnú prácu. Alternatívne ich možno určiť numerickou metódou regresnej analýzy.
 3. Výslednú hodnotu výstupnej práce nájdite ako strednú hodnotu nameraných výstupných prác pre rôzne teploty žeraviacej katódy.

Teoretický úvod:

Potenciálna energia elektrónov vo vnútri látky sa periodicky mení od bodu k bodu s periódou rovnajúcou sa konštante kryštalickej mriežky. Zjednodušená predstava, že vo vnútri látky je potenciálna energia elektrónu nulová je v súhlase s hypotézou voľných elektrónov v látke. Pri určitých okolnostiach, napr. pri dostatočne vysokej teplote, je kinetická energia voľných elektrónov v látke elektródy natoľko veľká, že niektoré z nich (s vysokými rýchlosťami) môžu opustiť elektródu (tzv. termoemisný jav). V tesnej blízkosti povrchu elektródy je narušené priestorové rozloženie síl pôsobiacich na elektrón. Tu prevažujú sily pôsobiace do vnútra elektródy a tie sťažujú elektrónu prístup k povrchu. Elektrón musí prekonať potenciálnu bariéru, aby mohol opustiť elektródu. Na jej prekonanie potrebuje elektrón vykonať prácu, ktorú nazývame výstupnou prácou. Akonáhle elektrón opustí elektródu, naruší sa jej elektroneutralita, stane sa kladnou. Vznikne príťažlivá sila, ktorá má snahu vrátiť elektrón späť na elektródu. V skutočnosti elektródu (katódu) opúšťa nie jeden, ale mnoho elektrónov a práve toľko sa na elektródu vracia. Takýto stav nazývame dynamickou rovnováhou. Je očividné, že koncentrácia elektrónov nad povrchom elektródy bude závisieť od jej teploty. Experimenty ukazujú, že matematická funkcia opisujúca jav termoelektrickej emisie (ktorý je iniciovaný dodávaním tepla látke), obsahuje člen „ $\exp(-W/kT)$ “ vyjadrujúci pravdepodobnosť toho, že elektrón opustí katódu. Aby sa tak mohlo stať, energia elektrónu musí byť väčšia ako je energia W .

Ak na katódu pripojíme záporný potenciál a na ďalšiu elektródu (anódu) pripojíme kladný potenciál, vznikne anódový prúd, ktorý bude narastať so zvyšujúcim sa napätím medzi elektródami až dosiahneme nasýtený stav, pri ktorom všetky elektróny emitované z katódy dosiahnu anódu. Tento termoemisný elektrický prúd, možno vyjadriť pomocou Richardsonovej a Dushmanovej rovnice.

$$I = AST^2 \exp(-W / kT) , \quad (1)$$

kde A je konštanta, W je výstupná práca, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ je Boltzmannova konštanta, T je termodynamická teplota, S je emitujúca plocha katódy.

Rovnica (1) bola odvodená pre kovy. V našom prípade máme katódu pokrytú oxidmi kovov, čo sú polovodičové materiály. Vzťah pre termoemisný prúd z horúceho povrchu polovodičov je formálne rovnaký ako (1), s tým rozdielom, že výstupná práca je zložená z viacerých členov, pretože situácia elektrónu v polovodiči je zložitejšia ako v kove.

Najjednoduchší spôsob určenia výstupnej práce vyplýva priamo z rovnice (1). Logaritmovaním (1) dostaneme za predpokladu nasýteného termoemisného prúdu pri konštantnej teplote katódy

$$\ln \frac{I}{T^2} = \ln AS - \frac{W}{kT} = \text{const} - \frac{W}{kT} \quad (2)$$

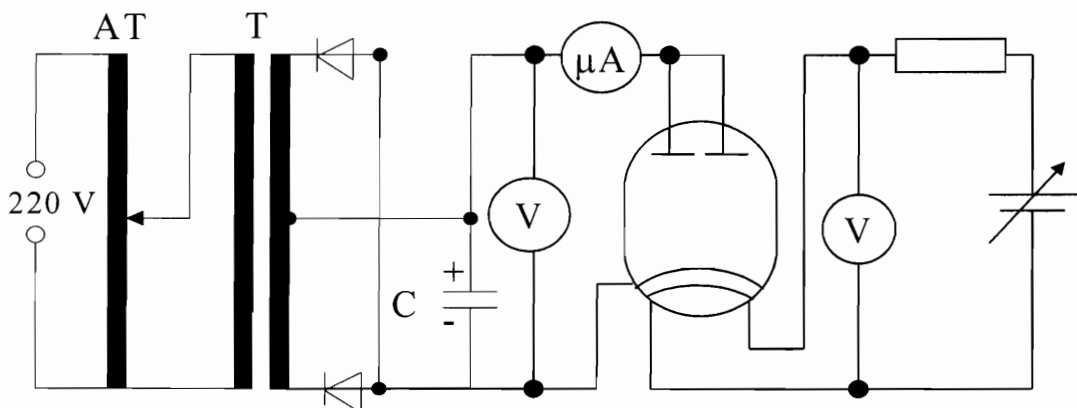
Závislosť $\ln(I/T^2) = F(T^{-1})$ je lineárna a zo smernice priamky $s = -W/k$ možno určiť výstupnú prácu elektrónu.

Pri vyšších napätiach môže dôjsť k autoemisii, keď intenzita elektrického poľa pri katóde je taká vysoká, že elektróny sú elektrostatickou silou vytrhávané z povrchu katódy. Tento prídavný prúd je priamo úmerný napätiu. Dôsledkom toho je lineárne stúpanie nasýteného prúdu. Za nasýtený prúd v takomto prípade treba považovať hodnotu, pri ktorej dôjde k zlomu závislosti $I = F(U)$ a prúd začne lineárne rásť s napätím.

Prístroje a pomôcky: vákuová dióda, regulovateľný jednosmerný zdroj anódového napätia do 200 V, jednosmerný regulovateľný zdroj žeraviaceho napätia, 2 V-metre, mA-meter, spojovacie vodiče, ochranný rezistor.

Opis aparatúry:

Aparatúra na meranie výstupnej práce elektrónu je na obr. 1. Samostatný elektrický obvod napája žeravenie katódy. V obvode je zapojený ochranný rezistor, ktorý chráni žeraviace vlákno pred spálením. Ako elektrónka je použitá vákuová dvojité dióda EZ80, EZ81.



Obr. 1 – Elektrická schéma zapojenia elektrónky a prístrojov

Postup práce:

1. Zostavte schému podľa obr. 1 a dajte ju skontrolovať.
2. Nastavte pomocou žeraviaceho napätia teplotu katódy (podľa priloženej závislosti $T = f(U_V)$) a odmerajte závislosť anódového prúdu od anódového napätia. Napätie zvyšujte tak, aby sa dosiahol nasýtený stav.
3. Opakujte bod 2 aspoň pre 3 teploty katódy.

Spracovanie nameraných hodnôt:

1. Prúd a napätie zapíšte pre $T = const$ do Tab. 1

Tab. 1. Namerané hodnoty

č.m. k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I/mA												
U/V												
$\ln I/T^2$												
$1/T$												

2. Nakreslite V-A závislosť diódy pre rôzne teploty katódy.
 1. Zostrojte graf podľa vzťahu (2). Hodnoty prúdu v grafe majú zodpovedať nasýteným prúdom odmeraným v bode 2. Cez body preložte priamku. Zvoľte si 2 body na priamke a vypočítajte z ich súradníc smernicu $s = -W/k$. Zo smernice priamky vypočítajte výstupnú prácu W . Alternatívne ju môžete vyjadriť numerickou metódou regresnej analýzy.
 4. Vypočítajte strednú hodnotu výstupnej práce z jej hodnôt pre rôzne teploty katódy.

Rozbor presnosti merania:

1. Posúďte presnosť prístrojov používaných na meranie veličín vystupujúcich v (2) a určte relatívne neistoty merania jednotlivých veličín.
2. Vypočítajte štandardnú odchýlku a zapíšte výsledok v tvare $(\bar{W} \pm \sigma_W)$ eV.
3. Zistite neistotu merania, tej veličiny ktorá najviac zaťažuje neistotu výslednej hodnoty výstupnej práce.

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnoťte neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Pri vyššej teplote katódy je anódový prúd vyšší. Ako sa to dá vysvetliť?
2. Čo by sa stalo, keby sme zmenili polaritu zdroja anódového napätia?
3. Ako by sa dal dosiahnuť vyšší anódový prúd pri konštantnej teplote katódy? Čo by bolo treba zmeniť v konštrukcii diódy?

31. MERANIE NÁBOJA TERMOEMISNÉHO ELEKTRÓNU

Cieľ práce: Namerať hodnotu náboja termoemisného elektrónu.

Úlohy: 1. Namerajte volt-ampérovú závislosť anódového prúdu vákuovej diódy od anódového brzdného napätia aspoň pre tri teploty katódy (pre 3 žeraviace katódové napätia).

2. Zo smernice závislosti $\ln I - \frac{1}{2} \ln U = F(U)$ vypočítajte hodnotu náboja elektrónu.

3. Získané výsledky štatisticky zhodnoťte.

Teoretický úvod:

T. A. Edison pri pokusoch so žiarovkou s uhlíkovým vláknom a prídavnou elektródou zistil, že galvanometer (merač malých elektrických prúdov) zapojený do série s vláknom, elektródou a zdrojom ukazuje prúd vtedy, ak je vlákno žeravé a na elektróde je kladný potenciál. Bol to objav termoelektrickej emisie, ktorá bola vysvetlená až po objave elektrónu v r. 1897 tak, že voľné elektróny vyletujú so žeravého povrchu jednej elektródy (katódy) a uzatvárajú prúdový okruh medzi katódou a druhou elektródou (anódou) vo vákuovej žiarovke.

Jav termoelektrickej emisie sa dá využiť na experimentálne určenie náboja elektrónu. Do úvahy prichádzajú tieto tri vlastnosti termoelektrickej emisie:

1. Elektróny zo žeravého povrchu katódy vyletujú nerovnomerne, čo spôsobuje malé kolísanie prúdu - tzv. shot-efekt.
2. Pôsobenie vonkajšieho elektrického poľa mení výstupnú prácu z horúceho povrchu katódy a to vedie k zmene emisného prúdu - tzv. Schottkyho efekt.
3. Rýchlosti elektrónov emitovaných žeravým povrchom katódy majú Maxwellovo rozdelenie.

Ďalej sa budeme venovať len metóde merania náboja elektrónu využívajúcej Maxwellovo rozdelenie rýchlostí emitovaných elektrónov. Budeme predpokladať, že voľné elektróny v materiále katódy si môžeme predstaviť ako tzv. elektrónový plyn, pre ktorý platí Maxwellovo rozdelenie rýchlostí. Rýchlosť v rozmedzí v a $v+dv$ má dn elektrónov z celkového počtu n elektrónov v objemovej jednotke

$$dn = n \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv_x dv_y dv_z ,$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ je Boltzmannova konštanta, T je termodynamická teplota, m je hmotnosť elektrónu, v_x , v_y , v_z sú zložky rýchlosti elektrónu. Na anódu v smere osi x za dobu dt dopadne dn elektrónov s rýchlosťou v_x , t.j. náboj $dQ = e S v_x dn dt$, kde S je plocha anódy. Celkový anódový prúd I dostaneme integráciou tohoto vzťahu. Pre súosé valcové elektródy a pre prípad malých záporných napätí sa dá odvodiť

$$I = \frac{2i_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{eU}{kT}} \exp(-eU/kT), \quad (1)$$

kde i_0 je emisný prúd, e je náboj elektrónu, U je napätie medzi katódou a anódou. Vzťah (1) platí pre anódové napätia od -0,3 do -1 V.

Rovnicu (1) môžeme prepísať na tvar

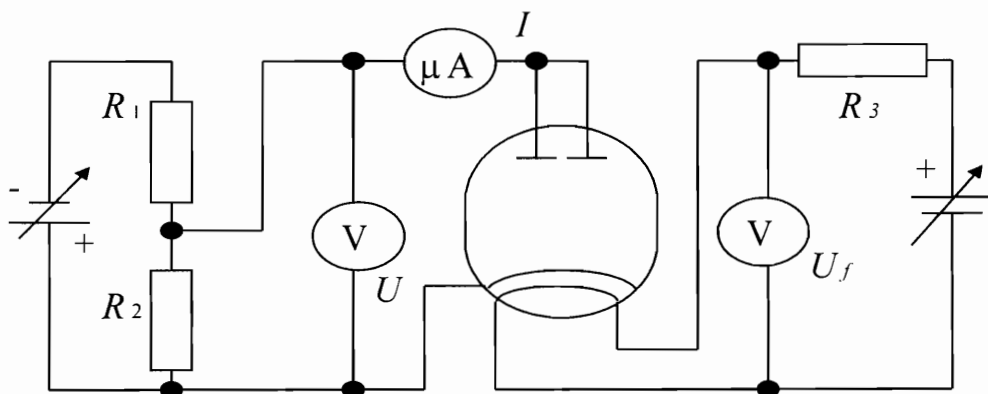
$$\ln I - \frac{1}{2} \ln U = C - \frac{e}{kT} U \quad , \quad (2)$$

pomocou ktorého možno realizovať cieľ laboratórnej práce. Princíp metódy určenia náboja elektrónu spočíva v tom, že elektrón vyletujúci z katódy určitou rýchlosťou, dosiahne záporne nabitú anódu len vtedy, ak je jeho kinetická energia dostatočná na to, aby elektrón prekonal odpudivú silu elektrického poľa medzi katódou a anódou diódy. Elektróny, podobne ako častice plynu pri nejakej teplote T , majú rôzne rýchlosti. Počty elektrónov s určitými hodnotami rýchlostí sú určené Maxwellovým rozdelením rýchlostí. To znamená, že počet elektrónov, ktoré dosiahnu pri určitom napätí U anódu (a ktorý je úmerný elektrickému prúdu I) sa tiež riadi Maxwellovým zákonom rozdelenia rýchlostí.

Prístroje a pomôcky: vákuová dióda, 2 zdroje jednosmerného napätia, rezistory, 2 voltmetre merač malých prúdov do 10^{-8} A, spojovacie vodiče.

Opis aparatury:

Schéma zapojenia diódy a elektrických prístrojov je na obr. 1. Zdroj anódového napätia U je regulovateľný a má na výstupe delič z rezistorov R_1 a R_2 . Delič znižuje výstupné napätie zdroja a umožňuje jemné nastavovanie napätia pri plnom využití rozsahu zdroja. Anódový prúd I býva v rozmedzí 0,01 μA do 200 μA , preto treba použiť na jeho meranie merač malých prúdov. Zdroj žeraviaceho napätia musí byť regulovateľný a stabilizovaný. Sériovo s ním je zapojený ochranný rezistor R_3 , ktorý nedovoľuje zvýšiť žeraviace napätie U_f nad hodnotu 6,6 V.



Obr. 1 – Zapojenie elektrónky, zdrojov a meracích prístrojov

Postup práce:

- 1 Zapojte prístroje podľa obr. 1 a dajte skontrolovať zapojenie.
- 2 Nastavte zadanú teplotu katódy podľa grafu $T = f(U_f)$ (je priložený k aparaturé) a nechajte ju ustáliť aspoň 1 min.

- 3 Merajte anódový prúd pri rôznych napätiach. Nastavte inú teplotu katódy a postup zopakujte. Intervaly skokov napätia voľte flexibilne tak, aby ste získali okolo desať dvojíc napätia a prúdu až po dosiahnutie hodnoty $I = 0$ A.

Spracovanie nameraných hodnôt:

1. Namerané a vypočítané hodnoty zapisujte do tabuľky:

Tab. 1.

	T / K =														
U / V															
I / A															
$\ln I - \frac{1}{2} \ln U$															

2. Nakreslite graf funkcie $[\ln I - 1/2 \ln U]$ v závislosti od napätia U . Cez body preložte priamku.
 3. Zo smernice s a z rovnice $s = - e/kT$ vypočítajte náboj elektrónu.
 4. Určte náboj elektrónu ako aritmetický priemer výsledkov z pokusov pri rôznych teplotách.
 5. Vypočítajte relatívnu neistotu merania porovnaním s hodnotou $e = - 1,602.10^{-19}$ C.

Rozbor presnosti merania:

1. Posúďte presnosť prístrojov používaných na meranie veličín vystupujúcich v (2) a určte relatívne neistoty merania jednotlivých veličín.
 2. Zistite neistotu merania tej veličiny, ktorá najviac zaťažuje hodnotu výslednej veličiny- náboja elektrónu..

Zhodnotenie výsledkov meraní:

Urobte diskusiu výsledkov meraní a zhodnot'te neistoty meraní.

Kontrolné otázky:

1. Keby sme merali pri väčších záporných napätiach nastávalo by hromadenie elektrónov nad povrchom katódy. Ako by sa to prejavilo?
 2. Ako by sa prejavila zmena polarít anódového napätia?

32. MERANIE PLANCKOVEJ KONŠTANTY

Ciel práce: Určte Planckovu konštantu využitím vonkajšieho fotoelektrického javu

Úloha: Zmerajte Planckovu konštantu pomocou merania brzdného napätia na vákuovej fotónke využitím zákonitostí vonkajšieho fotoelektrického javu pri troch vlnových dĺžkach.

Teoretický úvod:

Pri vonkajšom fotoelektrickom jave nastáva uvoľňovanie elektrónov z povrchu látky v dôsledku absorpcie svetla touto látkou. Boli pritom pozorované tieto zákonitosti:

1. počet elektrónov emitovaných za jednotku času je priamo úmerný intenzite dopadajúceho svetla,
2. maximálna rýchlosť elektrónov vystupujúcich z látky je závislá na frekvencii dopadajúceho svetla,
3. rýchlosť elektrónov vystupujúcich z látky nezávisí na intenzite svetla,
4. vonkajší fotoelektrický jav nastane len vtedy, ak je frekvencia dopadajúceho svetla väčšia ako istá hraničná frekvencia f_0 .

Tieto zákonitosti môžu byť vysvetlené na základe predstavy o kvantovej povahe svetla. Pre energiu fotónu platí:

$$E = hf, \quad (1)$$

kde f je frekvencia dopadajúceho svetla,

h je Planckova konštanta.

Pri vonkajšom fotoelektrickom jave v kovoch sa časť tejto energie spotrebuje na vykonanie výstupnej práce A , zvyšok tvorí kinetickú energiu uvoľneného elektrónu. Einsteinova fotoelektrická rovnica je vyjadrením zákona zachovania energie pre fotoefekt:

$$hf = \frac{1}{2}mv^2 + A, \quad (2)$$

kde v je maximálna rýchlosť vystupujúceho elektrónu, m hmotnosť elektrónu a A výstupná práca charakteristická pre kov, z ktorého je katóda vyhotovená..

Ak $hf < A$, tak vonkajší fotoelektrický jav nenastane.

Pre hraničnú frekvenciu f_0 preto platí:

$$hf_0 = A \quad (3)$$

Po osvetlení katódy fotónky svetlom známej vlnovej dĺžky (frekvencie), podľa Einsteinovej rovnice elektróny vystupujúce z katódy budú mať rovnakú maximálnu rýchlosť v . V dôsledku priestorového náboja sa medzi elektródami vytvorí elektrické pole, ktoré brzdí pohyb ďalších elektrónov. Pri určitej hodnote U_b rast napätia medzi elektródami prestane. Vzniknutú dynamickú rovnováhu popisuje fotoelektrická rovnica v tvare:

$$hf = eU_b + A, \quad (4)$$

kde e je náboj elektrónu a U_b brzdné napätie (maximálna hodnota napätia medzi anódou a katódou fotónky pri osvetlení monochromatickým svetlom). Teda elektrón energiu získanú od fotónu použije na uvoľnenie z katódy a na prechod od katódy k anóde proti sile elektrostatického poľa. Aby sme zvýšili presnosť určenia Planckovej konštanty, uskutočníme meranie pri 3 vlnových dĺžkach. Do grafu vynesieme závislosť brzdných napätí U_b od recipročných hodnôt príslušných vlnových dĺžok ($1/\lambda = \sigma$ vlnčet). Táto závislosť je lineárna a má tvar:

$$U_b = \frac{hc}{e} \sigma - \frac{A}{e} \quad (5)$$

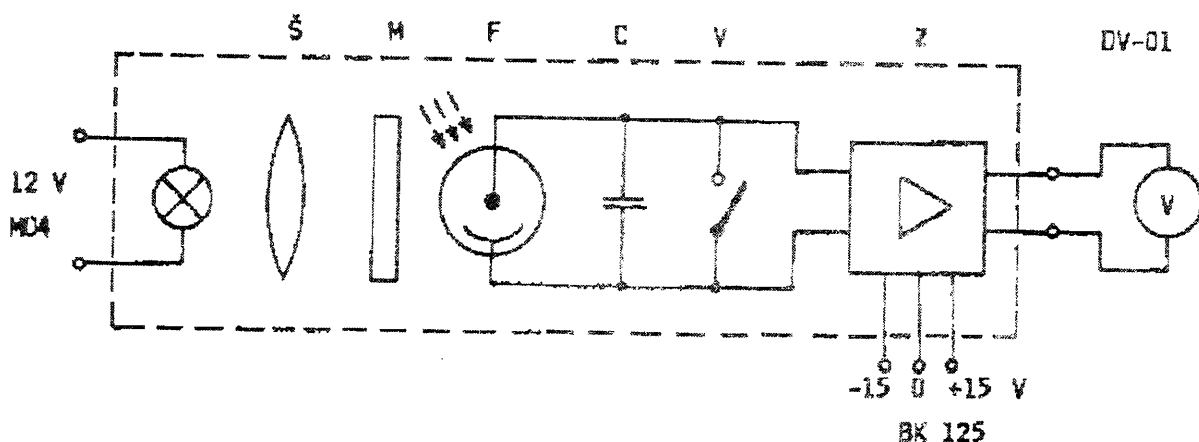
Planckovu konštantu možno potom vypočítať zo smernice priamky nasledovne:

$$h = \frac{e U_{b1} - U_{b2}}{c \sigma_1 - \sigma_2} \quad (6)$$

kde $U_{b1} - U_{b2}$ rozdiel brzdných napätí pripadajúci na príslušný rozdiel vlnčetov $\sigma_1 - \sigma_2$
 e je elementárny elektrický náboj $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ rýchlosť svetla vo vákuu.

Prístroje a pomôcky:

Prístroj na meranie Planckovej konštanty h (halogénová žiarovka, šošovka, fotónka, kondenzátor, zosilňovač), transformátor, 3 interferenčné filtre, voltmeter, stabilizovaný zdroj.



Obr.1. Schéma prístroja na meranie Planckovej konštanty
 Š-šošovka, M-monochromatický interferenčný filter, F-fotónka, Z-zosilňovač

Postup práce:

1. Zapojte obvod podľa obr.1. Zdroj svetla (halogénovú žiarovku) pripojte k transformátoru len počas merania. Zdroj stabilizovaného napätia (+15,0, - 15 V) slúži na napájanie zosilňovača..
2. Zosilňovač i elektronický voltmeter nechajte zapnutý asi 10 minút, potom skratujte vstup zosilňovača vypínačom V a pomocou potenciometra vykompenzujte drift nuly tak, aby voltmeter ukazoval presne 0 V.
3. Do prístroja vložte interferenčný filter, zapnite zdroj svetla a rozpojte vypínač V .
4. Pozorujte a zapisujte (v intervaloch asi 1 minúta) rastúce napätie na kondenzátore C , kým sa nedosiahne ustálená hodnota.
5. Meranie vykonajte s tromi filtermi (zelený - 560-nm, červený - 621 nm, K77J 722 nm). Pred každým meraním skratujte kondenzátor C vypínačom V , výchylka voltmetra má byť 0 V.
6. Zostrojte graf závislosti brzdného napätia U_b od vlnočtu a vypočítajte Planckovu konštantu podľa vzťahu (6).
7. Urobte diskusiu merania a vyhodnotenie.
8. Urobte odhad neistoty stanovenia Planckovej konštanty.

Kontrolné otázky:

1. Čo je charakteristické pre častice (konkrétne v tomto prípade – elektróny) a pre vlnenie (napr. dopadajúce do fotónky).
2. Charakterizujte vonkajší fotoelektrický jav a uveďte základné zákonitosti tohto javu.
3. Vysvetlite podstatu vonkajšieho fotoelektrického javu pomocou Einsteinovej fotoelektrickej rovnice.
4. Vysvetlite pojem brzdného napätia a hraničnej frekvencie.
5. Keď použijeme dve rôzne fotónky, budú mať rovnakú, alebo rôznu smernicu?

33. ŠTÚDIUM VLASTNOSTÍ PROPORCIONÁLNYCH DETEKTOROV

Ciel' práce: Oboznámiť sa so základnými vlastnosťami a parametrami plynových detektorov.

Úlohy: 1. Na príklade proporcionálneho detektora overte a oboznámte sa (teoreticky) so základnými vlastnosťami a parametrami plynových detektorov.
2. Zmerajte pracovnú charakteristiku proporcionálneho detektora.
3. Vykonajte analýzu štatistiky početnosti nameraných impulzov.

Teoretický úvod:

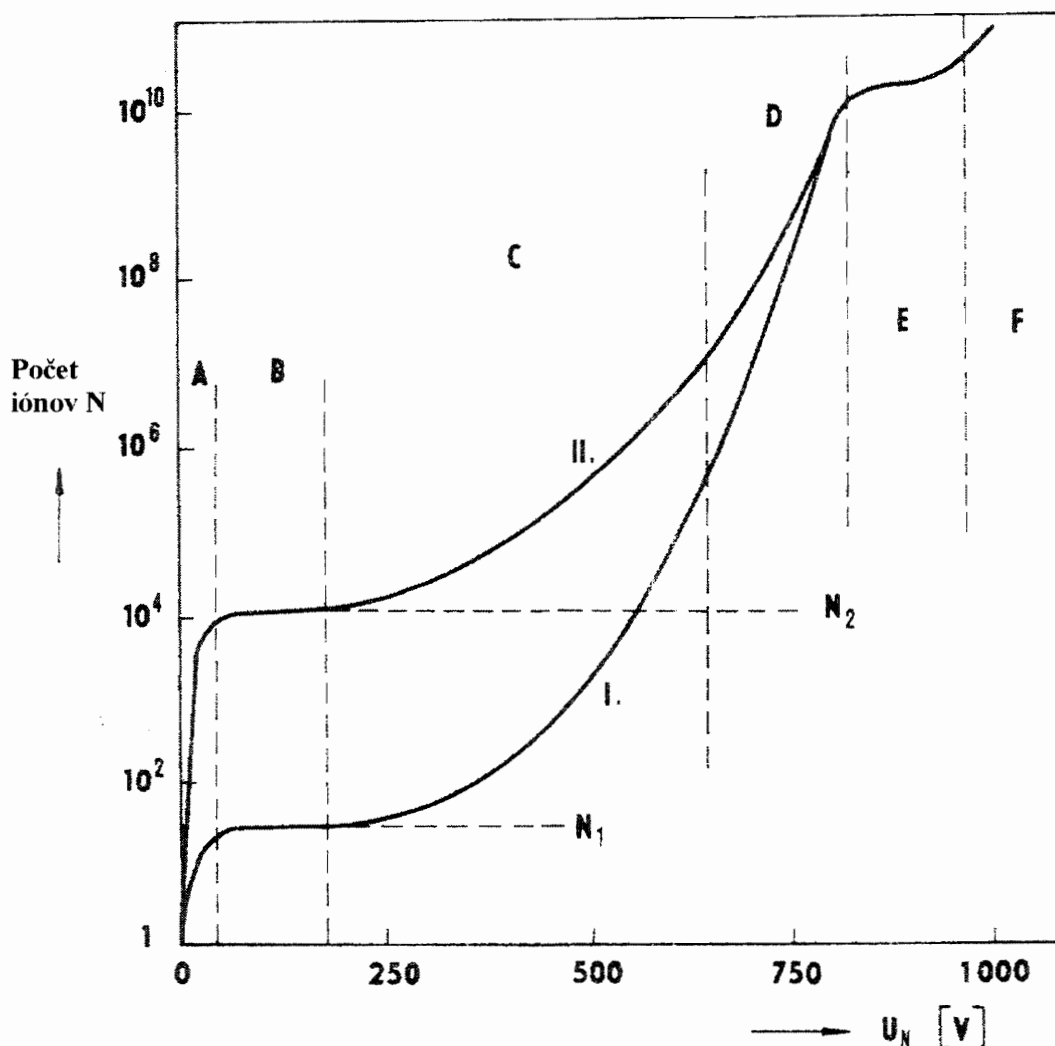
Za štandardných laboratórnych podmienok sa plyny chovajú ako veľmi dobré izolanty. Pôsobením priamo ionizujúceho žiarenia sa niektoré atómy alebo molekuly, pôvodne neutrálne, ionizáciou sa menia na kladné ióny a elektróny. Pri interakcii nepriamo ionizujúceho žiarenia túto ionizáciu spôsobujú sekundárne nabité častice. Dôsledkom toho vodivosť plynu vzrastá. Detektory využívajúce tento jav sa označujú ako plynové detektory, alebo detektory s plynovou náplňou. Patria k nim nasledujúce druhy detektorov:

- a) ionizačné komory
- b) proporcionálne detektory
- c) Geigerove – Müllerove detektory
- d) Korónové detektory.

Vyššie spomenuté druhy detektorov sa od seba navzájom líšia predovšetkým veľkosťou a rozložením intenzity elektrického poľa, geometriou a napájacím napätím detektora, druhom a tlakom plynovej náplne. Obecný priebeh charakteristiky plynového detektora je na obr. 1. a zobrazuje počet iónov N zozbieraných na elektródach detektora v závislosti na pripojenom napätí a teda intenzite elektrického poľa. Krivka I zodpovedá častici, ktorá v pracovnom objeme detektora vytvorí N_1 párov iónov, krivka II zodpovedá inej častici, ktorá vytvorí $N_2 > N_1$ párov iónov. Vidieť, že druhá častica zanechala v detektore väčšiu energiu.

V oblasti **A** v dôsledku nedostatočnej intenzity elektrického poľa nie sú od seba produkty ionizácie dostatočne rýchlo oddelené a dochádza k ich rekombinácii. Celkový zozbieraný náboj je preto menší než odpovedá ionizáciu vytvorenému náboju $e.N_1$, resp. $e.N_2$. Táto oblasť sa nazýva **oblasťou rekombinačnou**, alebo tiež oblasťou **Ohmovho zákona**. S rastúcou intenzitou elektrického poľa rastie tiež aj driftová rýchlosť vytvorených nosičov náboja pohybujúcich sa k príslušným elektródam a pravdepodobnosť rekombinácie klesá natoľko, že sa od istej hodnoty napätie na detektore už prakticky neuplatňuje (počet zozbieraných iónov nie je funkciou napätia). Počet zozbieraných nosičov nábojov N sa rovná počtu nosičov vytvorených ionizáciou, čiže $N = N_1$ resp. $N = N_2$. Oblasť označená **B** sa nazýva **oblasťou nasýteného prúdu**, skrátene **oblasťou nasýtenia**. Oblasť **A** nie je prakticky, až na veľmi malé výnimky využívaná, oblasť je **B** typickým pracovným režimom **ionizačných komôr**. Pri ďalšom zvyšovaní napätia na detektore počet zozbieraných nosičov náboja N je väčší než zodpovedá N_1 alebo N_2 . Konštanta úmernosti M je len funkciou napätia na detektore a označuje sa ako plynové zosilnenie detektora. Oblasť v ktorej hodnota M nezávisí na veľkosti N_1 alebo N_2 a platí

$$N(1) = M.N_1; N(2) = M.N_2; N(1,2) = M.(N_1 + N_2) \quad (1)$$



Obr. 1. Závislosť počtu iónov N od napätia U_N na detektore.

sa nazýva **oblasťou proporcionality** a je typickým **režimom proporcionálnych detektorov**. Na obr. 1. je táto oblasť označená písmenom C. Ďalšie zvyšovanie napätia vedie k zblížovaniu kriviek I a II, odozvy prestávajú byť proporcionálne pôvodne vytvoreným počtom iónov N_1 a N_2 . Plynové zosilnenie M je v tejto oblasti nie len funkciou napätia na detektore, ale aj funkciou N_1 a N_2 . Vždy však platí, že väčšej ionizácii zodpovedá väčšia odozva. Táto časť charakteristiky sa nazýva **oblasťou čiastočnej proporcionality** (označená D) a nie je bežne používaná v prevádzkovom režime plynových detektorov. S ďalším zvyšovaním napätia na detektore obe krivky I a II na obr. 1. splynú v jednu stále stúpajúcu krivku. Oblasť označená E je charakterizovaná nezávislosťou odozvy na veľkosti počtu pôvodne vytvorených iónových párov. Možno tu pozorovať veľmi pozvoľnú závislosť na ďalšom zvyšovaní napätia (plateau) je oblasťou Geigerovou – Müllerovou a pracujú v nej Geigerove – Müllerove detektory. Pri ďalšom zvyšovaní napätia dochádza k zapáleniu samovoľného korónového výboja (oblasť F) nezávisle na tom, či došlo alebo nedošlo

v objeme detektora k tvorbe primárnej ionizácie. Táto oblasť je charakterizovaná ďalším stúpaním odozvy v závislosti na napätí na detektore a je režimom v ktorom pracujú korónové detektory. Ďalšie zvyšovanie napätia vedie k tlejivému výboju, ktorý zachváti celý pracovný objem detektora, táto oblasť nemá v detekčnej technike využitie.

Z charakteristiky plynového detektora vidíme, že úmernosť medzi primárnou ionizáciou a odozvou – počtom zozbieraných nosičov náboja (iónov) je len v oblasti **B** (oblasť nasýteného prúdu) a oblasti **C** (proporcionality). Za predpokladu, že primárne ionizačné účinky N_i sú úmerné energii častice E_i podľa vzťahu

$$N_i = E_i \cdot w^{-1} \quad (2)$$

kde w je stredná energia pre vznik jedného ión – elektrónového páru. Potom je počet zozbieraných nosičov na elektródach detektora a im odpovedajúci náboj úmerný energii častice, ktorá ionizáciu spôsobila. Platí totiž:

$$Q = e \cdot N_i \cdot M \quad (3)$$

Q - je zozbieraný (odvedený náboj)

e - náboj elektrónu

M – plynové zosilnenie (pre ionizačné komory $M = 1$)

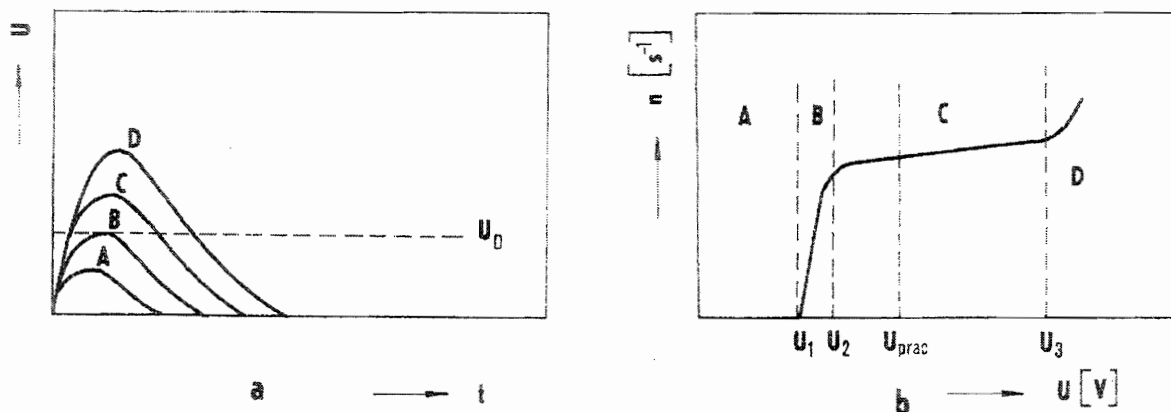
Ionizačná komora aj proporcionálny detektor umožňujú merať energiu častíc a hovoríme, že majú **spektrometrické** vlastnosti. Naproti tomu Geigerov – Müllerov detektor podáva len informáciu o tom, že ním častica interagovala, ale z jeho odozvy nemožno usudzovať na energiu častice. Geigerov – Müllerov detektor je len púhym počítačom, detektorom počtu interagujúcich častíc bez spektrometrických vlastností.

Záverom treba upozorniť, že k dosiahnutiu oblasti proporcionality a ďalších oblastí ležiacich na obrázku vpravo od nej treba použiť geometrické usporiadanie detektora, ktoré zaistí veľmi nehomogénne elektrické pole. Najčastejšie sa používa geometrie koaxiálnej (valcovej), niekedy aj sférickej. Geometria doskovej komory s homogénnym poľom prichádza do úvahy len pre oblasť nasýteného prúdu.

Pracovná charakteristika je pojem, týkajúci sa nielen proporcionálnych ale aj všetkých ostatných detektorov pracujúcich v nespektrometrickom, ale detekčnom režime. Pri meraní pracovnej charakteristiky (v literatúre sa môžete stretnúť aj s pojmom napäťová charakteristika, alebo počítacia charakteristika) najlepšie je použiť monoenergetický zdroj žiarenia a meriame závislosť počtu zaregistrovaných impulzov v detektore od napätia, ktoré je na ňom pripojené. Každé vyhodnocovacie zariadenie (čítač impulzov, integrátor aj zložitejšie zariadenie) má vždy istú základnú diskriminačnú úroveň U_D , ktorú musí prichádzajúci impulz prekročiť, aby bol zaregistrovaný. Pokiaľ bude napätie na detektore nízke, signál (napäťový impulz) bude menší než U_D a vyhodnocovacie zariadenie nebude registrovať žiadne impulzy. Pri určitej hodnote napätia U_1 na detektore už niektoré impulzy prevýšia U_D a budú zaregistrované. So zvyšovaním napätia detektora počet zaregistrovaných impulzov narastie a pri napätí U_2 dostaneme ustálený počet zaregistrovaných impulzov. Ďalším zvyšovaním napätia až do U_3 bude sa počet zaregistrovaných impulzov málo meniť a ďalšie zvyšovanie napätia nad U_3 bude sprevádzané náhlym nárastom počtu zaregistrovaných impulzov. V takomto prípade proporcionálny detektor prechádza cez oblasť čiastočnej proporcionality do Geiger – Müllerovej oblasti, prípadne do oblasti samostatných výbojov.

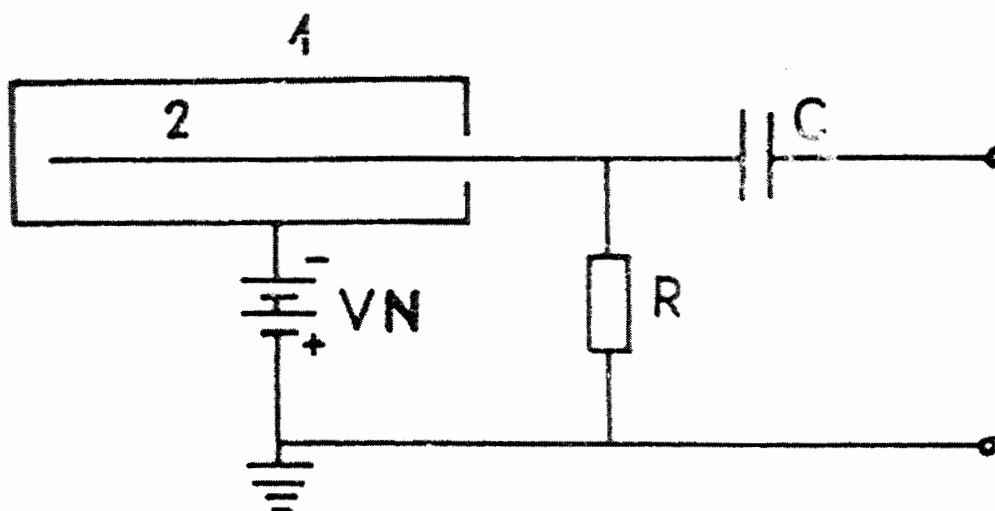
Oblasť pracovných napätí ležiacich medzi U_2 a U_3 nazývame pracovnou plošinou detektora (v zahraničnej literatúre plateau detektora). Z hľadiska stability merania je

najvhodnejším pracovným bodom stred plošiny, najlepšieho pomeru signál/šum sa však dosahuje na jej začiatku. Ako vhodného kompromisu sa doporučuje používať pracovné napätie odpovedajúce prvej tretine nájdenej plošiny. Je veľmi dôležité si uvedomiť, že zmenou registračného zariadenia a tým aj U_D sa mení aj pracovná charakteristika. Tá nie je vlastnosťou len samotného detektora, ale celého súboru detektor – vyhodnocovacie zariadenie. Na obrázku 2 je priebeh amplitúdy impulzov a pracovnej charakteristiky. V časti a) obrázku máme závislosť amplitúdy napätia výstupného impulzu z detektora od napätia na detektore, U_D je diskriminačná hladina tesne nad napätím U_2 . V časti b) obrázku je pracovná charakteristika s plošinou (oblasť C). U_{prac} je odporúčané pracovné napätie.



Obr. 2. Závislosť amplitúdy impulzov od pracovného napätia a priebeh pracovnej charakteristiky.

Na obr. 3 je typická schéma zapojenia proporcionálneho detektora. 1 – katóda detektora, 2 – anóda detektora, VN – zdroj vysokého napätia, R – pracovný odpor, C – oddelovací kondenzátor na vyvedenie výstupných impulzov,



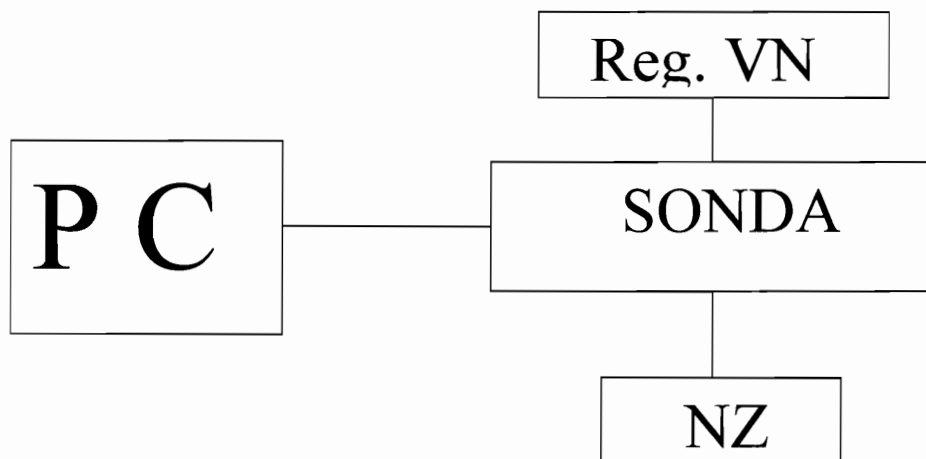
Obr. 3. Schéma zapojenia proporcionálneho detektora.

Prístroje a pomôcky: PC s prechodom RS 232, napájací zdroj k sonde s proporcionálnym detektorom, sonda RS 03/232, napät'ový delič, multimeter, spojovacie káble.

Postup práce:

1. Prístroje zapojíme podľa obr. 4
2. Sondu pripojíme k osobnému počítaču PC.
3. Pripojíme napájacie napätie NZ k sonde.
4. Pripojíme regulátor vysokého napätia.
5. Zapneme PC a napájacie napätie k sonde.
6. V PC si otvoríme program Wcomtest, pomocou ktorého nameriame príslušný počet impulzov na získanie pracovnej charakteristiky v závislosti od vysokého napätia na detektore.
7. Nastavíme príslušný com port a prenosovú rýchlosť meraných údajov.
8. Vysoké napätie meníme regulátorom VN, ktorý je v podstate napät'ový delič v pomere 1:1000. Takto môžeme bez zásahu do vysokonapät'ového zdroja detektora bezpečne meniť vysoké napätie. Vysoké napätie meníme v rozsahu od 1 500 V do 1 900 V s krokom 50 V, tým že potenciometrom na regulátore VN budeme meniť nízke napätie od 1,5 V do 1,9 V, ktoré kontrolujeme multimetrom.
9. Na kontrolu funkcie činnosti sondy nastavíme vysoké napätie na sonde na 1 700 V pomocou regulátora VN.
10. Spustíme program Wcomtest a skontrolujeme početnosť nameraných impulzov pomocou príkazu RDV. Početnosť nameraných impulzov má byť v rozsahu (4 ± 1) imp.s^{-1} , čo svedčí o správnej činnosti sondy.
11. Softwérom sa vytvorí v PC file Probe.dat, ktorý vymažeme.
12. Nastavíme vysoké napätie na hodnotu 1 200 V.
13. Zadáme príkaz CDE a HUR v Programe Wcomtest a 5 minút meriame početnosť impulzov.
14. Zadáme príkaz CDD.
15. Zadáme príkaz Quit.
16. File Probe.dat premenujeme nasledovne: $1200V+n*50V.dat$; $n = n+1$
17. Regulátorom VN (potenciometrom) nastavíme $1200V + n * 50 V$ a vyčkáme 1 minútu.
18. Vykonáme Wcomtest start
19. Preskočíme na bod 13, a toto cyklicky opakujeme do bodu 18 až kým nedosiahneme vysoké napätie 2 000 V. Takto premeriame celú pracovnú charakteristiku proporcionálneho detektora.

Proporcionálny detektor sondy je pomerne citlivý (dáva cca 4 impulzy za sekundu) a preto stačí na meranie pracovnej charakteristiky prírodné pozad'ové žiarenie gama, čo býva v rozsahu 80 až 120 nSv.h^{-1} . Takto sa vyhneme prísny m požiadavkám hygienikov na bezpečnosť pred ionizujúcim žiarením.



Obr. 4. Schematický náčrt zapojenia.

Spracovanie nameraných hodnôt:

Namerané početnosti impulzov v závislosti od vysokého napätia vynesieme do grafu a zostrojíme pracovnú charakteristiku proporcionálneho detektora. Čas merania pre napätie v jednom bode volíme v rozsahu 250 až 300 sekúnd. Dlhší čas volíme najmä pre body na začiatku pracovnej charakteristiky, kedy dostávame nižšiu početnosť impulzov pred dosiahnutím plateaua. Pre 300 s merania dostaneme okolo 1200 impulzov čo zodpovedá štandardnej chybe merania pod 3 %.

Štandardná odchýlka σ je udávaná ako druhá odmocnina z celkového počtu nameraných impulzov

$$\sigma_N = \pm \sqrt{N_0} \quad (4)$$

kde N_0 je priemerná hodnota nameraného počtu impulzov. Ak počet meraní je väčší ako 1, teda $n > 1$ potom

$$\sigma_N = \pm \sqrt{\frac{N_0}{n}} \quad (5)$$

V praxi nás najčastejšie zaujíma štandardná odchýlka nameranej početnosti impulzov σ_A

$$\sigma_A = \pm \frac{\sqrt{N_0}}{t} \quad \text{imp.s}^{-1} \quad , \quad (6)$$

kde t je čas merania.

Takto vyjadrenú početnosť impulzov často uvádzame aj v percentuálnom vyjadrení

$$\sigma_{\%} = \pm \frac{100}{\sqrt{N_0}} \% \quad (7)$$

Pozn.: Percentuálne vyjadrenie štandardnej odchýlky je rovnaké pre početnosť impulzov aj pre celkový počet nameraných impulzov, čo vidieť aj z nasledujúcich úvah:

$$\sigma_N(\%) = \frac{\sigma_N}{N_0} 100\% = \pm \frac{\sqrt{N_0}}{N_0} 100\% = \pm \frac{100}{\sqrt{N_0}} \%$$

$$\sigma_A(\%) = \sigma_A \cdot \frac{t}{N_0} 100\% = \pm \frac{\sqrt{N_0}}{t} \frac{t}{N_0} 100\% = \pm \frac{100}{\sqrt{N_0}} \%$$

Vyhodnotenie a vykreslenie grafu pracovnej charakteristiky vykonáme pomocou programu Excel nasledujúcim spôsobom:

1. Otvoríme file Program.dat a najdeme zapísané údaje početností impulzov v závislosti od vysokého napätia v rozsahu 1 200V až 2 000 V s krokom 50 V
2. Vypočítame priemerné početnosti impulzov pre každý bod vysokého napätia, nastaveného po 50 V.
3. Zo stĺpca pre vysoké napätia VN priradíme početnosti impulzov zo stĺpca CPS a vykreslíme pracovnú charakteristiku proporcionálneho detektora.

Rozbor presnosti merania:

Vypočítajme napríklad, aký musí byť celkový počet nameraných impulzov, ak požadujeme, aby štandardná odchýlka vo výsledku bola rovná 10, 5, 1, alebo 0,1 %:

A dosadíme do rovnice (7), pre príslušné hodnoty štandardnej odchýlky v percentách dostaneme nasledujúce údaje:

Pre

$$\sigma_{\%} = 10 \% \quad \text{bude } N_0 = \frac{10^4}{\sigma_{\%}^2} = 100 \text{ impulzov}$$

$$\sigma_{\%} = 5 \% \quad N_0 = 400 \text{ impulzov}$$

$$\sigma_{\%} = 1 \% \quad N_0 = 10^4 \text{ impulzov}$$

$$\sigma_{\%} = 0,1 \% \quad N_0 = 10^6 \text{ impulzov}$$

Ak sme napríklad namerali celkovo 3 600 impulzov a celková doba merania bola 4 minúty, potom $N_0 = 3 600$ impulzov a k tejto hodnote bude prislúchať štandardná odchýlka rovnajúca sa $\sigma_{N_0} = \sqrt{3600}$, t.j.

$$N_0 \pm \sigma_{N_0} = 3600 \pm \sqrt{3600} = (3600 \pm 60) \text{ impulzov,}$$

alebo v percentuálnom vyjadrení

$$N_0 \pm \sigma_{N_0} = \left(3600 \pm \frac{100}{\sqrt{3600}} \right) = (3600 \pm 1,66\%) \text{ impulzov.}$$

Pre početnosť impulzov A dostaneme hodnotu

$$A = \frac{N_0}{t} = \frac{3600}{4} = 900 \text{ imp.min}^{-1}$$

$$\sigma_A = \pm \sqrt{\frac{3600}{4}} = \frac{60}{2} = \pm 30 \text{ imp.min}^{-1}$$

$$\sigma_{\sigma_A} = \pm \frac{100}{\sqrt{3600}} = \pm 1,66\%$$

Nameranú početnosť impulzov udávame potom spolu s príslušnou štandardnou odchýlkou nasledovne:

$$A = (900 \pm 30) \text{ imp.min}^{-1}$$

Alebo

$$A = (900 \pm 1,66\%) \text{ imp.min}^{-1} .$$

Zhodnotenie výsledkov meraní:

1. Urobte diskusiu o výsledkoch meraní a zhodnoťte neistoty meraní.
2. Z vykresleného grafu pracovnej charakteristiky určte šírku vo voltoch (malo by to byť niekoľko sto voltov) a stúpanie plateaua v percentách (pri kvalitných detektoroch je to menej ako 3 % na 100 V).
3. Na základe šírky plateaua a jeho stúpania môžeme posúdiť kvalitu detektora.

Kontrolné otázky:

1. Charakterizujte jednotlivé pracovné oblasti niektorých plynových detektorov.
2. Čo je to pracovná charakteristika plynového detektora?
3. Čo je to plateau plynového detektora?
4. Ako závisí amplitúda výstupných impulzov z detektora od vysokého napätia na detektore?
5. Ktoré plynové detektory majú spektrometrické vlastnosti a ktoré nie?

34. DOZIMETRICKÁ KONTROLA PRACOVISKA A MERANIE RADIÁCNEJ DÁVKY

Cieľ práce:

Oboznámiť sa s bezpečnostnými predpismi pre ochranu pred nebezpečným rádioaktívnym žiarením a získať základné znalosti na ochranu pred žiarením.

Úlohy:

1. Zoznámiť sa s bezpečnostnými predpismi **Vyhláška 12/2001 MZ SR** O požiadavkách na zabezpečenie radiačnej ochrany.
2. Zoznámiť sa so základnými pojmami dozimetrie ako aktivita, expozícia, absorbovaná dávka, dávkový ekvivalent.
3. Zmerať príkon dávkového ekvivalentu v stanovených bodoch laboratória

Teoretický úvod:

Pri neopatrnnej práci s rádioaktívnymi látkami hrozí nebezpečenstvo z nadmerného ožiarenia. Preto bezpodmienečne treba pracovať čo najopatrnejšie, dodržiavať bezpečnostné predpisy a stále kontrolovať, či ožiarenie organizmu neprekročilo dovolenú hranicu. Kontrolu ožiarenia sťažuje skutočnosť, že organizmus je rozlične citlivý na rôzne druhy ožiarenia.

Pôsobenie a znalosť vplyvu rôznych zdrojov žiarenia, ako je α , β , γ na živý organizmus je vecou verejného záujmu. Spomenuté druhy žiarenia sa vyskytujú aj v prírode: prichádzajú ako kozmické žiarenie, alebo vznikajú rozpadom rádioaktívnych prvkov v zemskej kôre. K tomu prispieva i žiarenie vznikajúce ľudskou činnosťou, ako röntgenové žiarenie, rádionuklidy v medicíne, energetike a priemysle.

Najstaršou dozimetrickou veličinou, ktorá má stále ešte svoj význam, je **expozičia**. Táto veličina vyjadruje ionizačné účinky gama žiarenia vo vzduchu. Jej zavedenie ešte v r. 1928 bolo podmienené predovšetkým tým, že v tej dobe bola ionizačná komora jedným z mála detekčných čidiel, ktorou bolo možné celkom spoľahlivo merať a porovnávať zdroje gama žiarenia. Jednotkou expozičie (vtedy nazývanej tiež expozičná dávka) bol jeden röntgen označujeme 1R. Je to také množstvo žiarenia X alebo gama, ktoré vytvorí v 0,001293 g vzduchu ióny nesúce náboj jednej elektrostatickej jednotky (1 e.j. = $3,33 \cdot 10^{-10}$ C) kladného aj záporného znamienka. (0,001293 g je hmotnosť 1 cm³ suchého vzduchu pri 0°C a tlaku 0,1 MPa).

V súčasnej dobe je expozičia (X) definovaná podielom

$$X = \frac{dQ}{dm} \quad (1)$$

kde dQ je absolútna hodnota celkového náboja iónov jedného znamienka, vzniknutých pri zabrzdení všetkých elektrónov (i pozitronov), uvoľnených fotónmi v objemovom elemente vzduchu o hmotnosti dm . V sústave SI je jednotkou expozičie coulomb na kilogram ($C \cdot kg^{-1}$), pričom vzťah novej jednotky so starou je $1 R = 2,58 \cdot 10^{-4} Ckg^{-1}$ (presne).

Derivácia expozičie podľa času dáva expozičný príkon (\dot{X})

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} \quad (2)$$

kde dX je prírastok expozície v časovom intervale dt . Jednotkou expozičného príkonu je ampér na kilogram (Akg^{-1}) alebo $Ckg^{-1}s^{-1}$.

Podľa dnešného stavu je teda 1 R taká expozícia, pri ktorej fotóny vzbudia v 1 kg vzduchu korpuskulárne žiarenie, ktoré po úplnom zabrzdení vo vzduchu v ňom vytvorí toľko iónov, že nesú úhrnom po $2,58 \cdot 10^{14}$ elektrického náboja oboch znamienok. Možno potom ľahko vypočítať, že tomu odpovedá $1,61 \cdot 10^{15}$ párov iónov na 1 kg vzduchu. Ak použijeme pre strednú energiu ionizácie vzduchu hodnotu 34 eV, plynú z toho pre energiu odovzdanú vzduchu hodnota $8,77 \cdot 10^{-3} Jkg^{-1}$, t.j. dávka $8,77 \cdot 10^{-3} Gy$.

Základnou veličinou pri práci s rádioaktívnymi látkami je aktivita A , definovaná podielom stredného počtu rádioaktívnych premien dN a časového intervalu dt , počas ktorého k týmto premenám v danom množstve rádionuklidu došlo, t.j.

$$A = \frac{dN}{dt} \quad (3)$$

Jednotkou aktivity v sústave SI je becquerel (Bq), pričom $1 Bq = 1 s^{-1}$ (jedna premena za 1 s).

Majme bodový zdroj, ktorého aktivita je A Bq. Častice, uvoľnené pri premene, sa vyžiarajú rovnomerne do celého priestoru. Tok prúdu častíc I je definovaný ako počet častíc, prechádzajúcich jednotkovou plochou, ktorá je kolmá na smer šírenia sa častíc. Vo vzdialenosti R od bodového zdroja je tok častíc daný vzťahom

$$I = \frac{A}{R^2} \quad (4)$$

Tok prúdu častíc I je teda priamo úmerný aktivite preparátu a nepriamo úmerný štvorcu vzdialenosti. Preto sa pri práci usilujeme používať čo najmenšie aktivity a dodržiavať od nich čo najväčšiu vzdialenosť.

Keď poznáme intenzitu prúdu častíc a poznáme aj ich energiu, vieme stanoviť intenzitu žiarenia v uvažovanom mieste. Intenzita žiarenia je energia, ktorá prechádza jednotkovou plochou, kolmou na smer šírenia sa častíc za jednotku času. Podobne môžeme stanoviť aj množstvo žiarenia. Množstvo žiarenia je energia, ktorá prešla danou plochou za daný čas; je to teda dvojitý, plošný a časový integrál intenzity žiarenia. Obe spomínané veličiny môžeme merať fyzikálnymi metódami.

Pri prechode žiarenia látkou nastáva (okrem iného) absorpcia žiarenia hmotným prostredím a ionizácia hmotného prostredia. Priebeh obidvoch týchto dejov môže byť mierou intenzity a množstva žiarenia.

Korpuskulárne žiarenie je vo väčšine prípadov sprevádzané aj žiarením gama. Dávku žiarenia gama vieme určiť pomerne presne, preto vieme pomerne presne navrhnúť aj ochranu proti nemu. Ochrana proti žiareniu gama nám vo väčšine prípadov poslúži aj proti korpuskulárnemu žiareniu. Najťažšie sa vypočítava ochrana proti neutrónom, keďže je málo experimentálnych a iných údajov.

Pred vyrobením umelých rádioizotopov bolo zdrojom prenikavého ionizujúceho žiarenia najčastejšie rádium. Preto väčšina jednotiek, používaná pri určovaní rádioaktivity, dávky atď., je stanovená pomocou žiarenia preparátu rádia Ra. Opierajúc sa o rádium bola určená jednotka aktivity 1 curie (1 Ci) je počet rádioaktívnych premien v 1 g Ra za 1 s, pomocou žiarenia Ra bol stanovený röntgen, atď. Curie je stará jednotka a môžeme sa

stretnúť s ňou najmä v staršej literatúre, preto uvádzame $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$. Rádiový preparát, ktorý sa používa ako normál, je uzavretý v platinovom obale hrubom 0,5 mm, ktorý súčasne filtruje prechádzajúce žiarenie.

Zvláštny názov expozícia nedostala, a to najmä preto, že sa v budúcnosti nepočíta s používaním veličiny expozície v praxi, ale s jej nahradením kermou (ďalšia dozimetrická veličina o ktorej sa tu nechceme obšírnejšie rozpisovať) a tiež dávkovým ekvivalentom.

Našou úlohou tu nebude študovať rôzne druhy žiarenia, ale len popísať jednotky, ktorými môžeme vyjadriť vlastnosti a účinky žiarenia a potom merať toto žiarenie. Na toto sa používajú dve dôležité veličiny absorbovaná dávka a dávkový ekvivalent, prípadne ich odvodeniny pre časovú zmenu.

Absorbovaná dávka D – je to miera účinku ionizujúceho žiarenia na látku. Dávka v určitom mieste látky je definovaná ako stredná energia ε odovzdaná ionizujúcim žiarením látke, pripadajúcej na jednotku hmotnosti m látky, ktorej bola energia odovzdaná.

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} \quad (5)$$

Jednotkou dávky v sústave SI je joule na kilogram ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$) so zvláštnym názvom **gray** (Gy) podľa známeho fyzika priekopníka v oblasti dozimetrie Luis Harolda Gray-a (1905 – 1965). Používa sa aj staršia jednotka **rad** (radiation absorbed dose – radiačná absorbovaná dávka).

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ Jkg}^{-1} = 100 \text{ rad}$$

Celotelová krátkodobá dávka žiarenia gama 3 Gy (300 rad) spôsobí 50% mortalitu populácie, ktorá jej bola vystavená. Pre informáciu uvádzame, že dnešná stredná ročná absorbovaná dávka žiarenia od prírodného pozadia je asi 2,2 mGy.

Účinok ionizujúceho žiarenia na živé organizmy závisí popri absorbovanej dávke aj od druhu žiarenia a podmienok ožiarenia. Veličinou, ktorá vyjadruje rôznu biologickú účinnosť jednotlivých druhov ionizujúceho žiarenia na ľudský organizmus je dávkový ekvivalent.

Dávkový ekvivalent H – je to súčin dávky v danom bode a príslušných bezrozmerných modifikujúcich činiteľov v tomto bode.

$$H = D \cdot Q \cdot N \quad (6)$$

Akostný faktor Q vyjadruje vplyv mikroskopického rozdelenia energie odovzdanej tkanivu živého organizmu na zdravotnú újmu. Sú preň stanovené konvenčné hodnoty závislé na hustote ionizácie vyjadrené pomocou neobmedzeného lineárneho prenosu energie L_{∞} . Rôzne druhy žiarenia (napr. žiarenie gama a neutróny) môžu dodať telu rovnaké množstvo energie ale s rôznym biologickým účinkom. Akostný faktor vyjadruje **RBÚ** relatívnu biologickú účinnosť (**RBE** - relative biological effectiveness) tak, aby boli nezávislé na orgáne či tkanive i na druhu uvažovaného biologického účinku. Konvenčné hodnoty pre Q sú nasledujúce: elektróny, fotóny, gama žiarenie, X žiarenie $Q = 1$; tepelné neutróny $Q = 2,3$; neutróny a protóny s neznámou energiou $Q = 10$; častice alfa a iné ťažké častice s neznámou energiou $Q = 20$. Pre súčin ostatných modifikujúcich faktorov sa bere v súčasnej dobe na základe konvencie vo všetkých prípadoch $N = 1$.

Jednotkou pre dávkový ekvivalent v sústave SI je **sievert** (Sv), pomenovanie je po Rolfovi Sievertovi významnom švédskom fyzikovi v oblasti radiačnej ochrany. Používa sa aj staršia jednotka **rem** (röntgen equivalent man).

$$1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem}$$

Pozn.: Pri práci v našom fyzikálnom laboratóriu nebudeme pracovať s so žiadnymi zdrojmi ani etalónmi rádioaktívneho žiarenia, na experimenty budeme využívať len prirodzené pozadie životného prostredia, preto nemusíme a ani nemôžeme dodržiavať Vyhlášku 12/2001 MZ SR.

Zvlášť nebezpečné sú rádioaktívne látky, ktoré sa dostanú dovnútra organizmu a usadia sa tam. Do organizmu sa môžu dostať potravou, vodou, vdychovaným vzduchom, ranou, pokožkou a pod. Preto rádioaktívne látky nikdy neberieme holou rukou. V laboratóriu, kde sa pracuje so žiaričmi, je prísne zakázané jesť, fajčiť, maľovať si ústa a pod. Pri práci s otvorenými práškovitými alebo tekutými žiaričmi chránime si ruky rukavicami, pracujeme v osobitných prachotesných digestóriach, aby sme nebezpečenstvo zamorenia rádioaktívnymi látkami znížili na minimum. Predmety, ktoré sa stykom s rádioaktívnym minerálom stali tiež rádioaktívne, musíme očistiť, odmoriť. Všetky ostatné podrobnosti, týkajúce sa manipulácie so žiaričmi, dopravy žiaričov, pracovného vybavenia potrebných miestností atď. sú uvedené v spomínanej norme.

Práca s rádioaktívnymi látkami je spojená s istým nebezpečím pre organizmus. Pracovník s týmito látkami je vystavený nebezpečenstvu vonkajšieho a vnútorného ožiarenia. Nadmerné pôsobenie ionizačného žiarenia na organizmus môže mať veľké následky v podobe krátkodobých biologických a genetických účinkov. Ľudský organizmus nereaguje na rádioaktívne ožiarenie okamžite, ale po určitom časovom odstupe. Preto sa pri použití rádioaktívnych látok musia urobiť niektoré bezpečnostné opatrenia. Každý pracovník musí presne poznať metódy práce a prísne dodržiavať potrebné bezpečnostné opatrenia. V takom prípade možno zabrániť poškodeniu zdravia a prekročeniu maximálne prípustnej dávky alebo vniknutiu rádioaktívnej látky do organizmu.

Prístroje a pomôcky: Inteligentná sonda RS 03 spojená s PC cez RS-232 prechod a spolupracujúca s PC pomocou SW Vcomtest a Bittsens.

Postup práce:

1. Sondu RS 03 uložte postupne do 5 meracích bodov a v každom meracom bode vykonajte meranie príkonu dávkového ekvivalentu 5 krát za sebou.
2. Z nameraných hodnôt príkonu dávkového ekvivalentu pre každý merací bod vykonajte aritmetický priemer a vypočítajte σ štandardnú odchýlku aritmetického priemeru príkonu dávkového ekvivalentu.
3. Vykonajte porovnanie úrovne pozadového žiarenia gama a rozhodnite, či nebola prekročená povolená úroveň (v laboratóriu by mala byť úroveň pozadia v rozsahu 80 až 120 nSv^h⁻¹).

Spracovanie nameraných hodnôt:

Namerané údaje v každom bode zapíšte do nasledujúcej tabuľky 1.

Kontrola príkonu dávkového ekvivalentu v určených meracích bodoch

Tab. 1.

Merací bod	Názov bodu	Nameraný príkon dávkového ekvivalentu	Poznámka

Rozbor presnosti merania:

Urobte diskusiu rozboru presnosti merania vzhľadom na štatistiku početnosti impulzov v jednotlivých meracích bodoch. Pri dávkovom ekvivalente 100 nSv h^{-1} detektor inteligentnej sondy dáva 4 imp.s^{-1} . Stanovte neistotu merania.

Kontrolné otázky:

1. Čo je to aktivita, expozícia, dávka, dávkový ekvivalent?
2. V akých jednotkách sa merajú dozimetrické veličiny v bode 1?
3. Uveďte základné úrovne pre bezpečnosť a ochranu pred žiarením vyplývajúce z vyhlášky 12/2001 MZ SR.

LITERATÚRA

- Brož J., a kol.: Základy fyzikálních měření. Praha, SPN 1974
- Valko L., a kol.: Návod na laboratorne cvičenie z Fyziky I a II. Trenčianska univerzita v Trenčíne, Katedra fyziky Trenčín 2000
- Krajčovič J., a kol.: FYZIKA – Návod na laboratorne cvičenia z fyziky. Slovenská technická univerzita v Bratislave MtF v Trnave , Bratislava 2000
- Krempaský J.: Meranie termofyzikálnych veličín , Trnavská univerzita Pdf Trnava 2002
- Čerňanský P.: Meranie priemeru tenkého vlákna pomocou ohybu svetla, Trnavská univerzita Pdf Trnava 2002
- Krempaský J.: FYZIKA, Bratislava, Alfa 1982.
- Ilkovič D.: Fyzika, Bratislava Alfa 1972
- Kundracík F.: Spracovanie experimentálnych dát. Matematicko-fyzikálna fakulta UK Bratislava, 1999
- Dillinger a kol.: FYZIKA, Návod na laboratorne cvičenia. Slovenská technická univerzita v Bratislave, Strojnícka fakulta, Bratislava 1998

