

Trnavská univerzita v Trnave – Pedagogická fakulta

Simulácie a aplety v prírodných vedách

Časť 1. Mechanika



Žaneta Gerhátová

TRNAVA 2014

Trnavská univerzita v Trnave – Pedagogická fakulta



Recenzenti: prof. RNDr. Július Krempaský, DrSc.

doc. RNDr. Miroslava Ožvoldová, PhD.

© Žaneta Gerhátová, 2014

© Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave, 2014

ISBN 978-80-8082-755-7

Obsah

Úvod.....	4
1 Virtuálny experiment v prírodovednom vzdelávaní.....	7
2 Pokoj a pohyb telesa – zadanie projektu.....	9
2.1 Pokoj a pohyb telesa – návrh spracovania riešenia projektu	10
3 Zákon sily – zadanie projektu	24
3.1 Zákon sily – návrh spracovania riešenia projektu	25
4 Pohyb telesa po naklonenej rovine – zadanie projektu	33
4.1 Pohyb telesa po naklonenej rovine – návrh spracovania riešenia projektu	35
5 Rovnomerný pohyb po kružnici – zadanie projektu.....	45
5.1 Rovnomerný pohyb po kružnici – návrh spracovania riešenia projektu	46
6 Voľný pád telesa – zadanie projektu	65
6.1 Voľný pád telesa – návrh spracovania riešenia projektu	66
7 Šikmý vrh nahor – zadanie projektu.....	78
6.1 Šikmý vrh nahor – návrh spracovania riešenia projektu	80
8 Využitie Pascalovho zákona – zadanie projektu	98
Záver.....	99

Úvod

Dôležitou a neoddeliteľnou súčasťou prírodovedného vzdelávania je prírodovedný experiment. V rozvoji prírodovednej gramotnosti ako celku má významnú edukačnú hodnotu, pretože na rozdiel od vzhľadovo podobne realizovaných aktivít nemá len motivačnú funkciu, ale aktívne prispieva k modifikácii prekonceptov a k rozvoju špecifických kognitívnych schopností [1].

Nenahraditeľnou súčasťou výučby prírodovedných predmetov je reálny experiment, ktorý sa v univerzitnom vzdelávaní realizuje hlavne v rámci laboratórnych cvičení v prírodovedných laboratóriách. Vedomosti, zručnosti a zážitky, ktoré študenti prostredníctvom experimentu získavajú, sú nezameniteľné, pretože si pri experimentovaní spájajú nadobudnuté poznatky a zručnosti s novými skúsenosťami a tie dokážu prepájať so skúsenosťami z bežného života. V snahe o rozvoj tvorivého myslenia študenta je žiaduce vzbudiť jeho prírodovednú zvedavosť, predstavivosť, uvažovanie a logiku, ako i vzbudiť jeho záujem o nové poznatky, nové metódy, či dokonca o vedecké bádanie, v snahe preveriť určitú skutočnosť a podložiť ju dôkazmi. Pritom je možné využiť obľúbenosť práce mladej generácie s informačno-komunikačnými technológiami (IKT). Preto v snahe o širšie zavedenie IKT a prírodovedného experimentu do vyučovania na území SR, bola vytvorená nová stratégia vzdelávania, ktorej autori F. Schauer, M. Ožvoldová a F. Lustig dali názov **Integrovaný e-learning (INTe-L)** [2]. V duchu „*inquiry-based learning*“ INTe-L upúšťa od tradičného poňatia výučby prírodných vied, ktorá je založená na poznaní faktov, definícií a vzťahov. Preferuje metódy vedeckej práce, ktorej znakmi sú: pozorovanie javov reálneho sveta, vyhľadávanie informácií a ich záznam, organizácia a plánovanie práce, štruktúra a usporiadanie informácií, prezentácia dát v tabuľkách, grafoch, spracovanie dát, ich analýza, vyvodzovanie záverov a ich diskusia prostredníctvom spracovania problematiky v laboratórnych protokoloch, resp. vedeckých článkoch [3].

Cieľom stratégie INTe-L je skvalitniť vyučovanie prírodovedných predmetov prostredníctvom pozorovania a aktívneho experimentovania s využívaním všetkých foriem experimentu (reálneho, reálneho vzdialeného, virtuálneho) a najnovších IKT. V záujme pedagógov má byť snaha vychovávať budúcich vedcov, bádateľov, a nie iba prijímateľov informácií. Riešenie môže priniesť modernizácia vyučovania prírodovedných predmetov. Nesústrediť sa na odovzdávanie informácií, ale naučiť žiaka informácie získať [4].

Za východisko je vhodné považovať pozorovanie, experimentálnu činnosť, získavanie a ukladanie experimentálnych dát a ich vyhodnocovanie. Úspešná experimentálna činnosť s teoretickým porozumením skúmaného javu je predpokladom pre motiváciu študenta [5].

Nestačí však len sprístupniť techniku a technológie študentom a učiť ich s nimi manipulovať, ale práve oni sa musia učiť s využitím týchto technológií a techniky [6]. Zmena rešpektuje funkciu IKT a jej cieľom je pripraviť učiteľov pre budúcnosť, nie iba obmedzene pre ich „zajtrajšie pôsobenie“.

Túto myšlienku sa na Katedre fyziky Pedagogickej fakulty Trnavskej univerzity v Trnave snažíme prakticky uplatňovať vo všetkých predmetoch bakalárskeho a magisterského stupňa štúdia. Výnimkou nie je ani predmet *Simulácie a aplety v prírodných vedách*, ktorý sa vyučuje ako výberový predmet v študijnom odbore učiteľstvo akademických predmetov, v druhom ročníku bakalárskeho stupňa štúdia, je teda určený pre študentov rôznych aprobácií, nielen aprobácií s fyzikou.

Naším cieľom je, aby študent po absolvovaní tohto predmetu vedel pracovať s interaktívnymi simulačnými prostriedkami a aby ich vedel využívať vo svojej budúcej práci v predmetoch matematika, chémia, biológia, fyzika, prírodoveda atď. Aby vedel overiť vedeckú správnosť vybraných interaktívnych simulácií, aby vedel prezentovať teoretické poznatky z jednotlivých častí predmetov: matematika, chémia, biológia a fyzika. Aby sa naučil vypracovať projekt na danú tému, prezentovať a obhájiť ho pred kolektívom.

V práci predkladáme zadania šiestich projektov z mechaniky s využitím interaktívnych simulácií, spolu aj s autorským návrhom ich spracovania riešenia a jedno zadanie projektu bez autorského návrhu spracovania jeho riešenia. Autorské riešenie jednotlivých projektov má slúžiť študentom ako pomôcka pri štúdiu daného predmetu i pri práci na svojom projekte, ktoré im vyučujúci na úvod semestra zadá a ktorý budú pred kolektívom v priebehu semestra obhajovať.

Vzhľadom na to, že predmet *Simulácie a aplety v prírodných vedách* nie je určený len pre študentov aprobačného predmetu fyzika, ale pre všetkých študentov druhého ročníka PdF TU, rozhodli sme sa, zapracovať do zadaní projektov jednoduchšie virtuálne experimenty z mechaniky. Pre ľahšiu orientáciu v projektoch, resp. v texte, zvolili sme uvádzanie citovanej literatúry pre každú kapitolu osobitne.

Na úvod sa venujme termínom, ktoré sa vyskytujú v názve publikácie, t. j. ozrejmieme si, čo rozumieme pod pojmom simulácia a aplet.

Literatúra

- [1] Held, Ľ. a kol. *Výskumne ladená koncepcia prírodovedného vzdelávania: (IBSE v slovenskom kontexte) – [1. vyd.]*. – Bratislava, Typi Universitatis Tyrnaviensis, spoločné pracovisko Trnavskej univerzity v Trnave a VEDY, vydavateľstva Slovenskej akadémie vied, 2011. – 138 s. – ISBN 978-80-8082-486-0.
- [2] Tkac, L., Kostelnikova, M., Ozvoldova, M., The characteristics of DC source as a part of Integrated e-learning in Electricity. In: *Interactive Collaborative Learning (ICL)*, 2013 International Conference on IEEE, 2013. p. 246-250, ISBN 978-1-4799-0153-1.
- [3] Kostelníková, M., Ožvoldová, M. *Východiská pre implementáciu integrovaného e-learningu do výučby prírodných vied*. Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis, Séria C, 2011, ročník 15, s. 61 – 69.
- [4] Wieman, C., Perkins, K. *Transforming Physics Education*. Nov. 2005, p. 26 – 41.
- [5] Ožvoldová, M., Martinková, A. *Stratégia integrovaného e-learningu vo výučbe kmitov prostredníctvom interaktívnej tabule*. In: *Tvorivý učiteľ fyziky II.* – [Bratislava]: Slovenská fyzikálna spoločnosť, 2009. ISBN 978-80-969124-8-3. s. 39-43.
- [6] Turčáni, M. a kol. *Prírodovedné vzdelávanie v informačnej spoločnosti*. Nitra: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre 2003. ISBN 80-8050-638-8.

1 Virtuálny experiment v prírodovednom vzdelávaní

Virtuálny prírodovedný experiment – jeden z troch komponentov stratégie INTe-L, poskytuje študentom dynamickú obrazovú informáciu o fyzikálnych pojmoch, javoch, experimentoch. Význam slova virtuálny, nám napovedá, že sa nejedná o reálny prírodovedný experiment.

Položme si otázku, ako súvisí simulácia a aplet s fyzikálnym virtuálnym experimentom? Vyjdeme z objasnenia pojmov simulácia a aplet. Začneme synonymom slova simulácia, simulovať, t. j. predstierať, resp. napodobňovať. Na základe toho možno definovať simuláciu ako imitáciu reálnych vecí, stavov, vzťahov, štruktúr, udalostí alebo procesov vo všetkých oblastiach prostredníctvom počítačových hier, modelov, resp. ako „*numerická metóda, ktorá spočíva v experimentovaní so špeciálnym matematickým modelom reálnych systémov na počítači*“ [1].

Názov aplet vznikol z anglického slova „*applet*“, s významom *app-* = (*application*) + druhá časť slova (*-let*) s významom zdobneniny v anglickom jazyku, t. j. malá aplikácia. Aplet sa používa k naplneniu konkrétnej funkcie a nepredpokladá sa používať tento softvér ako samostatnú aplikáciu. Súvislosť medzi simuláciou a apletom je v tom, že prostredníctvom apletu môžeme realizovať interaktívne znázornenie určitej simulácie. Čiže interaktívnu simuláciu, v ktorej môžeme nastavovať určité jej parametre, nazývame aplet. Často sa v praxi stretávame s tzv. Java apletmi – programami napísanými v programovacom jazyku Java.

Interaktívne simulácie, aplety môžeme využívať aj ako didaktický softvér, ktorý dovoľuje žiakovi/študentovi osvojovať si nové poznatky, resp. prehĺbiť si nadobudnuté poznatky alebo i ľahšie porozumieť skúmanému javu v maximálnej miere s využitím samostatného myslenia a samostatnej aktívnej činnosti s apletom. Java aplety s fyzikálnou tematikou nazývajú Wolfgang Christian a Mario Beloni fyzlety (*physlets*). Java aplety spracované pre výučbu vo fyzike sú najčastejšie vytvorené ako rôzne interaktívne simulácie fyzikálnych javov, ktoré sú dynamické. Do deja môžeme zasahovať aktívne, zmenou ponúknutých premenných. Pomocou fyzletu môžeme sledovať časový vývoj daného fyzikálneho javu [2].

Počítačové interaktívne simulácie vo fyzike sú často jedinou možnosťou, ako určité experimenty uskutočniť. Umožňujú nastaviť také začiatočné podmienky, ktoré sa v praxi nedajú realizovať (napr. zmena gravitácie) [3], alebo uskutočniť experiment, ktorý by v praxi nebol možný (napr. výbuch jadrového reaktora). Niekedy je interaktívna počítačová simulácia dokonca jedinou možnosťou, ako experiment uskutočniť.

Záverom tejto časti by sme chceli upozorniť na skutočnosť, že cieľom virtuálneho experimentu nie je nahradiť reálny prírodovedný experiment realizovaný napr. v školskom laboratóriu v procese výučby, ale dopĺňať edukačný proces a experimentovanie novými druhmi experimentu, veľmi ľahko dostupnými najčastejšie prostredníctvom internetu.

Literatúra

- [1] *What is Simulation?* NovaSim...Logic in Motion. 2003. NovaSim. May 2006, [online] <<http://www.novasim.com/index.html>>
- [2] Ožvoldová, M., Gerhátová, Ž. *Projektové vyučovanie s využitím integrovaného e-learningu* [1. vyd.]. – Trnava. Typi Universitatis Tyrnaviensis, 2010. ISBN 978-80-8082-386-3.
- [3] Labuda, J. *Interaktívna výučba fyziky pomocou Java appletov*. DP UPJŠ v Košiciach. 2007.

Upozornenie:

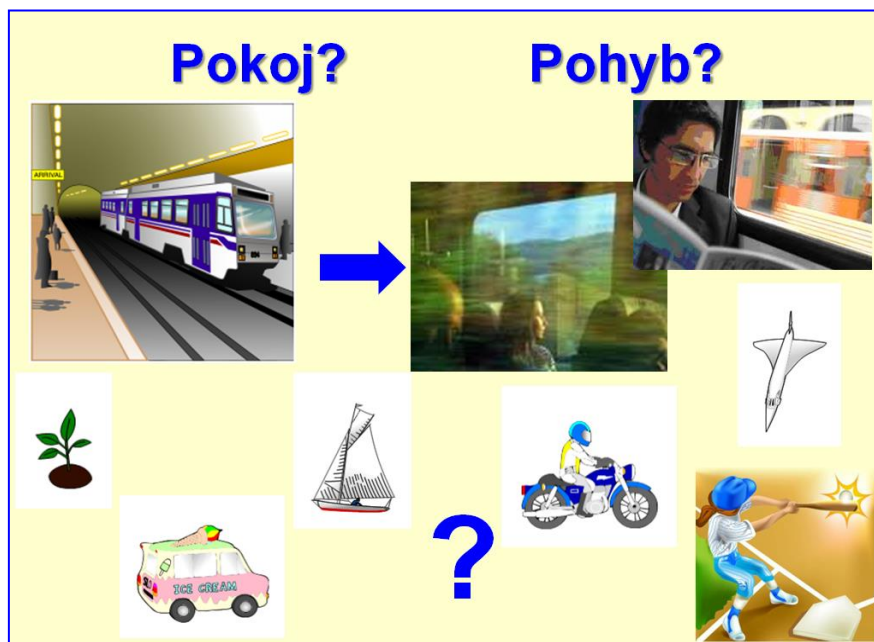
Ak niektoré aplety a interaktívne simulácie, ktoré v ďalšom texte rozoberáme, nebudete môcť otvoriť, odporúčame nainštalovať si voľne dostupný softvér Java 6.0.

2 Zadanie projektu 1

Téma projektu: Pokoj a pohyb telesa

Cieľ: Na základe experimentovania s fyzikálnym Java apletom *Pohyb s konštantným zrýchlením*, [online] (dostupné na: www.walter-fendt.de/ph14sk/acceleration_sk.htm [1]), overiť jeho fyzikálnu správnosť, opísať pohyb hmotného bodu s konštantným zrýchlením a skúmať vzťahy medzi veličinami, ktoré ho opisujú.

Motivácia: Pokoj a pohyb sú relatívne pojmy. Ak hovoríme, že teleso je v pokoji alebo v pohybe, musíme vždy uviesť, vzťažnú sústavu, vzhľadom na ktorú jeho pohyb opisujeme (obr. 2.1). Poznáte zákony, podľa ktorých prebiehajú zmeny s telesami v priebehu času? Viete tieto zmeny popísať a zaznamenať?



Obr. 2. 1 Motivačný obrázok k zadaniu projektu *Pokoj a pohyb telesa* (vlastná koláž)

Úlohy:

1. Overte fyzikálnu správnosť apletu: Fendt, W. *Pohyb s konštantným zrýchlením*, [online] (dostupné na: www.walter-fendt.de/ph14sk/acceleration_sk.htm [1]).
2. Uveďte, s akými druhmi pohybov sa môžeme v bežnom živote stretnúť.
3. Vysvetlite, kedy môžeme pohyb telesa, resp. častice skúmať ako hmotný bod.
4. Objasnite pojmy: mechanický pohyb, vzťažné teleso, vzťažná sústava, trajektória, dráha, rýchlosť a zrýchlenie pohybu telesa.

Čas vymedzený na projekt: týždeň.

2.1 Pokoj a pohyb telesa – návrh spracovania riešenia projektu

Teoretická časť

Naším cieľom je, na základe experimentovania s fyzikálnym Java apletom *Pohyb s konštantným zrýchlením*, [online] (dostupné na: www.walter-fendt.de/ph14sk/acceleration_sk.htm [1]), overiť jeho fyzikálnu správnosť, opísať pohyb hmotného bodu s konštantným zrýchlením a skúmať vzťahy medzi veličinami, ktoré ho opisujú.

Najjednoduchšou formou pohybu hmoty v priestore a čase je **mechanický pohyb**. Týmto pojmom označujeme každú zmenu polohy telesa (alebo jeho častí) vzhľadom na iné telesá. Mechanický pohyb telies (obr. 2.2) a zákony tohto pohybu skúma časť fyziky, ktorá sa nazýva **mechanika**. Skúma zmeny vzájomnej polohy telies, resp. ich častí (v prípade, ak telesá nie sú dokonale tuhé) [2].



Obr. 2.2 Ukážky mechanického pohybu telies (vlastná koláž)

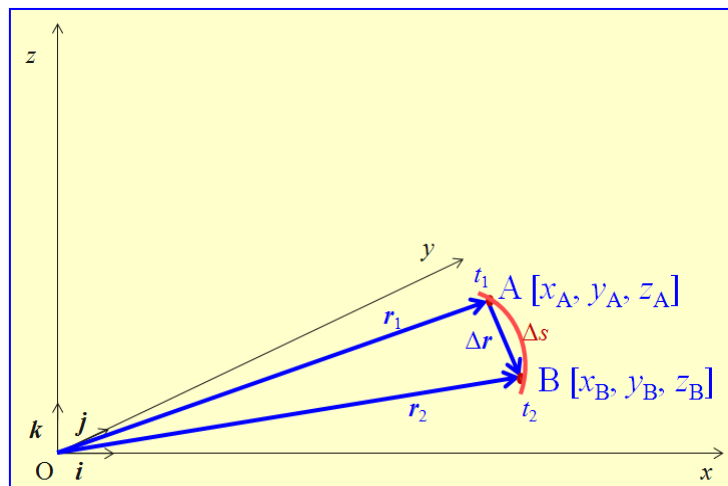
Časť mechaniky, ktorá sa zaoberá opisom pohybu a skúmaním vzťahov medzi veličinami opisujúcimi pohyb, ale neskúma príčiny pohybu, sa nazýva **kinematika** (gr. *kineo* – pohybovať sa) [3].

Hmotný bod je model, v ktorom rozmery telesa, ktorého pohyb skúmame, sú malé v porovnaní s inými rozmermi v danej úlohe, preto ich môžeme zanedbať. Hmotnosť skúmaného telesa alebo častice sa ale zachováva.

Teleso, vzhľadom na ktoré budeme pohyb skúmaného telesa (hmotného bodu) popisovať sa nazýva **vzťažné teleso**. V aproximácii hmotného bodu ho nazývame **vzťažným bodom** [2].

Vzťažná sústava je súradnicová sústava so začiatkom vo vzťažnom telese. Vzniká spojením vzťažného telesa, na ktorom si zvolíme vzťažný bod O, so sústavou súradníc a určením merania času. Ako vzťažná sústava sa často používa pravouhlá súradnicová sústava, ktorá je v priestore určená tromi navzájom kolmými jednotkovými vektormi i, j, k . Tie spolu so vzťažným bodom O určujú súradnicové osi x, y, z . Ak chceme popísať pohyb telesa (hmotného bodu), musíme v každom časovom okamihu poznať jeho polohu, ktorú v trojrozmernom priestore určujeme najčastejšie súradnicami x, y, z [2], ktoré nazývame karteziánskymi súradnicami. Pomocou navzájom kolmých jednotkových vektorov i, j, k (obr. 2.3) môžeme veľmi jednoducho vyjadriť každý vektor.

Uvažujme pohyb hmotného bodu vzhľadom na zvolenú vzťažnú sústavu (obr. 2.3). V určitom časovom okamihu t_1 sa hmotný bod nachádza v bode A $[x_A, y_A, z_A]$ určenom polohovým vektorom $r_1 = x_A i + y_A j + z_A k$ a v časovom okamihu t_2 v bode B $[x_B, y_B, z_B]$, určenom polohovým vektorom $r_2 = x_B i + y_B j + z_B k$. Nech v časovom intervale $\Delta t = t_2 - t_1$ prejde hmotný bod z miesta A do B po trajektórii dráhu Δs (obr. 2.3).



Obr. 2.3 Určovanie polohy hmotného bodu vzhľadom na vzťažnú sústavu

Množina všetkých bodov, ktorými hmotný bod za určitý časový interval pri pohybe prejde (Obr. 2.4) sa nazýva **trajektória** (lat. *trajectio* – preprava) [2].

Podľa tvaru trajektórie rozlišujeme pohyby:

- priamočiare – trajektória pohybu hmotného bodu má tvar priamky,
- krivočiare – trajektória pohybu hmotného bodu má tvar krivky.

Treba ale poznamenať, že tvar trajektórie je relatívny, pretože závisí od toho, z akého miesta pohyb pozorujeme, závisí teda od voľby vzťažnej sústavy.

Dĺžka úseku trajektórie, ktorú hmotný bod opíše za určitý časový interval Δt , sa nazýva **dráha** pohybu. Označuje sa s a vyjadruje sa v jednotkách dĺžky napr. meter (m), kilometer (km) [4].



Obr. 2.4 Trajektória pohybu rôznych telies (vlastná koláž)

Rýchlosťou bežne rozumieme dráhu prejdenu za jednotku času. Podiel prejdenej dráhy a príslušného časového intervalu:

$$v_p = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

(2.1)

určuje skalárnu veličinu, ktorá sa nazýva **priemerná rýchlosť**. Rovnicou (2.1) sme nezohľadnili vektorovú povahu rýchlosti. Označme polohový vektor určujúci polohu skúmaného objektu \mathbf{r} , jeho vyjadrenie v dvoch rôznych po sebe nasledujúcich časových okamihoch $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ a ich rozdiel $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta \mathbf{r}$ (obr. 2.3).

Ak budeme znižovať časový interval Δt , potom veľkosť zmeny polohového vektora $|\Delta \mathbf{r}|$, sa bude stále viac blížiť k dráhe Δs , prejdenej hmotným bodom (obr. 2.3). Priemerná rýchlosť pohybujúceho sa bodu, ako skalárna veličina, sa rovná zmene veľkosti polohového vektora $|\Delta \mathbf{r}|$, prepočítaného na jednotku času [2]. Limitný prípad $\Delta t \rightarrow 0$, určuje **okamžitú rýchlosť**, ktorá je definovaná ako limita:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (2.2)$$

ktorú nazývame deriváciou polohového vektora podľa času, definovanú vzťahom:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.3)$$

Okamžitá rýchlosť definovaná vzťahom (2.3) určuje veľkosť aj smer vektora rýchlosti. Polohový vektor \mathbf{r} , v pevnej trojrozmernej sústave, možno vyjadriť pomocou jeho zložiek: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Jeho deriváciu možno vyjadriť ako súčet derivácií jeho zložiek [5]:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}. \quad (2.4)$$

(Poznámka: S vektormi \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} pri derivovaní počítame ako s konštantami, lebo sa v našej súradnicovej sústave nemenia). Zo vzťahu (2.4) vyplýva:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.5)$$

Pre veľkosť vektora rýchlosti platí:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.6)$$

Vektor rýchlosti má smer vektora $\Delta\mathbf{r}$, ktorý je pre limitný prípad $\Delta t \rightarrow 0$, dotyčnicou trajektórie pohybu a možno ho vyjadriť ako násobok jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$ skalárom v :

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}. \quad (2.7)$$

Zmenu pohybového stavu charakterizuje veličina **zrýchlenie**. Určuje zmenu rýchlosti za jednotku času. Ak zmenšujeme časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, limitný prípad $\Delta t \rightarrow 0$ určuje **okamžité zrýchlenie**. Je to vektorová veličina:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (2.8)$$

Jednotka zrýchlenia je $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Definícia zrýchlenia pomocou diferenciálneho počtu je analogická ako pri rýchlosti. Zrýchlenie zavádzame ako deriváciu vektora rýchlosti podľa času, resp. ako druhú deriváciu polohového vektora podľa času:

$$\mathbf{a} = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.9)$$

Podobne ako pri rýchlosti, aj pri zrýchlení platia vzťahy:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \quad (2.10)$$

Pre veľkosť vektora zrýchlenia platí:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.11)$$

Zrýchlenie je vektorová veličina, ktorá je určená veľkosťou a smerom. Smer vektora zrýchlenia je určený smerom vektora prírastku rýchlosti Δv . Platí:

$$\mathbf{a} = a\boldsymbol{\eta}, \quad (2.12)$$

kde $\boldsymbol{\eta}$ je jednotkový vektor vyjadrujúci smer vektora prírastku rýchlosti.

Podľa veľkosti zrýchlenia možno rozdeliť pohyb na:

- rovnomerný**, keď sa teleso (v aproximácii hmotného bodu) pohybuje s nulovým zrýchlením, t. j. $a = 0$ (tab. 2.1) [6];
- nerovnomerný**, keď je zrýchlenie funkciou času $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

Tabuľka 2.1 Charakteristiky rovnomerného pohybu [6]

POHYB PRIAMOČIARY					
rovnomerný			rovnomerne zrýchlený		
veličina	vzťah	rovnica	veličina	vzťah	rovnica
Súradnica polohy x sa mení s časom	$x = x(t)$	dráhy $x(t) = x_0 + v_0 t$ (2.9) graf: priamka	Súradnica polohy x sa mení s časom	$x = x(t)$ pre $x_0 = 0$ $v_0 = 0$	dráhy $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ (2.10) $x(t) = \frac{at^2}{2}$ graf: parabola
rýchlosť v je konštantná	$v = \frac{dx}{dt}$	rýchlosti $v(t) = v_0(t_0)$	rýchlosť v sa mení lineárne s časom	$v = \frac{dx}{dt}$	rýchlosti $v(t) = v_0 + at$ (2.11)
zrýchlenie a je nulové	$a = \frac{dv}{dt}$	zrýchlenia $a = 0$	zrýchlenie a je konštantné	$a = \frac{dv}{dt}$	zrýchlenia $a(t) = a(t_0)$

Špeciálnym prípadom je **rovnomerne zrýchlený pohyb**, keď sa hmotný bod pohybuje s konštantným zrýchlením. V prípade pohybu po priamke je veľkosť aj smer vektora rýchlosti

konštantná (tab. 2.1). V prípade krivočiareho rovnomerne zrýchleného pohybu len veľkosť zrýchlenia $a = \text{konšt.}$

V prípade, keď je zrýchlenie čo do veľkosti konštantné, ale smer zrýchlenia je opačný ako smer vektora rýchlosti, niekedy ešte používame starší pojem **rovnomerne spomalený pohyb**.

Experimentálna časť

Rozbor apletu *Pohyb s konštantným zrýchlením*

Komunikačný prostriedok klienta: (www.walter-fendt.de/ph14sk/acceleration_sk.htm [1]).

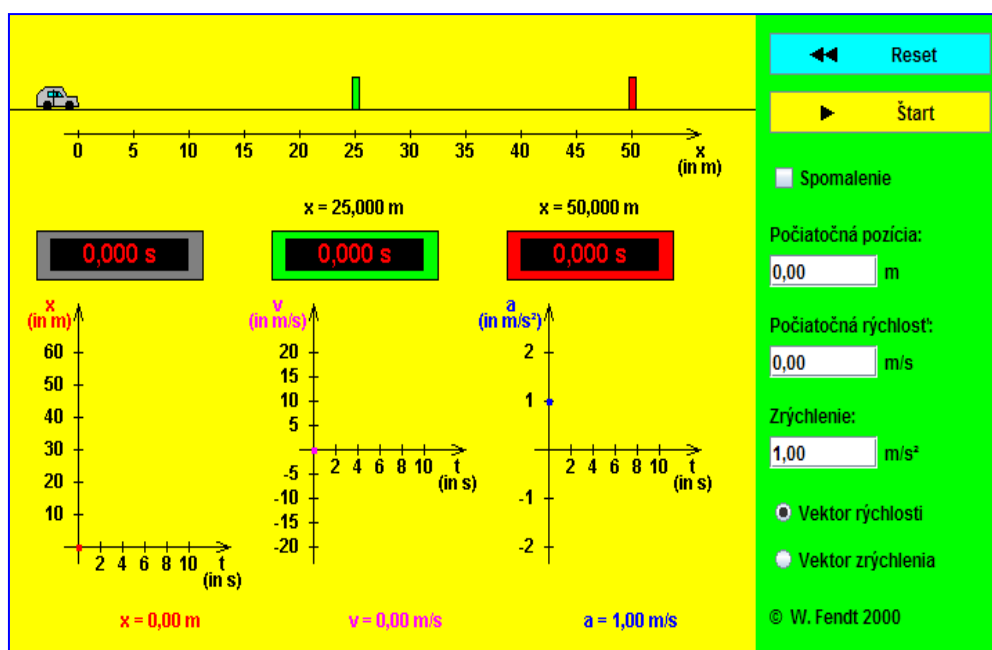
Prostredie apletu

Prostredie apletu *Pohyb s konštantným zrýchlením* (obr. 2.5) pozostáva z dvoch farebne odlišných oblastí.

V zelenej oblasti môžeme zadať začiatočné hodnoty – polohu, rýchlosť a zrýchlenie telesa (auta). Okrem toho sa v hornej časti nachádzajú tlačidlá: *start* na spustenie a *reset* na obnovenie apletu. Po spustení apletu ho možno pozastaviť (*pause*) alebo voľbou *spomalenie* desaťkrát spomaliť.

V dolnej časti zelenej oblasti si môžeme z ponuky vybrať, či sa v aplete bude zobrazovať vektor okamžitej rýchlosti alebo zrýchlenia.

V hornej časti žltej oblasti je znázornené auto, ktoré sa po spustení apletu pohybuje podľa nastavených parametrov, pričom mína dve farebné záružky (zelenú a červenú), ktorých polohu možno myšou meniť.



Obr. 2.5 Prostredie apletu *Pohyb s konštantným zrýchlením* [1]

Pod autom sú tri digitálne stopky – sivej, zelenej a červenej farby. Sivé ukazujú čas, ktorý prešiel od štartu auta, až do jeho zastavenia po kliknutí na tlačidlo *pause*. Len čo auto dosiahne zelenú, príp. červenú zarážku, zastavia sa farebne zodpovedajúce stopky. Pod stopkami sa v spodnej polovici zelenej plochy nachádzajú tri diagramy, ktoré graficky znázorňujú pohyb auta. Na prvom diagrame vidíme graf závislosti okamžitej polohy telesa x ako funkcia času t , na druhom graf závislosti okamžitej rýchlosti telesa v ako funkcia času t a na treťom graf závislosti zrýchlenia telesa a ako funkcia času t .

Overenie fyzikálnej správnosti apletu

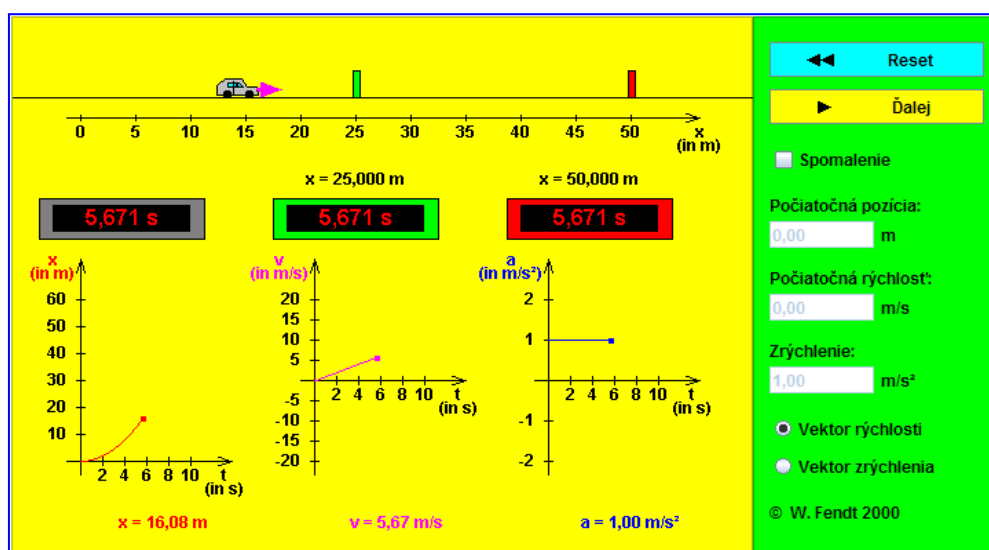
1) Na aplete sme si nastavili nasledujúce vstupné parametre:

začiatočná poloha: $x = 0$ m

začiatočná rýchlosť: $v = 0$ m.s⁻¹

zrýchlenie: $a = 1$ m.s⁻²

Zakliknutím sme označili, že pri pohybe auta sa bude zobrazovať vektor rýchlosti a kliknutím na tlačidlo *start* sme spustili aplet (obr. 2.6).



Obr. 2.6 Aplet *Pohyb s konštantným zrýchlením* [1] s nastavenými vstupnými parametrami $a = 1$ m.s⁻²

Výsledky merania a ich vyhodnotenie

a) Výpočet okamžitej polohy auta v čase $t = 1$ s:

Zápis:

$t = 1$ s

$a = 1$ m.s⁻²

$s = ?$

Riešenie:

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (1 \text{ s})^2$$

$$s = 0,5 \text{ m}$$

Odpoveď: V čase $t = 1 \text{ s}$, pri zrýchlení auta $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, prešlo auto rovnomerne zrýchleným pohybom $0,5 \text{ m}$.

b) Výpočet okamžitej rýchlosti pohybu auta v čase $t = 1 \text{ s}$:

$$a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$v = ?$$

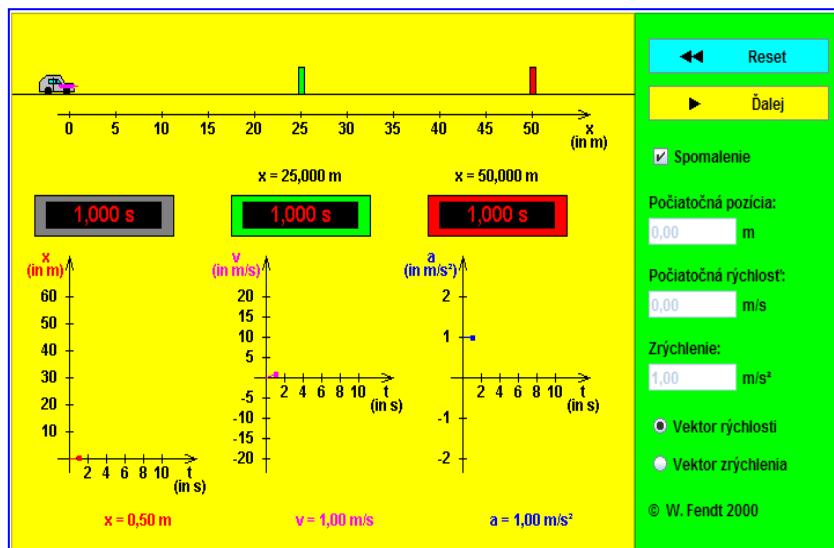
$$v = at$$

$$v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1 \text{ s}$$

$$v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Odpoveď: V čase $t = 1 \text{ s}$, pri zrýchlení auta $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, sa auto pohybovalo rýchlosťou veľkosti $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vypočítané hodnoty sme porovnali s hodnotami, ktoré poskytuje aplet (obr. 2.7).



Obr. 2.7 Aplet Pohyb auta s konštantným zrýchlením [1] $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ v čase $t = 1 \text{ s}$

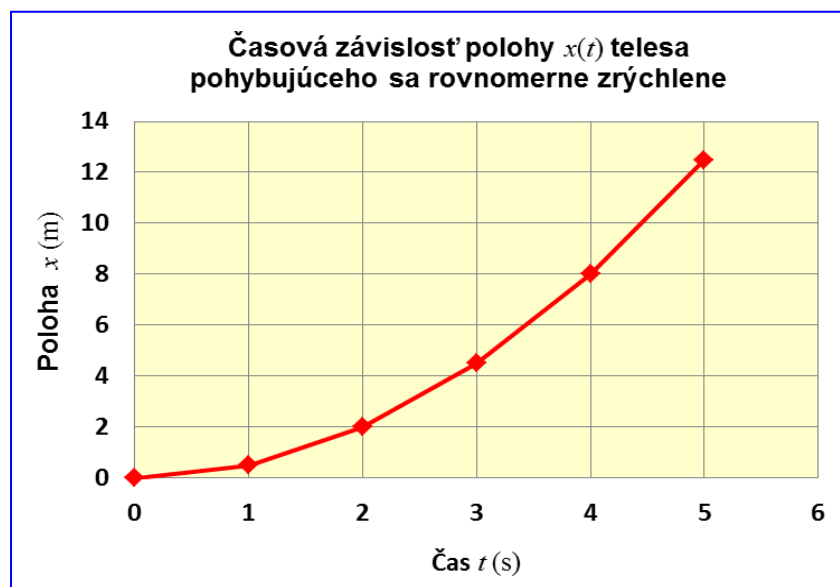
Postupne sme vypočítali okamžitú polohu a rýchlosť pohybu auta v čase $t = 2 \text{ s}$, $t = 3 \text{ s}$,

$t = 4$ s, $t = 5$ s a vypočítané hodnoty sme porovnali s hodnotami, ktoré poskytuje aplet (tab. 2.2).

Tabuľka 2.2 Namerané a vypočítané hodnoty kinematických veličín rovnomerne zrýchleného pohybu auta

t (s)	a (m.s ⁻²)	v (m.s ⁻¹)		s (m)	
		výpočet	aplet	výpočet	aplet
0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0,5	0,5
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	4,5	4,5
4	1	4	4	8	8
5	1	5	5	12,5	12,5

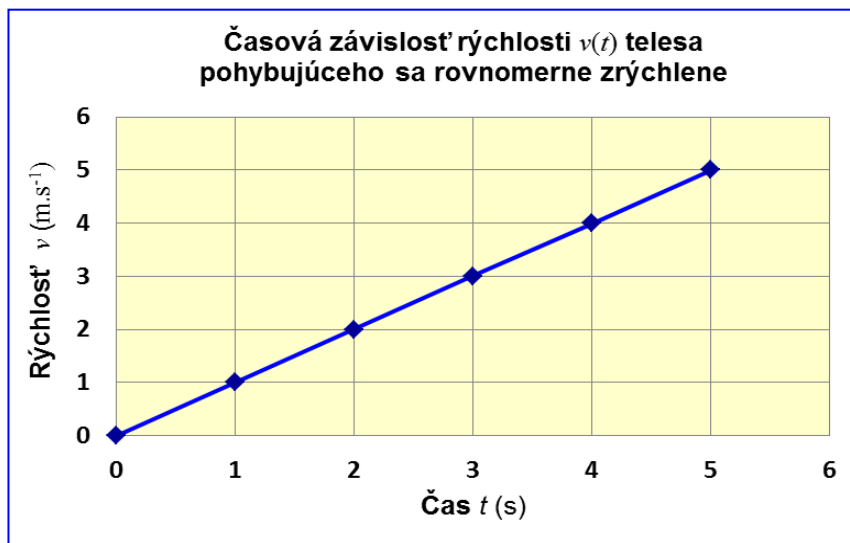
Z nameraných hodnôt (tab. 2.2) sme zostrojili graf závislosti polohy telesa ako funkcia času. Grafom je časť krivky, ktorá sa nazýva parabola (obr. 2.8). Vychádza zo začiatku súradnicového systému (lebo začiatočná poloha je 0 m).



Obr. 2.8 Časová závislosť polohy $x = x(t)$ telesa pohybujúceho sa rovnomerne zrýchlene

Z nameraných hodnôt (tab. 2.2) sme zostrojili graf závislosti rýchlosti telesa ako funkcia času. Grafom je časť priamky (obr. 2.9) vychádzajúca zo začiatku súradnicového

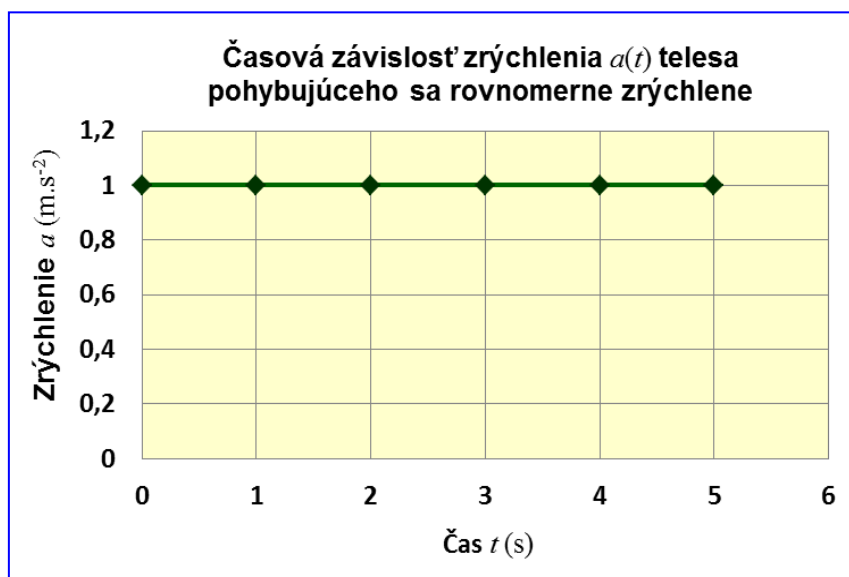
systemu (začiatková rýchlosť $v = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), rýchlosť sa mení priamoúmerne s časom – lineárna závislosť $v = kt$.



Obr. 2.9 Časová závislosť veľkosti rýchlosti $v = v(t)$ auta pohybujúceho sa rovnomerne zrýchlene

Následne sme zostrojili časovú závislosť zrýchlenia telesa pohybujúceho sa rovnomerne zrýchlene. Grafom je priamka rovnobežná s časovou osou (obr. 2.10) (z matematiky $y = k = \text{konšt.}$), keďže zrýchlenie je konštantné, potom $k = a$.

Vektor rýchlosti (ružový) sa menil, zväčšoval sa s pohybom auta, zatiaľ čo vektor zrýchlenia (modrý) svoju veľkosť nemenil, bol konštantný.



Obr. 2.10 Časová závislosť veľkosti zrýchlenia $a = a(t)$ auta pohybujúceho sa rovnomerne zrýchlene

2) Na aplete sme si nastavili nasledujúce vstupné parametre:

začiatočná poloha: $x = 0 \text{ m}$

začiatočná rýchlosť: $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$

zrýchlenie: $a = 1 \text{ m.s}^{-2}$

Zakliknutím sme označili, že pri pohybe auta sa bude zobrazovať vektor rýchlosti a kliknutím na tlačidlo *start* sme aplet spustili.

a) Výpočet okamžitej polohy auta v okamihu jeho prechodu zelenou zarážkou:

Zápis:

$$v_0 = 5,00 \text{ m.s}^{-1}$$

$$a = 1,00 \text{ m.s}^{-2}$$

$$t = 3,66 \text{ s}$$

$$s = ?$$

Riešenie:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$s = 5,00 \text{ m.s}^{-1} \cdot 3,66 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ m.s}^{-2} \cdot (3,66 \text{ s})^2$$

$$s = 24,997 \text{ m} \cong 25 \text{ m}$$

Odpoveď: V okamihu prechodu zelenou zarážkou prešlo auto od začiatku pohybu 25 m.

b) Výpočet okamžitej rýchlosti auta v okamihu jeho prechodu zelenou zarážkou:

Zápis:

$$v_0 = 5,00 \text{ m.s}^{-1}$$

$$a = 1,00 \text{ m.s}^{-2}$$

$$t = 3,66 \text{ s}$$

$$v = ?$$

Riešenie:

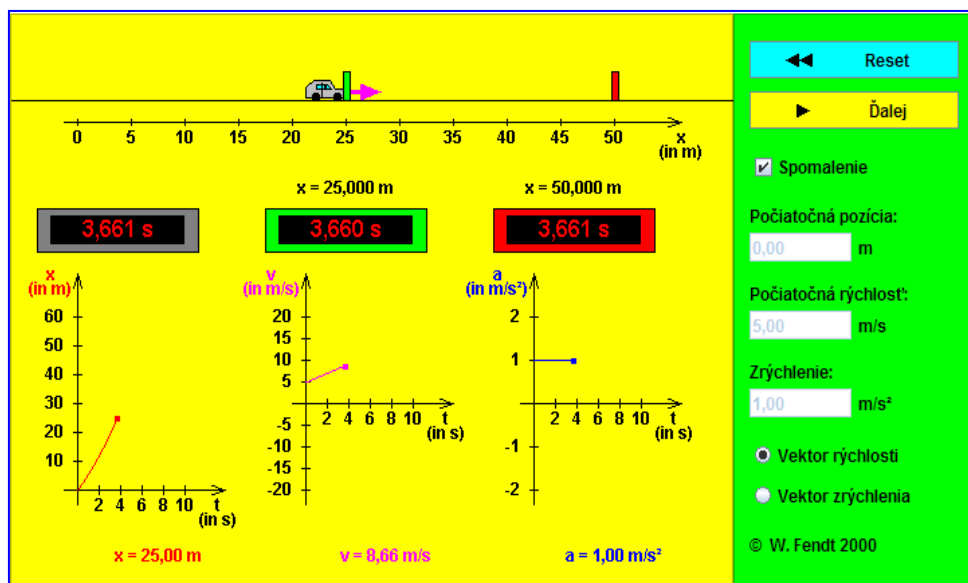
$$v = v_0 + at$$

$$v = 5,00 \text{ m.s}^{-1} + (1,00 \text{ m.s}^{-2} \cdot 3,66 \text{ s})$$

$$v = 8,66 \text{ m.s}^{-1}$$

Odpoveď: Okamžitá rýchlosť auta v okamihu jeho prechodu zelenou zarážkou je $8,66 \text{ m.s}^{-1}$.

Vypočítané hodnoty sme porovnali s hodnotami, ktoré poskytuje aplet (obr. 2.11).



Obr. 2.11 Hodnoty namerané apletom [1] po prechode auta zelenou zarážkou

3) Na aplete sme si nastavili nasledujúce parametre:

začiatočná poloha: $x = 30 \text{ m}$

začiatočná rýchlosť: $v_0 = 3 \text{ m.s}^{-1}$

zrýchlenie: $a = 2 \text{ m.s}^{-2}$

Zakliknutím sme označili, že pri pohybe auta sa bude zobrazovať vektor rýchlosti a kliknutím na tlačidlo *start* sme aplet spustili.

a) Výpočet okamžitej polohy auta v okamihu jeho prechodu červenou zarážkou:

Zápis:

$$v_0 = 3,00 \text{ m.s}^{-1}$$

$$s_0 = 30,00 \text{ m}$$

$$a = 2,00 \text{ m.s}^{-2}$$

$$t = 3,217 \text{ s}$$

$$v = ?$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Riešenie:

$$s = 30,00 \text{ m} + 3,00 \text{ m.s}^{-1} \cdot 3,217 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m.s}^{-2} \cdot (3,217 \text{ s})^2$$

$$s = 50,00 \text{ m}$$

Odpoveď: V okamihu prechodu červenou zarážkou prešlo auto od začiatku pohybu 50 m.

b) Výpočet okamžitej rýchlosti auta v okamihu jeho prechodu červenou záležkou:

Zápis:

$$v_0 = 3,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$s_0 = 30,00 \text{ m}$$

$$a = 2,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$t = 3,217 \text{ s}$$

$$v = ?$$

Riešenie:

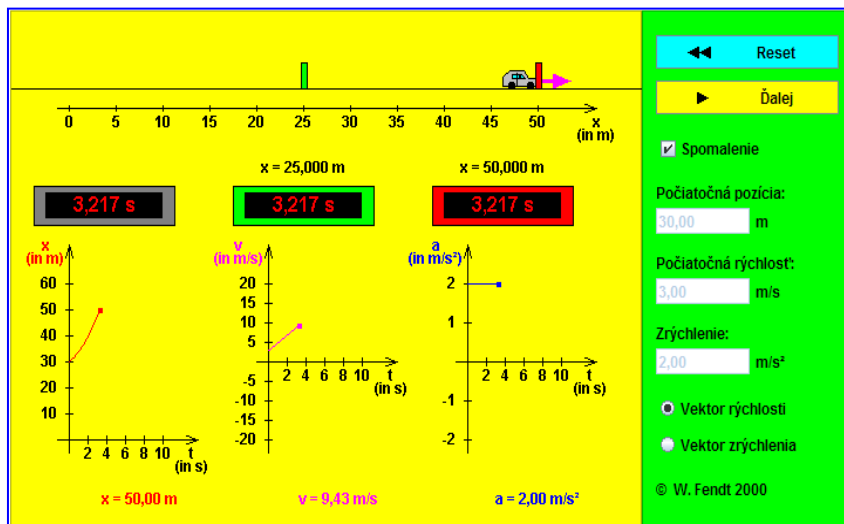
$$v = v_0 + at$$

$$v = 3,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + (2,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 3,217 \text{ s})$$

$$v = 9,43 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Odpoveď: Okamžitá rýchlosť auta v okamihu jeho prechodu červenou záležkou je $9,43 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Vypočítané hodnoty sme porovnali s hodnotami, ktoré poskytuje aplet (obr. 2.12).



Obr. 2.12 Hodnoty kinematických veličín určených z apletu [1] po prechode auta červenou záležkou

Vyhodnotenie výsledkov experimentovania s apletom

- Na základe porovnania vypočítaných výsledkov a výsledkov, ktoré poskytuje aplet, môžeme konštatovať, že aplet je fyzikálne správny.
- Spracovávaný aplet je jednoduchý a prehľadný, pracuje sa s ním veľmi dobre.
- Nie je náročný na čas, jedinou nutnosťou je mať počítač, aktívny Java program a pripojenie na internet.

- Môže byť veľmi dobrou pomôckou na základných, stredných alebo aj vysokých školách v základnom kurze fyziky.

Záver

Pohyb priamočiary s konštantným zrýchlením je pohyb, ktorý teleso koná po priamke za pôsobenia sily stálej veľkosti a smeru. Ide o pohyb, pri ktorom sa rýchlosť mení tak, že zrýchlenie telesa má konštantnú veľkosť i smer.

Pri experimentovaní s apletom *Pohyb s konštantným zrýchlením* [1], sme skúmali pohyb telesa pohybujúceho sa rovnomerne zrýchleným pohybom. Overili sme fyzikálnu správnosť apletu a skúmali sme vzťahy medzi veličinami opisujúcimi rovnomerne zrýchlený pohyb telesa.

Ako ďalšiu aktivitu s týmto apletom je možné diskutovať časové závislosti okamžitej polohy a rýchlosti ako funkcia času, ak zrýchlenie bude nulové. Vhodné je nakresliť grafické závislosti všetkých troch kinematických veličín v oboch prípadoch a vedieť tento pohyb identifikovať z grafov. Na záver môžeme konštatovať, že sme cieľ projektu splnili.

Literatúra

- [1] Fendt, W. *Pohyb s konštantným zrýchlením*, [online] (dostupné na: www.walter-fendt.de/ph14sk/acceleration_sk.htm, citované dňa 30. 9. 2013).
- [2] Ožvoldová, M., Červeň, I. *Úvod do vysokoškolskej fyziky*. STU v Bratislave ISBN 80-227-2114-X.
- [3] Feynman, P., R., Leighton, R., B., Sands, M., Feynmanovy prednášky z fyziky s riešenými príkladmi, Fragment, Praha, 2000. ISBN 80-7200-405-0.
- [4] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fyzika – Časť Mechanika – Vutium*, Brno, 2000. ISBN 80-214-1868-0.
- [5] Ožvoldová, M. *Mechanika hmotného bodu* In: *e-Fyzika I* [online] (dostupné na: http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/index.html, citované dňa 30. 9. 2013).
- [6] Ožvoldová, M. *Štúdium reálnych pohybov – kinematika. Návod k laboratórnej úlohe z mechaniky*. (interný materiál KF PdF TU v Trnave) a i.
(V kolážach sme využívali obrázky [online] voľne dostupné na: www.freefbpictures.com, citované dňa 30. 9. 2013 a obrázky z Galérie Smart Notebooku.)

3.1 Zákon sily – návrh spracovania riešenia projektu

Teoretická časť

Naším cieľom je, na základe experimentovania s apletom *Druhý Newtonov pohybový zákon*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/n2law_cz.htm [1]), overiť jeho fyzikálnu správnosť, vysvetliť II. Newtonov pohybový zákon a znázorniť sily, ktoré pôsobia na teleso pohybujúce sa po vodorovnej rovine so závažím.

So zrýchleným pohybom, ktorý sme študovali v projekte 1 sa stretávame tiež v **dynamike** (z gr. *dynamis* – sila, schopnosť) [2]. Je to časť mechaniky, ktorá skúma príčiny pohybu, t. j. skúma závislosť medzi pohybom telies a silami F_i , ktoré na ne pôsobia a vyvolávajú zmeny ich pohybového stavu.

Základnou otázkou dynamiky je, prečo určitý druh pohybu nastáva. Pri hľadaní odpovede na otázku: „Prečo sa telesá, hlavne tie, ktoré pozorujeme na oblohe, pohybujú a pod akými vplyvmi?“ I. Newton formuloval základné zákony dynamiky. Pohybovú rovnicu telesa, na ktoré pôsobia viaceré sily F_i vyjadruje II. Newtonov zákon – zákona sily [3], ktorý vyjadruje diferenciálnu rovnicu:

$$\sum_i F_i = \frac{dp}{dt}. \quad (3.1)$$

Táto rovnica vyjadruje účinok síl ostatných telies na hybnosť p daného telesa. V prípade podmienky konštantnej hmotnosti $m = \text{konšt.}$, prejde rovnica (3.1) na tvar [3]:

$$\sum_i F_i = ma, \quad (3.2)$$

kde a je zrýchlenie telesa. Pri použití rovnice (3.2) si musíme ujasniť, na aké teleso ju aplikujeme. Potom $\sum_i F_i = F$ je vektorový súčet (výslednica) všetkých síl, ktoré na teleso pôsobia a zhrňa len vonkajšie sily, t. j. tie, ktorými na teleso pôsobia iné telesá. Neobsahuje vnútorné sily, ktorými pôsobia jednotlivé časti telesa na seba navzájom [4].

Ak na teleso v inerciálnej sústave bude pôsobiť iné teleso silou, zmení sa pohybový stav daného telesa a teleso sa bude pohybovať so zrýchlením. Zrýchlenie telesa je priamo úmerné výslednej pôsobiacej sile F a nepriamo úmerné hmotnosti telesa m :

$$a = \frac{F}{m}. \quad (3.3)$$

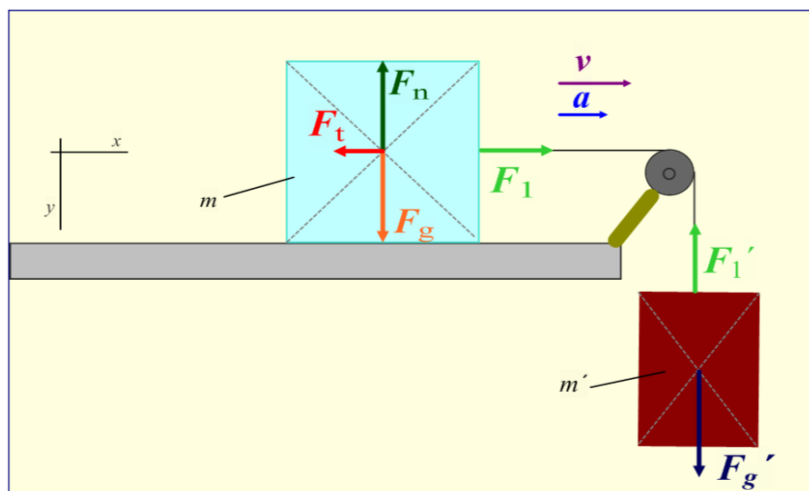
Zo zákona sily je zrejmé, že ak poznáme veľkosť zrýchlenia a , a sily F , ktorá toto zrýchlenie telesu udeľuje, môžeme vypočítať hmotnosť telesa. Teleso však pôsobením určitej sily mení svoju rýchlosť tým menej, čím je jeho hmotnosť väčšia. Hmotnosť telesa je teda mierou jeho zotrvačnosti a volá sa tiež **zotrvačná hmotnosť** [5].

Sila F je vektorová fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje kvantitatívne pôsobenie materiálnych objektov, resp. fyzikálnych polí. Jej jednotkou je newton, značka $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Tá istá sila udeľuje telesám s rôznou hmotnosťou rôzne zrýchlenie. Pri tom nezáleží na tom, či je teleso na začiatku pôsobenia sily v pokoji alebo v pohybe. Zrýchlenie má smer pôsobiacej sily.

Pohyb po vodorovnej rovine

Na obr. 3.2 je znázornený pohyb telesa hmotnosti m pohybujúceho sa po vodorovnej rovine v dôsledku spojenia so závažím hmotnosti m' cez kladku (predpokladáme, že kladka má zanedbateľnú hmotnosť, otáča sa bez trenia a vlákno a kladka sú nehmotné). F_g' je tiažová sila pôsobiaca na závažie hmotnosti m' , F_g je tiažová sila pôsobiaca na kváder hmotnosti m , F_t je sila šmykového trenia telesa hmotnosti m , F_n je kolmá tlaková sila od podložky. F_1 a F_1' sú sily napínajúce vlákno, pre ich veľkosť platí: $|F_1| = |F_1'|$.



Obr. 3.2 Pohyb telesa hmotnosti m pohybujúceho sa po vodorovnej rovine v dôsledku spojenia so závažím hmotnosti m' cez kladku

Najskôr si napíšeme rovnice pre každé teleso osobitne, pričom zvažíme voľbu súradnicovej sústavy, jednotlivé sily a ich súradnice.

1. teleso hmotnosti m :

$$\mathbf{F}_g = (0, mg)$$

$$F_t = (-\mu mg, 0)$$

$$F_n = (0, -mg)$$

$$F_1 = (F_1, 0)$$

2. teleso (závažie) hmotnosti m' :

$$F_1' = (0, -F_1)$$

$$F_g' = (0, m'g)$$

II. Newtonov pohybový zákon pre teleso pohybujúce sa v smere osi x :

$$\text{os } x: -\mu mg + F_1 = ma, \quad (3.4)$$

$$y: mg - mg = 0$$

II. Newtonov pohybový zákon pre teleso pohybujúce sa v smere osi y :

$$-F_1 + m'g = m'a. \quad (3.5)$$

Sčítaním rovnice (3.4) a (3.5), vylúčime silu napätia lana a dostaneme rovnicu pre zrýchlenie pohybu telesa:

$$-\mu mg + F_1 - F_1 + m'g = (m + m')a$$

$$g(m' - \mu m) = (m + m')a$$

$$a = \frac{g(m' - \mu m)}{m + m'}. \quad (3.6)$$

Experimentálna časť

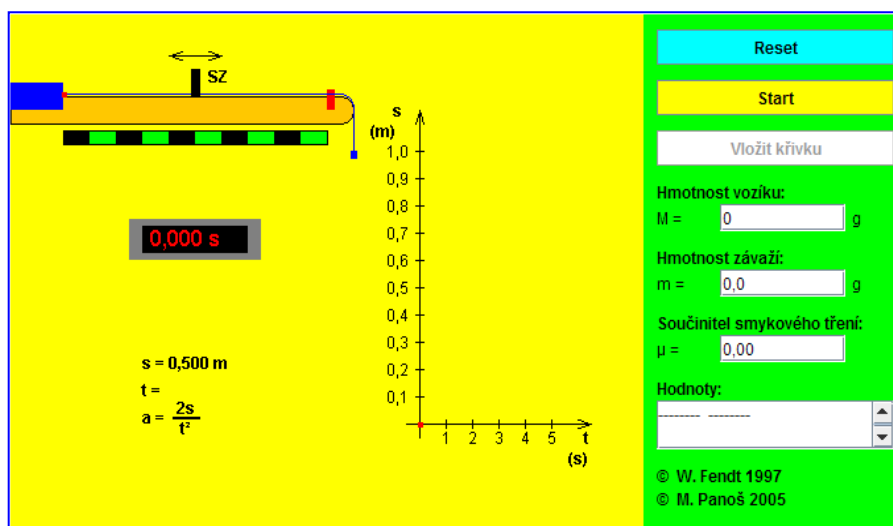
Rozbor apletu *Druhý Newtonov pohybový zákon*

Komunikačný prostriedok klienta: (http://www.walter-fendt.de/ph14cz/n2law_cz.htm [1]).

Prostredie apletu

Prostredie apletu *Druhý Newtonov pohybový zákon* (obr. 3.3) pozostáva z dvoch farebne odlišených oblastí.

V zelenom poli sa nachádzajú tri tlačidlá: *reset*, *start*, *vložiť krivku*. Pod nimi sú tri meniteľné biele okná: *hmotnosť vozíka*, *hmotnosť závažia* a *koeficient trenia*. Dolu pod nimi sa nachádza veľké nemeniteľné okno – *hodnoty*.



Obr. 3.3 Prostredie apletu *Druhý Newtonov pohybový zákon* [1]

Na žltom poli môžeme vidieť vzduchovú dráhu, vozík, závažie, svetelnú závoru (čierny obdĺžnik), zábranu (červený obdĺžnik), digitálne stopky. Pod nimi sa zobrazuje dráha a čas pohybu telesa. V dolnej časti žltého poľa sa nachádza zápis hodnoty prejdenej dráhy a času vozíka a vzťah na výpočet veľkosti jeho zrýchlenia, spolu s jeho vypočítanou hodnotou, ktorá sa zobrazí po skončení pohybu vozíka. V pravej časti žltého poľa sa nachádza graf závislosti okamžitej polohy s ako funkcia času $s = s(t)$, ktorá v tomto prípade určuje i prejdenú dráhu.

Pred začiatkom každého merania musíme nastaviť polohu svetelnej závoru (SZ), tá ovláda digitálne stopky. Priebeh experimentu vyjadruje graf funkčnej závislosti $s = s(t)$. Ako náhle minie vozík svetelnú závoru SZ, stopky sa zastavia a pod nimi sa ukáže prejdená dráha vozíka v základnej jednotke dĺžky – meter (m). V tomto momente sú hodnoty s a t pripravené na zapísanie do bieleho okna s názvom *hodnoty*. Tie zapíšeme stlačením tlačidla *zapísať hodnoty*. Zároveň sa tieto hodnoty vynesú do grafu. Následne posunieme svetelnú závoru na iné miesto a pokus zopakujeme. Po nameraní minimálne piatich hodnôt môžeme experimentálnymi hodnotami v grafe preložiť teoretickú krivku a to stlačením tlačidla *vložiť krivku*.

Fyzikálnu správnosť apletu overíme porovnaním hodnoty zrýchlenia z apletu a nami vypočítanej hodnoty dosadením do vzťahu (3.6).

Overenie fyzikálnej správnosti apletu

Na aplete sme si nastavili nasledujúce vstupné parametre:

hmotnosť vozíka: $m_v = 217 \text{ g}$

hmotnosť závažia: $m_z = 100 \text{ g}$

koeficient šmykového trenia $\mu = 0,363$

a kliknutím na tlačidlo *start* sme apolet spustili.

Výsledky merania a ich vyhodnotenie

Zápis:

$$m_v = 217 \text{ g} = 0,217 \text{ kg}$$

$$m_z = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}$$

$$\mu = 0,363$$

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$a = ?$$

Riešenie:

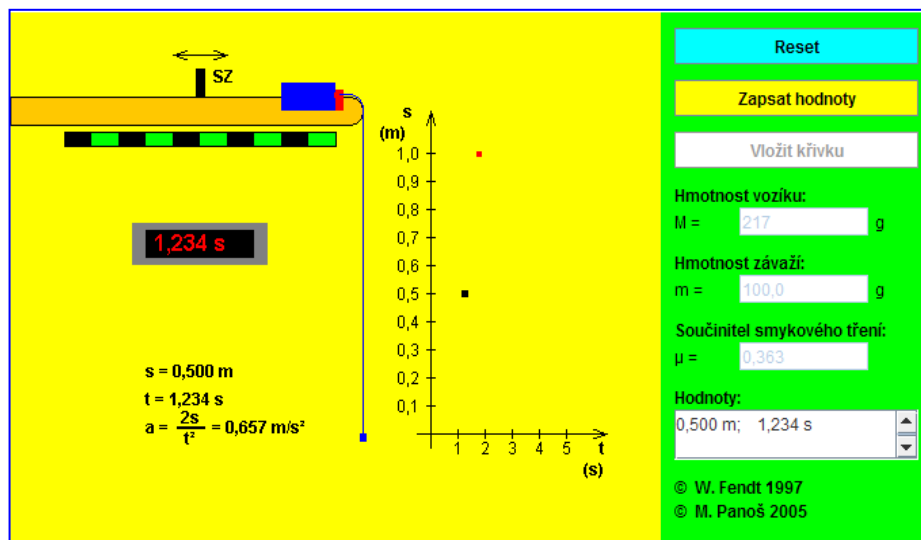
$$a = \frac{(m_z - \mu m_v)g}{m_z + m_v}$$

$$a = \frac{(0,100 \text{ kg} - 0,363 \cdot 0,217 \text{ kg}) \cdot 9,81 \text{ m.s}^{-2}}{0,100 \text{ kg} + 0,217 \text{ kg}}$$

$$a = 0,657 \text{ m.s}^{-2}$$

Odpoveď: Pri nastavených parametroch má vozík zrýchlenie $0,657 \text{ m.s}^{-2}$.

Vypočítanú hodnotu zrýchlenia sme porovnali s hodnotou, ktorá sa zobrazila na aplete (obr. 3.4).

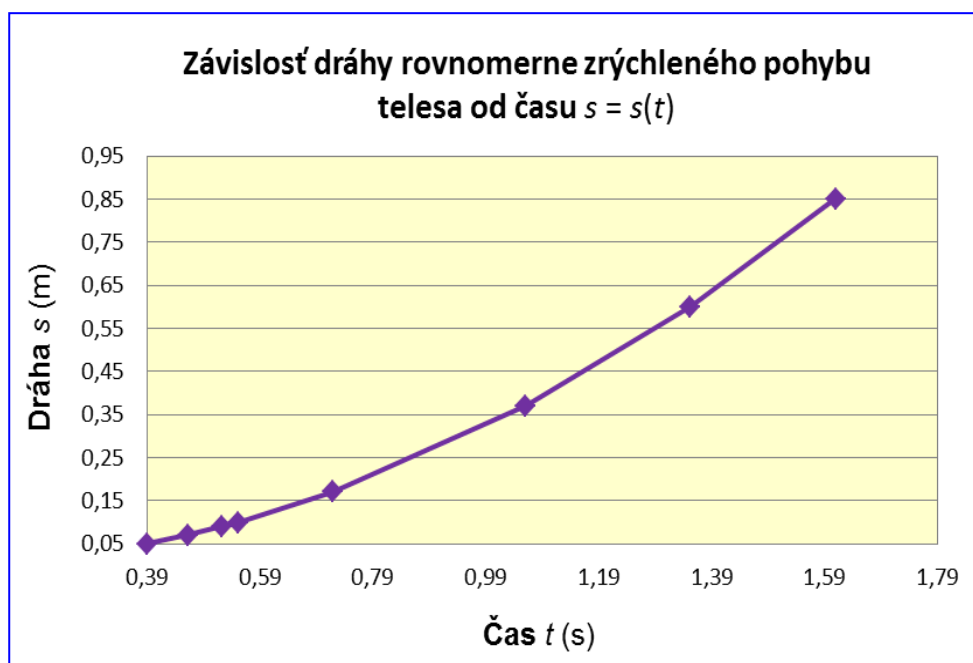


Obr. 3.4 Prostredie apletu *Druhý Newtonov pohybový zákon* [1] so zobrazenou hodnotou zrýchlenia vozíka

Na aplete sme postupne menili polohu svetelnej závory. Namerané hodnoty dráhy s a času t , ktoré poskytuje aplet, sme si zapísali do tabuľky 3.1 a zostrojili sme graf časovej závislosti dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu $s = s(t)$ (obr. 3.5).

Tabuľka 3.1 Hodnoty dráhy s a času t namerané na aplete [1]

Číslo merania	1	2	3	4	5	6	7	8
s/ m	0,05	0,07	0,09	0,10	0,17	0,37	0,60	0,85
t/ s	0,39	0,46	0,52	0,55	0,72	1,06	1,35	1,61

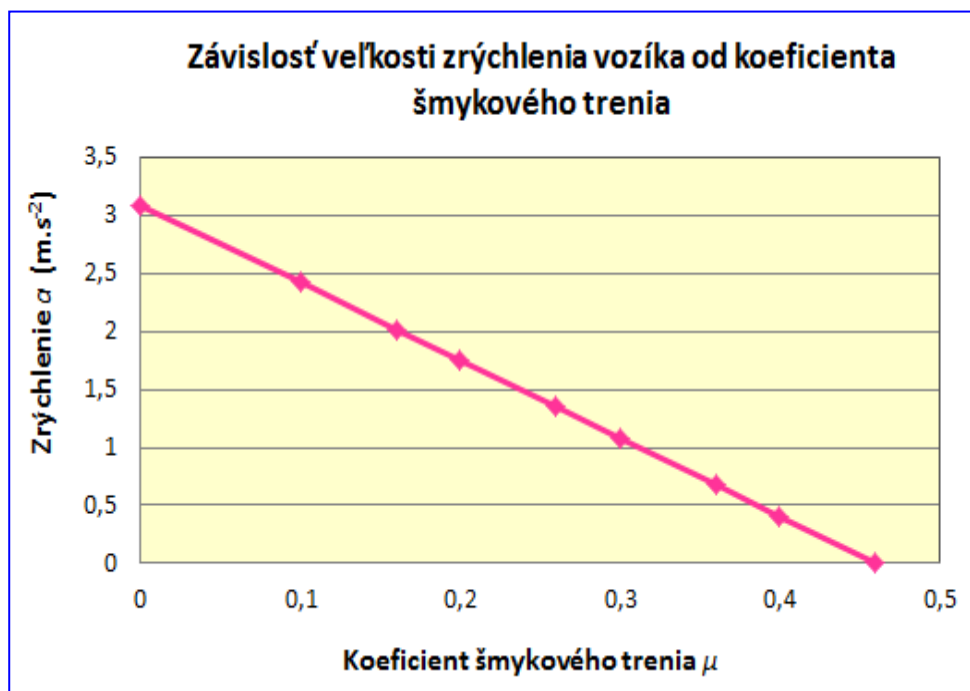


Obr. 3.5 Grafické znázornenie časovej závislosti dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu telesa $s = s(t)$

Postupnou zmenou koeficienta šmykového trenia v aplete (tab. 3.2) pri nastavených hodnotách hmotnosti vozíka ($m_v = 217 \text{ g}$) a závažia ($m_z = 100 \text{ g}$) sme experimentovaním dokázali, že grafom závislosti veľkosti zrýchlenia vozíka od veľkosti koeficienta šmykového trenia je priamka (obr. 3.6). Maximálna hodnota koeficienta šmykového trenia μ , pri ktorej sa vozík pri zvolených vstupných hodnotách ešte pohne je 0,460, zrýchlenie vtedy dosiahne veľkosť $0,006 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Tabuľka 3.2 Hodnoty veľkosti zrýchlenia vozíka a koeficienta šmykového trenia namerané na aplete [1]

Číslo merania	1	2	3	4	5	6	7	8	9
μ	0	0,100	0,160	0,200	0,260	0,300	0,360	0,400	0,460
$a/\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	3,095	2,423	2,020	1,752	1,349	1,080	0,677	0,408	0,006



Obr. 3.6 Grafické znázornenie závislosti veľkosti zrýchlenia vozíka od veľkosti koeficienta šmykového trenia

Vyhodnotenie výsledkov experimentovania s apletom

- Zrýchlenie vypočítané apletom sa zhoduje so zrýchlením vypočítaným na základe teórie dosadením do vzťahu (3.6), čím sme potvrdili fyzikálnu správnosť apletu.
- Ukázali sme, že grafom časovej závislosti dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu $s = s(t)$ je časť krivky, ktorá sa nazýva **parabola**.
- Daný aplet je jednoduchou pomôckou, ktorú možno využiť pri vysvetľovaní druhého Newtonovho pohybového zákona. Pracuje sa s ním veľmi jednoducho. Nie je náročný na čas, jedinou nutnosťou je mať počítač, aktívny Java program a pripojenie na internet.

- Aplet je fyzikálne správny. Svojím spracovaním je zaujímavý. Princíp merania sa dá veľmi rýchlo pochopiť.

Záver

Z II. Newtonova pohybového zákona – zákona sily vieme, že ak na teleso neustále pôsobí konštantná výsledná sila F , teleso sa pohybuje s konštantným zrýchlením a .

S využitím vzduchovej dráhy a ďalšieho príslušenstva (vozíka, lanka, závažia), v rozoberanom aplete *Druhý Newtonov pohybový zákon* [1], sme jednoducho takýto pohyb znázornili, vypočítali sme veľkosť zrýchlenia pohybujúceho sa telesa, overili sme fyzikálnu správnosť daného apletu a znázornili sme sily, ktoré pôsobia na teleso pohybujúce sa po vodorovnej rovine so závažím.

Pomocou apletu môžeme tiež skúmať vplyv trenia na pohyb telesa. Pre náročnejších môžeme využiť aplet i na skúmanie vplyvu trenia na zrýchlenie. Pre hodnoty hmotnosti vozíka ($m_v = 217$ g) a závažia ($m_z = 100$ g), ktoré sme použili vo výpočte, maximálna hodnota koeficienta šmykového trenia, pri ktorej sa vozík ešte pohne je 0,460.

Na záver môžeme konštatovať, že sme cieľ projektu splnili.

Literatúra

- [1] Fendt, W. *Druhý Newtonov pohybový zákon*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/n2law_cz.htm, citované dňa 30. 9. 2013).
- [2] Ožvoldová, M., Červeň, I. *Úvod do vysokoškolskej fyziky*. STU v Bratislave ISBN 80-227-2114-X.
- [3] Schauer, F. *Štúdium reálnych pohybov – dynamika. Návod k laboratórnej úlohe z mechaniky*. (interný materiál KF PdF TU v Trnave).
- [4] Holliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: *Fyzika, Část 1 Mechanika* VUTIUM, Prometheus. Brno ISBN 80-214-1868-0.
- [5] Feynman, P., R., Leighton, R., B., Sands, M., *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady*, Fragment, Praha, 2000. ISBN 80-7200-405-0.
- [6] Krempaský, J. a kol. *Učiteľ prírodných vied pre tretie tisícročie*. Bratislava: TYPI Universitatis Tyrnaviensis, spoločné pracovisko Trnavskej univerzity v Trnave a VEDY, vydavateľstva SAV, 2011. – ISBN 978-80-8082-440-2.

(V kolážach sme využívali obrázky [online] voľne dostupné na: www.freefbpictures.com, citované dňa 30. 9. 2013 a obrázky z Galérie Smart Notebooku.)

4 Zadanie projektu 3

Téma projektu: Pohyb telesa po naklonenej rovine

Cieľ: Na základe experimentovania s apletom *Naklonená rovina*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/inclplane_cz.htm [1]), overiť jeho fyzikálnu správnosť a preskúmať pohyb telesa po naklonenej rovine.

Motivácia: Sizyfos (po grécky *Sísyfos*, po latinsky *Sisyphus*) bol v gréckej mytológii hrdina, syn Aiola a jeho manželky Enarety, zakladateľ a prvý kráľ Korintu. Bol veľmi bystrý, pretože preštil gréckych bohov a dokonca aj smrť, musel za trest v podsvetí kotúľať do kopca balvan (obr. 4.1), ktorý sa pred vrcholom vždy zrútil späť. Jeho meno je symbol namáhavej, ale zbytočnej práce (tzv. sizyfovská práca).

Šikmý kopec slúžil Sizifovi ako naklonená rovina. Pri dvíhaní telesa po naklonenej rovine konáme takú istú prácu ako bez nej, prácu neušetříme, ale pôsobíme menšou silou po dlhšej dráhe.

Vedeli by ste uviesť niektoré spôsoby uplatnenia naklonenej roviny v praktickom živote?



Obr. 4.1 Motivačný obrázok k zadaniu projektu *Pohyb telesa po naklonenej rovine* (vlastná koláž)

Úlohy:

1. Overte fyzikálnu správnosť apletu: Fendt, W. *Naklonená rovina*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/inclplane_cz.htm [1]).
 2. Preskúmajte pohyb telesa po naklonenej rovine.
 3. Preskúmajte sily, ktoré pôsobia na teleso pohybujúce sa po naklonenej rovine.
 4. Objasnite problém trenia na naklonenej rovine.
 5. Uved'te, kde sa v bežnom živote môžete stretnúť s využitím naklonenej roviny.
- Čas vymedzený na projekt:** týždeň.

4.1 Pohyb telesa po naklonenej rovine – návrh spracovania riešenia projektu

Teoretická časť

Naším cieľom je, na základe experimentovania s fyzikálnym Java apletom *Naklonená rovina*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/inclplane_cz.htm [1]), overiť jeho fyzikálnu správnosť a preskúmať pohyb telesa po naklonenej rovine.

Naklonená rovina patrí medzi jednoduché stroje. Už v Babylonskej ríši i v starovekom Egypte využívali naklonenú rovinu pri stavaní chrámov, hrobiek vládcov, pyramíd a pod.

Podmienky rovnováhy na naklonenej rovine a ďalších jednoduchých strojoch vypracoval už Archimédés zo Syrakúz. Galileo Galilei využíval naklonenú rovinu pri určovaní tiažového zrýchlenia pri svojich pokusoch v Pise. V súčasnosti má naklonená rovina široké praktické uplatnenie (obr. 4.2), slúži napr. na premiestňovanie ťažkých nákladov smerom nahor i nadol, uľahčuje chôdzu alebo jazdu do výšky, používa sa aj na spúšťanie telies z kopca a pod.



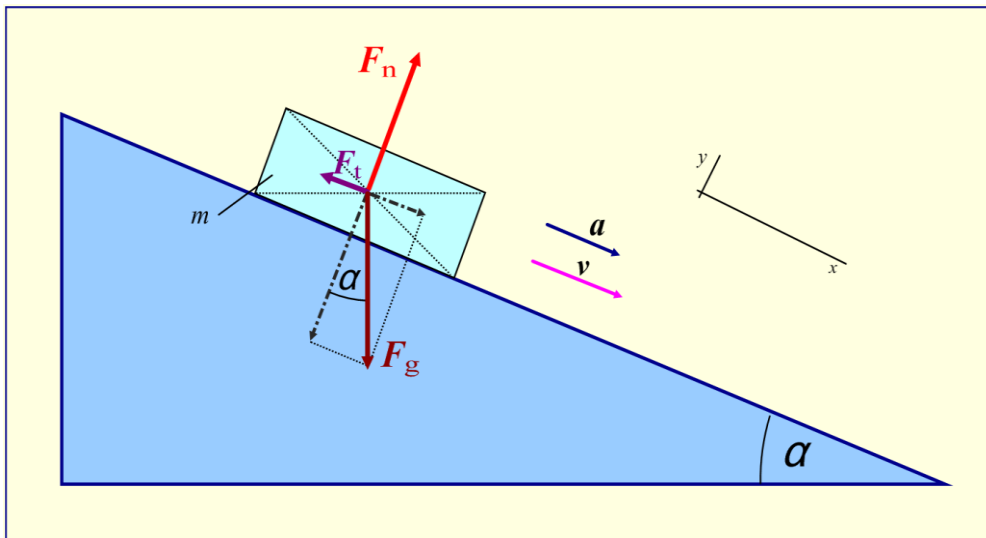
Obr. 4.2 Ukážky využitia naklonenej roviny v praktickom živote (vlastná koláž)

V mechanike sa naklonená rovina využíva napr.:

- na demonštráciu rozkladu tiažovej sily na jej zložky,
- na meranie tiažového zrýchlenia,

- na určovanie koeficienta šmykového trenia,
- na vysvetlenie pohybu telesa na naklonenej rovine,
- na demonštrovanie základných zákonov mechaniky.

Na kváder pohybujúci sa nadol (obr. 4.3) po naklonenej rovine v okamihu, keď sa práve začína pohybovať pôsobi: tiažová sila F_g , kolmá tlaková sila od podložky F_n a sila šmykového trenia F_t .



Obr. 4.3 Znárodnenie síl pôsobiacich na teleso pohybujúce sa po naklonenej rovine smerom nadol

Pre náš prípad na obr. 4.3 platí [3]:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}. \quad (4.1)$$

Po úprave do dvoch rovníc pre zložky všetkých vektorov do osí x a y dostaneme:

$$x: F_{g_x} + F_{t_x} + F_{n_x} = ma_x,$$

$$y: F_{g_y} + F_{t_y} + F_{n_y} = ma_y.$$

S uvážením smerových kosínusov k osi x a y potom dostaneme [2]:

$$F_g \cos(90^\circ - \alpha) + F_t \cos(180^\circ) + F_n \cos(90^\circ) = ma \cos(0),$$

$$F_g \cos(\alpha) + F_t \cos(90^\circ) + F_n \cos(0) = ma \cos(90^\circ),$$

po úprave:

$$F_g \sin \alpha - F_t = ma,$$

(4.2)

$$F_g \cos \alpha + F_n = 0. \quad (4.3)$$

Ak doplníme do rovnice (4.2) a (4.3) ešte rovnicu pre veľkosť trecej sily:

$$F_t = \mu F_n, \quad (4.4)$$

kde μ je koeficient šmykového trenia, dostaneme rovnicu pre zrýchlenie telesa pri jeho pohybe po naklonenej rovine:

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (4.5)$$

Zrýchlenie sa teda znižuje so zmeňujúcim sa uhlom sklonu naklonenej roviny α a v medznom prípade sklonu, pri ktorom sa teleso na naklonenej rovine pohybuje konštantnou rýchlosťou ($a = 0$), platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu \quad (4.6)$$

Trenie a trecia sila

V reálnych podmienkach pôsobí proti pohybu telies **trecia sila** F_t , ktorá vzniká v dotykovej ploche telies.

Podľa charakteru pohybu rozlišujeme tri základné druhy trenia:

- **pokojuvé (statické)** – vzniká medzi telesami, ktoré sa navzájom nepohybujú,
- **šmykové** – vzniká, keď sa jedno teleso šmýka po inom,
- **valivé** – vzniká, keď sa jedno teleso valí po druhom.

Pre tú istú dvojicu stýkajúcich sa plôch je pokojuvé trenie väčšie ako trenie v pohybe (tab. 4.1).

Tabuľka 4.1 Hodnoty koeficientu pokojuvého a šmykového trenia pre vybrané dvojice materiálu [4]

látka	μ_0 v pokoji	μ v pohybe
ocel na oceli	0,15	0,10
ocel na dreve	0,55	0,35
drevo na dreve	0,65	0,30
koža na kove	0,60	0,25
koža na dreve	0,47	0,27

Trenie má svoje kladné i záporné stránky.

Užitočné trenie zvyšujeme:

- poľadovica – posyp,

- atléti – tretry,
- futbalisti – kopačky,
- kamióny – reťaze atď.

Škodlivé trenie znižujeme:

- ložiská – namazanie,
- vrtanie zuba – chladenie,
- sústruženie súčiastok – chladenie,
- lyže – voskovanie atď.

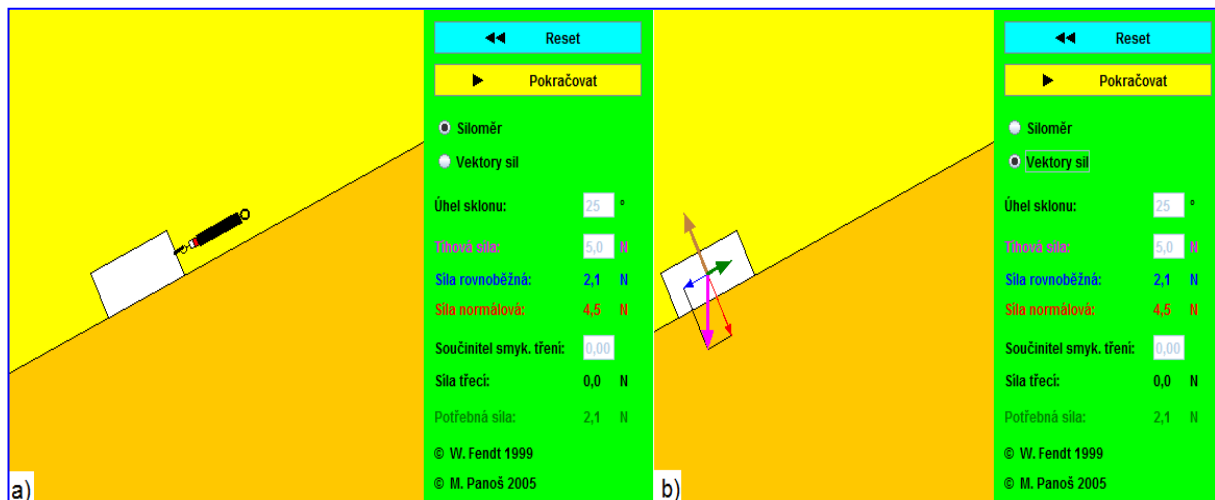
Experimentálna časť

Rozbor apletu *Naklonená rovina*

Komunikačný prostriedok klienta: (http://www.walter-fendt.de/ph14cz/inclplane_cz.htm [1]).

Prostredie apletu

Aplet *Naklonená rovina* (obr. 4.4) znázorňuje rovnomerný pohyb telesa po naklonenej rovine so zodpovedajúcou silou. Aplet pozostáva zo zelenej a žltej oblasti.



Obr. 4.4 Prostredie apletu *Naklonená rovina* a) kváder so silomerom, b) kváder so znázornením vektorov pôsobiacich síl [1]

V hornej časti zelenej plochy je tlačidlo *reset*, ktorým nastavíme aplet do začiatkovej pozície, v ktorej je kváder mimo obrazovky. Tlačidlom *start* môžeme pohyb kvádra po naklonenej rovine spustiť alebo zastaviť. V okamihu zastavenia sa na tomto tlačidle objaví nápis *pokračovať*, po jeho stlačení sa kváder uvedie opäť do pohybu.

Na zelenej ploche si môžeme zvoliť, či budeme pri pohybe kvádra po naklonenej rovine pozorovať sily, ktoré naň pôsobia alebo len silomer.

Farby zobrazených síl (tiažovej, rovnobežnej, normálovej) zodpovedajú farbám hodnôt na zelenom paneli. Uhol sklonu naklonenej roviny možno meniť v rozmedzí 0 až 90°, tiažovú silu v rozmedzí 0 až 10 N a koeficient šmykového trenia v rozmedzí 0 až 0,50. Aplet vypočíta veľkosti všetkých zodpovedajúcich síl.

Na žltom paneli je znázornená naklonená rovina, na ktorej sa po stlačení tlačidla *start* objaví biely kváder, ktorý sa po nej začne pohybovať.

Overenie fyzikálnej správnosti apletu

Na aplete sme si nastavili nasledujúce hodnoty: veľkosť tiažovej sily 5 N, koeficient šmykového trenia 0 a uhol sklonu naklonenej roviny 25°. Kliknutím na tlačidlo *start*, sme spustili aplet. Hodnoty veľkosti rovnobežnej sily F , normálovej sily F_n a sily potrebnej na zdvihnutie kvádra po naklonenej rovine F_p , namerané na aplete (obr. 4.5), sme porovnali s hodnotami, ktoré sme vypočítali.

Zápis:

$$F_g = 5 \text{ N}$$

$$\alpha = 25^\circ$$

$$F = ?$$

$$F_n = ?$$

$$F_p = ?$$

Riešenie:

$$F = mgsin\alpha$$

$$F = 5\text{N} \cdot \sin 25^\circ$$

$$F = 2,11 \text{ N} \cong 2,1 \text{ N}$$

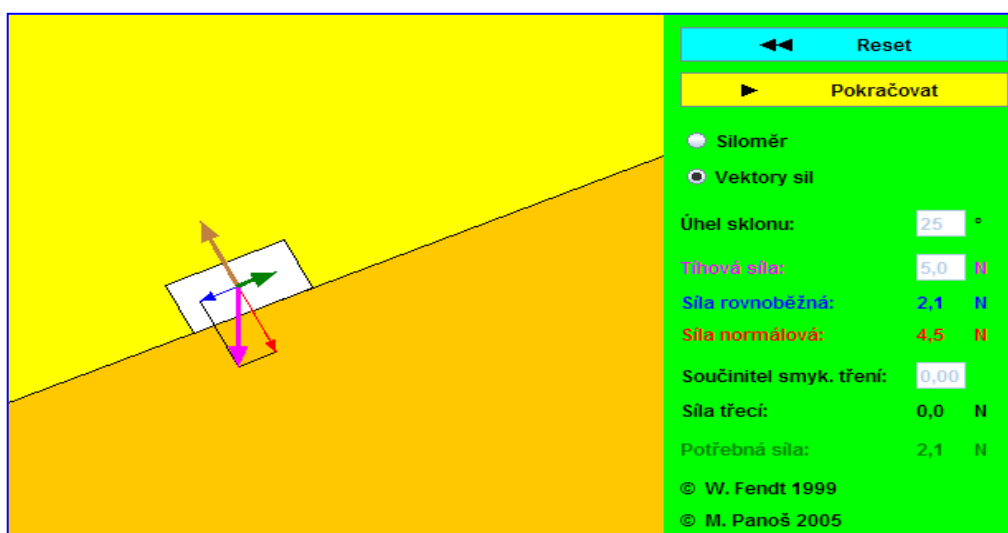
$$F_n = F_0 = mg\cos\alpha$$

$$F_n = F_0 = 5 \text{ N} \cdot \cos 25^\circ$$

$$F_n = F_0 = 4,53 \text{ N} \cong 4,5 \text{ N}$$

$$F_p = F \cong 2,1 \text{ N}$$

Odpoveď: Pri nastavených parametroch $F \cong 2,1 \text{ N}$, $F_n = F_0 \cong 4,5 \text{ N}$ a $F_p = F \cong 2,1 \text{ N}$.



Obr. 4.5 Prostredie apletu *Naklonená rovina* [1] s nastaveným uhlom sklonu 25° a $\mu = 0$

Uhol sklonu α sme postupne zvyšovali o 10° až po hodnotu 55° .

Hodnoty veľkosti F , F_n , a F_p , namerané na aplete, sme spolu s nami vypočítanými hodnotami zapísali do tabuľky 4.2 a porovnali.

Tabuľka 4.2 Hodnoty veľkosti F , F_n a F_p , namerané na aplete a vypočítané pri zmene veľkosti uhla sklonu naklonenej roviny

$\alpha / ^\circ$	25		35		45		55	
	výpočet	aplet	výpočet	aplet	výpočet	aplet	výpočet	aplet
F / N	2,1	2,1	2,9	2,9	3,5	3,5	4,1	4,1
F_n / N	4,5	4,5	4,1	4,1	3,5	3,5	2,9	2,9
F_p / N	2,1	2,1	2,9	2,9	3,5	3,5	4,1	4,1

Veľkosť sily potrebnej na zdvihnutie kvádra po naklonenej rovine sa s rastúcim uhlom sklonu naklonenej roviny priamoúmerne zväčšuje.

V ďalšom kroku sme na aplete zmenili hodnotu koeficienta šmykového trenia z 0 na 0,30 a postupovali sme rovnako, ako v predchádzajúcom prípade. Hodnoty veľkosti rovnobežnej sily F , normálovej sily F_n , trecej sily F_t a sily potrebnej na zdvihnutie kvádra po naklonenej rovine F_p , namerané na aplete (obr. 4.6), sme porovnali s hodnotami, ktoré sme vypočítali.

Zápis:

$$F_g = 5 \text{ N}$$

$$\alpha = 25^\circ$$

$$\mu = 0,30$$

$$F = ?$$

$$F_n = ?$$

$$F_p = ?$$

Riešenie:

$$F = mgsin\alpha$$

$$F = 5 \text{ N} \cdot \sin 25^\circ$$

$$F = 2,11 \text{ N} \cong 2,1 \text{ N}$$

$$F_n = F_0 = mg\cos\alpha$$

$$F_n = F_0 = 5 \text{ N} \cdot \cos 25^\circ$$

$$F_n = F_0 = 4,53 \text{ N} \cong 4,5 \text{ N}$$

$$F_t = \mu mg\cos\alpha$$

$$F_t = 0,30 \cdot 5 \text{ N} \cdot \cos 25^\circ$$

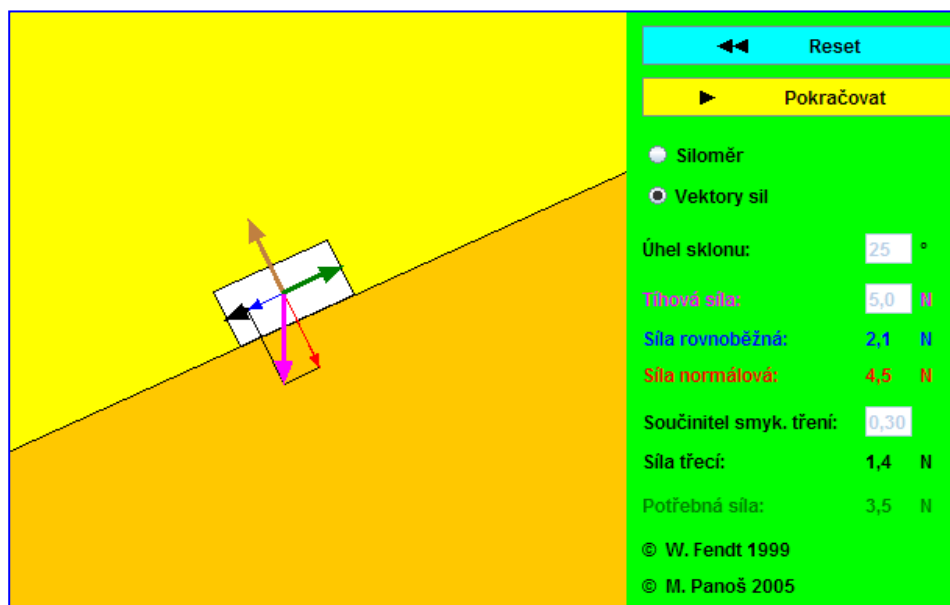
$$F_t = 1,36 \text{ N} \cong 1,4 \text{ N}$$

$$F_p = F + F_t$$

$$F_p = 2,11 \text{ N} + 1,36 \text{ N}$$

$$F_p = 3,47 \text{ N} \cong 3,5 \text{ N}$$

Odpoveď: Pri nastavených parametroch $F \cong 2,1 \text{ N}$, $F_n = F_0 \cong 4,5 \text{ N}$, $F_t \cong 1,4 \text{ N}$, $F_p \cong 3,5 \text{ N}$.



Obr. 4.9 Prostředie apletu *Naklonená rovina* [1] s nastaveným úhlem sklonu 25° a $\mu = 0,30$

Úhol sklonu α sme postupne zvyšovali od 10° až po hodnotu 55° .

Hodnoty veľkosti F , F_n , F_t a F_p , namerané na aplete, sme spolu s nami vypočítanými hodnotami zapísali do tabuľky 4.3 a porovnali.

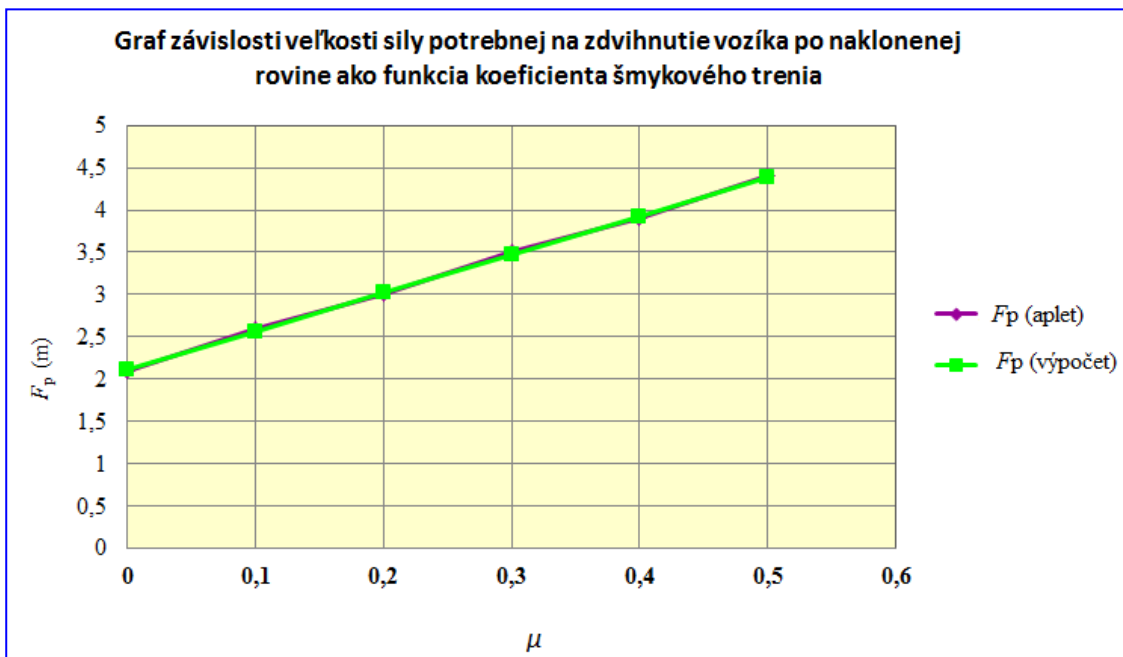
Tabuľka 4.3 Hodnoty veľkosti F , F_n , F_t a F_p , vypočítané a namerané na aplete pri zmene veľkosti uhla sklonu naklonenej roviny

$\alpha / ^\circ$	25		35		45		55	
	výpočet	aplet	výpočet	aplet	výpočet	aplet	výpočet	aplet
F / N	2,1	2,1	2,9	2,9	3,5	3,5	4,1	4,1
F_n / N	4,5	4,5	4,1	4,1	3,5	3,5	2,9	2,9
F_t / N	1,4	1,4	1,2	1,2	1,1	1,1	0,90	0,90
F_p / N	3,5	3,5	4,1	4,1	4,6	4,6	5,0	5,0

Ďalej sme pri nastavených vstupných hodnotách $\alpha = 25^\circ$ a $F_g = 5 \text{ N}$ postupne menili koeficient šmykového trenia v intervale $\mu = 0$ až $\mu = 0,50$ a skúmali, ako závisí veľkosť sily potrebnej na zdvihnutie vozíka po naklonenej rovine F_p , od veľkosti koeficienta šmykového trenia μ . Vypočítané hodnoty F_p i hodnoty F_p namerané na aplete sme zapísali do tabuľky 4.4 a zostrojili sme graf závislosti veľkosti sily potrebnej na zdvihnutie vozíka po naklonenej rovine ako funkcia koeficienta šmykového trenia (obr. 4.10). Maximálna hodnota koeficienta šmykového trenia μ , pri ktorej možno pri zadaných vstupných hodnotách na aplete zdvihnúť teleso po naklonenej rovine je 0,50.

Tabuľka 4.4 Hodnoty veľkosti F_t a F_p , vypočítané a namerané na aplete pri zmene veľkosti koeficienta šmykového trenia μ , ak $\alpha = 25^\circ$ a $F_g = 5 \text{ N}$

$\alpha / ^\circ$	25	25	25	25	25	25
F_g / N	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0
F / N	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
F_n / N	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5
μ	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
F_t / N (aplet)	0	0,50	0,90	1,4	1,8	2,3
F_t / N (výpočet)	0	0,45	0,91	1,4	1,8	2,3
F_p / N (aplet)	2,10	2,6	3,0	3,5	3,9	4,4
F_p / N (výpočet)	2,11	2,6	3,0	3,5	3,9	4,4



Obr. 4.10 Graf závislosti sily potrebnej na zdvihnutie vozíka po naklonenej rovine F_p ako funkcia koeficientu šmykového trenia μ

Ako z obr. 4.10 vyplýva, grafom závislosti veľkosti sily potrebnej na zdvihnutie vozíka po naklonenej rovine F_p ako funkcia koeficienta šmykového trenia μ je priamka.

Rozdiely medzi hodnotami F_p nameranými na aplete a vypočítanými hodnotami sú spôsobené zaokrúhľovaním hodnôt F_p apletom na jedno desatinné miesto.

Vyhodnotenie výsledkov experimentovania s apletom

- Aplet, s ktorým sme experimentovali, je spracovaný prehľadne a jeho ovládanie je jednoduché a intuitívne.
- Do apletu sa zadávajú tri údaje: uhol sklonu α ($^\circ$), veľkosť tiažovej sily F_g (N) a koeficient šmykového trenia μ .
- Vypočítali sme veľkosť rovnobežnej sily F , normálovej sily F_n , trecej sily F_t a sily potrebnej na zdvihnutie kvádra po naklonenej rovine F_p pri meniacom sa uhle sklonu naklonenej roviny pre prípad, keď $\mu = 0$ a $\mu = 0,30$. Vypočítané hodnoty sme porovnali s hodnotami, ktoré poskytuje aplet. Ten hodnoty zaokrúhľuje na jedno desatinné miesto.
- Hodnoty vypočítané apletom a nami vypočítané hodnoty sa rovnajú, preto môžeme konštatovať, že aplet je fyzikálne správny.

Záver

Prostredníctvom experimentovania s apletom *Naklonená rovina* [1] má študent možnosť vidieť pôsobiace sily na teleso a ich rozklad a uvedomovať si ich dôsledky. Rovnako má možnosť skúmať nielen fyzikálnu správnosť apletu, ale i vplyv zmeny parametrov apletu na pohyb telesa po naklonenej rovine.

Na záver môžeme konštatovať, že sme cieľ projektu splnili.

Literatúra

- [1] Fendt, W. *Naklonená rovina*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/inclplane_cz.htm, citované dňa 30. 9. 2013).
- [2] Schauer, F. *Štúdium reálnych pohybov – dynamika. Návod k laboratórnej úlohe z mechaniky*. (interný materiál KF PdF TU v Trnave).
- [3] Krempaský, J. a kol. *Učiteľ prírodných vied pre tretie tisícročie*. Bratislava: TYPI Universitatis Tyrnaviensis, spoločné pracovisko Trnavskej univerzity v Trnave a VEDY, vydavateľstva SAV, 2011. – ISBN 978-80-8082-440-2.
- [4] Bureš, J. *Součinitelé smykového tření*, [online] (dostupné na: <http://www.converter.cz/tabulky/smykove-treni.htm>, citované dňa 30. 9. 2013).

(V kolážach sme využívali obrázky [online] voľne dostupné na: www.freefbpictures.com, citované dňa 30. 9. 2013 a obrázky z Galérie Smart Notebooku.)

5 Zadanie projektu 4

Téma projektu: Rovnomerný pohyb po kružnici

Cieľ: Na základe experimentovania s apletom *Rovnomerný pohyb po kružnici*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/circmotion_cz.htm [1]), overiť jeho fyzikálnu správnosť, opísať rovnomerný pohyb po kružnici a skúmať vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.

Motivácia: Na obr. 5.1 je znázornený pohyb po kružnici, s ktorým sa môžeme v praxi stretnúť v rôznych oblastiach. Vedeli by ste uviesť aj ďalšie príklady zo života?



Obr. 5.1 Motivačný obrázok k zadaniu projektu *Rovnomerný pohyb po kružnici*
(vlastná koláž)

Úlohy:

1. Overte fyzikálnu správnosť apletu: Fendt, W. *Rovnomerný pohyb po kružnici*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/circmotion_cz.htm [1]).
2. Opíšte rovnomerný pohyb po kružnici.
3. Uveďte, resp. odvoďte vzťahy, ktorými možno rovnomerný pohyb po kružnici opísať.
4. Uveďte, aké sily pôsobia na hmotný bod pri jeho rovnomernom pohybe po kružnici.
5. Uveďte príklady rovnomerného pohybu po kružnici, s ktorými sa môžeme v bežnom živote stretnúť.

Čas vymedzený na projekt: týždeň.

5.1 Rovnomerný pohyb po kružnici – návrh spracovania riešenia projektu

Teoretická časť

Naším cieľom je, na základe experimentovania s apletom *Rovnomerný pohyb po kružnici*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/circmotion_cz.htm [1]), overiť jeho fyzikálnu správnosť, opísať rovnomerný pohyb po kružnici a skúmať vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.

Základným znakom krivočiarych pohybov je skutočnosť, že ich zrýchlenie je vždy nenulové. Pri krivočiarom pohybe je zvykom rozkladať zrýchlenie na zložku tangenciálnu (dotyčnicovú) a normálovú (dostredivú), pritom platí [2]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} - \frac{v^2}{r} \boldsymbol{\rho}, \quad (5.1)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor v smere dotyčnice trajektórie a $\boldsymbol{\rho}$ je jednotkový vektor spadajúci do smeru normály dotyčnice k dráhe pohybu v danom mieste s polomerom krivosti r , smerujúci od stredu krivosti k danému miestu. Pre veľkosť jednotlivých zložiek zrýchlenia a celkového zrýchlenia platí:

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad (5.2)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \quad (5.3)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}. \quad (5.4)$$

Najjednoduchším krivočiarym pohybom je pohyb po kružnici. Uhlová rýchlosť $\boldsymbol{\omega}$ a uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\varepsilon}$ pohybujúceho sa bodu po kružnici sú definované vzťahmi:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}, \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\alpha}}{dt^2}, \quad (5.6)$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ je polohový vektor, ktorého veľkosť je daná veľkosťou uhla opísaného príslušným polohovým vektorom \mathbf{r} pohybujúceho sa bodu. Smer vektora $\boldsymbol{\alpha}$ je kolmý na rovinu uhla a smeruje na tú stranu, z ktorej sa vytváranie uhla javí proti pohybu hodinových ručičiek. Jednotkou uhlovej rýchlosti je ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$). Jednotkou uhlového zrýchlenia je ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$).

Ak ide o rovinný krivočiary pohyb, možno písať: $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$; $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$. V takom prípade vektory α , ε , ω spadajú do tej istej priamky, kolmej na rovinu pohybu.

Uhlová rýchlosť súvisí s obvodovou rýchlosťou pohybujúceho sa bodu vzťahom:

$$v = r\omega, \quad (5.7)$$

kde r je príslušný polomer krivosti. Z uvedeného vzťahu pre rovinný krivočiary pohyb ďalej vyplýva:

$$a_t = r\varepsilon. \quad (5.8)$$

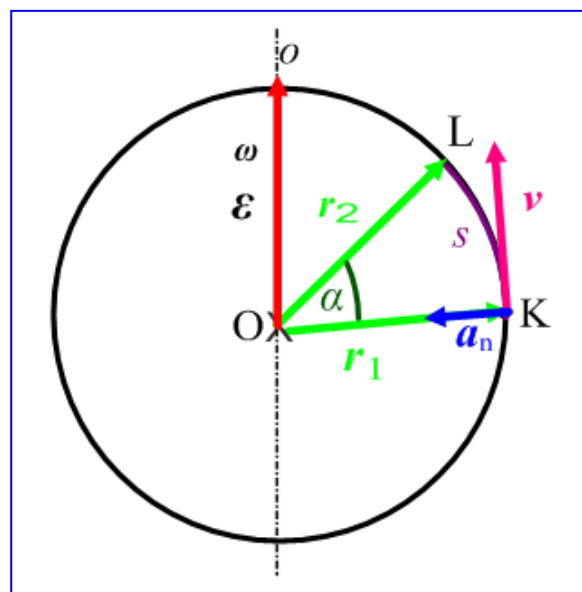
Pre hodnotu obvodovej rýchlosti možno aj pri krivočiarom pohybe písať vzťah:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (5.9)$$

kde s je dĺžka dráhy pohybu.

Špeciálnym prípadom krivočiareho pohybu je pohyb po kružnici (obr. 5.2), ktorý môže byť [3]:

- *všeobecný (nerovnomerný) pohyb po kružnici* – vektor rýchlosti a zrýchlenia sa istým spôsobom s časom menia a ich zmena je určená predpismi: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$;
- *rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici* – veľkosť vektora rýchlosti sa mení priamo úmerne s časom, veľkosť vektora zrýchlenia je konštantná;
- *rovnomerný pohyb po kružnici* – veľkosť vektora rýchlosti sa nemení (rýchlosť je konštantná).



Obr. 5.2 Pohyb po kružnici s charakterizáciou základných veličín

Rovnomerný pohyb po kružnici sa vyznačuje konštantnou uhlovou rýchlosťou. Preto

$$|\omega| = \omega = \text{konšt.}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{a}$$

$$a = \int \omega dt = \omega t + \alpha_0, \quad (5.10)$$

kde α_0 je uhol, ktorý zvierá polohový vektor pohybujúceho sa bodu vzhľadom na stred kružnice v čase $t = 0$ s určitým, za základ zvoleným smerom polohového vektora. Zvyčajne volíme $\alpha_0 = 0$. Vektor uhlovej rýchlosti ω nemení svoj smer, na rozdiel od vektora rýchlosti, ktorý mení smer $v \neq \text{konšt.}$ a v prípade pohybu po kružnici je vždy kolmý na polohový vektor hmotného bodu (obr. 5.2). Vektor uhlovej rýchlosti je kolmý na rovinu kružnice a smeruje na tú stranu, z ktorej sa pohyb javí v kladnom smere (obr. 5.2).

Periódou T rovnomerného pohybu po kružnici nazývame čas, za ktorý bod raz obehne kružnicu. Platí:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.11)$$

Jednotkou periódy je sekunda (s).

Namiesto periódy môžeme pohyb po kružnici charakterizovať frekvenciou f , čo je prevrátená hodnota periódy:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (5.12)$$

Frekvencia určuje počet kružníc, ktoré teleso prejde za jednotku času. Jednotkou frekvencie je herz (Hz), platí: $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Sily pôsobiace pri rovnomernom pohybe po kružnici

Centralizované zrýchlenie je vyvolané dostredivou silou F_d , ktorej smer je do stredu kružnice a ktorej veľkosť sa nemení.

Z 2. Newtonovho pohybového zákona pre veľkosť dostredivej sily vyplýva vzťah:

$$F_d = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r}, \quad (5.13)$$

kde m je hmotnosť hmotného bodu, ω je veľkosť uhlovej rýchlosti, v je veľkosť obvodovej rýchlosti, r je polomer kružnice, po ktorej sa hmotný bod pohybuje.

Rovnomerný pohyb po kružnici v reálnom živote koná napr. rotujúci brúsny kotúč, kolotoč, rotujúca gramofónová platňa alebo CD pri prehrávaní, list na otáčajúcom sa kolese (obr. 5.3) a i.



Obr. 5.3 Rovnomerný pohyb telies po kružnici v reálnom živote (vlastná koláž)

Rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici sa vyznačuje konštantným uhlovým zrýchlením, čo do veľkosti i smeru, takže platí $\varepsilon = \text{konšt.}$;

$$\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + \omega_0, \quad (5.14)$$

$$\alpha = \int \omega dt = \int (\varepsilon t + \omega_0) dt = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \alpha_0, \quad (5.15)$$

kde α_0 má analogický význam ako predtým a ω_0 je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$.

Dostredivá sila má svoju reakciu v odstredivej zotrvačnej sile F_o , ktorej veľkosť je rovnaká ako veľkosť dostredivej sily, ale pôsobí smerom od stredu kružnice, po ktorej sa hmotný bod pohybuje.

Experimentálna časť

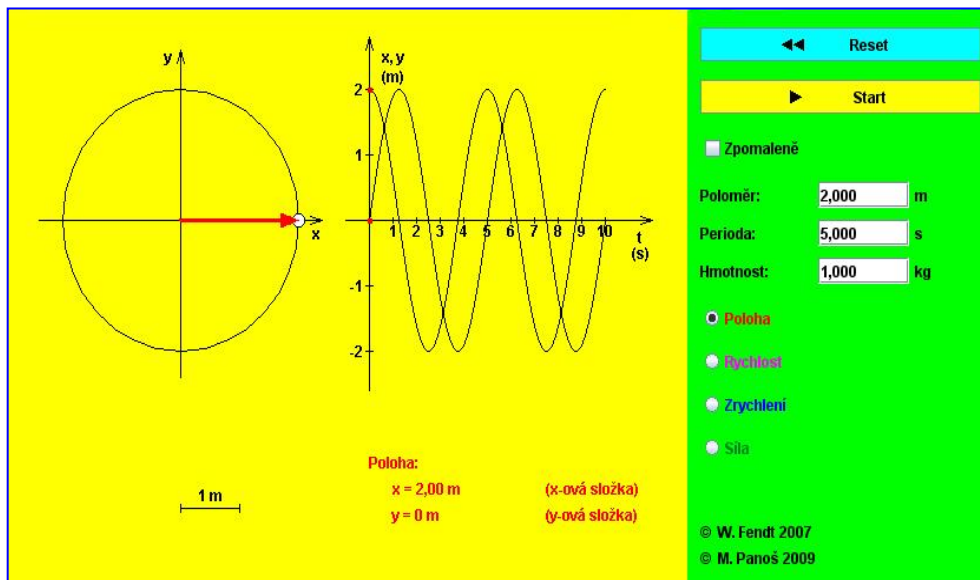
Rozbor apletu *Rovnomerný pohyb po kružnici*

Komunikačný prostriedok klienta: (http://www.walter-fendt.de/ph14cz/circmotion_cz.htm

[1]).

Prostredie apletu

Fyzikálny Java aplet (obr. 5.4) simuluje rovnomerný pohyb telesa po kružnici. Pozostáva z dvoch farebných oblastí. Na hornej pravej strane sa nachádza tlačidlo *reset*, ktorým nastavíme aplet do začiatkovej pozície.



Obr. 5.4 Prostredie apletu *Rovnomerný pohyb po kružnici* [1]

Tlačidlom *start* môžeme aplet spustiť a v priebehu jeho činnosti aj pozastaviť. Voľbou *zpomaleně*, spomalíme pohyb telesa 10-krát. Pomocou troch vstupných polí môžeme meniť polomer kružnice, po ktorej sa teleso pohybuje, periódu pohybu a hmotnosť telesa. V dolnej časti zeleného panela sú štyri prepínače, ktorými môžeme zvoliť zobrazovanie jednej zo štyroch veličín (poloha, rýchlosť, zrýchlenie, sila) na pracovnej ploche apletu pri pohybe telesa po kružnici. Priemetom rovnomerného otáčavého pohybu na priemer kružnice, po ktorej otáčavý pohyb prebieha, vzniká harmonický pohyb.

Polohový vektor (červená farba) má začiatok v strede otáčania (stred systému súradníc) a opisuje polohu pohybujúceho sa telesa.

Vektor rýchlosti (fialová farba) má smer dotýčnice k trajektórii (kružnici) a je teda kolmý na polomer.

Vektor zrýchlenia (modrá farba) smeruje do stredu, nepredstavuje však zväčšenie alebo zmenšenie veľkosti rýchlosti, ale zmenu vektora rýchlosti.

Rovnako to platí aj pre silu (zelená farba), ktorá pôsobí na pohybujúce sa teleso. Ako autori simulácie uvádzajú, vektory zrýchlenia i sily nepredstavujú v aplete zväčšenie alebo zmenšenie veľkosti rýchlosti, ale zmenu vektora rýchlosti.

Na žltej oblasti sa znázorňuje časová závislosť okamžitej polohy (súradnice), rýchlosti, zrýchlenia a pôsobiacej sily.

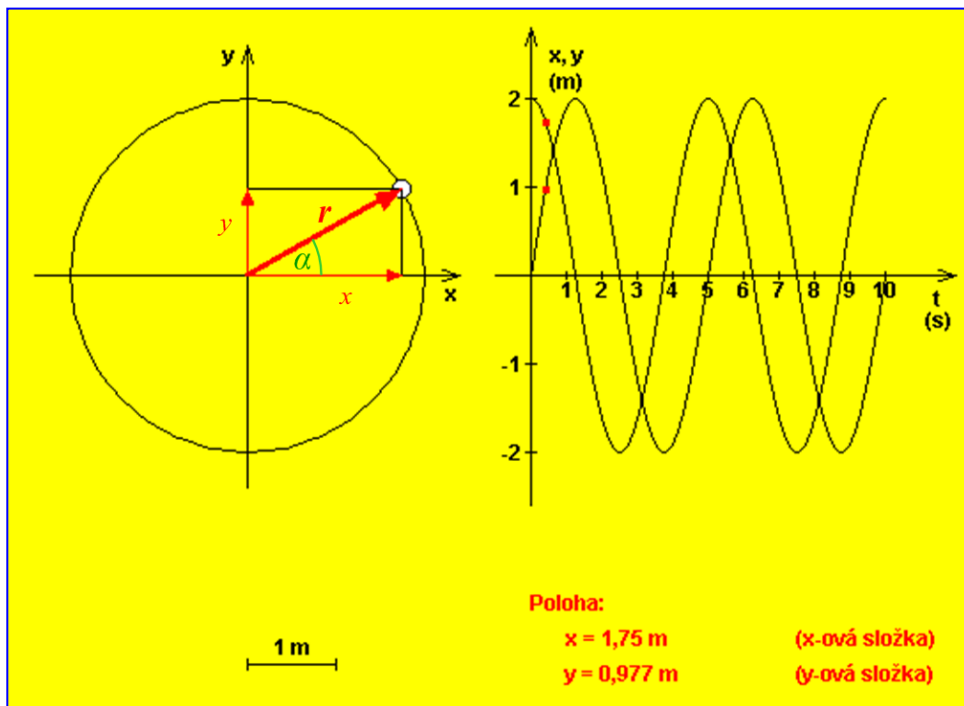
Ak urobíme pravouhlý priemet polohového vektora – sprievodiča polohy hmotného bodu do jednotlivých osí, potom pre súradnicu x podľa obr. 5.5. platí:

$$x = r \cos \alpha = r \cos(\omega t) \quad (5.16)$$

a pre súradnicu y platí:

$$y = r \sin \alpha = r \sin(\omega t), \quad (5.17)$$

kde ω je uhlová rýchlosť bodu pri pohybe po kružnici.



Obr. 5.5 Pravouhlý priemet polohového vektora – sprievodiča polohy hmotného bodu do jednotlivých osí

Umocnením rovníc (5.16) a (5.17) a ich sčítaním:

$$x^2 + y^2 = (r \cos \omega t)^2 + (r \sin \omega t)^2 = r^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = r^2,$$

dostaneme rovnicu kružnice:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (5.18)$$

Overenie fyzikálnej správnosti apletu

Na aplete sme si najskôr nastavili začiatočné hodnoty fyzikálnych veličín a z ponuky zobrazovaných vektorov sme si kliknutím vybrali tú, ktorú sme práve chceli pozorovať. Pri experimentovaní sme postupne menili veľkosť T , r , a m rovnomerného pohybu telesa po kružnici.

a) Zmena veľkosti periódy T rovnomerného pohybu telesa po kružnici

Výpočtom sme overili:

- **v meraní 1** veľkosť uhlovej ω a obvodovej rýchlosti v telesa pohybujúceho sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.6);
- **v meraní 2** veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia a_n telesa pohybujúceho sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.7);
- **v meraní 3** veľkosť dostredivej sily F_d , ktorá pôsobí na teleso pohybujúce sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.8).

Zápis:

$$r = 1 \text{ m,}$$

$$T = 1 \text{ s,}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\omega = ?$$

$$v = ?$$

$$a_n = ?$$

$$F_d = ?$$

Meranie 1

Riešenie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{1\text{s}} = 6,28 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$v = \omega r = 6,28 \text{ rad.s}^{-1} \cdot 1\text{m} = 6,28 \text{ m.s}^{-1}$$

Odpoveď: Pri zvolených vstupných parametroch má uhlová rýchlosť telesa pohybujúceho sa po kružnici veľkosť $6,28 \text{ rad.s}^{-1}$ a jeho obvodová rýchlosť má veľkosť $6,28 \text{ m.s}^{-1}$

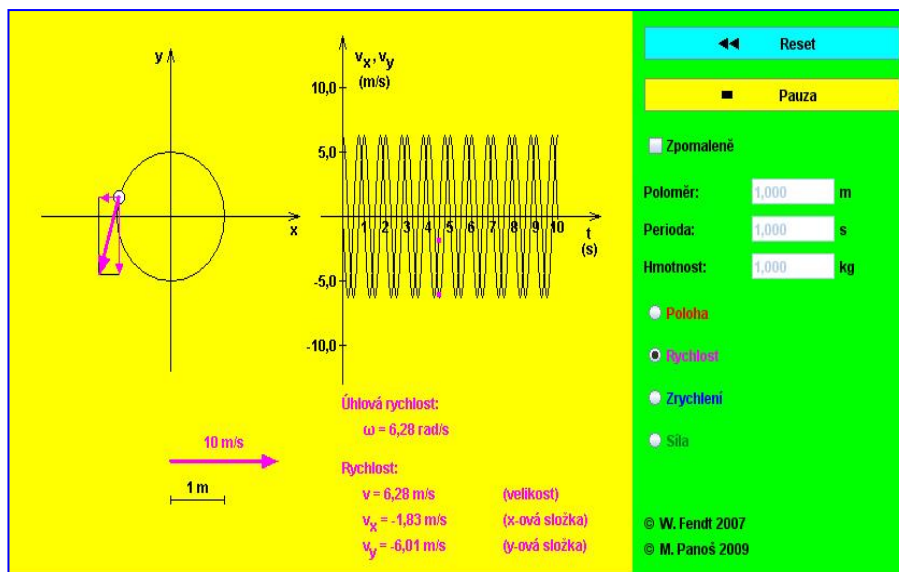
Výpočtom môžeme dokázať, že veľkosť vektora obvodovej rýchlosti na aplete, sa rovná odmocnине súčtu kvadrátov súradníc vektora obvodovej rýchlosti v_x a v_y :

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (5.19)$$

Dosadením hodnôt súradníc v_x a v_y z apletu (obr. 5.5) do vzťahu (5.19) dostaneme:

$$v = \sqrt{(-1,83 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + (-6,01 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}$$

$$v = 6,28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$



Obr. 5.6 Veľkosť uhlovej a obvodovej rýchlosti telesa vypočítané apletom [1] pri zvolených vstupných parametroch v meraní 1

Meranie 2

Riešenie:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (6,28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 \cdot 1 \text{ m} = 39,44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Odpoveď: Dostredivé (normálové) zrýchlenie telesa, ktoré koná rovnomerný pohyb po kružnici, má pri uvedených vstupných parametroch veľkosť $39,44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

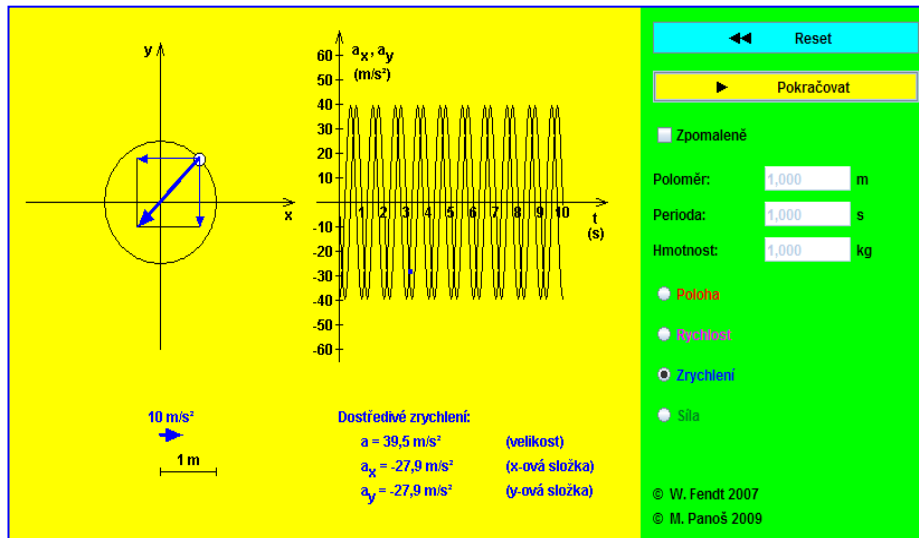
Výpočtom môžeme dokázať, že veľkosť vektora dostredivého zrýchlenia na aplete sa rovná odmocnине súčtu kvadrátov súradníc vektora dostredivého zrýchlenia a_x a a_y :

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (5.20)$$

Dosadením hodnôt súradníc a_x a a_y z apletu (obr. 5.6) do vzťahu (5.20) dostaneme:

$$a = \sqrt{(-27,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})^2 + (-27,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})^2}$$

$$a = 39,456558 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cong 39,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$



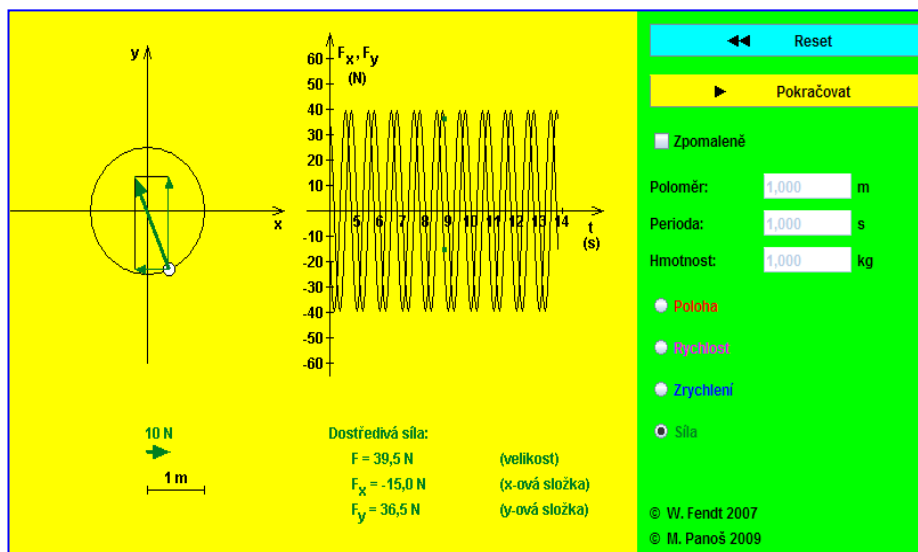
Obr. 5.7 Veľkosť dostredivého (normálového) zrychlenia telesa vypočítané apletom [1] pri zvolených vstupných parametroch v meraní 2

Meranie 3

Riešenie:

$$F_d = m \frac{v^2}{r} = 1 \text{ kg} \frac{(6,28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{1 \text{ m}} = 39,44 \text{ N}$$

Odpoveď: Na teleso pohybujúce sa po kružnici rovnomerným pohybom pôsobí pri uvedených vstupných parametroch dostredivá sila veľkosti 39,44 N.



Obr. 5.8 Veľkosť dostredivej sily, ktorá pôsobí na teleso vypočítaná apletom [1]

pri zvolených vstupných parametroch v meraní 3

Výpočtom môžeme dokázať, že veľkosť vektora dostredivej sily na aplete sa rovná odmocnine súčtu kvadrátov súradníc vektora dostredivej sily F_x a F_y :

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} . \quad (5.21)$$

Dosadením hodnôt súradníc F_x a F_y z apletu (obr. 5.7) do vzťahu (5.21) dostaneme:

$$F = \sqrt{(-15 \text{ N})^2 + (-36,5 \text{ N})^2}$$

$$F = 39,462 \text{ N} \cong 39,5 \text{ N}$$

Pri overovaní fyzikálnej správnosti apletu sme ďalej postupovali tak, že sme menili periódu rovnomerného pohybu telesa po kružnici a následne sme vypočítali veľkosť uhlovej ω a obvodovej v rýchlosti telesa, veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia telesa a_n a veľkosť dostredivej sily, ktorá pôsobí na pohybujúce sa teleso. Vypočítané hodnoty jednotlivých fyzikálnych veličín sme spolu s hodnotami, ktoré vypočítal aplet zapísali do tabuliek 5.1 a 5.2 a porovnali.

Tabuľka 5.1 Hodnoty veľkosti ω a v pri zmene periódy T rovnomerného pohybu telesa po kružnici

Polomer $r / (\text{m})$	Periódka $T / (\text{s})$	Hmotnosť $m / (\text{kg})$	Uhlová rýchlosť $\omega / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$		Rýchlosť $v / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	
			výpočet	aplet	výpočet	aplet
1	1	1	6,28	6,28	6,28	6,28
1	2	1	3,14	3,14	3,14	3,14
1	3	1	2,09	2,09	2,09	2,09
1	4	1	1,57	1,57	1,57	1,57

Tabuľka 5.2 Hodnoty veľkosti a_n a F_d pri zmene periódy T rovnomerného pohybu telesa po kružnici

Polomer $r / (\text{m})$	Periódá $T / (\text{s})$	Hmotnosť $m / (\text{kg})$	Zrýchlenie $a / (\text{m.s}^{-2})$		Sila $F / (\text{N})$	
			výpočet	aplet	výpočet	aplet
1	1	1	39,44	39,50	39,44	39,50
1	2	1	9,85	9,87	9,85	9,87
1	3	1	4,37	4,39	4,37	4,39
1	4	1	2,46	2,47	2,46	2,47

b) Zmena veľkosti polomeru kružnice, po ktorej sa pohybuje teleso rovnomerným pohybom

Výpočtom sme overili:

- **v meraní 4** veľkosť uhlovej ω a obvodovej rýchlosti v telesa pohybujúceho sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.9);
- **v meraní 5** veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia a_n telesa pohybujúceho sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.10);
- **v meraní 6** veľkosť dostredivej sily F_d , ktorá pôsobí na teleso pohybujúce sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.11).

Zápis:

$$r = 2 \text{ m}$$

$$T = 1 \text{ s}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\omega = ?$$

$$v = ?$$

$$a_n = ?$$

$$F_d = ?$$

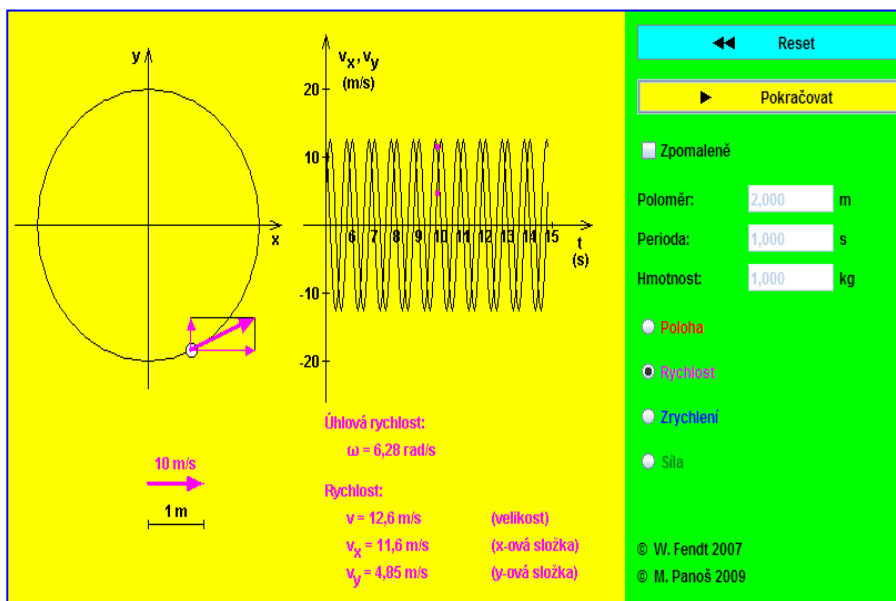
Meranie 4

Riešenie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{1\text{s}} = 6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = \omega r = 6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 2 \text{ m} = 12,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Odpoveď: Pri zvolených vstupných parametroch má uhlová rýchlosť telesa pohybujúceho sa po kružnici veľkosť $6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a jeho obvodová rýchlosť má veľkosť $12,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



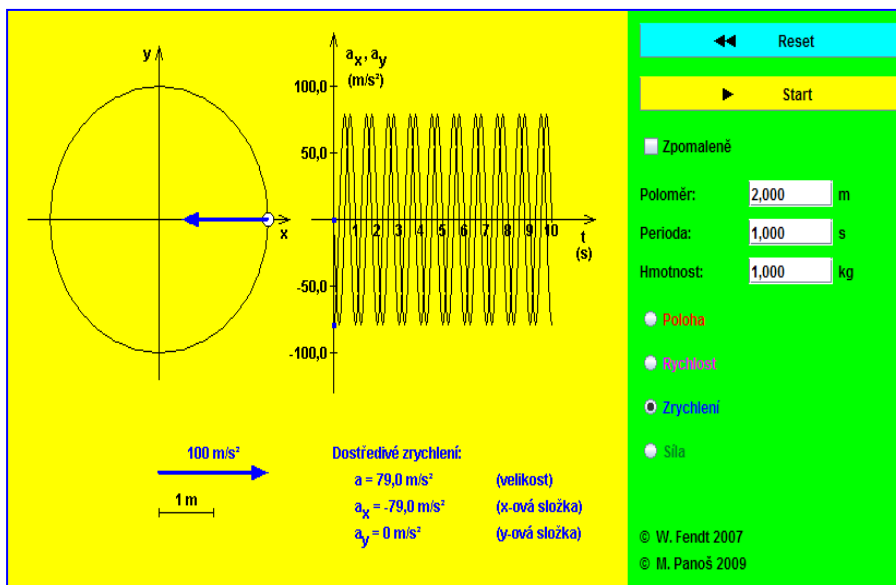
Obr. 5.9 Veľkosť uhlovej a obvodovej rýchlosti telesa vypočítané apletom [1] pri zvolených vstupných parametroch v meraní 4

Meranie 5

Riešenie:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot 2 \text{ m} = 78,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Odpoveď: Dostredivé (normálové) zrýchlenie telesa, ktoré koná rovnomerný pohyb po kružnici, má pri uvedených vstupných parametroch veľkosť $78,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



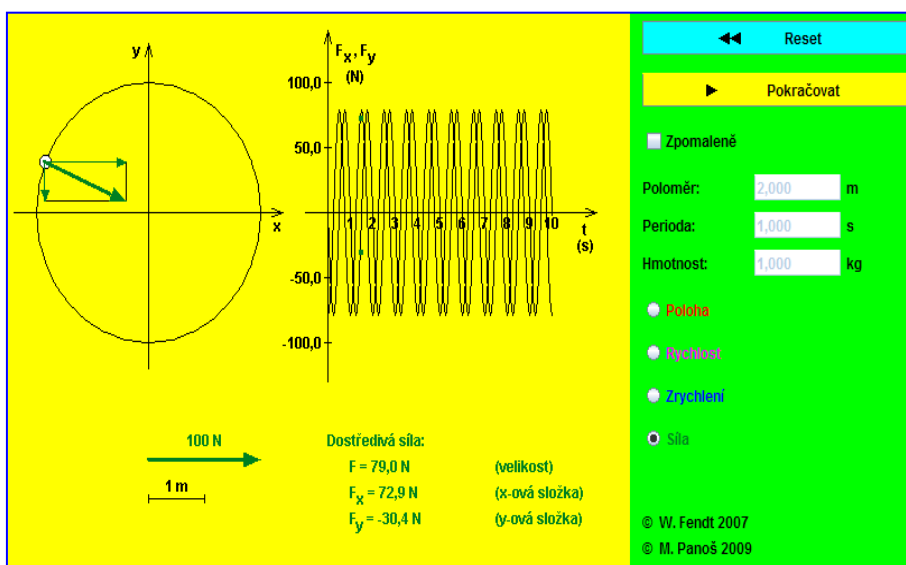
Obr. 5.10 Veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia telesa vypočítané apletom [1] pri zvolených vstupných parametroch v meraní 5

Meranie 6

Riešenie:

$$F_d = m \frac{v^2}{r} = 1 \text{ kg} \frac{(12,56 \text{ m.s}^{-1})^2}{2 \text{ m}} = 78,88 \text{ N}$$

Odpoveď: Na teleso pohybujúce sa po kružnici rovnomerným pohybom pôsobí pri uvedených vstupných parametroch dostredivá sila veľkosti 78,88 N.



Obr. 5.11 Veľkosť dostredivej sily, ktorá pôsobí na teleso vypočítaná apletom [1]

pri zvolených vstupných parametroch v meraní 6

Pri overovaní fyzikálnej správnosti apletu sme ďalej postupovali tak, ako v predchádzajúcich meraniach tzn., že sme menili periódu rovnomerného pohybu telesa po kružnici a následne sme vypočítali veľkosť uhlovej ω a obvodovej v rýchlosti telesa, veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia telesa a_n a veľkosť dostredivej sily F_d , ktorá pôsobí na pohybujúce sa teleso. Vypočítané hodnoty jednotlivých fyzikálnych veličín sme spolu s hodnotami, ktoré vypočítal aplet zapísali do tabuliek 5.3 a 5.4 a porovnali.

Tabuľka 5.3 Hodnoty veľkosti ω a v rovnomerného pohybu telesa po kružnici pri zmene polomeru r kružnice

Polomer $r / (\text{m})$	Periódna $T / (\text{s})$	Hmotnosť $m / (\text{kg})$	Uhlová rýchlosť $\omega / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$		Rýchlosť $v / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	
			výpočet	aplet	výpočet	aplet
1	1	1	6,28	6,28	6,28	6,28
2	1	1	6,28	6,28	12,56	12,60
3	1	1	6,28	6,28	18,84	18,80
4	1	1	6,28	6,28	25,12	25,10

Tabuľka 5.4 Hodnoty veľkosti a_n a F_d rovnomerného pohybu telesa po kružnici pri zmene polomeru r kružnice

Polome r $r / (\text{m})$	Periódna $T / (\text{s})$	Hmotnosť $m / (\text{kg})$	Zrýchlenie $a / (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$		Sila $F / (\text{N})$	
			výpočet	aplet	výpočet	aplet
1	1	1	39,44	39,50	39,44	39,50
2	1	1	78,88	79,0	78,88	79,0
3	1	1	118,31	118	118,31	118
4	1	1	157,75	158	157,75	158

c) Zmena veľkosti hmotnosti telesa pohybujúceho sa rovnomerným pohybom po kružnici

Výpočtom sme overili:

- **v meraní 7** veľkosť uhlovej ω a obvodovej rýchlosti v telesa pohybujúceho sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.12);
- **v meraní 8** veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia a_n telesa pohybujúceho sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.13);
- **v meraní 9** veľkosť dostredivej sily F_d , ktorá pôsobí na teleso pohybujúce sa rovnomerným pohybom po kružnici a výsledky sme porovnali s hodnotami, ktoré vypočítal aplet (Obr. 5.14).

Zápis:

$$r = 1 \text{ m}$$

$$T = 1 \text{ s}$$

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$\omega = ?$$

$$v = ?$$

$$a_n = ?$$

$$F_d = ?$$

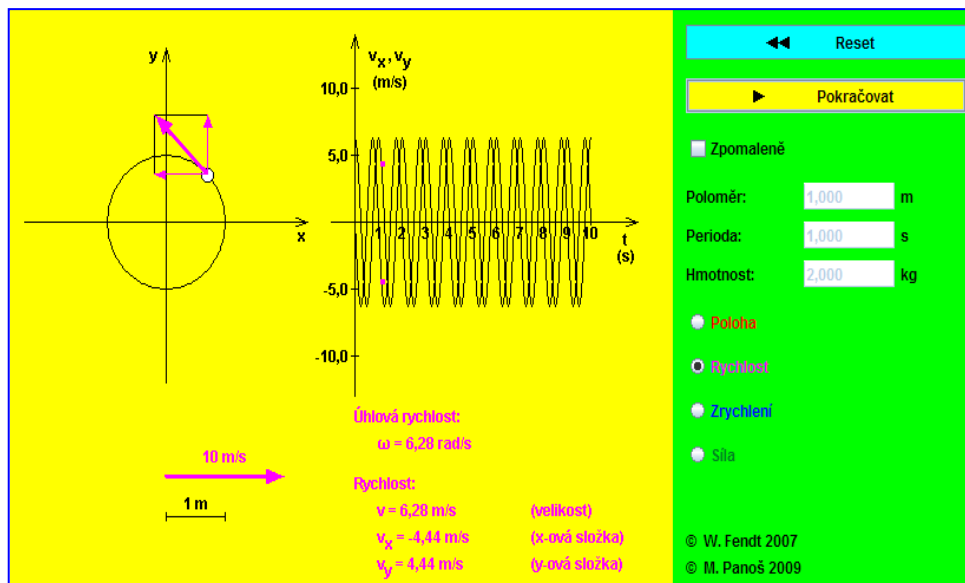
Meranie 7

Riešenie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{1 \text{ s}} = 6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = \omega r = 6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1 \text{ m} = 6,28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Odpoveď: Pri zvolených vstupných parametroch má uhlová rýchlosť telesa pohybujúceho sa po kružnici veľkosť $6,28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a jeho obvodová rýchlosť má veľkosť $6,28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



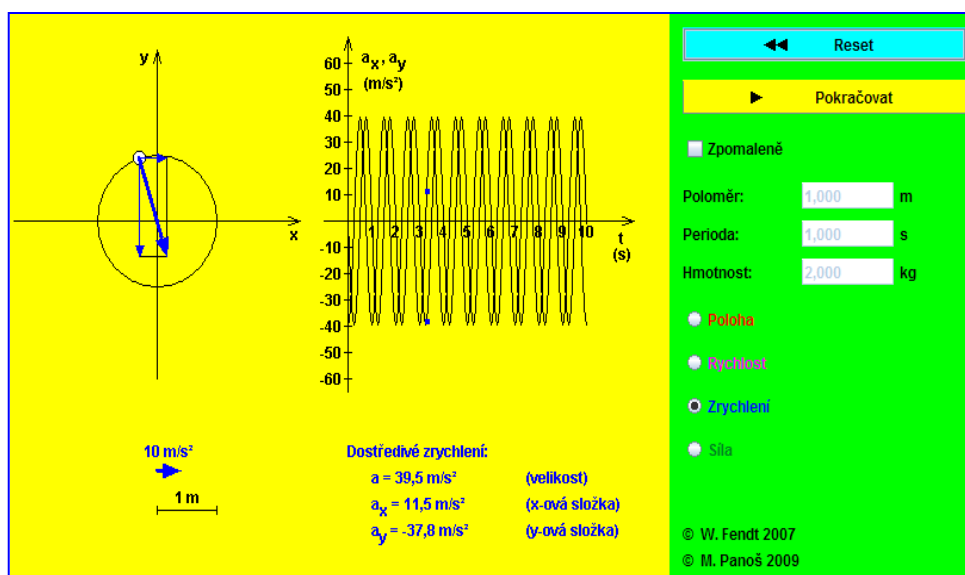
Obr. 5.12 Veľkosť uhlovej a obvodovej rýchlosti telesa vypočítané apletom [1] pri zvolených vstupných parametroch v meraní 7

Meranie 8

Riešenie:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (6,28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 \cdot 1 \text{ m} = 39,44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Odpoveď: Dostredivé (normálové) zrýchlenie telesa, ktoré koná rovnomerný pohyb po kružnici, má pri uvedených vstupných parametroch veľkosť $39,44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



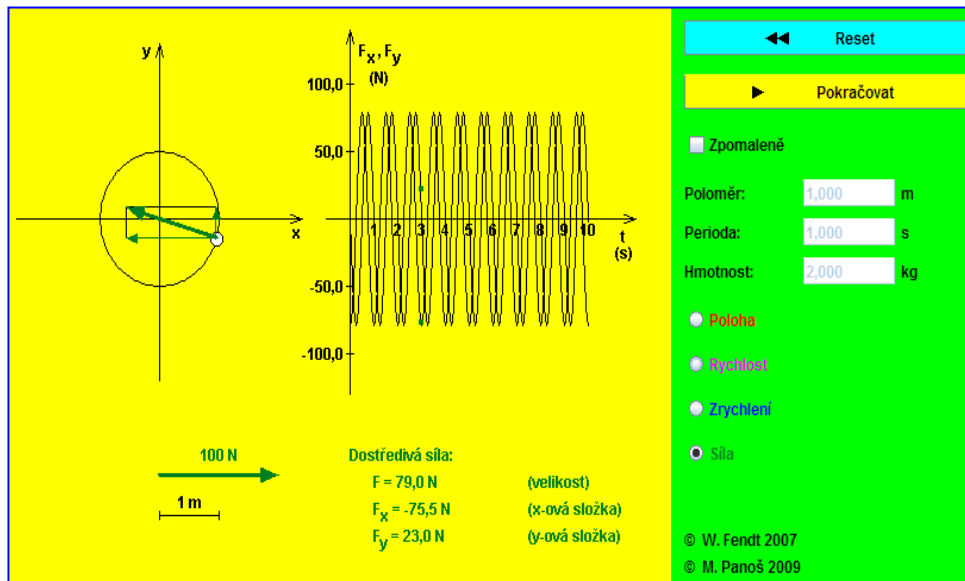
Obr. 5.13 Veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia telesa vypočítané apletom [1] pri zvolených vstupných parametroch v meraní 8

Meranie 9

Riešenie:

$$F_d = m \frac{v^2}{r} = 2 \text{ kg} \frac{(6,28 \text{ m.s}^{-1})^2}{1 \text{ m}} = 78,88 \text{ N}$$

Odpoveď: Na teleso pohybujúce sa po kružnici rovnomerným pohybom pôsobí pri uvedených vstupných parametroch dostredivá sila veľkosti 78,88 N.



Obr. 5.14 Veľkosť dostredivej sily, ktorá pôsobí na teleso vypočítaná apletom [1] pri zvolených vstupných parametroch v meraní 9

Pri overovaní fyzikálnej správnosti apletu sme ďalej postupovali tak, že sme menili periódu rovnomerného pohybu telesa po kružnici a následne sme vypočítali veľkosť uhlovej ω a obvodovej rýchlosti v telesa, veľkosť dostredivého (normálového) zrýchlenia telesa a_n a veľkosť dostredivej sily F_d , ktorá pôsobí na pohybujúce sa teleso. Vypočítané hodnoty jednotlivých fyzikálnych veličín sme spolu s hodnotami, ktoré vypočítal aplet zapísali do tabuliek 5.5 a 5.6 a porovnali.

Tabuľka 5.5 Hodnoty veľkosti ω a v rovnomerného pohybu telesa po kružnici pri zmene hmotnosti m telesa

Polomer $r / (\text{m})$	Periódna $T / (\text{s})$	Hmotnosť $m / (\text{kg})$	Uhlová rýchlosť $\omega / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$		Rýchlosť $v / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	
			výpočet	aplet	výpočet	aplet
1	1	1	6,28	6,28	6,28	6,28
1	1	2	6,28	6,28	6,28	6,28
1	1	3	6,28	6,28	6,28	6,28
1	1	4	6,28	6,28	6,28	6,28

Tabuľka 5.6 Hodnoty veľkosti a_n a F_d rovnomerného pohybu telesa po kružnici pri zmene hmotnosti m telesa

Polomer $r / (\text{m})$	Periódna $T / (\text{s})$	Hmotnosť $m / (\text{kg})$	Zrýchlenie $a / (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$		Sila $F / (\text{N})$	
			výpočet	aplet	výpočet	aplet
1	1	1	39,44	39,50	39,44	39,50
1	1	2	39,44	39,50	78,88	79,0
1	1	3	39,44	39,50	118,31	118
1	1	4	39,44	39,50	157,75	158

Vyhodnotenie výsledkov experimentovania s apletom

- Aplet, s ktorým sme experimentovali, je spracovaný prehľadne a jeho ovládanie je jednoduché a intuitívne.
- Do apletu sa zadávajú tri údaje: polomer r (m), periódna T (s) a hmotnosť m (kg).
- Aplet je fyzikálne správny – hodnoty namerané apletom a nami vypočítané hodnoty sa zhodujú. Jemné rozdiely sú spôsobené zaokrúhľovaním hodnôt apletom.

- Zhustené grafy závislosti súradníc polohy x , y ; obvodovej rýchlosti v_x , v_y ; dostredivého zrýchlenia a_x , a_y a dostredivej sily F_x , F_y ako funkcia času na obr. 5.6 – 5.14 sú spôsobené voľbou periódy rovnomerného pohybu po kružnici $T = 1$ s.

Záver

Prostredníctvom experimentovania s fyzikálnym Java apletom *Rovnomerný pohyb po kružnici* [1], sme overovali jeho fyzikálnu správnosť, opísali sme rovnomerný pohyb po kružnici a skúmali sme vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.

Na záver môžeme konštatovať, že sme cieľ projektu splnili.

Literatúra

- [1] Fendt, W. *Rovnomerný pohyb po kružnici*, [online] (dostupné na: http://www.walter-fendt.de/ph14cz/circmotion_cz.htm, citované dňa 10. 10. 2013).
- [2] Hajko, V. a kol.: *Fyzika v príkladoch*. Alfa, Bratislava 1988 (1983).
- [3] Kúdelčík J., Hockicko, P. *Základy fyziky*. Žilinská univerzita v Žiline/EDIS vydavateľstvo ŽU 2011 ISBN 978-80-554-0341-0.

(V kolážach sme využívali obrázky [online] voľne dostupné na: www.freefbpictures.com, citované dňa 10. 10. 2013 a obrázky z Galérie Smart Notebooku.)

6 Zadanie projektu 5

Téma projektu: Voľný pád telesa

Cieľ: Na základe experimentovania s fyzikálnym Java apletom *Average Velocity (Priemerná rýchlosť)*, [online] (dostupné na: <http://jersey.uoregon.edu/AverageVelocity/index.html>) [1], overiť jeho fyzikálnu správnosť, opísať voľný pád telesa a skúmať vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.

Motivácia: Voľný pád je predmetom pozorovania a skúmania od dávnych čias. Ľudia už od pradávna sledovali prírodu a zamýšľali sa nad tým, prečo všetky predmety padajú na zem (obr. 6.1). Položili ste si aj vy túto otázku?



Obr. 6.1 Motivačný obrázok k zadaniu projektu *Voľný pád telesa* (vlastná koláž)

Úlohy:

1. Overte fyzikálnu správnosť apletu: *Average Velocity (Priemerná rýchlosť)*, [online] (dostupné na: <http://jersey.uoregon.edu/AverageVelocity/index.html>) [1].
2. Opíšte voľný pád telesa a skúmajte vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.
3. Vysvetlite, prečo vo vákuu padajú telesá rovnakou rýchlosťou, ale vo vzduchu nie.
4. Opíšte pád parašutistu.

Čas vymedzený na projekt: týždeň.

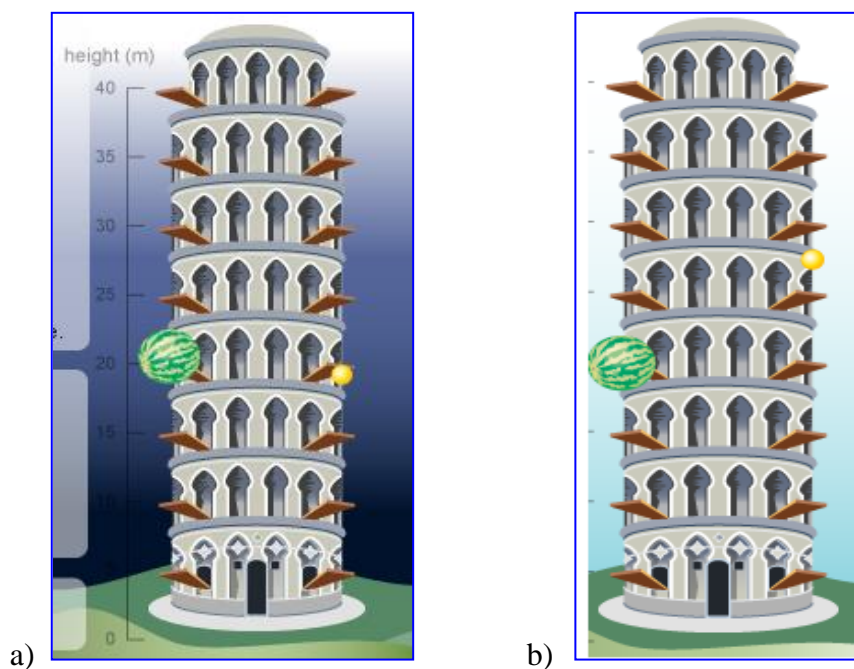
6.1 Voľný pád telesa – návrh spracovania riešenia projektu

Teoretická časť

Naším cieľom je, na základe experimentovania s fyzikálnym Java apletom *Average Velocity* (*Priemerná rýchlosť*), [online] (dostupné na: <http://jersey.uoregon.edu/AverageVelocity/index.html>) [1], overiť jeho fyzikálnu správnosť, opísať voľný pád telesa a skúmať vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.

Aristoteles (*384 – +322 pred Kr.) vo svojom diele *Fyzika* prezentoval myšlienku, že vo vákuu budú padať všetky telesá rovnakou rýchlosťou.

Galileo Galilei (*15. 2. 1564 – +8. 1. 1642) konal pokusy, pri ktorých zhadzoval zo šikmej veže v Pise telesá, aby dôkladne preskúmal zákonitosti voľného pádu. Zistil, že gravitácia spôsobuje, že všetko padá rovnakou rýchlosťou, ľahké telesá padajú tak rýchlo ako ťažké, ak sa prejaví rozdiel, je to len vplyvom odporu vzduchu (obr. 6.2).



Obr. 6.2 Zhadzovanie telies zo šikmej veže v Pise a) v ideálnom a b) v reálnom prostredí (upravený obrázok zo zdroja [2])

Podľa legendy Issacovi Newtonovi (*25. 12. 1642 – +20. 3. 1727) spadlo počas odpočinku pod jablňou na hlavu jablko, čo bolo podnetom pre jeho úvahy a následné štúdium gravitácie.

Voľný pád je pohyb, ktorý koná voľne pustené teleso vo vákuu. Je jedným z najznámejších pohybov v tiažovom poli. Voľný pád z výšky, ktorá je malá v porovnaní

s rozmermi Zeme, je pohyb rovnomerne zrýchlený. Vykonávajú ho všetky telesá voľne spustené v konštantnom tiažovom poli z určitej výšky s nulovou začiatočnou rýchlosťou.

Zrýchlenie voľného pádu sa nazýva **tiažové zrýchlenie** g . Na tom istom mieste je pre všetky telesá rovnaké. Mení sa s nadmorskou výškou a zemepisnou šírkou. Bola dohodnutá hodnota $g = 9,80665 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ktorá sa nazýva **normálne tiažové zrýchlenie**.

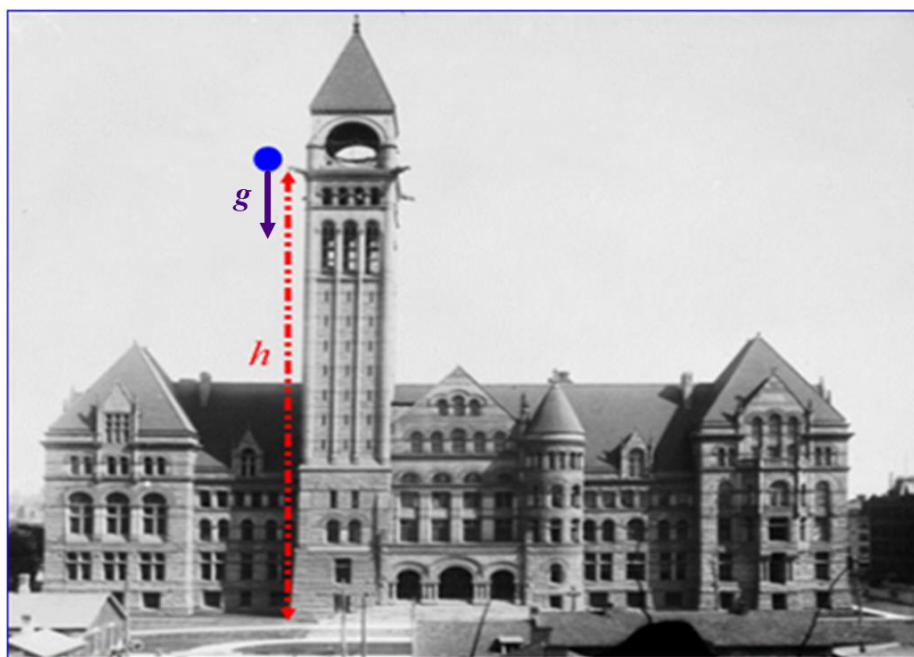
Veľkosť okamžitej rýchlosti v v čase t je určená vzťahom [3]:

$$v = gt \cdot \quad (6.1)$$

Dráha prejdená za čas t je určená vzťahom [3]:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \cdot \quad (6.2)$$

Ďalšie charakteristiky voľného pádu sú: čas dopadu t_d a veľkosť rýchlosti dopadu v_d . Čas dopadu t_d , t. j. čas, ktorý uplynie od spustenia telesa z výšky h (obr. 6.3) až do jeho dopadu na Zem.



Obr. 6.3 Voľný pád telesa z výšky h (Old City Hall Toronto) upravený obrázok zo zdroja Galéria Smart Notebook

Čas dopadu t_d možno vyjadriť zo vzťahu [4]:

$$s = \frac{1}{2}gt_d^2, \quad (6.3)$$

nasledovne:

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \quad (6.4)$$

Veľkosť rýchlosti dopadu v_d je rýchlosť, ktorou teleso dopadne na Zem. Na jej určenie je nutné si uvedomiť, že rýchlosť dopadu bude mať teleso v čase t_d .

Preto je možné písať:

$$v_d = gt_d, \quad (6.5)$$

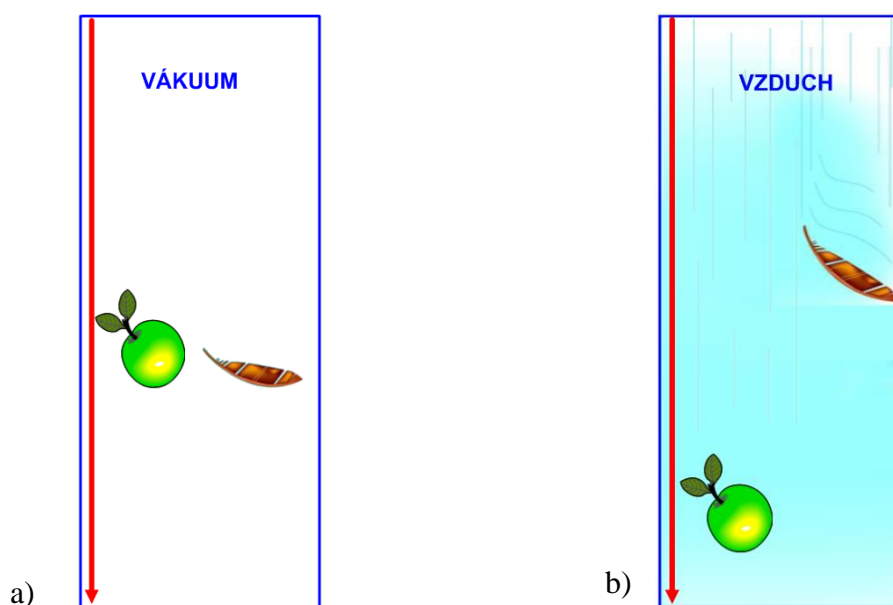
z čoho po dosadení dostaneme:

$$v_d = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \quad (6.6)$$

V našich úvahách nevystupovala hmotnosť telesa. Z toho vyplýva, že rýchlosť dopadu, ani čas dopadu nie sú veličiny závislé od hmotnosti telesa. Všetky telesá padajú vo vákuu k Zemi rovnakou rýchlosťou. Vákuum je ideálne prostredie, v ktorom na telesá nepôsobí odporová sila vzduchu. Vo vákuu padá pierko rovnakou rýchlosťou ako jablko (obr. 6.4a).

Tento poznatok je v rozpore s našou bežnou skúsenosťou. Ak hodíme z veže smerom nadol pierko a jablko (obr. 6.4b), jablko dopadne na zem podstatne skôr ako pierko. Problém je v tom, že v skutočnosti na pohybujúci sa predmet pôsobí ešte i odporová sila vzduchu. Vzhľadom na to, že závisí od plochy telesa, je výrazne väčšia u ľahkého pierka s veľmi členitým povrchom. Preto pierko dopadne neskôr.

Gravitácia pôsobí medzi telesami a spôsobuje, že sa priťahujú. Ak majú telesá rozdielnu hmotnosť m , nerovnomerná príťažlivá sila priťahuje teleso s menšou m_1 k telesu s väčšou m_2 , uvedomujeme si to práve vtedy, keď predmety padajú nadol.



Obr. 6.4 Jablko a pierko padajúce a) vo vákuu b) vo vzduchu

Pád parašutistu

Na začiatku ťahá gravitácia parašutistu k zemi stále sa zvyšujúcou rýchlosťou. Čím ale rýchlejšie padá, tým väčší odpor vzduchu pociťuje. Keď jeho rýchlosť dosiahne asi 300 km.s^{-1} , tzv. **medznú rýchlosť**, dosiahne odpor vzduchu takú hodnotu, že vyváži príťažlivú silu gravitácie. Potom už padá plynulo touto rýchlosťou.

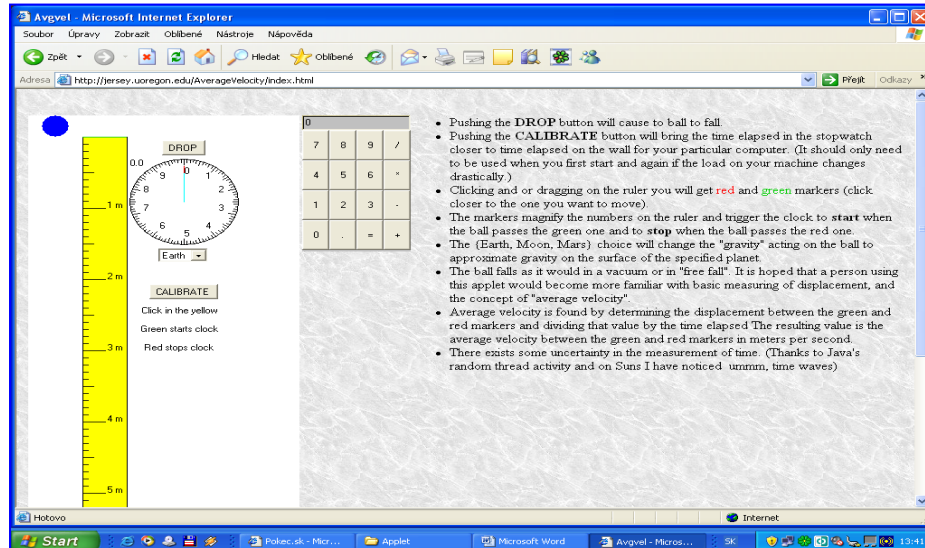
Experimentálna časť

Rozbor apletu *Average Velocity (Priemerná rýchlosť)*

Komunikačný prostriedok klienta: (<http://jersey.uoregon.edu/AverageVelocity/index.html> [1]).

Prostredie apletu

Prostredie apletu (obr. 6.5) pozostáva z dvoch častí. Na pravej strane sú umiestnené pokyny pre prácu s apletom v anglickom jazyku. V ľavej časti apletu je v bielom poli umiestnená modrá guľôčka, pravítko dlhé 6 m a stopky. Súčasťou apletu je kalkulačka. Pod časomierou je umiestnený ovládač, pomocou ktorého je možné meniť začiatočné podmienky – tiažové pole, v ktorom sa guľôčka bude pohybovať a tlačidlo *CALIBRATE*, ktorým vrátime čas na stopkách do začiatočnej pozície. Nad stopkami je tlačidlo *DROP* na spustenie časomierey.



Obr. 6.5 Prostredie apletu *Average Velocity (Priemerná rýchlosť)* [1]

Prostredníctvom apletu sledujeme voľný pád hmotného bodu (modrej guľôčky) neznámej hmotnosti v tiažovom poli Zeme, Mesiaca alebo Marsu a meriame čas jej dopadu na zem (podložku). Aplet umožňuje nastaviť začiatok a koniec spustenia časomierey pomocou farebných ukazovateľov, ktoré menia pozície na pravítku. Spúšťajú stopky, keď guľôčka

prejde ukazovateľom so zeleným okrajom v hornej časti pravítka a zastavujú ich, keď guľôčka prejde ukazovateľom s červeným okrajom v dolnej časti pravítka. Takýmto spôsobom môžeme merať časový interval napr. kedy preletí štvrtý meter svojej dráhy, resp. medzi štvrtým a piatym metrom voľného pádu guľôčky. Zarážky posúvame kliknutím alebo ťahaním po pravítku.

Pred overovaním správnosti apletu si najskôr nastavíme, či budeme sledovať pohyb guľôčky v tiažovom poli Zeme, Mesiaca alebo Marsu. Ak chceme merať čas len na určitom úseku počas pádu guľôčky, nastavíme si farebné ukazovatele. Stlačením tlačidla *DROP* uvedieme guľôčku do pohybu. Guľôčka padá akoby bola vo vákuu.

Overenie fyzikálnej správnosti apletu

1) Určenie tiažového zrýchlenia na Zemi, Mesiaci a Marse výpočtom

V aplete sme si nastavili pozorovanie pohybu guľôčky v tiažovom poli Zeme a klikli sme na tlačidlo *DROP*. Po páde guľôčky na zem sa na stopkách zobrazil údaj 1,1 s. Pomocou vzťahu (6.3) sme vypočítali tiažové zrýchlenie na Zemi a následne sme podľa vzťahu (6.5) vypočítali rýchlosť dopadu guľôčky. Rovnako sme postupovali aj po nastavení pozorovania pohybu guľôčky v tiažovom poli Mesiaca a Marsu a následného výpočtu tiažového zrýchlenia na Mesiaci i Marse.

a) Zem

Zápis:

$$s = 6 \text{ m}$$

$$t_{d1} = 1,1 \text{ s}$$

$$g_z = ?$$

$$v_{d1} = ?$$

Riešenie:

$$s = \frac{1}{2} g_z t_{d1}^2$$

$$2s = g_z t_{d1}^2$$

$$g_z = \frac{2s}{t_{d1}^2}$$

$$g_z = \frac{2 \cdot 6 \text{ m}}{(1,1 \text{ s})^2}$$

$$g_z \cong 9,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_{d1} = g_z t_{d1}$$

$$v_{d1} = 9,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1,1 \text{ s}$$

$$v_{d1} \cong 10,91 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Odpoveď: Tiažové zrýchlenie na Zemi, vypočítané na základe údajov, ktoré poskytuje daný aplet, má veľkosť $9,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a rýchlosť dopadu guľôčky je $10,91 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Mesiac

Zápis:

$$s = 6 \text{ m}$$

$$t_{d2} = 2,72 \text{ s}$$

$$g_M = ?$$

$$v_{d2} = ?$$

Riešenie:

$$s = \frac{1}{2} g_M t_{d2}^2$$

$$2s = g_M t_{d2}^2$$

$$g_M = \frac{2s}{t_{d2}^2}$$

$$g_M = \frac{2 \cdot 6 \text{ m}}{(2,72 \text{ s})^2}$$

$$g_M \cong 1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_{d2} = g_M t_{d2}$$

$$v_{d2} = 1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2,72 \text{ s}$$

$$v_{d2} \cong 4,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Odpoveď: Tiažové zrýchlenie na Mesiaci, vypočítané na základe údajov, ktoré poskytuje daný aplet, má veľkosť $1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a rýchlosť dopadu guľôčky je $4,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) Mars

Zápis:

$$s = 6 \text{ m}$$

$$t_{d3} = 1,81 \text{ s}$$

$$g_{MA} = ?$$

$$v_{d3} = ?$$

Riešenie:

$$s = \frac{1}{2} g_{MA} t_{d3}^2$$

$$2s = g_{MA} t_{d3}^2$$

$$g_{MA} = \frac{2s}{t_{d3}^2}$$

$$g_{MA} = \frac{2 \cdot 6 \text{ m}}{(1,81 \text{ s})^2}$$

$$g_{MA} \cong 3,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_{d3} = g_{MA} t_{d3}$$

$$v_{d3} = 3,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1,81 \text{ s}$$

$$v_{d3} \cong 6,63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Odpoveď: Tiažové zrýchlenie na Marse, vypočítané na základe údajov, ktoré poskytuje daný aplet, má veľkosť $3,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a rýchlosť dopadu guľôčky je $6,63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Podielom tiažového zrýchlenia na Zemi a tiažového zrýchlenia na Mesiaci môžeme zároveň dokázať aj známu skutočnosť, že na Mesiaci je šesťnásobne menšia gravitácia ako na Zemi:

$$\frac{g_Z}{g_M} = \frac{9,92 \text{ m.s}^{-2}}{1,63 \text{ m.s}^{-2}} = 6,08.$$

Podielom tiažového zrýchlenia na Zemi a tiažového zrýchlenia na Marse môžeme zároveň ukázať, že na Marse je takmer trojnásobne menšia gravitácia ako na Zemi:

$$\frac{g_Z}{g_{MA}} = \frac{9,92 \text{ m.s}^{-2}}{3,66 \text{ m.s}^{-2}} = 2,71.$$

Náš výsledok (2,71-krát menšia) sa od skutočného (2,64-krát menšia) odlišuje len o 0,07, relatívna chyba merania je 2,7 %.

2) Určenie priemernej rýchlosti guľôčky na Zemi, Mesiaci a Marse výpočtom

Ak sme chceli zistiť priemernú rýchlosť v_p , s akou sa guľôčka počas voľného pádu pohybovala, použili sme zelený a červený ukazovateľ.

Postupne sme pomocou nich rozdelili dráhu voľného pádu na 6 úsekov a merali sme čas, za ktorý guľôčka prejde prvý meter, druhý až šiesty meter. Namerané hodnoty sme zapísali do tabuľky 6.1. Do vzťahu (6.7) sme potom za Δs dosadili celkovú dráhu, čiže 6 m a za Δt súčet týchto šiestich časových intervalov: $\Delta t_Z = 1,1 \text{ s}$, $\Delta t_M = 2,72 \text{ s}$, $\Delta t_{MA} = 1,81 \text{ s}$.

Tabuľka 6.1 Namerané časy preletov guľôčky jednotlivými úsekmi dráhy v rôznych tiažových poliach

dráha $\Delta s / (\text{m})$	Čas preletu $t / (\text{s})$		
	Zem	Mesiac	Mars
1	0,45	1,11	0,73
1	0,18	0,46	0,31
1	0,15	0,35	0,24
1	0,12	0,30	0,19
1	0,11	0,26	0,18
1	0,09	0,24	0,16
	$\Delta t_Z = 1,1 \text{ s}$	$\Delta t_M = 2,72 \text{ s}$	$\Delta t_{MA} = 1,81 \text{ s}$

S využitím rovnice:

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (6.7)$$

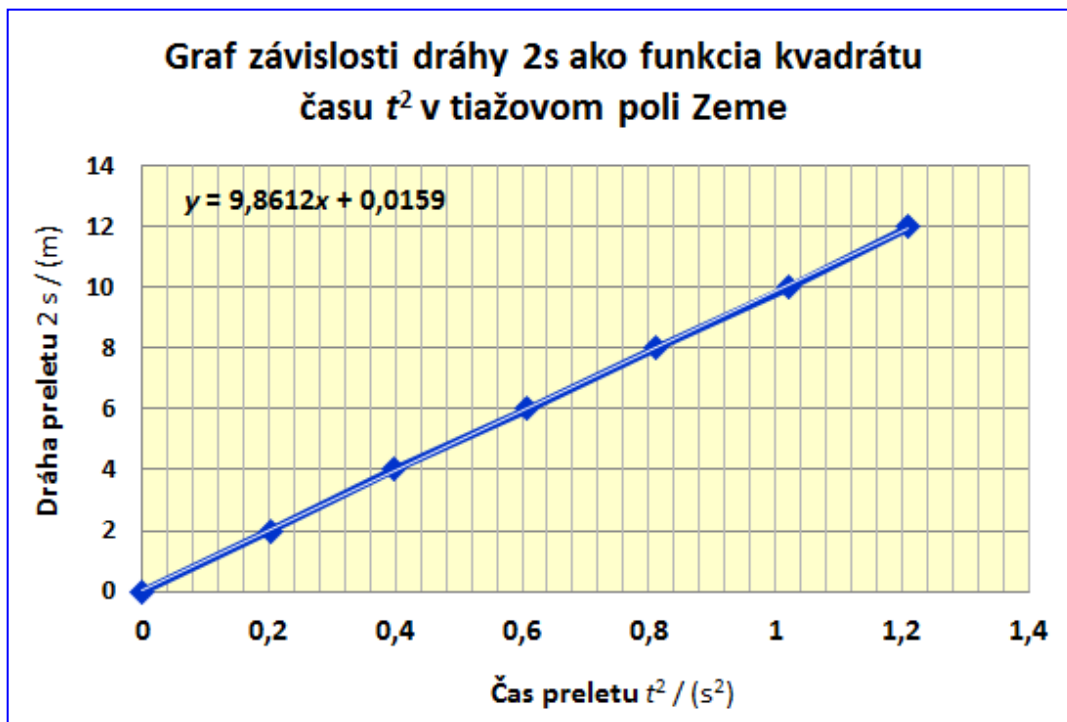
sme určili priemernú rýchlosť pádu guľôčky na Zemi $v_{pZ} = 5,45 \text{ m.s}^{-1}$, Mesiaci $v_{pM} = 2,21 \text{ m.s}^{-1}$ a Marse $v_{pMA} = 3,31 \text{ m.s}^{-1}$.

3) Určenie tiažového zrýchlenia na Zemi, Mesiaci a Marse grafickou metódou

V aplete sme si nastavili pozorovanie pohybu guľôčky v tiažovom poli Zeme a klikli sme na tlačidlo *DROP*. Potom, čo guľôčka prešla dráhu $s = 1 \text{ m}$, sme stopky zastavili a časový údaj sme zapísali do tabuľky 6.1. Postupne sme merali čas, za ktorý guľôčka prešla dráhu 2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m. Namerané údaje sme opäť zapísali do tabuľky 6.2. Z nameraných hodnôt dráh preletu guľôčky s sme vypočítali ich dvojnásobnú hodnotu $2s$ a namerané hodnoty časov preletu guľôčky jednotlivými úsekmi dráhy v tiažovom poli Zeme sme umocnili. Následne sme zostrojili graf závislosti dráhy $2s$ ako funkcia kvadrátu času t^2 v tiažovom poli Zeme (obr. 6.6). Fitovaním sme bodmi preložili priamku, kde nezávisle premenná $x = t^2$, a závisle premenná $y = 2s$. Z rovnice priamky: $y = 9,8612x + 0,0159$, sme určili tiažové zrýchlenie na Zemi $g = 9,8612 \text{ m.s}^{-2} \cong 9,86 \text{ m.s}^{-2}$, kde nezávisle premennou je kvadrát času a závisle premennou je dvojnásobná dĺžka dráhy. Smernica tejto priamky určuje tiažové zrýchlenie.

Tabuľka 6.2 Namerané a vypočítané hodnoty času preletu guľôčky jednotlivými úsekmi dráhy v tiažovom poli Zeme

$t/(s)$	$t^2/(s^2)$	$s/(m)$	$2s/(m)$
0	0	0	0
0,45	0,2025	1	2
0,63	0,3969	2	4
0,78	0,6084	3	6
0,90	0,8100	4	8
1,01	1,020	5	10
1,10	1,210	6	12



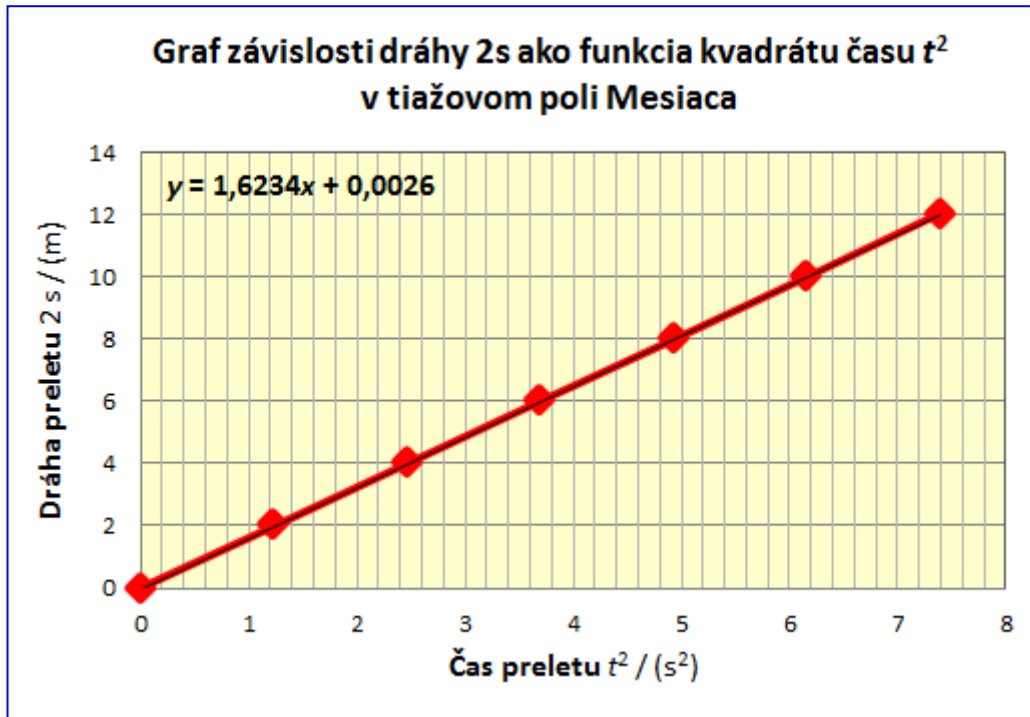
Obr. 6.6 Grafické znázornenie závislosti dráhy $2s$ ako funkcia kvadrátu času t^2 v tiažovom poli Zeme

Rovnakým spôsobom sme postupovali aj pri určovaní tiažového zrýchlenia grafickou metódou na Mesiaci a Marse. Namerané údaje t a s pri meraní na Mesiaci sme zapísali do tabuľky 6.3 a pri meraní na Marse do tabuľky 6.4.

Tabuľka 6.3 Namerané a vypočítané hodnoty času preletu guľôčky jednotlivými úsekmi dráhy v tiažovom poli Mesiaca

$t / (s)$	$t^2 / (s^2)$	$s / (m)$	$2s / (m)$
0	0	0	0
1,11	1,2321	1	2
1,57	2,4649	2	4
1,92	3,6864	3	6
2,22	4,9284	4	8
2,48	6,1504	5	10
2,72	7,3984	6	12

Následne sme zostrojili graf závislosti dráhy $2s$ ako funkcia kvadrátu času t^2 v tiažovom poli Mesiaca (obr. 6.7) a fitovaním sme bodmi preložili priamku, kde nezávisle premenná $x = t^2$, a závisle premenná $y = 2s$. Z rovnice priamky: $y = 1,6234x + 0,0026$, sme určili tiažové zrýchlenie na Mesiaci $g = 1,6234 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cong 1,62 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

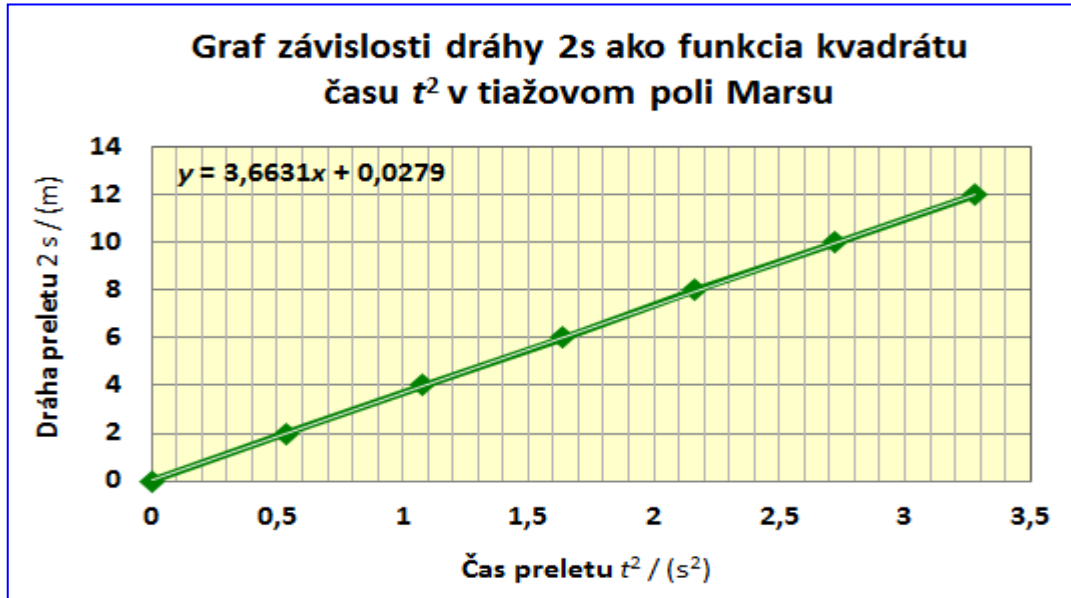


Obr. 6.7 Grafické znázornenie závislosti dráhy $2s$ ako funkcia kvadrátu času t^2 v tiažovom poli Mesiaca

Tabuľka 6.4 Namerané a vypočítané hodnoty času preletu guľôčky jednotlivými úsekmi dráhy v tiažovom poli Marsu

$t / (\text{s})$	$t^2 / (\text{s}^2)$	$s / (\text{m})$	$2s / (\text{m})$
0	0	0	0
0,73	0,5329	1	2
1,04	1,0816	2	4
1,28	1,6384	3	6
1,47	2,1609	4	8
1,65	2,7225	5	10
1,81	3,2761	6	12

Následne sme zostrojili graf závislosti dráhy $2s$ ako funkcia kvadrátu času t^2 v tiažovom poli Marsu (obr. 6.8) a fitovaním sme bodmi preložili priamku, kde nezávisle premenná $x = t^2$, a závisle premenná $y = 2s$. Z rovnice priamky: $y = 3,6631x + 0,0279$ sme určili tiažové zrýchlenie na Marse $g = 3,6631 \text{ m.s}^{-2} \cong 3,66 \text{ m.s}^{-2}$.



Obr. 6.8 Grafické znázornenie závislosti dráhy $2s$ ako funkcia kvadrátu času t^2 v tiažovom poli Marsu

Vyhodnotenie výsledkov experimentovania s apletom

- Aplet *Average Velocity (Priemerná rýchlosť)* [1] je prehľadný, ľahko ovládateľný a zrozumiteľný.
- Využili sme ho na určenie tiažového zrýchlenia na Zemi, Mesiaci a Marse (výpočtom a grafickou metódou) a aj na určenie priemernej rýchlosti pohybu guľôčky na Zemi, Mesiaci a Marse.
- Na základe výsledkov experimentovania s apletom môžeme konštatovať, že aplet je fyzikálne správny.

Záver

Prostredníctvom experimentovania s fyzikálnym Java apletom *Average Velocity (Priemerná rýchlosť)* [1], sme overovali jeho fyzikálnu správnosť, opísali sme voľný pád telesa a skúmali sme vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.

Na záver môžeme konštatovať, že sme cieľ projektu splnili.

Literatúra

[1] *Average Velocity (Priemerná rýchlosť)*, [online] (dostupné na: <http://jersey.uoregon.edu/AverageVelocity/index.html>, citované dňa 10. 10. 2013).

[2] *Free Fall Tower of Pisa* [online] (dostupné na: <http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspView&ResourceID=650>, citované dňa 10. 10. 2013).

[3] Holliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: *Fyzika, Část 1 Mechanika* VUTIUM, Prometheus. Brno ISBN 80-214-1868-0.

[4] Ožvoldová, M., Červeň, I. *Úvod do vysokoškolskej fyziky*. STU v Bratislave ISBN 80-227-2114-X.

(V kolážach sme využívali obrázky [online] voľne dostupné na: www.freefbpictures.com, citované dňa 10. 10. 2013 a obrázky z Galérie Smart Notebooku.)

7 Zadanie projektu 6

Téma projektu: Šikmý vrh nahor

Cieľ: Na základe experimentovania s interaktívnou fyzikálnou simuláciou *Pohyb strely*, [online] (dostupné na: http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_sk.html) [1], overiť jej fyzikálnu správnosť, opísať šikmý vrh nahor a skúmať vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb. Porovnať výsledky s reálnym pokusom streľba z lego dela.

Motivácia: Ak vrhneme teleso zo Zeme pod určitým ostrým uhlom (elevačný uhol) nenulovou začiatočnou rýchlosťou v_0 , teleso sa pohybuje šikmým vrhom.

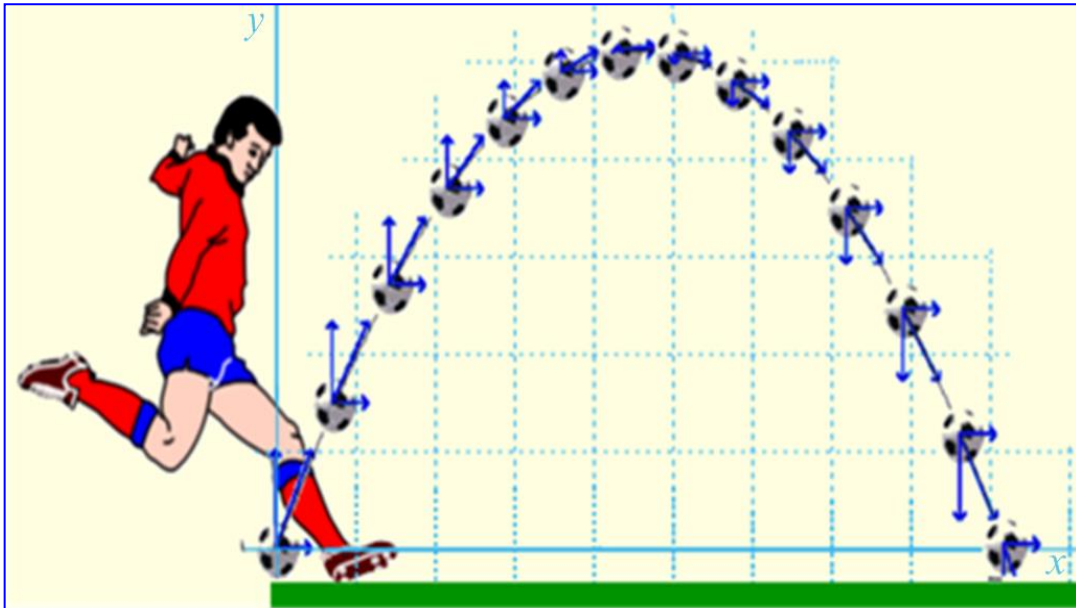
So šikmým vrhom nahor sa môžeme stretnúť v praktickom živote, v armáde i v športe. Pozrite si obr. 7.1 a rozhodnite, ktoré situácie, znázornené na obrázku, sú príkladom šikmého vrhu nahor.



Obr. 7.1 Motivačný obrázok k zadaniu projektu *Šikmý vrh nahor* (vlastná koláž)

Na obr. 7.2 je znázornená štandardná futbalová situácia – rohový kop. Podľa futbalových pravidiel sa kope v prípade, keď sa lopta od brániaceho hráča alebo brankára dostane za bránkovú čiaru. Rohový kop možno kopnúť napríklad s rotáciou k bráne alebo

od brány, rozohrať na krátko a pod., obr. 7.2 znázorňuje rohový kop ako šikmý vrh v ideálnych podmienkach, t. j. bez uvažovania sily odporu vzduchu.



Obr. 7.2 Rohový kop ako šikmý vrh nahor v ideálnych podmienkach

Úlohy:

1. Overte fyzikálnu správnosť interaktívnej simulácie Dubson, M. a PhET vývojový tím: *Pohyb strely*, [online] (dostupné na: http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_sk.html [1]). Pri overovaní si nastavte podmienky šikmého vrhu nahor vo vákuu.
2. Opíšte šikmý vrh nahor a skúmajte vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb.
3. Realizujte šikmý vrh nahor prostredníctvom lego dela (reálny pokus) a porovnajte svoje výsledky s tými, ktoré získate pri experimentovaní s interaktívnou simuláciou [1].

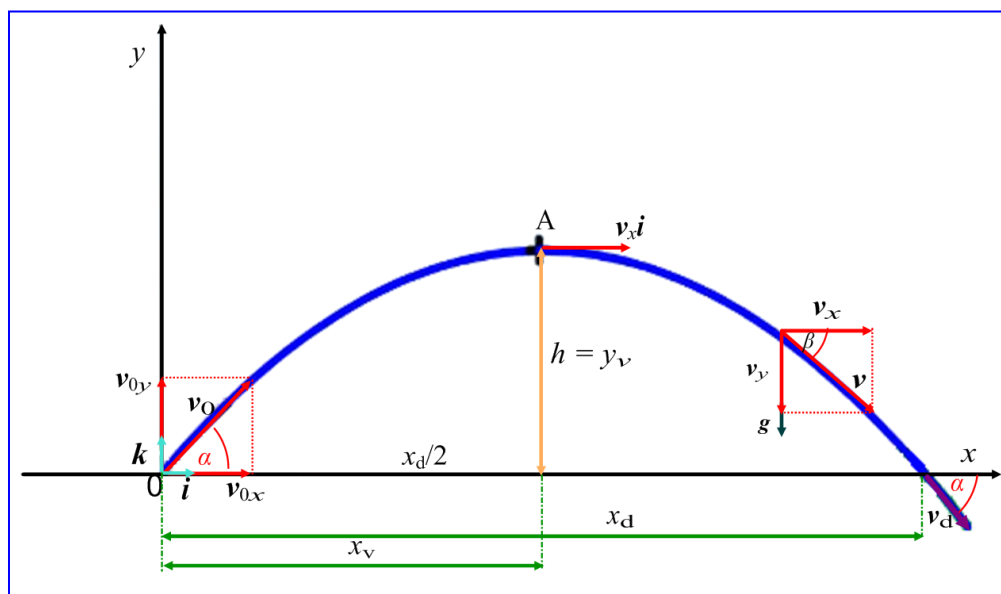
Čas vymedzený na projekt: týždeň.

7.1 Šikmý vrh nahor – návrh spracovania riešenia projektu

Teoretická časť

Naším cieľom je, na základe experimentovania s interaktívnou fyzikálnou simuláciou *Pohyb strely*, [online] (dostupné na: http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_sk.html) [1], overiť jeho fyzikálnu správnosť, opísať šikmý vrh nahor a skúmať vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb. Porovnať výsledky s reálnym pokusom streľba z lego dela.

Šikmý vrh koná teleso, ktorému bola na povrchu Zeme, resp. v určitej výške nad povrchom Zeme, udelená začiatočná rýchlosť \mathbf{v}_0 , ktorá zvierá s vodorovnou rovinou (os x) elevačný uhol α (obr. 7.3). Na obr. 7.3 vidíme, že hmotný bod, ktorý sa pohybuje šikmým vrhom nahor, dopadá na povrch pod tým istým uhlom, pod ktorým bol z povrchu vrhnutý.



Obr. 7.3 Šikmý vrh nahor v ideálnom prostredí

Začiatočné podmienky pri šikmom vrhu (obr. 7.3) sú:

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha, 0).$$

Po ich dosadení do rovnice [2]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0. \quad (7.1)$$

a rozpísaní dostaneme vektorovú rovnicu pre rýchlosť [9]:

$$\mathbf{v} = (v_0 \cos \alpha) \mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha - gt) \mathbf{j}, \quad (7.2)$$

ktorú možno rozpísať na skalárne rovnice [3]:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (7.3)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (7.4)$$

Veľkosť rýchlosti

Pre veľkosť rýchlosti v platí rovnica [3]:

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}. \quad (7.5)$$

Vektor rýchlosti hmotného bodu v ľubovoľnom časovom okamihu má smer dotyčnice k dráhe a možno ho určiť pomocou uhla β , ktorý zvierá s vodorovným smerom. Pre tento uhol platí vzťah ako v prípade vodorovného vrhu, t. j.:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}. \quad (7.6)$$

Dosaďme začiatočné podmienky pre rýchlosť:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad (7.7)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad (7.8)$$

do vektorovej rovnice:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad (7.9)$$

a po jej rozpísaní dostaneme rovnicu pre súradnice polohového vektora $\mathbf{r} = (x, y, 0)$:

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad (7.10)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

(7.11)

Rovnica dráhy

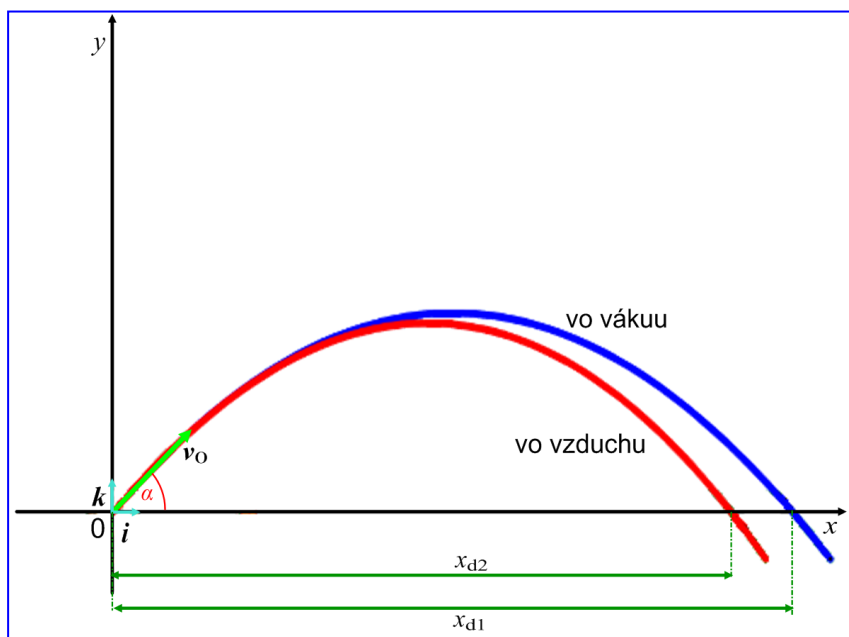
Po vylúčení času t z parametrických rovníc dráhy (7.10) a (7.11) dostaneme analytické vyjadrenie rovnice dráhy [3]:

$$y = v_0 \frac{x}{\cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (7.12)$$

Rovnica (7.12) predstavuje časť paraboly, ktorej vrchol je v bode $A = (x_v, y_v)$, kde x_v je výška výstupu $h = y_v$ (obr. 7.3).

Parabolickú trajektóriu opisuje šikmo vrhnuté teleso v homogénnom poli len vo vákuu. V blízkosti povrchu Zeme však odpor vzduchu spôsobuje, že dráha striel nie je parabola, ale nesúmerná balistická krivka (obr. 7.4). Vzďialenosť dostreľu x_{d2} vo vzduchu je v porovnaní so vzdialenosťou dostreľu vo vákuu x_{d1} menšia (obr. 7.4).



Obr. 7.4 Porovnanie tvaru trajektórie šikmého vrhu nahor vo vzduchu (červená krivka) a vo vákuu (modrá krivka)

Čas výstupu

Z podmienky, že v najvyššej polohe má rýchlosť smer dotýčnice k dráhe (vektor rýchlosti je rovnobežný s osou x), teda zložka rýchlosti $v_y = 0$,

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0, \quad (7.13)$$

pre čas výstupu platí [3]:

$$t_v = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (7.14)$$

Výška výstupu

Výška výstupu h je maximálna výška, ktorú teleso počas šikmého vrhu nahor dosiahne.

Po dosadení času t do vzťahu (7.11) pre súradnicu y , získame vzťah pre výšku výstupu [3]:

$$h = y_v = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (7.15)$$

X-ovú súradnicu vrchola paraboly x_v určíme, ak do rovnice pre dráhu v smere osi x dosadíme časový okamih, v ktorom je hmotný bod v najvyššej polohe určený rovnicou (7.14):

$$x_v = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \quad (7.16)$$

Čas dopadu

Čas dopadu t_D určíme z podmienky, že hmotný bod sa už nachádza na povrchu Zeme, t. j. $y = 0$.

$$y = v_0 t_D \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_D^2$$

$$0 = v_0 t_D \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_D^2.$$

Odkiaľ pre okamih dopadu dostávame:

$$t_D = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2t_v. \quad (7.17)$$

Vidíme, že časový interval na dosiahnutie maximálnej výšky je rovnaký ako časový interval potrebný na dopadnutie na povrch z maximálnej výšky, t. j. doba výstupu a zostupu je pri šikmom vrhu rovnaká.

Dĺžka vrhu

Vzdialenosť miesta dopadu od miesta vrhu vo vodorovnom smere sa nazýva dĺžka vrhu x_d . Vo výške $y = 0$ určíme dĺžku vrhu, ak do rovnice pre x -ovú súradnicu polohy hmotného bodu (7.5) dosadíme čas dopadu t_d :

$$x_d = v_0 \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cos \alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = 2x_v. \quad (7.18)$$

Experimentálna časť

Interaktívna simulácia *Pohyb strely*

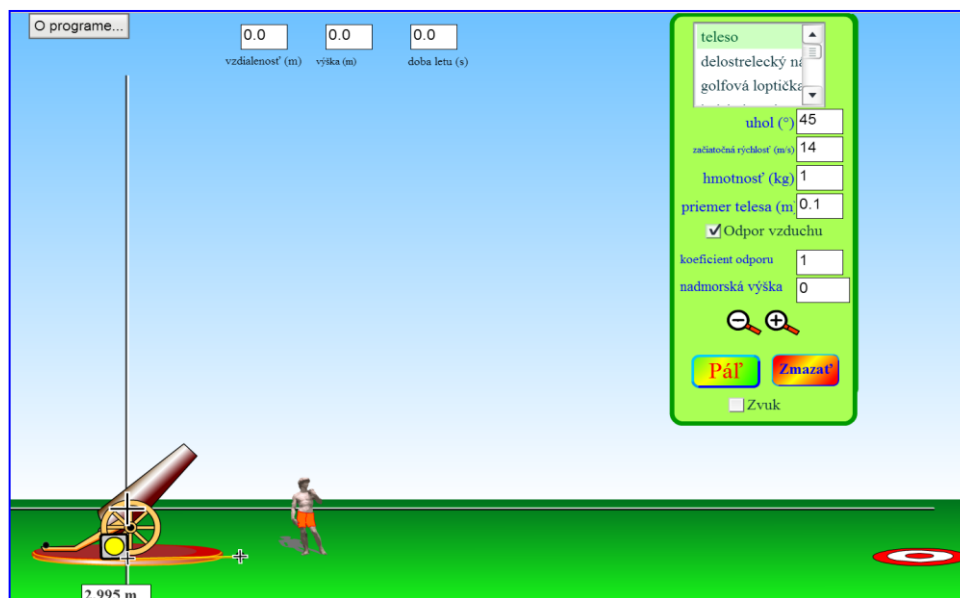
Komunikačný prostriedok klienta: (http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_sk.html [1]).

Prostredie interaktívnej simulácie

Interaktívna fyzikálna simulácia nám prezentuje výstrel z dela, t. j. šikmý vrh nahor. Prostredie simulácie (obr. 7.5) pozostáva z dvoch častí. V pravej časti simulácie je zelená

tabuľka, v ktorej sa nachádza niekoľko meniteľných hodnôt: druh streliva, uhol sklonu dela, začiatočná rýchlosť strely, hmotnosť strely, priemer telesa, odpor vzduchu, koeficient odporu, nadmorská výška, zvuk. Okrem toho sú v tabuľke tlačidlá *pál'*, *zmazať* a dva symboly lupy s označením plus (+) a mínus (-). Pomocou nich môžeme delo s príslušenstvom na obrazovke počítača vzdialiť (-) alebo priblížiť (+) napr., ak nám strela zaletí mimo obrazovku.

Druhá časť interaktívnej simulácie obsahuje trávnik a oblohu. Na trávniku je položené delo, ktoré môžeme posúvať po obrazovke i meniť jeho výšku. Vedľa dela sú položené náboje. Začiatok súradnicovej sústavy je umiestnený do začiatočného bodu hlavne. V dolnej časti interaktívnej simulácie je položený terč, na ktorý pri strele môžeme mieriť. Ak sa nám ho podarí trafiť, objaví sa na ploche nápis: *Zásah!* Vedľa dela stojí Dávid. Na strelca čaká prekvapenie, ak Dávida zasiahne. Po zadaní vstupných údajov do zelenej tabuľky a kliknutím na *pál'*, vystrelí z dela náboj. Počas letu náboja sa nám na hornom okraji v troch oknách zobrazujú hodnoty: dostrelu dela, výšky, ktorú strela v meraných okamihoch dosahuje a doby letu strely v príslušných jednotkách. Tieto hodnoty zodpovedajú okamžitému stavu výstrelu. V prípade menších uhlov simulácia meria dvakrát, v prípade väčších uhlov trikrát, čo sa na trajektórii letu strely prejaví zobrazením čiernych krížikov. Dĺžku vrhu môžeme merať digitálnym meradlom, ktoré sa nachádza v blízkosti dela.



Obr. 7.5 Prostredie interaktívnej simulácie *Pohyb strely* [1]

Overenie fyzikálnej správnosti apletu

Na simulácii sme si nastavili: hmotnosť vystreleného telesa $m = 3 \text{ kg}$, začiatočnú rýchlosť vystreleného telesa $v_0 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, priemer telesa $0,1 \text{ m}$ a elevačný uhol α , ktorý sme

pri experimentovaní s interaktívnou simuláciou postupne menili v intervale od 5° do 85° a merali sme:

- x_D – dĺžku vrhu digitálnym meradlom od začiatku súradnicovej sústavy po miesto, kde strela pri dopade prešla os x ;
- x_D' – vzdialenosť vystreleného telesa od miesta jeho dopadu na zemský povrch po delo;
- t_D' – času letu vystreleného telesa od jeho vystrelenia po dopad na zemský povrch.

Pomocou vzťahu (7.17) sme vypočítali dĺžku vrhu x_D a pomocou vzťahu (7.18) i čas dopadu vystreleného telesa t_D a následne porovnali s dĺžkou vrhu, ktorú sme namerali digitálnym meradlom.

Vzorový výpočet:

Zápis:

$$\alpha = 45^\circ$$

$$v_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

$$m = 3 \text{ kg}$$

$$t_D = ?$$

$$x_D = ?$$

Riešenie:

$$t_D = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$t_D = \frac{2 \cdot 25 \text{ m.s}^{-1} \cdot \sin 45^\circ}{9,81 \text{ m.s}^{-2}}$$

$$t_D = 3,60 \text{ s}$$

$$x_D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$x_D = \frac{(25 \text{ m.s}^{-1})^2 \cdot \sin 2 \cdot 45^\circ}{9,81 \text{ m.s}^{-2}}$$

$$x_D = 63,71 \text{ m}$$

Odpoveď: Pri zvolených vstupných hodnotách: $\alpha = 45^\circ$, $m = 3 \text{ kg}$ a $v_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$, dĺžka vrhu vo vákuu $x_D = 63,71 \text{ m}$, a čas dopadu $t_D = 3,60 \text{ s}$.

Vypočítanú dĺžku vrhu $x_D = 63,71 \text{ m}$ porovnáme s hodnotou nameranou digitálnym meradlom na simulácii: $x_D = 63,70 \text{ m}$ (obr. 7.6). Môžeme konštatovať, že obe hodnoty sa zhodujú.

Vypočítaný čas dopadu $t_D = 3,60$ s nemôžeme porovnať s hodnotou, ktorú by sme namerali digitálnym meradlom v mieste, keď strela pri dopade pretne os x , pretože simulácia neobsahuje digitálne stopky, ktoré by sme mohli v tomto bode zastaviť.

Ďalšie vypočítané i na simulácii namerané hodnoty dĺžky vrhu x_D a vypočítané hodnoty času dopadu t_D pri meniacich sa elevačných uhloch sme zapísali do tabuľky 7.1 a následne porovnali.

Vzhľadom na to, že delo sa nachádza na trávniku a začiatok súradnicovej sústavy je umiestnený do začiatočného bodu hlavne. Môžeme pozorovať, že na simulácii sa meria vzdialenosť x_D' od miesta dotyku dela s trávnikom po miesto dopadu vystreleného telesa na povrch zeme – trávnik. Podobne aj čas letu vystreleného telesa t_D' sa na simulácii meria od vystrelenia telesa po jeho dopad na trávnik.

Pre túto situáciu platí, že vystrelené teleso sa počas pohybu nachádza v začiatočnom bode O (0, h_0) a v bode dopadu D (x_D' , 0). Môžeme písať:

$$x_D' = v_0 t_D' \cos \alpha, \quad (7.19)$$

$$0 = h_0 + v_0 t_D' \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_D'^2. \quad (7.20)$$

Odtiaľ:

$$v_0 = \frac{x_D'}{t_D' \cos \alpha} = \frac{x_D'}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h_0 + x_D' \operatorname{tg} \alpha)}}, \quad (7.21)$$

$$t_D' = \sqrt{\frac{2}{g}(h_0 + x_D' \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (7.22)$$

Maximálna výška zodpovedá podmienke nulovej rýchlosti v zvislom smere $v_y = 0$.

$$h_m = h_0 + \frac{x_D'^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4(h_0 + x_D' \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (7.23)$$

Rýchlosť dopadu zodpovedá podmienke bodu D (obr. 7.6) $y = 0$.

$$v_d = \sqrt{2gh_0} \sqrt{1 + \frac{x_D'^2}{4h_0 \cos^2 \alpha (h_0 + x_D' \operatorname{tg} \alpha)}}. \quad (7.24)$$

Pomocou vzťahu (7.19) sme vypočítali vzdialenosť x_D' od miesta dotyku dela s trávnikom po miesto dopadu vystreleného telesa na povrch zeme a pomocou vzťahu (7.22) čas letu vystreleného telesa t_D' po jeho dopad na trávnik.

Vzorový výpočet:*Zápis:*

$$\alpha = 45^\circ$$

$$v_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

$$m = 3 \text{ kg}$$

$$h_0 = 1,465 \text{ m}$$

$$t_D' = ?$$

$$x_D' = ?$$

Riešenie:

$$x_D' = v_0 t_D' \cos \alpha$$

$$x_D' = 25 \text{ m.s}^{-1} \cdot 3,7 \cdot \cos 45^\circ$$

$$x_D' = 65,41 \text{ m}$$

$$t_D' = \sqrt{\frac{2}{g} (h_0 + x_D' \operatorname{tg} \alpha)}$$

$$t_D' = \sqrt{\frac{2}{9,81 \text{ m.s}^{-2}} (1,465 \text{ m} + 65,41 \text{ m} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ)}$$

$$t_D' = 3,692 \text{ s} \cong 3,69 \text{ s}$$

Odpoveď: Vypočítaná vzdialenosť miesta dopadu vystreleného telesa na zemský povrch od dela $x_D' = 65,41 \text{ m}$ a čas letu vystreleného telesa od jeho vystrelenia po dopad na zemský povrch $t_D' = 3,69 \text{ s}$.

Vypočítané hodnoty $x_D' = 65,41 \text{ m}$ a $t_D' = 3,69 \text{ s}$ porovnáme s hodnotami nameranými na simulácii (obr. 7.6): $x_D' = 65,00 \text{ m}$ a $t_D' = 3,70 \text{ s}$. Môžeme konštatovať, že hodnoty sa takmer zhodujú. Rozdiel môže byť spôsobený zaokrúhľovaním simuláciou.

Ďalšie vypočítané i na simulácii namerané hodnoty x_D' a t_D' pri meniacich sa elevačných uhloch sme zapísali do tabuľky 7.1 a následne porovnali.



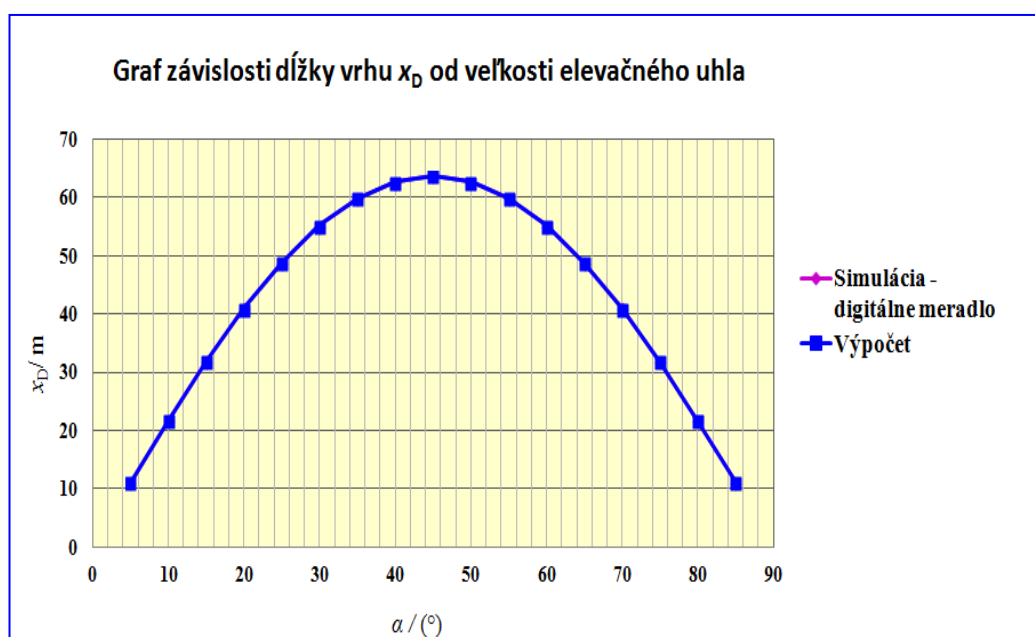
Obr. 7.6 Experimentovanie s interaktívnou simuláciou [1] pri nastavených vstupných hodnotách $\alpha = 45^\circ$, $m = 3 \text{ kg}$ a $v_0 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vo vákuu

Tabuľka 7.1 Namerané a vypočítané hodnoty pri experimentovaní so simuláciou *Pohyb strely v závislosti od veľkosti elevačného uhla*

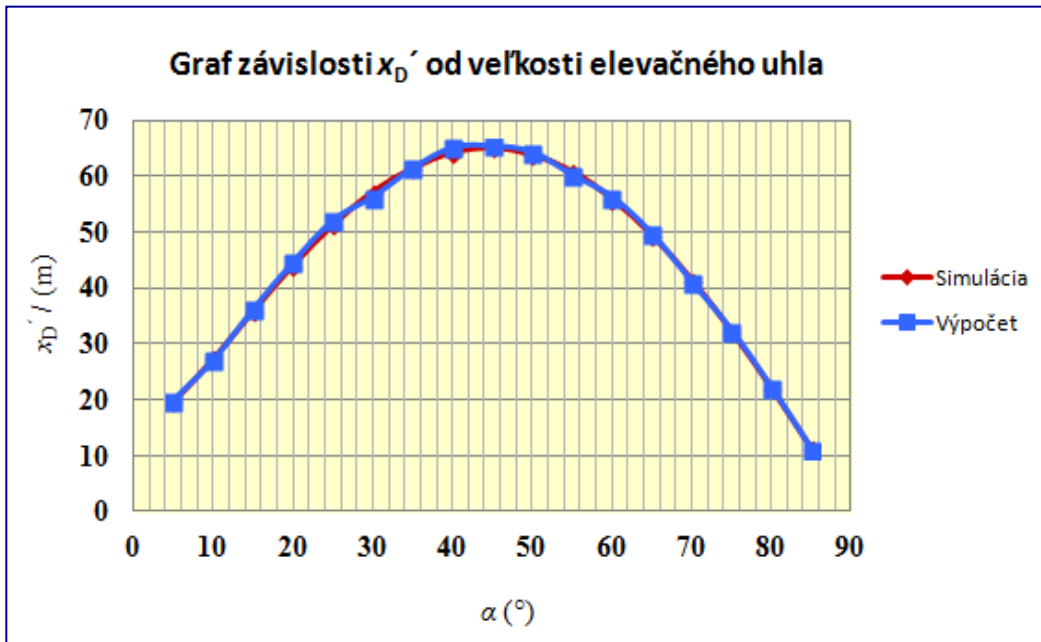
$\alpha / (^\circ)$	$x_D / (\text{m})$		$t_D / (\text{s})$	$x_D / (\text{m})$		$t_D / (\text{s})$	
	Simul.	Výpočet	Výpočet	Simul.	Výpočet	Simul.	Výpočet
5	11,08	11,06	0,44	19,64	19,92	0,80	0,81
10	21,78	21,79	0,89	27,33	27,08	1,10	1,13
15	31,90	31,85	1,32	35,90	36,22	1,50	1,51
20	41,00	40,95	1,74	44,10	44,64	1,90	1,90
25	48,80	48,81	2,15	51,30	52,11	2,30	2,29
30	55,20	55,17	2,55	57,20	56,29	2,60	2,63
35	59,90	59,87	2,92	61,40	61,44	3,00	3,01
40	62,70	62,74	3,28	64,20	65,11	3,40	3,38
45	63,70	63,71	3,60	65,00	65,41	3,70	3,69
50	62,70	62,74	3,90	63,80	64,28	4,00	3,99

$\alpha / (^\circ)$	$x_D / (\text{m})$		$t_D / (\text{s})$	$x_D' / (\text{m})$		$t_D' / (\text{s})$	
	Simul.	Výpočet	Výpočet	Simul.	Výpočet	Simul.	Výpočet
55	59,90	59,87	4,18	60,80	60,22	4,20	4,22
60	55,20	55,17	4,41	55,90	56,25	4,50	4,49
65	48,80	48,81	4,62	49,40	49,66	4,70	4,69
70	41,00	40,95	4,79	41,40	41,04	4,80	4,83
75	31,90	31,86	4,92	32,20	32,35	5,00	4,99
80	21,78	21,79	5,02	22,00	22,14	5,10	5,08
85	11,08	11,06	5,08	11,20	11,11	5,10	5,11

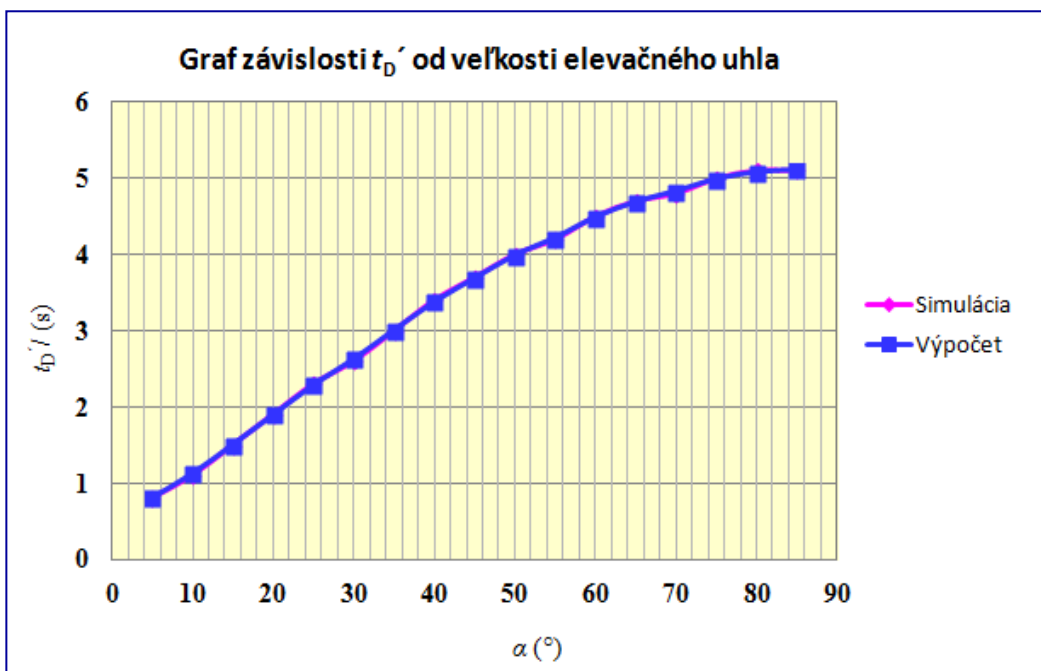
Z nameraných a vypočítaných hodnôt x_D , (tab. 7.1) sme zostrojili graf závislosti dĺžky vrhu x_D od veľkosti elevačného uhla (obr. 7.7), graf závislosti vzdialenosti x_D' od veľkosti elevačného uhla (obr. 7.8). Graf závislosti času letu t_D' vystreleného telesa od veľkosti elevačného uhla (obr. 7.9).



Obr. 7.7 Grafická závislosť dĺžky vrhu x_D od veľkosti elevačného uhla pri začiatocnej rýchlosti $v_0 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$



Obr. 7.8 Grafická závislosť vzdialenosti x_D' od veľkosti elevačného uhla pri začiatočnej rýchlosti $v_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$



Obr. 7.9 Grafická závislosť čas letu t_D' vystreleného telesa od veľkosti elevačného uhla pri začiatočnej rýchlosti $v_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$

Graf závislosti dĺžky vrhu x_D od veľkosti elevačného uhla α výstrelu (obr. 7.7) pri začiatkovej rýchlosti $v_0 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ nám dokazuje, že najväčší dostrel vo vákuu má delo pod elevačným uhlom 45° . V prípade, keď sme na meranie dĺžky vrhu x_D použili digitálne meradlo, ktoré je súčasťou simulácie a merali sme vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy až po bod, v ktorom strela pri dopade prešla osi x , namerané a vypočítané hodnoty sa zhodujú, o čom svedčí aj graf na obr. 7.7.

Porovnaním vypočítaných i na simulácii nameraných hodnôt x_D' (obr. 7.8) a t_D' (obr. 7.9) v závislosti od veľkosti elevačného uhla, pri začiatkovej rýchlosti $v_0 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, môžeme konštatovať, že sa takmer zhodujú. Malé rozdiely sú spôsobené zaokrúhľovaním čísel nameraných na simulácii.

Vyhodnotenie výsledkov experimentovania so simuláciou

Simulácia Coloradskej univerzity *Pohyb strely* [1] je veľmi pekne vizuálne spracovaná. Bohatý výber jej možností vstupných parametrov môže experimentátora pohltiť natoľko, že jej bude venovať aj niekoľko hodín.

Zaujímavosťou simulácie je možnosť vybrať si: a) druh streliva a vystreliť z dela: teleso, delostrelecký náboj, golfovú loptičku, bejzbalovú loptu, bowlingovú guľu, futbalovú loptu, tekvicu, dospelého človeka, piano, či auto; b) veľkosť začiatkovej rýchlosti c) možnosť zmeniť výšku a miesto podstavca s delom; d) uhol sklonu; e) hmotnosť telesa; f) priemer telesa; g) odpor vzduchu a nastaviť jeho hodnotu.

K správnej atmosfére si pri experimentovaní môžeme zapnúť zvuk, ktorý imituje zvuk výstrelu. Práci so simuláciou by pomohol zber experimentálnych dát, ktorý je nedostatočný.

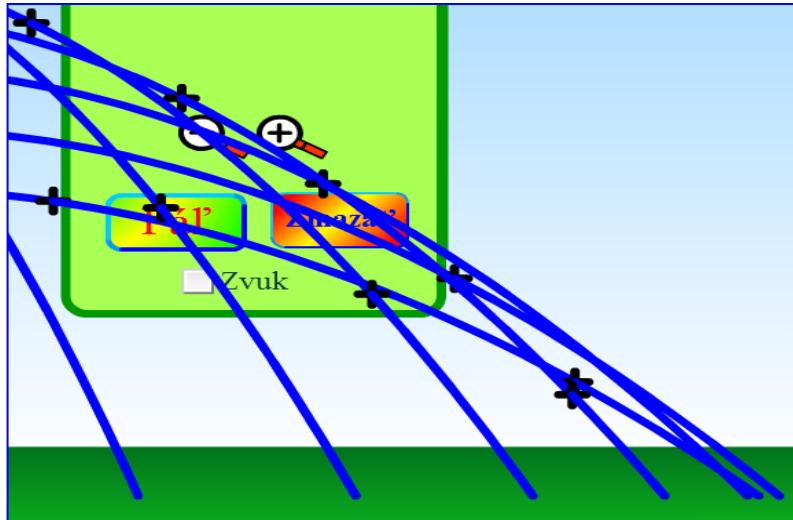
Simulácia nezaznamenáva, kedy náboj pretne os x . Hodnoty x_D' a t_D' zaznamená až po dopade strely na zemský povrch. Výhodou je, že pomocou digitálneho meradla môžeme odmerať dĺžky vrhu x_D (vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy po miesto, kde strela pri dopade prešla os x). Nevýhodou je, že simulácia neponúka digitálne stopky, ktoré by sme mohli zastaviť a odmerať čas dopadu v mieste prechodu strely osou x .

Experimentovanie so simuláciou sme realizovali v ideálnych podmienkach, bez odporu vzduchu. V reálnych podmienkach je pohyb telesa ovplyvnený odporom vzduchu.

Napriek možnosti bohatého výberu dosadených hodnôt premenných, na simulácii chýba zobrazenie najvyššej dosiahnutej výšky aj s časový údajom (možno ju však odmerať digitálnym meradlom). Os x by mohla byť zobrazená na celej obrazovke simulácie, alebo by

mohla aspoň ponúkať túto funkciu. Chýba tlačidlo *stop*, ktoré by umožňovalo danú simuláciu v ľubovoľnom časovom okamihu pohybu zastaviť.

Ako ďalšiu nevýhodu možno označiť nepohyblivosť zelenej tabuľky. Ak nám tabuľku pretne viac trajektórií striel, stáva sa tabuľka nečitateľnou (obr. 7.10).



Obr. 7.10 Zobrazenie jednej z nevýhod simulácie [1] – prekrývanie trajektórií striel

Pri zväčšovaní obrázka, trajektória letu strely zväčšuje svoju hrúbku, ale pri následnom zmenšení obrázku sa jej hrúbka nemení. Prekrýva tak tabuľku a aj iné trajektórie striel (obr. 7.10).

Ďalšou možnosťou je využiť simuláciu na porovnanie reálneho experimentu, ktorý študent realizuje spolu s virtuálnym experimentom. Ako príklad reálneho experimentu možno realizovať streľbu z lego dela.

Cieľ:

- odmerať dostrel lego dela a porovnať ho s výsledkom, ktorý ponúka interaktívna simulácia *Pohyb strely* [1],
- odmerať elevačný uhol α , ktorý zvierá lego delo s vodorovnou rovinou,
- vypočítať veľkosť začiatocnej rýchlosti šikmého vrhu v_0 ,
- vypočítať čas dopadu strely t_D a porovnať ho s výsledkom, ktorý ponúka interaktívna simulácia *Pohyb strely* [1].

Prístroje a pomôcky: lego delo, otáčateľný podstavec, uhlomer, náboje, meracie oceľové pásmo, múka (pomáha určiť presný dostrel pomocou stôp, ktoré zanechá náboj), (obr.7.11).



Obr. 7.11 Pomôcky na streľbu z lego dela [4]

Postup práce

1. Na dlážku sme natiahli pásmo.
2. Popri pásme sme rozsypali múku.
2. Na podstavec sme pripevnili lego delo a vložili sme doň náboj.
3. Pomocou uhlomera sme odmerali elevačný uhol.
4. Postupne sme vystrelili desať nábojov, odmerali sme vzdialenosť miesta ich dopadu od dela a namerané hodnoty sme zapísali do tabuľky 7.2.
5. Zo vzťahu (7.16) sme vyjadrili a vypočítali začiatočnú rýchlosť šikmého vrhu v_0 .
6. Zo vzťahu (7.17) sme vypočítali čas dopadu strely t_D .

Spracovanie nameraných údajov:

Nameraný elevačný uhol: $\alpha = 20^\circ$

Tabuľka 7.2 Hodnoty vzdialenosti miesta dopadu náboja namerané lego delom $\alpha = 20^\circ$

Dostrel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_D / m	1,0	0,9	1,0	0,96	1,15	1,06	0,85	1,04	1,1	0,94
$\overline{x_D} / \text{m}$	1,0									

Z nameraných hodnôt dostrelu lego dela (tab. 7.2) sme vypočítali jeho aritmetický priemer $\overline{x_D} = 1,0 \text{ m}$. Túto hodnotu sme ďalej použili v nasledujúcom výpočte.

Výpočet veľkosti začiatočnej rýchlosti i a času dopadu strely:

Zápis:

$$\alpha = 20^\circ$$

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\overline{x_D} = 1,0 \text{ m}$$

$$t_D = ?$$

$$v_0 = ?$$

Riešenie:

Zo vzťahu (7.16) sme si vyjadrili vzťah na výpočet veľkosti začiatočnej rýchlosti šikmého vrhu v_0 a následne sme ju aj vypočítali:

$$v_0^2 = \frac{gx_D}{\sin 2\alpha}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx_D}{\sin 2\alpha}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,81 \text{ m.s}^{-2} \cdot 1,0 \text{ m}}{\sin 2 \cdot 45^\circ}}$$

$$v_0 = 3,9 \text{ m.s}^{-1}$$

Čas dopadu strely sme vypočítali zo vzťahu (7.17):

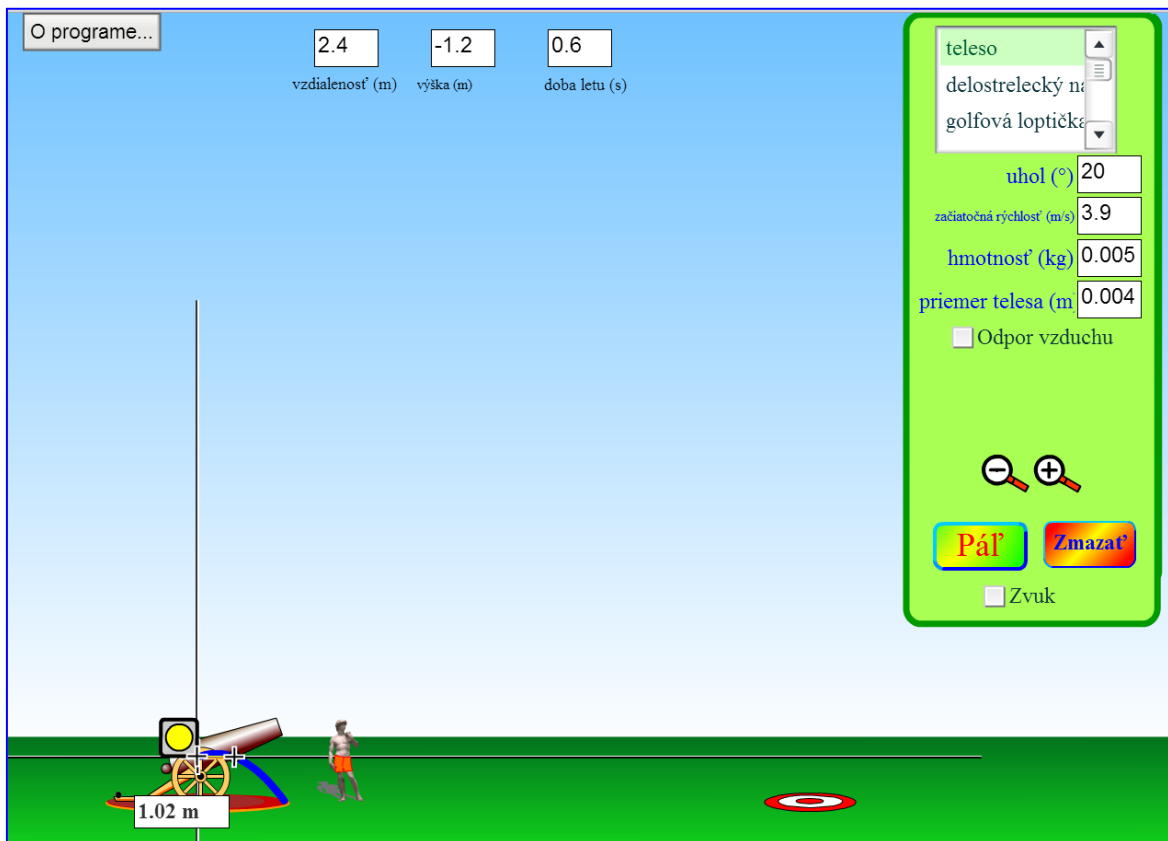
$$t_D = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$t_D = \frac{2 \cdot 3,9 \text{ m.s}^{-1} \cdot \sin 45^\circ}{9,81 \text{ m.s}^{-2}}$$

$$t_D = 0,56 \text{ s}$$

Odpoveď: Veľkosť začiatočnej rýchlosti šikmého vrhu $v_0 = 3,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a čas dopadu strely $t_D = 0,56 \text{ s}$.

Namerané a vypočítané hodnoty sme porovnali s hodnotami, ktoré pri rovnakom elevačnom uhle a rovnakej začiatočnej rýchlosti poskytuje simulácia (obr. 7.12).



Obr. 7.12 Hodnoty x_D , x_D' a t_D' namerané simuláciou [1] so vstupnými hodnotami rovnakými ako pri streľbe z lego dela

Hodnoty namerané na simulácii:

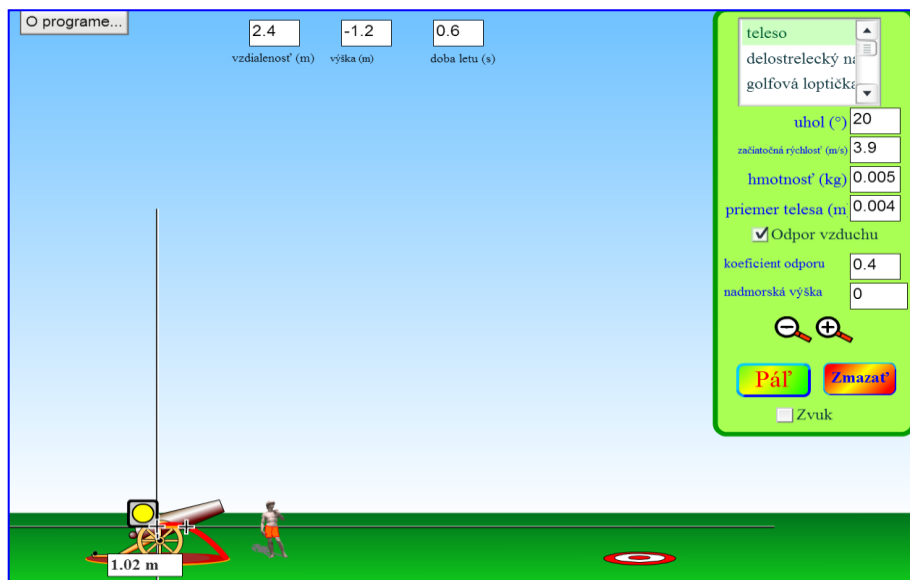
$$x_D = 1,02 \text{ m}$$

$$x_D' = 2,4 \text{ m}$$

$$t_D' = 0,60 \text{ s}$$

Odpoveď: Pri porovnaní hodnôt nameraných a vypočítaných pri streľbe z lego dela a nameraných simuláciou môžeme konštatovať, že dĺžka vrhu nameraná digitálnym meradlom $x_D = 1,02$ m sa približne rovná aritmetickému priemeru dostrelu lego dela: $\overline{x_D} = 1,0$ m. Rozdiel môže byť spôsobený subjektívnou chybou merania. Čas dopadu pri streľbe z lego dela bol klasickými stopkami nemerateľný, preto ho nemôžeme porovnať s vypočítanou hodnotou.

Pri experimentovaní so simuláciou sme pracovali v ideálnych podmienkach (bez odporu vzduchu). Ak sme do simulácie zadali koeficient odporu vzduchu v intervale 0,2 až 0,4, čo sú tabuľkové hodnoty pre moderné osobné automobily (skutočnú hodnotu koeficientu odporu vzduchu sme zámerné niekoľkonásobne prekročili), na nameraných hodnotách x_D , t_D a x_D na simulácii sa to neprejavilo (obr. 7.13), pretože hmotnosť, priemer i rýchlosť náboja sú veľmi malé.



Obr. 7.13 Hodnoty x_D , t_D a x_D namerané simuláciou [1] so vstupnými hodnotami rovnakými ako pri streľbe z lego dela a s koeficientom odporu vzduchu 0,4

Záver

Prostredníctvom experimentovania s interaktívnou simuláciou Pohyb strely [1], sme overovali jeho fyzikálnu správnosť, opísali sme šikmý vrh nahor a skúmali sme vzťahy medzi veličinami opisujúcimi tento pohyb. Na základe uvedených skutočností môžeme konštatovať, že simulácia je fyzikálne správna. Má svoje výhody i nevýhody, ktoré sme zhodnotili v texte vyššie.

Simulácia ako aj reálny pokus demonštrovali teóriu šikmého vrhu. Avšak simulácia nám ponúka väčšiu možnosť overovania fyzikálnych javov, napr. merania v ideálnych i v reálnych podmienkach.

Reálny pokus má množstvo nedostatkov napr.: z dela sa dalo strieľať len do určitého elevačného uhla, čas bol klasickými stopkami nemerateľný. Meranie bolo náročnejšie ako meranie so simuláciou, vznikol pri ňom neporiadok z rozsypanej múky. Ak strela netrafila pás z múky, bolo potrebné výstrel opakovať.

Na základe našich skúseností, hodnotíme simuláciu ako vhodnejšiu na overovanie teoretických poznatkov z oblasti šikmého vrhu nahor.

Výhodou reálneho pokusu ale nesporne je, že študent si prostredníctvom neho môže zlepšovať svoju zručnosť pri práci s reálnymi pomôckami.

Na záver môžeme konštatovať, že sme cieľ projektu splnili.

Literatúra

- [1] Dubson, M. a PhET vývojový tím: *Pohyb strely*, [online] (dostupné na: http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_sk.html, citované dňa 15. 10. 2013).
- [2] Holliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: *Fyzika, Část 1 Mechanika* VUTIUM, Prometheus. Brno ISBN 80-214-1868-0.
- [3] Ožvoldová, M., Červeň, I. *Úvod do vysokoškolskej fyziky*. STU v Bratislave ISBN 80-227-2114-X.
- [4] Blažková, P. *Motivácia vo vyučovaní fyziky*. Diplomová práca. Pdf TU v Trnave 2011.

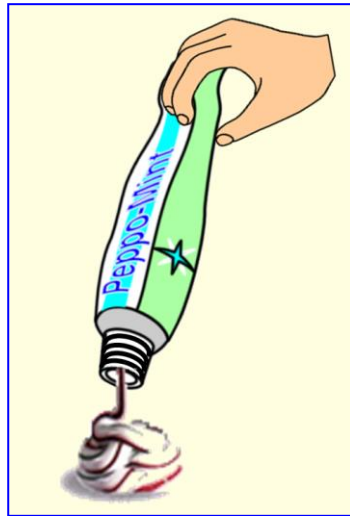
(V kolážach sme využívali obrázky [online] voľne dostupné na: www.freefbpictures.com, citované dňa 10. 10. 2013 a obrázky z Galérie Smart Notebooku.)

8 Zadanie projektu 7

Téma projektu: Využitie Pascalovho zákona

Cieľ: Na základe experimentovania s fyzletom *Pascal's Principle* (Pascalov zákon) [online] (dostupné na: <http://www.physics.unl.edu/~klee/phys151/compreci/crw11/crw11.html>) [1], overiť jeho fyzikálnu správnosť, uviesť príklady využitia hydraulického zariadenia v praxi.

Motivácia: Prečo zubná pasta vychádza z tuby, keď ju stlačíme na opačnom konci (obr. 8.1)? Aký zákon pri tom využívame?



Obr. 8.1 Motivačný obrázok k zadaniu projektu *Využitie Pascalovho zákona* (vlastná koláž)

Úlohy:

1. Overte fyzikálnu správnosť fyzletu *Pascal's Principle* (Pascalov zákon) [online] (dostupné na: <http://www.physics.unl.edu/~klee/phys151/compreci/crw11/crw11.html>) [1].
2. Uveďte príklady využitia hydraulického zariadenia v praxi.

Čas vymedzený na projekt: týždeň.

Literatúra

[1] *Pascal's Principle* (Pascalov zákon) [online] (dostupné na: <http://www.physics.unl.edu/~klee/phys151/compreci/crw11/crw11.html>, citované dňa 9. 1. 2013).

(V koláži sme využili obrázky z Galérie Smart Notebooku.)

Záver

Experimentovanie s využitím interaktívnych simulácií a apletov, umožňuje študentom aktívne sa zúčastňovať na procese, v ktorom prírodovedné poznatky vznikajú. Virtuálne experimenty možno realizovať prakticky vždy a z ktoréhokoľvek miesta na Zemi. Potrebný je len počítač, prístup na internet a aktívna Java 6.0. Môže na nich pracovať súčasne aj viacero experimentátorov. Vo väčšine apletov je možné aplikácie si stiahnuť do svojho počítača. Niektoré z nich možno tiež kedykoľvek prerušiť, krokovať, pozastaviť, čo je hlavne pri dejoch, kde je potrebné pozorovať a merať malé časové úseky, veľmi prínosné.

Prostredie mnohých interaktívnych simulácií je navyše aj graficky zaujímavé spracované, čo tiež môže experimentátora motivovať.

V porovnaní s kladnými stránkami, nedostatkom interaktívnych simulácií a apletov je, že ak nie sú profesionálne a fyzikálne správne vytvorené, môžu u žiakov a študentov vytvárať miskoncepce. Avšak takéto aplety skúsený učiteľ nebude používať, nakoľko internet ponúka veľké množstvo didakticky správnych simulácií rôznych dejov, z ktorých niektoré sme v práci predstavili.

Určite by sme ešte mohli vymenovať viac výhod i nevýhod, ale na základe našich praktických skúseností si myslíme, že výhody prevažujú.

V neposlednom rade by sme chceli zdôrazniť, že jednou z prierezových tématických oblastí, ako povinnej súčasť obsahu vzdelávania, ktoré v novej školskej reforme zavádza Štátny vzdelávací program, je tvorba projektu a prezentačné zručnosti. V rámci predmetu *Simulácie a aplety v prírodných vedách* môžu študenti PdF TU v Trnave pri riešení projektov získať nielen hlbšie teoretické poznatky, ale aj praktické skúsenosti, ktoré budú môcť neskôr využiť vo svojej pedagogickej praxi.

ISBN 978-80-8082-755-7