VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ

Žaneta Gerhátová– Peter Čerňanský

ZBIERKA ÚLOH Z TERMODYNAMIKY A MOLEKULOVEJ FYZIKY I.

TRNAVSKÁ UNIVERZITA V TRNAVE

Pedagogická fakulta

Trnava 2012

© 2012 PaedDr. Žaneta Gerhátová, PhD., doc. RNDr. Peter Čerňanský, PhD.

Recenzenti:

Doc. RNDr. Mária Rakovská, CSc.

Doc. RNDr. Miroslava Ožvoldová, CSc.

ISBN: 978-80-8082-572-0

EAN: 9788080825720

OBSAH

Predhovor 4

Teplota a teplotná rozťažnosť telies 6

Hookov zákon 27

Vlastnosti zriedeného plynu v rovnováhe 37

Stavová rovnica ideálneho plynu 39

Daltonov zákon 52

Prvá veta termodynamiky 55

Polytropické deje v ideálnom plyne 67

Tepelný stroj 120

PREDHOVOR

Pomocou zmyslových orgánov sme schopní pozorovať makroskopické telesá a ich makroskopické vlastnosti. Empirickým spôsobom získané poznatky po ich systemizáciu na základe pozorovaných súvislostí medzi nimi formulovanými ako zákony tvoria základ fenomenologických teórií. Klasická termodynamika k takýmto fenomenologickým teóriám patrí a bola dopracovaná do elegancie matematických teórií vychádzajúcich zo základných a všeobecne uznávaných právd – axióm (princípov) – dovoľujúcim odvodzovať ďalšie zákonitosti logickým deduktívnym spôsobom. Opisuje tepelné javy pričom vychádza z fenomenologických makroskopických vlastností telies a nevšíma si ich mikroskopickú štruktúru. Na rozdiel od nej, molekulová fyzika vychádza z mikroskopickej molekulárnej stavby látok a na jej základe vysvetľuje makroskopické vlastnosti a správanie sa telies. Táto tzv. molekulárno-kinetická teória látok je akýmsi predskokanom pred štatistickou fyzikou. Pre samotné pochopenie štatistickej fyziky je potrebné mať aspoň určité poznatky z termodynamiky.

Z predchádzajúceho celkom prirodzene vyplýva, že termodynamika a molekulová fyzika sú štandardnou súčasťou základného univerzitného kurzu všeobecnej fyziky. Pomerne veľkú časť obsahu učiva fyziky na základnej a strednej škole tvorí práve učivo z tejto oblasti. Preto je len prirodzené, že učiteľ fyziky, aby mohol kvalitne splniť svoje poslanie, potrebuje dobre zvládnuť problematiku príslušného obsahu. Vo fyzike možno hovoriť o dobrom zvládnutí učiva len vtedy, keď študent je schopný samostatne riešiť teoretické a praktické úlohy adekvátneho stupňa náročnosti. Skúsenosti z mnohých rokov ukazujú, že práve táto schopnosť, samostatne riešiť aj jednoduché úlohy, je najslabším článkom prípravy učiteľov fyziky.

Predložený text poskytuje návod na riešenie prevažne jednoduchých úloh prvej časti kurzu termodynamiky a molekulovej fyziky. Zahŕňa v sebe časť termometrie, rovnovážnych procesov v ideálnom plyne, aplikácie prvej vety termodynamiky a tepelné stroje. Pri jeho používaní odporúčame vždy najprv sa pokúsiť sa o samostatné riešenie úlohy a len následne porovnať svoj postup s návrhom riešenia v texte. Návrh riešenia je veľmi stručný, spravidla obsahuje len matematický postup. Preto je dôležité, aby študent pri riešení úlohy v matematickom postupe vedel fyzikálne zdôvodniť jednotlivé kroky.Väčšina úloh pochádza zo zbierky úloh Hajko a kol,: Fyzika v príkladoch, (5. vydanie), Bratislava, Alfa 1983.

Uvedomujeme si, že žiaden text nemôže byť dokonalý, a preto sa dá vždy vylepšovať. Za akékoľvek návrhy na vylepšenie, upozornenia na chyby a nedostatky budeme vďační.

Autori

Poďakovanie:

Radi by sme na tomto mieste poďakovali doc. RNDr. Márii Rakovskej, CSc. a doc. RNDr. Miroslave Ožvoldovej, CSc. za starostlivé prečítanie rukopisu, ich komentáre a návrhy na zlepšenie.

Zároveň si dovoľujeme poďakovať grantovej agentúre MŠ SR KEGA za finančnú podporu grantu 011TTU-4/2012 „Energia ako kategória v prírodovednom vzdelávaní prostredníctvom vzdialených experimentov a integrovaného e-learningu“ a vedeniu PdF TU v Trnave, ktorí umožnili vydanie publikácie.

TEPLOTA A TEPLOTNÁ ROZŤAŽNOSŤ TELIES

Pri exkurzii do histórie ľudského poznania zistíme, že pojem teploty primárne vznikol ako charakteristika pocitového stavu. Človek z hľadiska pocitového bol schopný podľa intenzity subjektívneho pocitu porovnávať stav telies. Stavy telesa korešpondujúce pocitu teploty bolo možné usporiadať - pocit dovolil vniesť do množiny stavov reláciu usporiadania. Neskôr si ľudia uvedomili, že s takýmto pocitovým usporiadaním korelujú hodnoty niektorých fyzikálnych veličín, merateľných na telesách. Napr. sa zistilo, že s takýmto pocitovým usporiadaním koreluje dĺžka tenkej tyče. Teplá tenká tyč má väčšiu dĺžku než studená a rozdiel dĺžok koreluje s rozdielom intenzity „pocitu teploty". Tento fakt dovoľuje zaviesť do usporiadanej množiny pocitových stavov teploty metriku. Takto pocitová teplota získa podstatný atribút fyzikálnej veličiny – veľkosť. Ak zmeriame rozdiel dĺžok tyče medzi dvoma dobre definovanými stavmi (dobre reprodukovateľnými, napr. stav topenia sa čistého ľadu pri normálnom atmosférickom tlaku a stav varu čistej vody rovnako za normálneho atmosférického tlaku) a rozdelíme tento rozdiel dĺžok trebárs na 100 rovnakých dielikov, môžeme lineárnou interpoláciou kvantifikovať teplotu – zaviesť stupeň teploty. Problémom však je, že takýto spôsob kvantifikácie závisí od použitého materiálu tyče. Stupnica definovaná pomocou tyče z iného materiálu by sa nezhodovala s pôvodnou stupnicou. Našťastie ukázalo sa, že objem plynov pri konštantnom tlaku vykazuje rovnakú koreláciu s pocitovou teplotou a pre zriedené plyny nezávisí od zloženia plynu. Zriedeným plynom realizovaná stupnica je už objektivizovaná, nezávisí od teplomernej látky a možno ju zmysluplne použiť na objektívnu kvantifikáciu pojmu teplota, teda zavedeniu teploty ako fyzikálnej stavovej veličiny. Pri konštantnom tlaku ($p = const.$):

$$V = V_0\left(1 + \gamma\Delta T\right),$$

kde γ je koeficient objemovej rozťažnosti plynu. Pomocou takto definovanej teploty možno experimentálne skúmať závislosť dĺžky tenkej tyče od teploty. Pre nie príliš veľký rozsah teplôt platí:

$$l = l_0\left(1 + \alpha\Delta T\right), \tag{1}$$

kde α sa nazýva koeficient dĺžkovej rozťažnosti a jeho veľkosť závisí od daného materiálu:

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0\Delta T} = \frac{\Delta l}{l_0\Delta T}. \tag{2}$$

Pre bežne používané kovové materiály hodnota α sa rádove rovná 10^{-5} K^{-1}. Podobná experimentálna (empirická) závislosť sa dá zistiť pre objem tuhého telesa:

$$V = V_0(1+\beta\Delta T), \qquad (3)$$

kde β je koeficient objemovej rozťažnosti tuhej látky.
Pretože hodnota α je veľmi malá, pri vyjadrení objemu telesa tvaru kvádra ako súčinu veľkostí jeho hrán pomocou (1) môžeme vyššie mocniny α zanedbať. Porovnaním takto získaného výsledku s (3) dostaneme:

$$\beta \approx 3\alpha . \qquad (4)$$

Úlohy:

Úloha 1 (Hajko, V. et al., 1983, str. 178/289)
Vzdialenosť dvoch bodov odmeraná oceľovým meradlom pri teplote 30 °C bola 186 m. Aká je správna hodnota tejto dĺžky, keď meradlo je správne pri teplote 18 °C?
(*Poznámka:* Koeficient dĺžkovej rozťažnosti ocele má hodnotu 12.10^{-6} K^{-1}.)

Zápis:

t_1 = 30 °C

T_1 = 303,15 K

t_0 = 18 °C

T_0 = 291,15 K

ΔT = 12 K

l_1 = 186 m

α(oceľ) = 12.10^{-6} K^{-1}

l = ?

Riešenie:

Pri zmene teploty o ΔT sa pôvodná dĺžka l_1 zmení na l, platí:

$$l = l_1(1+\alpha\Delta T)$$

$$l = 186\,\mathrm{m}.(1+12.10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.12\,\mathrm{K})$$

$$l = 186{,}0268\,\mathrm{m}$$

Odpoveď:

Správna hodnota tejto dĺžky je 186,03 m.

Úloha 2

Teplota medeného valca sa zväčšila zo 4 °C na 40 °C. Pri teplote 4 °C má valec výšku 40 mm. Je možné zistiť zväčšenie jeho výšky, ak na meranie použijeme mikrometrické meradlo, ktorého najmenší dielik má hodnotu 0,01 mm?

(*Poznámka:* Koeficient dĺžkovej rozťažnosti medi (Cu) má hodnotu $1{,}7.10^{-5}$ K^{-1}.)

Zápis:

t_1 = 4 °C

T_1 = 277,15 K

t = 40 °C

T_0 = 313,15 K

l_1 = 40 mm = 4.10^{-2} m

α(Cu) = $1{,}7.10^{-5}$ K^{-1}

Δl = ?

Riešenie:

Pri zmene teploty o ΔT sa pôvodná dĺžka medeného valca l_1 zmení na l, platí:

$$l = l_1(1 + \alpha\Delta T)$$
$$l = l_1 + l_1\alpha\Delta T$$
$$l - l_1 = l_1\alpha\Delta T$$
$$\Delta l = l_1\alpha\Delta T$$
$$\Delta l = 4.10^{-2}\ \mathrm{m}.1{,}7.10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}.36\,\mathrm{K}$$
$$\Delta l = 2{,}45.10^{-5}\,\mathrm{m} = 2{,}45.10^{-2}\,\mathrm{mm}$$

Odpoveď:

Vzhľadom na to, že prírastok výšky medeného valca $2{,}45.10^{-2}$ mm, je väčší než hodnota najmenšieho dielika mikrometrického meradla 10^{-2} mm, je možné tento prírastok namerať mikrometrickým meradlom.

Úloha 3 (Hajko, V. et al., 1983, str. 177/287)

Mosadzná a hliníková tyč majú pri teplote 20 °C rovnakú dĺžku 1 m. Aký bude rozdiel ich dĺžok, keď obidve tyče zohrejeme na teplotu 100 °C? (*Poznámka:* Koeficient dĺžkovej rozťažnosti hliníka (Al) je 24.10^{-6} K^{-1} a koeficient dĺžkovej rozťažnosti mosadze má hodnotu 19.10^{-6} K^{-1}.)

Zápis:

$t_1 = 20$ °C

$T_1 = 293{,}15$ K

$t_2 = 100$ °C

$T_2 = 373{,}15$ K

$\Delta T = 80$ K

$l_0 = 1$ m

$\alpha_1(\mathrm{Al}) = 24.10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$

$\alpha_2(\mathrm{mosadz}) = 19.10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$

$\Delta l = ?$

Riešenie: Pre dĺžku jednotlivých tyčí pri zmene teploty o ΔT platia vzťahy:

$$l_1 = l_0(1+\alpha_1 \Delta T)$$
$$l_2 = l_0(1+\alpha_2 \Delta T),$$

kde l_0 je pôvodná dĺžka tyčí.

Môžeme písať:

$$\Delta l = l_1 - l_2$$
$$\Delta l = l_0(1+\alpha_1 \Delta T) - l_0(1+\alpha_2 \Delta T)$$
$$\Delta l = l_0 + l_0\,\alpha_1 \Delta T - l_0 - l_0 \alpha_2 \Delta T$$
$$\Delta l = l_0\,\alpha_1 \Delta T - l_0 \alpha_2 \Delta T$$

$$\Delta l = l_0 \Delta T(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$\Delta l = 1\,\text{m}.80\,\text{K}.\left(24.10^{-6}\,\text{K}^{-1} - 19.10^{-6}\,\text{K}^{-1}\right)$$
$$\Delta l = 4.10^{-4}\,\text{m} = 0{,}04\,\text{cm}$$

Odpoveď:

Rozdiel dĺžok mosadznej a hliníkovej tyče po ich zahriatí na 100 °C bude 0,04 cm.

Úloha 4 (Hajko, V. et al., 1983, str. 177/288)

Mosadzná guľa má pri teplote 15 °C priemer 4 cm. Vypočítajte, akým otvorom by práve prešla pri teplote 555 °C? (*Poznámka:* Koeficient dĺžkovej rozťažnosti mosadze má hodnotu $19.10^{-6}\ K^{-1}$.)

Zápis:

t_1 = 15 °C

T_1 = 288,15 K

t_2 = 555 °C

T_2 = 828,15 K

ΔT = 540 K

$d = l_1$ = 4 cm = 0,04 m

α_1 (mosadz) = $19.10^{-6}\ K^{-1}$

l = ?

Riešenie:

Pri zmene teploty o ΔT sa pôvodná veľkosť priemeru mosadznej gule $d = l_1$ zmení na l, platí:

$$l = l_1(1 + \alpha_1 \Delta T)$$
$$l = 0{,}04\,\text{m}.\left(1 + 19.10^{-6}\,\text{K}^{-1}.540\,\text{K}\right)$$
$$l = 0{,}0404104\,\text{m} \cong 4{,}04\,\text{cm}$$

Odpoveď:

Pri teplote 555 °C by guľa z mosadze práve prešla otvorom priemeru 4,04 cm.

Iný spôsob riešenia úlohy 4:

Pri zmene teploty o ΔT sa pôvodný objem mosadznej gule V_0 zmení na V, platí:

$$V = V_0(1+\beta\Delta T)$$
$$V = V_0(1+3\alpha\Delta T)$$
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3(1+3\alpha\Delta T)$$
$$r^3 = r_0^3(1+3\alpha\Delta T)$$
$$r = \sqrt[3]{r_0^3}.\sqrt[3]{(1+3\alpha\Delta T)}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$r = 0{,}02\,\mathrm{m}.\sqrt[3]{(1+3.19.10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.540\,\mathrm{K})}$$
$$r = 0{,}0202\,\mathrm{m}$$
$$d = 2r$$
$$d = 2.0{,}0202\,\mathrm{m}$$
$$d = 0{,}0404\,\mathrm{m} = 4{,}04\,\mathrm{cm}$$

Odpoveď:

Pri teplote 555 °C by guľa z mosadze práve prešla otvorom priemeru 4,04 cm.

Úloha 5 (Hajko, V. et al., 1983, str. 178/296)

Dva rovnaké teplomery sú pri teplote 0 °C naplnené rovnakými objemami ortuti (Hg) a liehu (C_2H_5OH). Určite, aká je súvislosť medzi dĺžkou stĺpca prislúchajúceho jednému stupňu Celzia na stupnici ortuťového a liehového teplomera, keď sú známe príslušné koeficienty objemovej rozťažnosti ortuti (β_1 (Hg) = 18,2.10^{-5} K^{-1}) a liehu (β_2 (C_2H_5OH) = 110.10^{-5} K^{-1}), ako aj koeficient lineárnej rozťažnosti skla (α(sklo) = 10^{-5} K^{-1}).

Zápis:

t = 1 °C

t_0 = 0 °C

β_1 (Hg) = 18,2.10^{-5} K^{-1}

β_2 (C_2H_5OH) = 110.10^{-5} K^{-1}

α(sklo) = 10^{-5} K^{-1}

$l_1 = \mathrm{x}l_2$

Riešenie: Pri zmene teploty o ΔT sa pôvodný objem náplne ortuťového teplomeru V_{01} zmení na V_1 a pôvodný objem náplne liehového teplomeru V_{02} sa zmení na V_2. Teda platí:

$$V_1 = V_{01}(1+\beta_1 \Delta T)$$
$$V_1 = V_{01} + V_{01}\beta_1 \Delta T \,/ - V_{01}$$
$$V_1 - V_{01} = V_{01}\beta_1 \Delta T$$
$$\Delta V_1 = V_{01}\beta_1 \Delta T \,/ . \frac{1}{\beta_1 \Delta T}$$
$$V_{01} = \frac{\Delta V_1}{\beta_1 \Delta T}$$

$$V_2 = V_{02}(1+\beta_2 \Delta T)$$
$$V_2 = V_{02} + V_{02}\beta_2 \Delta T \,/ - V_{02}$$
$$V_2 - V_{02} = V_{02}\beta_2 \Delta T$$
$$\Delta V_2 = V_{02}\beta_2 \Delta T \,/ . \frac{1}{\beta_2 \Delta T}$$
$$V_{02} = \frac{\Delta V_2}{\beta_2 \Delta T}$$

Keďže oba teplomery (sklené nádobky teplomerov) boli rovnaké, po zvýšení teploty o rovnakú hodnotu budú mať rovnaké rozmery. Ak $V_{01} = V_{02}$, tak platí:

$$\frac{\Delta V_1}{\beta_1 \Delta T} = \frac{\Delta V_2}{\beta_2 \Delta T}$$
$$\frac{Sl_1}{\beta_1 \Delta T} = \frac{Sl_2}{\beta_2 \Delta T}$$

$$\Delta V_1 = Sl_1$$
$$\Delta V_2 = Sl_2$$

$$l_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} l_2$$
$$l_1 = \frac{18{,}2.10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}}{110.10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}} l_2$$
$$l_1 = 0{,}165\, l_2$$

Odpoveď: Medzi dĺžkou stĺpca prislúchajúceho 1 °C na stupnici ortuťového a liehového teplomera je nasledujúca súvislosť: $l_1 = 0{,}165\ l_2$.

Úloha 6 (Hajko, V. et al., 1983, str. 179/297) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)
Sklenený pyknometer objemu 15 cm^3 je pri teplote 0 °C naplnený ortuťou (Hg). Keď teplotu okolia zvýšime na 100 °C, z pyknometra vytečie 234 mm^3 ortuti. Vypočítajte, aký je koeficient objemovej rozťažnosti ortuti? (*Poznámka:* Koeficient dĺžkovej rozťažnosti skla má hodnotu 10^{-5} K^{-1}.)

Zápis:

$t_0 = 0$ °C

t = 100 °C

V_0 = 15 cm^3 = 15.10^{-6} m^3

ΔV = 234 mm^3 = 234.10^{-9} m^3

α(sklo) = 10^{-5} K^{-1}

β(Hg) = ?

Riešenie:

Medzi skutočným β a zdanlivým β* objemovým koeficientom rozťažnosti ortuti, kde β_s je objemový koeficient rozťažnosti skla (β_s = 3α) je vzťah: $\beta = \beta^* + \beta_s$. Keď V je objem, ktorý zaujíma ortuť pri teplote t, a V_0 je objem, ktorý zaujíma ortuť pri teplote t_0, je splnený vzťah:

$$V = V_0\left(1 + \beta^* \Delta T\right)$$
$$V = V_0 + V_0\beta^* \Delta T \,/ - V_0$$
$$V - V_0 = V_0\beta^* \Delta T$$
$$\Delta V = V_0\beta^* \Delta T \,/ .\frac{1}{V_0\Delta T}$$
$$\beta^* = \frac{\Delta V}{V_0\Delta T}$$
$$\beta^* = \frac{234.10^{-9}\,\mathrm{m}^3}{15.10^{-6}\,\mathrm{m}^3.100\,\mathrm{K}}$$
$$\beta^* = 15{,}6.10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$$

$$\beta = \beta^* + \beta_s$$
$$\beta = \beta^* + 3\alpha_s$$
$$\beta = 15{,}6.10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}. + 3.10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$$
$$\beta = 18{,}6.10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$$

Odpoveď:

Koeficient objemovej rozťažnosti ortuti má hodnotu 18,6.10^{-5} K^{-1}.

Úloha 7 (Hajko, V. et al., 1983, str. 178/290)

Koleso rušňa má pri teplote 0 °C polomer 1 m. Aký je rozdiel v počte otočení kolesa na dráhe 100 km v lete pri teplote 25 °C a v zime pri teplote -25 °C, keď koeficient dĺžkovej rozťažnosti materiálu kolesa má hodnotu 12.10^{-6} K?

Zápis:

t_1 = 25 °C

T_1 = 298,15 K

t_2 = -25 °C

T_2 = 248,15 K

ΔT_1= 25 K

ΔT_2= -25 K

l = 100 km = 10^5 m

r_0 = 1 m

α (materiál kolesa) = 12.10^{-6} K^{-1}

Δn = ?

Riešenie:

Koleso má pri teplote 0 °C polomer 1 m. Po jeho zohriatí na 25 °C sa vplyvom rozťažnosti materiálu, z ktorého je koleso vyrobené zväčší na polomer, ktorý si označíme r_1. Platí:

$$r_1 = r_0\left(1+\alpha\Delta T_1\right)$$
$$r_1 = 1\,\mathrm{m}.\left(1+12.10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.25\,\mathrm{K}\right)$$
$$r_1 = 1{,}0003\,\mathrm{m}$$

V zime pri teplote -25 °C sa polomer kolesa zmenší na polomer, ktorý si označíme r_2. Platí:

$$r_2 = r_0\left(1+\alpha\Delta T_2\right)$$
$$r_2 = 1\,\mathrm{m}.\left(1+12.10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.-25\,\mathrm{K}\right)$$
$$r_2 = 0{,}9997\,\mathrm{m}$$

Pre počet otočení kolesa na dráhe l platí: $n = \frac{l}{O}$, kde O je obvod kolesa.

Pre obvod kolesa v lete, ktorý si označíme O_1 pri teplote t_1 = 25 °C dostaneme:

$$O_1 = 2\pi r_1$$
$$O_1 = 2.3{,}14.1{,}0003\,\mathrm{m}$$
$$O_1 = 6{,}28507\,\mathrm{m}$$

Pre obvod kolesa v zime, ktorý si označíme O_2 pri teplote t_1 = -25 °C dostaneme:

$$O_2 = 2\pi r_2$$
$$O_2 = 2.3{,}14.0{,}9997\,\mathrm{m}$$
$$O_2 = 6{,}2813\,\mathrm{m}$$

Pre počet otočení kolesa v lete, ktoré si označíme n_1 platí:

$$n_1 = \frac{l}{O_1}$$
$$n_1 = \frac{100000\,\mathrm{m}}{6{,}28507\,\mathrm{m}}$$
$$n_1 = 15910{,}7$$

Pre počet otočení kolesa v zime, ktoré si označíme n_2 platí:

$$n_2 = \frac{l}{O_2}$$
$$n_2 = \frac{100000\,\mathrm{m}}{6{,}28513\,\mathrm{m}}$$
$$n_2 = 15920{,}3$$

Rozdiel v počte otočení kolesa v lete a v zime vypočítame zo vzťahu:

$$\Delta n = n_2 - n_1$$
$$\Delta n = 15920{,}2703 - 15910{,}7271$$
$$\Delta n = 9{,}548$$

Odpoveď:

V počte otočení kolesa v lete pri teplote 25 °C a v zime pri teplote -25 °C na dráhe 100 km je rozdiel 9,55 otočení.

Úloha 8 (Hajko, V. et al., 1983, str. 292/178)

O koľko treba zvýšiť vonkajší tlak, aby sa pri zohriatí z 0 °C na 10 °C objem ortuti nezmenil? (*Poznámka:* Koeficient objemovej stlačiteľnosti ortuti κ = 3,85.10^{-11} N^{-1}.m^{2}; koeficient objemovej rozťažnosti ortuti β = 18,2.10^{-5} K^{-1}).

Zápis:

t_0 = 0 °C

T_0 = 273,15 K

t = 10 °C

T = 283,15 K

ΔT = 10 K

κ = 3,85.10^{-11} N^{-1}.m^2

β = 18,2.10^{-5} K^{-1}

Δp = ?

Riešenie:

Pri zmene teploty o ΔT sa pôvodný objem V_0 zmení na V, platí:

$$V = V_0\left(1 + \beta\Delta T\right)$$
$$V = V_0\left(1 + 18,2.10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}.10\,\mathrm{K}\right)$$
$$V = 1,00182 V_0$$

Objem kvapaliny pri tlaku p je:

$$V = V_0\left(1 - \kappa\Delta p\right)$$
$$1,00182 V_0 = V_0\left(1 - \kappa\Delta p\right) . \frac{1}{V_0}$$
$$1,00182 = \left(1 - \kappa\Delta p\right) / -1$$
$$1,00182 - 1 = -\kappa\Delta p\ / .\left(\frac{1}{\kappa}\right)$$
$$\frac{0,00182}{3,85.10^{-11}\mathrm{Pa}} = -\Delta p$$
$$47,27.10^{6}\ \mathrm{Pa} \cong -\Delta p$$

Odpoveď:

Vonkajší tlak treba zvýšiť o 47,27.10^6 Pa.

Úloha 9

Lieh hmotnosti 1,2 kg má pri teplote 20 °C objem 1,5 dm^3. Určite hustotu liehu pri teplote 75 °C. (*Poznámka:* Koeficient objemovej rozťažnosti liehu β má hodnotu 110.10^{-5} K^{-1}).

Zápis:

$t_1 = 20\ °C$

$T_1 = 293{,}15\ K$

$t = 75\ °C$

$T = 348{,}15\ K$

$\Delta T = 55\ K$

$V_1 = 1{,}5\ dm^3 = 1{,}5.10^{-3}\ m^3$

$m = 1{,}2\ kg$

$\beta = 110.10^{-5}\ K^{-1}$

$\rho = ?$

Riešenie:

So zmenou teploty dochádza k zmene objemu telies, tzn., že sa musí meniť aj ich hustota, pretože hmotnosť nepohybujúcich sa telies je konštantná. Hustota liehu pri teplote 20 °C je daná vzťahom:

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1}.$$

Ak má teleso pri začiatočnej teplote t_1 objem V_1 a hustotu ρ_1, potom má pri teplote t objem V a hustotu ρ, pre ktorú platí:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_1(1+\beta\Delta T)} = \frac{m(1-\beta\Delta T)}{V_1\left(1+(\beta\Delta T)^2\right)} \approx \frac{m(1-\beta\Delta T)}{V_1} = \rho_1(1-\beta\Delta T)$$

Predchádzajúcimi jednoduchými úpravami a zanedbaním kvadratického člena druhého rádu $(\beta\Delta T)^2$, ktorý je vzhľadom na hodnoty koeficientu objemovej rozťažnosti v porovnaní s jednotkou veľmi malý, môžeme vzťah pre hustotu liehu ρ pri teplote T zapísať v tvare:

$$\rho = \rho_1(1-\beta\Delta T)$$

$$\rho = \frac{m}{V_1}(1-\beta\Delta T)$$

$$\rho = \frac{1{,}2\,\mathrm{kg}}{1{,}5.10^{-3}\,\mathrm{m}^3}\left(1 - 110.10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}.55\mathrm{K}\right)$$

$$\rho = 751{,}6\,\mathrm{kg.m}^{-3}$$

Odpoveď:

Pri teplote 75 °C má lieh hustotu 751,6 kg.m^{-3}.

Poznámka: Väčšina látok má koeficient objemovej rozťažnosti β kladný, tzn. ich hustota s rastúcou teplotou klesá. Výnimkou je napr. voda, ktorá má najväčšiu hustotu pri t = 3,98 °C, a pri teplotách pod touto hodnotou je koeficient objemovej rozťažnosti záporný. Tento jav sa nazýva *anomália vody*.

Úloha 10 (Hajko, V. et al., 1983, str. 167/277) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)

Dva kovové pásy (medený a železný) rovnakej hrúbky d = 2 mm majú pri teplote t_0 = 0 °C rovnakú dĺžku a sú zvarené tak, že tvoria rovnú doštičku. Keď ju zohrejeme, deformuje sa a bude mať tvar kruhového oblúka. Vypočítaj jeho polomer pri teplote t = 400 °C.

Zápis:

t_0 = 0 °C

t = 400 °C

d = 2 mm

r = ?

Riešenie:

Pre dĺžku oblúka platí: $s = r\varphi$

l_1 a l_2 sú oblúky kružníc; φ je stredový uhol.

Oblúk l_1 je oblúk kružnice s polomerom $r - \frac{d}{2} = r_1$

Oblúk l_2 je oblúk kružnice s polomerom $r + \frac{d}{2} = r_2$

Po zohriatí na teplotu *t*, bude dĺžka medeného pásu:

$$l_1 = l_0(1+\alpha_1 \Delta T)$$

Po zohriatí na teplotu *t*, bude dĺžka železného pásu:

$$l_2 = l_0(1+\alpha_2 \Delta T)$$

Keď platí: $s = r\varphi$, potom

$$l_1 = r_1\varphi = \left(r - \frac{d}{2}\right)\varphi$$

$$l_2 = r_2\varphi = \left(r + \frac{d}{2}\right)\varphi$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\left(r+\frac{d}{2}\right)\varphi}{\left(r-\frac{d}{2}\right)\varphi}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\left(r+\frac{d}{2}\right)}{\left(r-\frac{d}{2}\right)}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = 1+(\alpha_2-\alpha_1)t$$

$$\frac{\left(\frac{2r+d}{2}\right)}{\left(\frac{2r-d}{2}\right)} = 1+(\alpha_2-\alpha_1)t$$

$$\frac{2(2r+d)}{2(2r-d)} = 1+(\alpha_2-\alpha_1)t \,/.(2r-d)$$

$$2r+d = [1+(\alpha_2-\alpha_1)t].(2r-d)$$

$$2r+d = (2r-d)+[(2r-d).(\alpha_2-\alpha_1)t]/-(2r-d)$$

$$2d = [(2r-d).(\alpha_2-\alpha_1)t]/.\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)t}$$

$$\frac{2d}{(\alpha_2-\alpha_1)t} = 2r-d \,/+d$$

$$\frac{2d}{(\alpha_2-\alpha_1)t}+d = 2r \,/.\frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{(\alpha_2-\alpha_1)t}+\frac{d}{2}=r\ /.\frac{1}{2}$$

$$r=\frac{2.10^{-3}\ \mathrm{m}}{(17-12).10^{-6}\ °\mathrm{C}-1.400\ °\mathrm{C}}+10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$r=1{,}001\mathrm{m}$$

Odpoveď:

Polomer oblúka pri teplote 400 °C je 1,001 m.

Úloha 11 (Hajko, V. et al., 1983, str.166/273) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)

Teplomer je naplnený vodou. Určite, pre ktoré teploty v Celziovej stupnici v rozsahu teplôt od 0 °C do 10 °C bude teplomer ukazovať rovnaké údaje. Závislosť objemu vody od teploty v tomto rozsahu teplôt možno vyjadriť presnejším vzťahom než je vzťah (3): $V=V_0(1+\gamma t+\sigma t^2)$, kde γ = 6,105.10^{-5} K^{-1}; σ = -7,733.10^{-6} K^{-2} a V_0 je objem vody pri teplote 0 °C.

Zápis:

γ = 6,105.10^{-5} K^{-1}

σ = -7,733.10^{-6} K^{-2}

V_0 = objem vody pri teplote 0 °C

t = ?

Riešenie:

Rovnaké údaje bude teplomer ukazovať pri rovnakých objemoch vody. Pretože závislosť $V(t)$ je kvadratická, existujú dve také teploty t_1 a t_2, pri ktorých má voda v rozsahu teplôt 0 až 10 °C rovnaký objem.

Upravíme rovnicu:

$$V=V_0\left(1+\gamma t+\sigma t^2\right)/\frac{1}{V_0}$$

$$\frac{V}{V_0}=1+\gamma t+\sigma t^2\ /.\frac{1}{\sigma}$$

$$\frac{V}{V_0}.\frac{1}{o}=\frac{1}{\sigma}+\frac{\gamma}{\sigma}t+t^2$$

$$\frac{1}{\sigma}+\frac{\gamma}{\sigma}t+t^2-\frac{V}{V_0\sigma}=0$$

$$t^2+\frac{\gamma}{\sigma}t+\frac{V_0-V}{V_0\sigma}=0$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu, kde koeficienty pri jednotlivých mocninách sa rovnajú a = 1; b = $\frac{\gamma}{\sigma}$; c = $\frac{V_0-V}{V_0\sigma}$

Riešime kvadratickú rovnicu, hľadáme jej korene t_1, t_2:

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2}=\frac{-\frac{\gamma}{\sigma}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2-4\left(\frac{V_0-V}{V_0\sigma}\right)}}{2}$$

Konkrétne hodnoty dvojíc riešení by sme dostali dosadením konkrétnych hodnôt γ, σ a (ak by sme poznali) podielu $\frac{V}{V_0}$. Ten však nepoznáme. Na druhej strane z teórie riešenia kvadratických rovníc vieme, že korene kvadratickej rovnice súvisia s koeficientmi, o. i. ak koeficient pri kvadratickom člene sa rovná jednej, potom súčet koreňov sa rovná mínus koeficient pri lineárnom člene. Ten v našej rovnici nezávisí od podielu $\frac{V}{V_0}$. Hraničnou hodnotou z celej množiny riešení bude také riešenie pri ktorom sa menšia hodnota rovná nule. Väčšia hodnota sa bude teda rovnať súčtu (t_1+t_2). Koreň (t_1+t_2) bude združeným koreňom ku koreňu rovnajúcemu sa nule Preto v intervale 0 až (t_1+t_2) budú vždy existovať dve hodnoty teploty, pre ktoré bude teplomer ukazovať rovnaké údaje (s výnimkou jednej – najmenšej hodnoty).

$t = t_1 + t_2$

$$t = \frac{-\frac{2\gamma}{\sigma}}{2}$$

$$t = -\frac{\gamma}{\sigma}$$

$$t = -\frac{6{,}105.10^{-5}\,K^{-1}}{-7{,}733.10^{-6}\,K^{-2}}$$

$$t = 7{,}89\,K \cong 7{,}9\,K$$

Pozn.:

Úlohu možno riešiť aj inými spôsobmi:

1. Využiť symetriu paraboly okolo osi a znalosť teploty maximálnej hustoty (minimálneho objemu) vody. Rozdiel medzi touto teplotou a nulovou v Celzioch musí byť rovnaký ako medzi maximálnou, ktorej zodpovedá rovnaký objem ako pri nulovej a teplotou max. hustoty. (t_2 = 2x3,98 = 7,96 C)
2. Využiť konkrétny tvar závislosti objemu od teploty. Hodnota t_2 bude zodpovedať prípadu $V = V_0$.

Odpoveď:

Ku každej teplote t_1 v rozsahu teplôt 0 až 7,9 °C existuje teplota t_2, určená vzťahom t_2 = 7,9 °C – t_1, pri ktorej vodný teplomer ukazuje rovnaký údaj.

Úloha 12 (Hajko, V. et al., 1983, str. 178/291)

Homogénna železná tyč s hmotnosťou 3 kg má pri teplote 8 °C dĺžku 1 meter. Vypočítajte, ako sa zmení moment zotrvačnosti tejto tyče vzhľadom na os kolmú na smer tyče a prechádzajúcu jej koncovým bodom, keď sa tyč zohreje na teplotu 100 °C? (*Poznámka:* Koeficient dĺžkovej rozťažnosti železa (Fe) má hodnotu 12.10^{-6} K^{-1}.)

Zápis:

m = 3 kg

l_1 = 1 m

$t_1 = 8$ °C

$T_1 = 281{,}15$ K

$t_2 = 100$ °C

$T_2 = 373{,}15$ K

$\Delta T = 92$ K

α (Fe) = 12.10^{-6} K^{-1}

$\Delta J = ?$

Riešenie:

Moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky l vzhľadom na os, ktorá prechádza jej koncovým bodom a je kolmá na smer tyče vypočítame podľa vzťahu:

$$J = \int_0^l x^2 \mathrm{d}m$$

Element hmotnosti si môžeme vyjadriť cez element dĺžky:

$$\mathrm{d}m = \left(\frac{m}{l}\right)\mathrm{d}x$$

Pre moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na danú os potom môžeme písať:

$$J = \frac{m}{l}\int_0^l x^2 \mathrm{d}x$$

$$J = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

Pre zmenu momentu zotrvačnosti po predĺžení tyče platí vzťah:

$$\Delta J = J_2 - J_1, \text{kde}$$

$$J_1 = \frac{1}{3}ml_1^2$$

$$J_2 = \frac{1}{3}ml_2^2,$$

kde

$l_2 = l_1(1+\alpha\Delta T)$

Na základe uvedených vzťahov môžeme písať:

$$\Delta J = J_2 - J_1$$

$$\Delta J = \frac{1}{3} m l_2{}^2 - J_1 = \frac{1}{3} m l_1{}^2$$

$$\Delta J = \frac{1}{3} m l_1^2 (1+\alpha\Delta T)^2 - J_1 = \frac{1}{3} m l_1{}^2$$

$$\Delta J = \frac{1}{3} m l_1^2 \left[(1+\alpha\Delta T)^2 - 1\right]$$

$$\Delta J = \frac{1}{3} .3\,\mathrm{kg}.(1\mathrm{m})^2 \left[(1+12.10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.92\,\mathrm{K})^2 - 1\right]$$

$$\Delta J = 0{,}0022092\,\mathrm{kg.m}^2 \cong 22.10^{-4}\ \mathrm{kg.m}^2$$

Odpoveď:

Moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os kolmú na smer tyče a prechádzajúcu jej koncovým bodom sa po jej predĺžení zväčší približne o 22.10^{-4} kg.m^2.

Úloha 13

Sud na benzín (tvaru valca) je vysoký 5 m. Naplnený je tak, že pri teplote 0 °C je hladina benzínu 15 cm pod okrajom suda. Pri akej teplote by benzín začal zo suda vytekať? (*Poznámka:* Koeficient objemovej rozťažnosti benzínu má hodnotu 10^{-3} K^{-1}. Objemovú rozťažnosť suda neuvažujeme.)

Zápis:

h = 5 m

t_1 = 0 °C

Δh = 0,15 m

$\beta = 10^{-3}$ K^{-1}

t = ?

Riešenie:

Prírastok objemu benzínu, pri ktorom by začal v dôsledku jeho teplotnej rozťažnosti zo suda vytekať je: $\Delta V = \beta V_1 \Delta t,$ kde $V_1 = V - \Delta V$ je začiatočný objem benzínu pri teplote 0 °C, V je objem suda a $\Delta t = t - t_1 = t - 0\,°\mathrm{C} = t,$ je prírastok jeho teploty. Po dosadení dostaneme:

$$\Delta V = \beta(V - \Delta V)t,$$
$$S\Delta h = \beta(Sh - S\Delta h)t$$
$$\Delta h = \beta(h - \Delta h)t \qquad /.\frac{1}{\beta(h - \Delta h)}$$
$$t = \frac{\Delta h}{\beta(h - \Delta h)}$$
$$t = \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}.(5 - 0{,}15)\mathrm{m}}$$
$$t = 30{,}9\ °\mathrm{C}$$

Odpoveď:

Benzín by začal zo suda vytekať pri teplote 30,9 °C.

Úloha 14

Sud z oceľového plechu je naplnený až po okraj benzínom teploty 7 °C. Vnútorný objem suda pri tejto teplote je 10 litrov.

a) Určite objem benzínu, ktorý zo suda vytečie, ak ho umiestnime na nádvorie chemického závodu a teplota vzduchu bude 25 °C. Objemovú rozťažnosť suda neuvažujeme.

b) Ako sa zmení riešenie tejto úlohy, ak budeme objemovú rozťažnosť suda uvažovať?

(*Poznámka:* Koeficient objemovej rozťažnosti benzínu je 10^{-3} K^{-1}, koeficient dĺžkovej rozťažnosti ocele je 12.10^{-6} K^{-1}).

Zápis:

t_1 = 7 °C

T_1 = 280,15 K

t = 25 °C

T = 298,15 K

ΔT = 18 K

$V_1 = 10^{-2}$ m^3

α_o(oceľ) = 12.10^{-6} K^{-1}

β_b(benzín) = 10^{-3} K^{-1}

ΔV_b(benzín) = ?

ΔV_o(oceľ) = ?

Riešenie:

Pri zmene teploty o ΔT sa pôvodný objem V_1 zmení na V, platí:

$$V = V_1(1+\beta\Delta T)$$
$$V = V_1 + V_1\beta\Delta T \qquad /-V_1$$
$$V - V_1 = V_1\beta\Delta T$$
$$\Delta V = V_1\beta\Delta T$$

Prírastok objemu benzínu ΔV_b pri jeho zohriatí o ΔT = 18 K je:

$$\Delta V_b = V_1\beta_b\Delta T$$
$$\Delta V_b = 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 .10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}.18\,\mathrm{K}$$
$$\Delta V_b = 180.10^{-6}\,\mathrm{m}^3 = 180\,\mathrm{cm}^3$$

Vnútorný objem železného kanistra sa pri tom zväčší o:

$$\Delta V_o = V_1\beta_o\Delta T$$
$$\Delta V_o = V_1 3\alpha_o\Delta T$$
$$\Delta V_o = 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 .3.12.10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.18\,\mathrm{K}$$
$$\Delta V_o = 6{,}48.10^{-6}\,\mathrm{m}^3 = 6{,}48\,\mathrm{cm}^3$$

Odpoveď:

Pri zvýšení teploty o 18 °C vytečie zo suda benzín objemu 180 cm^3. Ak budeme uvažovať objemovú rozťažnosť suda, bude tento objem o 6,48 cm^3 menší.

V ďalších úlohách sa využívajú fyzikálne zákonitosti platné pre deformáciu tuhých telies v dôsledku pôsobenia vonkajšieho napätia. Preto si ich stručne uvedieme.

Hookov zákon

Pre pružnú deformáciu v ťahu alebo v tlaku platí Hookov zákon, ktorý pre telesá z izotropného materiálu znie: ***„Normálové napätie je priamo úmerné relatívnemu predĺženiu.“*** Zapíšeme ho v tvare:

$$\sigma_{\mathrm{n}} = E\varepsilon \qquad (5)$$

σ_{n} – normálové napätie [Pa], platí: $\sigma_{\mathrm{n}} = \frac{F_{\mathrm{p}}}{S}$, kde F_{p} je veľkosť sily pružnosti pôsobiacej kolmo na plochu rezu s obsahom S.

ε – relatívne predĺženie, platí: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_1}$

E – konštanta úmernosti -Youngov modul (modul pružnostiv ťahu) [Pa]- charakterizuje pružné vlastnosti látok pri deformácii ťahom alebo tlakom , platí:

$$E = \frac{\sigma_{\mathrm{n}}}{\varepsilon}$$

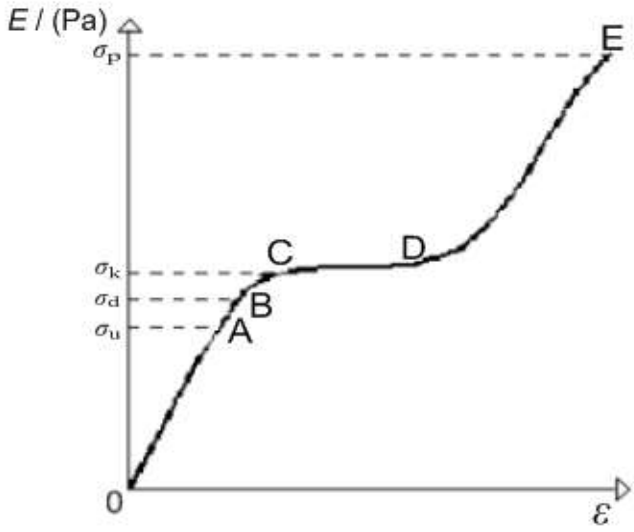
Na základe uvedených vzťahov a vyjadrenia $\Delta l = l_1 \alpha \Delta t$ zo vzťahu (1)platí:

$$\frac{F_{\mathrm{p}}}{S} = E\frac{\Delta l}{l_1}$$

$$\frac{F_{\mathrm{p}}}{S} = E\frac{l_1 \alpha \Delta t}{l_1}$$

$$\frac{F_{\mathrm{p}}}{S} = E\alpha\Delta t \qquad (6)$$

Skutočné tuhé telesá sú len viac alebo menej pružné. Pri pôsobení malých síl sa prakticky každé tuhé teleso správa ako pružné. Pri pôsobení väčších síl už len ako nedokonale pružné. Časť deformácie zostáva a účinkom veľmi veľkých síl sa kompaktnosť telesa poruší. Pri postupnom zväčšovaní veľkosti síl deformujúcich skúmaný materiál, môžeme sledovať závislosť normálového napätia od relatívneho predĺženia. Na určenie tejto závislosti sa používajú skúšobné tyče. Graf funkcie $\sigma = f(\varepsilon)$, ktorý túto závislosť zobrazuje sa nazýva *krivka deformácie*. Obrázok 1 znázorňuje krivku deformácie skúšobnej tyče z mäkkej ocele v celom rozsahu svojich deformácií.



Obr. 1 Krivka deformácie ťahom pre mäkkú oceľ

Napätie, ktoré zodpovedá bodu A sa nazýva *medza úmernosti* σ_u. Úsečka OA je priama, je to oblasť pružnej deformácie. Normálové napätie je priamo úmerné relatívnemu predĺženiu – Hookov zákon. Hookov zákon platí len po medzu úmernosti σ_u, tzn. $\sigma_n \leq \sigma_u$.

Časť krivky AB patrí ešte do oblasti pružnej deformácie, ale pomerné predĺženie nie je už priamoúmerné normálovému napätiu σ_n. Ak vonkajšie sily zaniknú, deformácia telesa nezmizne hneď, ale až za určitý čas. Tento jav sa nazýva *dopružovanie*. Jav dopružovania nastane v telesách, v ktorých nebolo vyvolané väčšie normálové napätie ako *medza úmernosti* σ_d. Medza úmernosti sa zväčša príliš neodlišuje od medze pružnosti. Niektoré látky majú dokonca obe medze rovnako veľké $\sigma_u = \sigma_d$ a pri takých látkach dopružovanie nenastáva.

Časť krivky BE znázorňuje oblasť *plastickej deformácie*. Úseku CD zodpovedá tzv. *tečeniu materiálu*, keď malej zmene normálového napätia prislúcha veľká zmena relatívneho predĺženia. Napätie σ_k, zodpovedajúce bodu C, pri ktorom nastáva náhle predĺženie materiálu, sa nazýva *medza klzu (medza prieťažnosti)*. Pri tomto napätí nastáva náhle predĺženie tyče.

Úsek DE na krivke deformácie zodpovedá *spevneniu materiálu*, ktoré sa končí po dosiahnutí *medze pevnosti* σ_p. Po prekročení medze pevnosti sa poruší súdržnosť látky a teleso sa pretrhne.

Medza pružnosti a medza pevnosti sú veľmi dôležité konštrukčné a výrobné konštanty. Stavebný materiál, stroje, nástroje a mnohé iné predmety, ktoré ľudia denne využívajú, sú nejakým spôsobom namáhané. Napätie, ktoré pritom v telesách vzniká, musí byť vždy omnoho menšie ako medza pevnosti.

Ak sa materiál používa dlhý čas, opotrebuje sa, i keď je namáhaný značne menším napätím, než je medza pevnosti. Jeho pružnosť a pevnosť sa zmenšujú. Tento jav sa nazýva *únava* alebo *starnutie materiálu*. Kovy a sklo znehodnotené únavou sa dokonale regenerujú pretavením. Preto možno z už použitých surovín pretavením získať hodnotný materiál (Zámečník, J., 1988, s. 193).

Krivka deformácie je pre každú látku iná. Z jej priebehu môžeme rozhodnúť, ktorá látka je pružná, ktorá krehká a či je schopná veľkých plastických deformácií. Keď je aj pri dosť veľkom relatívnom predĺžení vyvolané menšie normálové napätie ako medza pružnosti, je daná látka *pružná* (napr. oceľ). Ak má látka medzu pružnosti približujúcu sa medzi pevnosti, patrí medzi *krehké* látky (napr. liatina, sklo, porcelán, mramor a pod.).

Úlohy:

Úloha 15 (Hajko, V. et al., 1983, str. 178/293)

Oceľová struna priemeru 1 mm sa pri teplote 28 °C napína silou 98,1 N a jej konce sú upevnené. Vypočítajte, akou veľkou silou sa má struna napínať, keď ju ochladíme na teplotu -12 °C, aby sa jej dĺžka nezmenila. (*Poznámka*: Modul pružnosti v ťahu ocele má hodnotu $20{,}6.10^{10}$ Pa; koeficient dĺžkovej rozťažnosti ocele má hodnotu 12.10^{-6} K^{-1}.)

Zápis:

$d = 1$ mm $= 10^{-3}$ m

$t_1 = 28$ °C

$F_1 = 98{,}1$ N

$t_2 = -12$ °C

$\Delta t = 40$ °C

E(oceľ) = 20,6.10^{10} Pa

α(oceľ) = 12.10^{6} K^{-1}

F_2 = ?

Riešenie:

Najskôr si vypočítame prierez drôtu:

$$S = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$S = 3{,}14 \frac{\left(10^{-3}\right)^2}{4}\ \mathrm{m}^2$$

$$S = 8.10^{-7}\ \mathrm{m}^2$$

V ďalšom výpočte využijeme Hookov zákon:

$$\frac{F_\mathrm{p}}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F_\mathrm{p} = E\frac{\Delta l}{l_0}S$$

$$F_\mathrm{p} = ES\alpha\Delta t$$

$$F_\mathrm{p} = 20{,}6.10^{10}\ \mathrm{Pa}.8.10^{-7}\ \mathrm{m}^2.12.10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}.40\ \mathrm{K}$$

$$F_\mathrm{p} = 79{,}1\ \mathrm{N}$$

Veľkosť sily, ktorou musíme strunu napínať vypočítame ako súčet sily F_n a F_1:

$$F_2 = F_\mathrm{n} + F_1$$

$$F_2 = 79{,}1\ \mathrm{N} + 98{,}1\ \mathrm{N}$$

$$F_2 = 177{,}2\ \mathrm{N}$$

Odpoveď:

Aby struna po ochladení na -12 °C nezmenila svoju dĺžku, musíme ju napínať silou veľkosti 177,2 N.

Úloha 16 (Hajko, V. et al., 1983, str. 178/294)

Železná tyč sa dotýkala obidvoma svojimi koncami pevných stien. Vypočítajte, o koľko sa má zvýšiť jej teplota, aby na steny pôsobila tlakom 490,5.10^4 Pa? (*Poznámka*: Modul pružnosti v ťahu železa (Fe) má hodnotu 20,6.10^{10} Pa. Koeficient dĺžkovej rozťažnosti železa má hodnotu 12.10^{-6} K^{-1}.)

Zápis:

σ = 490,5.10^4 Pa

α(Fe) = 12.10^{-6} K^{-1}

E(Fe) = 20,6.10^{10} Pa

Δt = ?

Riešenie:

Pri riešení úlohy vychádzame z Hookovho zákona:

$$\frac{F_{\mathrm{p}}}{S} = E\,\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma = E\,\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma = E\alpha\Delta t \,/\,.\frac{1}{E\alpha}$$

$$\Delta t = \frac{\sigma}{E\alpha}$$

$$\Delta t = \frac{490{,}5.10^4\ \mathrm{Pa}}{12.10^{-6}\ K^{-1}\,.20{,}6.10^{10}\ \mathrm{Pa}}$$

$$\Delta t = 1{,}98\ K$$

$$\Delta t \cong 2\ K$$

Odpoveď:

Aby železná tyč na steny pôsobila tlakom 490,5.10^4 Pa, musí sa jej teplota zvýšiť približne o 2 K.

Úloha 17

Hliníkový drôt s obsahom priečneho rezu 7 mm^2 má dĺžku 20 m.

a) Aká je najväčšia hmotnosť bremena, ktoré môžeme na drôt zavesiť, aby sme neprekročili medzu pružnosti hliníka 98,5 MPa? (*Poznámka:* tiažové zrýchlenie má hodnotu 9,81 $m.s^{-2}$; vlastnú tiaž drôtu neuvažujeme.)

b) Vypočítajte predĺženie a relatívne predĺženie hliníkového drôtu spôsobené týmto bremenom. (*Poznámka:* Modul pružnosti v ťahu hliníka (Al) má hodnotu 66 GPa.)

Zápis:

$S = 7\ \mathrm{mm}^2 = 7.10^{-6}\ \mathrm{m}^2$

$l_1 = 20\ \mathrm{m}$

$\sigma_\mathrm{p} = 98{,}5\ \mathrm{MPa} = 98{,}5.10^6\ \mathrm{Pa}$

$g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$

$E = 66.10^9\ \mathrm{Pa}$

$m = ?$

$\Delta l = ?$

$\varepsilon = ?$

Riešenie:

Pri riešení úlohy vychádzame z Hookovho zákona, jeho úpravou vypočítame hmotnosť bremena:

$$\sigma_\mathrm{n} = \frac{F_\mathrm{g}}{S}$$

$$\sigma_\mathrm{n} = \frac{mg}{S}$$

$$m = \frac{\sigma_\mathrm{n} S}{g}$$

$$m = \frac{98{,}5.10^6\ \mathrm{Pa}.7.10^{-6}\ \mathrm{m}^2}{9{,}81\mathrm{m.s}^{-2}}$$

$$m = 70{,}2854\,\mathrm{kg} \cong 70{,}3\,\mathrm{kg}$$

Predĺženie a relatívne predĺženie hliníkového drôtu spôsobené daným bremenom vypočítame nasledovne:

$$\sigma_{\mathrm{n}} = E\varepsilon$$

$$\frac{F_{\mathrm{g}}}{S} = E\frac{\Delta l}{l_1}$$

$$\frac{Fl_1}{SE} = \Delta l$$

$$\frac{mgl_1}{SE} = \Delta l$$

$$\frac{70{,}3\,\mathrm{kg}.9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}.20\,\mathrm{m}}{7.10^{-6}\,\mathrm{m^2}.66.10^9\,\mathrm{Pa}} = \Delta l$$

$$0{,}0298547\,\mathrm{m} = \Delta l$$

$$0{,}03\,\mathrm{m} \cong \Delta l$$

$$3{,}0\,\mathrm{cm} = \Delta l$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_1}$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}03\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m}}$$

$$\varepsilon = 0{,}0015 = 0{,}15\,\%$$

Odpoveď:

Na hliníkový drôt môžeme za daných podmienok zavesiť bremeno hmotnosti približne 70,3 kg. Drôt sa pritom predĺži približne o 3,0 cm. Relatívne predĺženie drôtu je 0,15 %.

Úloha 18

Medený drôt dĺžky 3 m a obsahu priečneho rezu 0,5 mm^2 je napínaný silou veľkosti 100 N. Vypočítajte predĺženie drôtu, ak predpokladáme, že deformácia drôtu je pružná. (*Poznámka:* Modul pružnosti v ťahu medi má hodnotu 130 GPa.)

Zápis:

S = 0,5 mm^2 = 0,5.10^{-6} m^2 = = 5.10^{-7} m^2

l_1 = 3 m

F = 100 N

E = 130 GPa = 130.10^9 Pa

Δl = ?

Riešenie:

Pri riešení úlohy vychádzame z Hookovho zákona, jeho úpravou vypočítame predĺženie drôtu nasledovne:

$$\sigma_{\mathrm{n}} = E\varepsilon$$

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_1}$$

$$\frac{Fl_1}{SE} = \Delta l$$

$$\frac{100\,\mathrm{N}.3\,\mathrm{m}}{5.10^{-7}\ \mathrm{m}^2.130.10^9\,\mathrm{Pa}} = \Delta l$$

$$0{,}0046154\,\mathrm{m} = \Delta l$$

$$0{,}005\,\mathrm{m} \cong \Delta l$$

$$5\,\mathrm{mm} = \Delta l$$

Odpoveď:

Medený drôt sa pri napínaní silou veľkosti 100 N predĺži približne o 5 mm.

Úloha 19

Medený drôt má dĺžku 20 m, obsah priečneho rezu 3,0 mm^2? Pôsobením akej veľkej sily sa predĺži o 2,0 cm? (*Poznámka:* Modul pružnosti v ťahu medi má hodnotu 130 GPa.)

Zápis:

S = 3,0 mm^2 = 3.10^{-6} m^2

l_0 = 20 m

E = 130 GPa = 130.10^9 Pa

Δl = 2,0 cm = 2.10^{-2} m

F = ?

Riešenie:

Pri riešení úlohy vychádzame z Hookovho zákona, jeho úpravou vypočítame veľkosť sily, pôsobením ktorej sa medený drôt predĺži o 2,0 cm nasledovne:

$$\sigma_{\mathrm{n}} = E\varepsilon$$

$$\frac{F_{\mathrm{p}}}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F_{\mathrm{p}} = E\frac{\Delta l}{l_0}S$$

$$F_{\mathrm{p}} = \frac{130.10^9\ \mathrm{Pa}.3{,}0.10^{-6}\ \mathrm{m}^2.2.10^{-2}\ \mathrm{m}}{20\ \mathrm{m}}$$

$$F_{\mathrm{p}} = 390\ \mathrm{N}$$

Odpoveď:

Drôt sa predĺži o 2 cm pôsobením sily veľkosti 390 N.

Úloha 20

Oceľový drôt dĺžky 1 m s obsahom priečneho rezu 1 mm^2 sa pôsobením sily 200 N predĺži o 1 mm. Aké bude predĺženie drôtu z rovnakej ocele, ak má dĺžku 5 m, obsah priečneho rezu 0,7 mm^2 a je napínaný silou 500 N? (*Poznámka*: Pri riešení úlohy predpokladajte, že hodnotu modulu pružnosti v ťahu ocele nepoznáte.)

Zápis:

l_1 = 1 m

S_1 = 1 mm^2 = 10^{-6} m^2

F_1 = 200 N

Δl_1 = 1 mm = 10^{-3} m

l_2 = 5 m

S_2 = 0,7 mm^2 = 0,7.10^{-6} m^2

F_2 = 500 N

Δl_2= ?

Riešenie:

Pri riešení úlohy vychádzame z Hookovho zákona:

$$\sigma_n = E\varepsilon$$

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$E = \frac{Fl_0}{S\Delta l}$$

Platí:

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{F_1 l_1}{S_1 \Delta l_1} = \frac{F_2 l_2}{S_2 \Delta l_2} / .\frac{1}{F_2 l_2}$$

$$\frac{F_1 l_1}{S_1 \Delta l_1 F_2 l_2} = \frac{1}{S_2 \Delta l_2} / .S_2$$

$$\frac{S_2 F_1 l_1}{S_1 \Delta l_1 F_2 l_2} = \frac{1}{\Delta l_2}$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_1 \Delta l_1 F_2 l_2}{S_2 F_1 l_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{10^{-6}\,\mathrm{m}^2.10^{-3}\,\mathrm{m}.500\,\mathrm{N}.5\,\mathrm{m}}{0{,}7.10^{-6}\,\mathrm{m}^2.200\,\mathrm{N}.1\mathrm{m}}$$

$$\Delta l_2 \cong 179.10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta l_2 \cong 179\,\mathrm{mm}$$

Odpoveď: Druhý drôt sa predĺži približne o 179 mm.

Úloha 21

Medená tyč s prierezom 1,0 cm^2 má teplotu 60 °C. Akou silou treba pôsobiť na jej koncoch, aby sa pri ochladení na teplotu 0 °C neskrátila? (*Poznámka:* Modul pružnosti v ťahu medi má hodnotu 130 GPa. Koeficient dĺžkovej rozťažnosti medi (Cu) má hodnotu 1,7.10^{-5} K^{-1}.)

Zápis:

S = 1,0 cm^2 = 10^{-4} m^2

Δt = 60 °C

E(Cu) = 130.10^9 Pa

α(Cu) = 1,7.10^{-5} °C^{-1}

F = ?

Riešenie:

Pri riešení úlohy vychádzame z Hookovho zákona:

$$\sigma_{\mathrm{n}} = E\varepsilon$$

$$\frac{F_{\mathrm{p}}}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F_{\mathrm{p}} = E\frac{\Delta l}{l_0}S$$

$$F_{\mathrm{p}} = ES\alpha\Delta t$$

$$F_{\mathrm{p}} = 130.10^9\ \mathrm{Pa}.10^{-4}\ \mathrm{m}^2.1{,}7.10^{-5}\ °\mathrm{C}^{-1}.60\ °\mathrm{C}$$

$$F_{\mathrm{p}} = 13260\ \mathrm{N}$$

Odpoveď:

Na koncoch tyče musí pôsobiť ťahová sila veľkosti 13260 N.

VLASTNOSTI ZRIEDENÉHO PLYNU V ROVNOVÁHE

Pre zriedený plyn bola experimentálne zistená závislosť jeho tlaku od teploty pri konštantnom objeme $V = const.$ v rovnovážnych stavoch známa pod názvom Charlesov zákon:

$$p = p_0(1+\gamma_1 t), \tag{7}$$

kde γ_1 je koeficient teplotnej rozpínavosti plynu.

Podobne bol experimentálne získaný vzťah závislosti objemu zriedeného plynu od teploty pri konštantnom tlaku ($p = const.$):

$$V = V_0(1+\gamma_2 t), \tag{8}$$

kde γ_2 je koeficient objemovej rozťažnosti plynu (Gay-Lussacov zákon). Boylom a Mariottom bol zasa získaný vzťah medzi objemom a tlakom zriedeného plynu pri konštantnej teplote, tzv. Boylov - Mariottov zákon (stručne Boylov zákon):

$$pV = p_0 V_0\ . \tag{9}$$

Experimentálne výsledky ukazovali, že koeficienty rozpínavosti a objemovej rozťažnosti nezávisia od druhu zriedeného plynu a navyše $\gamma_1 = \gamma_2$. Tento výsledok potvrdzuje aj teória. Skutočne, nech platia všetky tri experimentálne získané závislosti. Ukážeme si, že z toho vyplýva rovnosť koeficientov rozpínavosti a objemovej rozťažnosti. Ich hodnoty môžeme vyjadriť pomocou meraní pri dvoch rôznych teplotách t_0 a t_{100}:

$$\gamma_1 = \frac{p_{100} - p_0}{p_0 (t_{100} - t_0)} \qquad \gamma_2 = \frac{V_{100} - V_0}{V_0 (t_{100} - t_0)}$$

Nech plyn má pri teplote $t_0 = 0°\mathrm{C}$ tlak p_0 a objem V_0. Potom podľa Gay-Lussacovho zákona (8) a Charlesovho zákona (7)

$V_{100} = V_0 (1 + \gamma_2 t_{100})$ (pri nezmenenom tlaku p_0)

$p_{100} = p_0 (1 + \gamma_1 t_{100})$ (pri nezmenenom objeme V_0)

Vynásobme prvý vzťah (nezmeneným) tlakom p_0:

$$p_0 V_{100} = p_0 V_0 (1 + \gamma_2 t_{100}).$$

Dostali sme súčin tlaku a objemu plynu v rovnovážnom stave pri teplote t_{100}.

Podobne vynásobme druhý zo vzťahov (nezmeneným) objemom V_0:

$$p_{100} V_0 = p_0 V_0 (1 + \gamma_1 t_{100}).$$

Znova sme dostali súčin tlaku a objemu plynu v rovnovážnom stave pri tej istej teplote t_{100}. Keďže ide o to isté množstvo plynu a oba stavy sú pri tej istej teplote, podľa Boylovho zákona

$p_0 V_{100} = p_{100} V_0$, a teda aj

$$p_0 V_0 (1 + \gamma_2 t_{100}) = p_0 V_0 (1 + \gamma_1 t_{100}),$$

z čoho dostaneme

$$\gamma_1 = \gamma_2 . \qquad (10)$$

Teda už nemusíme písať indexy pri koeficiente rozpínavosti a objemovej rozťažnosti, pretože sú rovnaké $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$.

Pritom γ má rozmer K^{-1}, teda môžeme písať

$\gamma^{-1} \equiv T_0$, resp. $\gamma = \dfrac{1}{T_0}$.

Potom Charlesov zákon a Gay-Lussacov zákon môžeme písať v tvare

$$p = p_0\left(1+\frac{t}{T_0}\right) \qquad \Rightarrow \qquad p = p_0\frac{T_0+t}{T_0}$$

$$V = V_0\left(1+\frac{t}{T_0}\right) \qquad \Rightarrow \qquad V = V_0\frac{T_0+t}{T_0}$$

Označme $T \equiv T_0 + t$, čo predstavuje novú stupnicu teploty, nazývanú Kelvinova, s rovnakou veľkosťou jednotky ako $°C$ a posunutú voči Celziovej stupnici o hodnotu $T_0(= 273{,}15\,\mathrm{K})$.

Charlesov zákon vyjadrýme pomocou Kelvinovej stupnice:

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} \tag{11}$$

Charlesov zákon vyjadrený v Kelvinovej stupnici

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}\,. \tag{12}$$

Plyn, presne spĺňajúci experimentálne zistené zákony zriedeného plynu v termodynamickej rovnováhe (Charlesov zákon, Charlesov zákon, Boylov zákon) , bol nazvaný ideálnym plynom.

STAVOVÁ ROVNICA IDEÁLNEHO PLYNU

Uvažujme ideálny plyn, ktorý ako sme už spomenuli v rovnovážnych stavoch presne spĺňa zákony zriedeného plynu.

Nech určité množstvo ideálneho plynu je na začiatku v rovnovážnom stave s hodnotami stavových veličín p_0, V_0, T_0.

i. Realizujeme izobarickú zmenu:

$$p_0, V_0, T_0 \xrightarrow{izobaricky} p_0, V', T: \qquad \frac{V_0}{T_0} = \frac{V'}{T} \tag{13}$$

ii. Takto zmenený stav bude východzím stavom nasledujúcej izotermickej zmeny:

$$p_0, V', T \xrightarrow{izotermicky} p, V, T: \qquad p_0V' = pV \tag{14}$$

Ak dosadíme do (13) za V' vyjadrené zo vzťahu (14) , dostaneme

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V'}{T} = \frac{\frac{pV}{p_0}}{T} = \frac{pV}{p_0 T}.$$

Z toho po úprave dostaneme stavovú rovnicu ideálneho plynu

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} = const. \qquad (15)$$

Podiel $\frac{pV}{T}$ je v rovnovážnych stavoch daného množstva plynu vždy rovnaký. Tento podiel závisí len od množstva plynu a je mu úmerný. Skutočne, spojením dvoch nádob objemu V rovnakého plynu tlaku p a teploty T dostaneme dvojnásobný objem toho plynu pri tom istom tlaku a teplote. Rovnováha sa nenaruší, len objem bude dvojnásobný a teda aj príslušný podiel bude dvojnásobný.
Množstvo plynu môžeme merať napr. látkovým množstvom n. Potom

$$\frac{pV}{T} \propto n$$

Konštanta úmernosti v tomto vzťahu sa zvykne značiť R a nazýva sa molárnou plynovou konštantou (univerzálnou plynovou konštantou). Takže pre látkové množstvo plynu rovnajúce sa n môžeme stavovú rovnicu napísať v tvare

$$\frac{pV}{T} = nR. \qquad (16)$$

R má význam hodnoty podielu $\frac{pV}{T}$ pre jednotkové látkové množstvo, t. j. pre 1 mol plynu. Experimentálne stanovenou hodnotou molárnej plynovej konštanty je hodnota:

$R = 8{,}314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

Riešenie úloh s využitím stavovej rovnice ideálneho plynu

1. Úlohy, v ktorých sa stav ideálneho plynu nemení

- v tomto type úloh sú niektoré stavové veličiny dané a jednu stavovú veličinu hľadáme,

– pri riešení úloh postupujeme tak, že napíšeme stavovú rovnicu pre daný stav a hľadanú veličinu z nej vypočítame,

– z nasledujúcich tvarov stavovej rovnice zvolíme ten, ktorý je najvhodnejší:

$pV = nRT$ $\qquad n = \frac{m}{M}$ R je univerzálna plynová konštanta; R = 8,314 $\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$

$$pV = \frac{m}{M}RT \qquad n = \frac{N}{N_{\mathrm{A}}} \tag{17}$$

$pV = \frac{N}{N_{\mathrm{A}}}RT$ $\qquad k = \frac{R}{N_{\mathrm{A}}}$, k je Boltzmannova konštanta; k = 1,38.10^{-23} $\mathrm{J.K^{-1}}$

$$pV = NkT \tag{18}$$

2. Úlohy, v ktorých plyn prechádza z daného počiatočného stavu do stavu výsledného

– niektoré veličiny, ktoré charakterizujú počiatočný a výsledný stav plynu sú dané, jednu veličinu hľadáme. Pri riešení tohto druhu úloh musíme najskôr zistiť, ktoré stavy sa v úlohe vyskytujú a stavové veličiny, ktoré sa vzťahujú k týmto stavom, odlíšiť od seba pomocou indexov p_1, V_1, p_2, V_2. Úlohu potom riešime najčastejšie pomocou stavovej rovnice v tvare:

$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$. Táto rovnica platí ale len za predpokladu, že hmotnosť plynu pri uvažovanej stavovej zmene je konštantná.

3. Úlohy, v ktorých sa mení hmotnosť plynu

– tieto úlohy riešime zvyčajne pomocou stavovej rovnice, ktorú napíšeme pre počiatočný a konečný stav plynu.

Úlohy:

Úloha 22 (Hajko, V. et al., 1983, str. 204/333)

Aký objem majú 4 g hélia pri tlaku 99 991,5 Pa a teplote 20 ˚C?

Zápis:

m = 4 g = 4 .10^{-3} kg

p = 99 991,5 Pa

t = 20 ˚C

T = 293,15 K

R = 8,314 $J.K^{-1}.mol^{-1}$

M (He) = 4,003 $g.mol^{-1}$ = $4,003.10^{-3}$ $kg.mol^{-1}$

V = ?

Riešenie:

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$V = \frac{m}{Mp} RT$$

$$V = \frac{4.10^{-3}\,kg\,.8{,}314\,J\,.\,K^{-1}.\,mol^{-1}.293{,}15\,K}{4{,}003.10^{-3}\ kg\,.\,mol^{-1}.\,99\,991{,}5\,Pa}$$

$$V = 0{,}0243563\,m^3 \approx 24{,}4\,l$$

Odpoveď:

Pri tlaku 99 991,5 Pa a teplote 20 ˚C majú 4 g hélia objem 24,4 l.

Úloha 23 (Hajko, V. et al., 1983, str. 204/335)

V nádrži objemu 40 litrov sa nachádza pri teplote 27 ˚C kyslík pod tlakom 1 MPa. Vypočítajte, aká je jeho tiaž.

Zápis:

V = 40 l = 40 dm^3 = 40.10^{-3} m^3 = 4.10^{-2} m^3

t = 27 ˚C

T = 230,15 K

p = 1 MPa = 10^6 Pa

M (O_2) = 32 $g.mol^{-1}$ = 32.10^{-3} $kg.mol^{-1}$

R = 8,314 $J.K^{-1}.mol^{-1}$

g = 9,81 $N.kg^{-1}$

G = ?

Riešenie:

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$m = \frac{pVM}{RT}$$

$$m = \frac{10^6\,\text{Pa}\,4.10^{-2}\,\text{m}^3.32.10^{-3}\,\text{kg.mol}^{-1}}{8{,}314\text{J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}.300{,}15\text{K}}$$

$$m = 0{,}51\text{kg}$$

$$G = mg$$

$$G = 0{,}51\,\text{kg}.9{,}81\text{N.kg}^{-1}$$

$$G = 5{,}03\text{N} \approx 5\text{N}$$

Odpoveď:

Tiaž kyslíka je približne 5 N.

Úloha 24 (Hajko, V. et al., 1983, str. 205/345)

Hustota plynu pri teplote 30 ˚C a tlaku $1{,}33.10^5$ Pa je 1,7 kg.m^3. Aká je hmotnosť jedného kilomólu tohto plynu?

Zápis:

t = 30 ˚C

T = 303,15 K

p = $1{,}33.10^5$ Pa

ρ = 1,7 kg.m^3

n = 1 kmol = 1000 mol

R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}

m (1000 mol) = ? kg

Riešenie:

$$pV = nRT$$

$$p\frac{m}{\rho} = nRT \; / .\rho$$

$$pm = nRT\rho \; / : p$$

$$m = \frac{nRT\rho}{p}$$

$$m = \frac{1000\,\mathrm{mol}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}mol^{-1}}.\ 303{,}15\,\mathrm{K}.1{,}7\,\mathrm{kg.m^{-3}}}{1{,}33.105\,\mathrm{Pa}}$$

$$m = 32{,}22\,\mathrm{kg}$$

Odpoveď:

1 kilomól tohto plynu má hmotnosť 32,22 kg.

Úloha 25 (Hajko, V. et al., 1983, str. 207/359)

Koľko molekúl je v guľovej nádobe polomeru 3 cm naplnenej kyslíkom, keď jeho teplota je 27 ˚C a tlak $1{,}33.10^{-2}$ Pa?

Zápis:

t = 27 ˚C

T = 300,15 K

$p = 1{,}33.10^{-2}$ Pa

$R = 8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$

r = 3 cm = 0,03 m

$N_A = 6{,}022.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

V = ?

n = ?

N = ?

Riešenie:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}3{,}14.0{,}03^3$$

$$V = 0{,}0001131\,\mathrm{m^3}$$

$$V = 1{,}13.10^{-4}\,\mathrm{m^3}$$

$$pV = nRT$$

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{1{,}33.10^{-2}\ \text{Pa}.1{,}13.10^{-4}\,\text{m}^3}{8{,}314\,\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}}$$

$$n = 0{,}0006023.10^{-6}\ \text{mol}$$

$$N = n\ .\ N_{\text{A}}$$

$$N = 0{,}0006023.10^{-6}\ \text{mol}\ .\ 6{,}022.10^{23}\ \text{mol}^{-1}$$

$N = 3{,}63\ .\ 10^{14}$ častíc

Odpoveď:

V guľovej nádobe je $3{,}63.\ 10^{14}$ častíc.

Úloha 26 (Hajko, V. et al., 1983, str. 205/340)

Vypočítajte, aký je hmotnostný objem (v starej terminológii špecifický objem) vodíka pri tlaku 0,125 MPa a teplote 20 ˚C.

Zápis:

$m = 4\ \text{g} = 4\ .10^{-3}\ \text{kg}$

$p = 0{,}125\ \text{MPa} = 0{,}125\ .10^{6}\ \text{Pa} = 125.10^{3}\text{Pa}$

$t = 20\ ˚\text{C}$

$T = 293{,}15\ \text{K}$

$R = 8{,}314\ \text{J.k}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

$M\ (H_2) = 2\ \text{g.mol}^{-1} = 2\ .\ 10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}$

$v = ?$

Poznámka:

Hmotnostný objem, je objem pripadajúci na jednotku hmotnosti, platí: $v = \frac{V}{m}\ \left[\text{m}^3.\text{kg}^{-1}\right]$.

Riešenie:

$$pV = nRT$$

$$pV = \frac{m}{M} RT\ /: m,: p$$

$$\frac{V}{m} = \frac{TR}{pM}$$

$$v = \frac{2{,}936\,\mathrm{K}.8{,}314\,\mathrm{J}.\mathrm{K}^{-1}.\mathrm{mol}^{-1}}{125.103\,\mathrm{Pa}.2.10^{-3}\,\mathrm{kg.mol}^{-1}}$$

$$v = 9{,}749\ \mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1} \approx 9{,}7\,\mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}$$

Odpoveď:

Hmotnostný objem vodíka pri tlaku 0,125 MPa a teplote 20 ˚C je 9,7 m^3. kg^{-1}.

Úloha 27 (Hajko, V. et al., 1983, str. 203/330)

a) Vypočítajte, pri akej teplote má plyn pri nezmenenom tlaku 2/3 tohto objemu, aký mal pri 0 °C?

b) Určite, pri akej teplote má plyn pri nezmenenom objeme n-krát väčší tlak ako pri 0 °C?

Zápis:

t_0 = 0 °C

T_0 = 273,15 K

$p_1 = p_0$

V_1 = 2/3 V_0

T_1 = ?

Riešenie:

a)

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_1}$$

$$\frac{\frac{p_0V_0}{T_0}}{\frac{p_1V_1}{1}} = \frac{1}{T_1} \, / : (p_1V_1)$$

$$\frac{p_0V_0}{p_1V_1T_0} = \frac{1}{T_1}$$

$$T_1 = \frac{p_1V_1T_0}{p_0V_0}$$

$$T_1 = \frac{p_0\frac{2}{3}V_0.273{,}15\,\mathrm{K}}{p_0V_0}$$

b)

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_1}$$

$$\frac{\frac{p_0V_0}{T_0}}{\frac{p_1V_1}{1}} = \frac{1}{T_1} \, / : (p_1V_1)$$

$$\frac{p_0V_0}{p_1V_1T_0} = \frac{1}{T_1}$$

$$T_1 = \frac{p_1V_1T_0}{p_0V_0}$$

$$T_1 = \frac{np_0V_0.273{,}15\,\mathrm{K}}{p_0V_0}$$

$T_1 = \frac{2}{3} . 273{,}15\,\mathrm{K}$

$T_1 = 182{,}1\,\mathrm{K}$

$t_1 = 182{,}1\,\mathrm{K} - 273{,}15\,\mathrm{K}$

$t_1 = -91{,}05\,°\mathrm{C}$

$T_1 = n\,273{,}15\,\mathrm{K}$

$t_1 = n\,273{,}15\,\mathrm{K} - 273{,}15$

$t_1 = 273{,}15(n-1)\,°\mathrm{C}$

Odpoveď:

a) Pri teplote -91,05 °C má plyn pri nezmenenom tlaku 2/3 tohto objemu, aký mal pri 0 °C.

b) Pri teplote 273,15 (n - 1) °C má plyn pri nezmenenom objeme n-krát väčší tlak ako pri 0 °C.

Úloha 28 (Hajko, V. et al., 1983, str. 204/334)

Určité množstvo vzduchu má pri teplote t_0 = 8 °C a tlaku p_0 = 99 991,5 Pa objem V_0 = 112 cm^3. Na akú teplotu ho treba ohriať, aby pri tlaku p_1 = 98 658 Pa mal objem V_1 = 136 cm^3?

Zápis:

t_0 = 8 °C

T_0 = 281,15 K

p_0 = 99 991,5 Pa

$V_0 = 112\ \mathrm{cm}^3 = 112 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$

$V_1 = 136\ \mathrm{cm}^3 = 136 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$

p_1 = 98 658 Pa

T_1 = ?

Riešenie:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \;/ . \frac{1}{p_1 V_1}$$

$$\frac{p_0 V_0}{p_1 V_1 T_0} = \frac{1}{T_1}$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1 T_0}{p_0 V_0}$$

$$T_1 = \frac{98658\,\mathrm{Pa}.136.10^{-6}\,\mathrm{m}^3.281{,}15\,\mathrm{K}}{99991{,}5\,\mathrm{Pa}.112.10^{-6}\,\mathrm{m}^3}$$

$$T_1 = 336{,}84\,\mathrm{K}$$

$$t_1 = 336{,}84\,\mathrm{K} - 273{,}15\,\mathrm{K}$$

$$t_1 = 63{,}7\,°\mathrm{C}$$

Odpoveď:

Vzduch treba ohriať na 63,7 °C.

Úloha 29 (Hajko, V. et al., 1983, str. 204/331)

Manometer na nádrži so stlačeným plynom ukazoval pri teplote 20 °C tlak 6 MPa. Po znížení plynu ručička manometra ukazovala iba 4,5 MPa. Vypočítajte konečnú teplotu plynu. Zmenu objemu nádoby neberte do úvahy.

Zápis:

t_1 = 20 °C

T_1 = 293,15 K

p_1 = 6 MPa = 6.10^6 Pa

p_2 = 4,5 MPa = $4{,}5.10^6$ Pa

$V_1 = V_2$

T_2 = ?

t_2 = ?

Riešenie:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1}$$

$$T_1 = \frac{4{,}5.10^6\,\mathrm{Pa}.293{,}15\,\mathrm{K}}{6.10^6\,\mathrm{Pa}}$$

$$T_1 = 219{,}86\,\mathrm{K}$$

$$t_1 = 219{,}96\,\mathrm{K} - 273{,}15\,\mathrm{K}$$

$$t_1 = -53{,}2875\,°\mathrm{C} \approx -53{,}3\,°\mathrm{C}$$

Odpoveď:

Konečná teplota plynu bude -53,3 °C.

Úloha 30 (Hajko, V. et al., 1983, str. 205/ 347)

Správny ortuťový barometer ukazuje pri teplote 27 °C tlak 99991,5 Pa. Dĺžka barometrickej trubice je 90 cm, jej prierez je 1,5 cm^2. Keď do priestoru nad ortuťou privedieme trochu kyslíka, ortuťový stĺpec poklesne o dĺžku 50 mm. Vypočítajte, koľko kyslíka sme použili, ak predpokladáme, že teplota je stále rovnaká.

Zápis:

p = 99991,5 Pa

t_0 = 27 °C

T_0 = 300,15 K

R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}

M (O_2) = 32 g.mol^{-1} = 32 . 10^{-3} kg.mol^{-1}

S = 1,5 cm^2 = 1,5.10^{-4} m^2

l = 90 cm = 0,9 m

Δl = 50 mm = 0,05 m

ρ(Hg) = 13595 kg.m^{-3}

m = ?

Riešenie:

Pre objem platí:

$$V = S(l - h + \Delta l)$$

Hydrostatický tlak vypočítame podľa vzťahu:

$$p_h = b = h\rho g$$

Pre výšku stĺpca platí:

$$h = \frac{b}{\rho g}$$

Pri riešení úlohy vychádzame zo stavovej rovnice ideálneho plynu:

$$pV = nRT \; / . \frac{1}{V}$$

$$p=\frac{mRT}{MV}$$
$$p=\frac{mRT}{MS(l-h+\Delta l)}$$

Pre tlak, ktorý si v našom prípade označíme písmenom *b* platí:

$$p+\rho g(h-\Delta l)=b$$

Po dosadení predchádzajúcich vzťahov môžeme písať:

$$b=\frac{mRT}{MS(l-h+\Delta l)}+\rho g(h-\Delta l)$$
$$b=\frac{mRT}{MS(l-h+\Delta l)}+\rho g\left[\left(\frac{b}{\rho g}\right)-\Delta l\right]$$
$$b=\frac{mRT}{MS(l-h+\Delta l)}-\rho g\Delta l+b$$
$$\frac{mRT}{MS(l-h+\Delta l)}=\rho g\Delta l$$
$$m=\frac{\rho g\Delta lMS(l-\frac{b}{\rho g}+\Delta l)}{RT}$$
$$m=\frac{\Delta lMS(l\rho g-b+\Delta l\rho g)}{RT}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$m=2{,}6.10^{-6}\,\mathrm{kg}=2{,}6\,\mathrm{mg}$

Odpoveď:

Použili sme 2,6 mg kyslíka.

Úloha 31 (Hajko, V. et al., 1983, str. 206/348)

Vzduchová bublinka na dne jazera v hĺbke 21 m má pri teplote 4 °C polomer 1 cm. Pomaly stúpa na povrch, pričom sa jej objem zväčšuje. Vypočítajte, aký bude jej polomer, keď dosiahne povrch jazera, ktorý má teplotu 27 °C. (*Poznámka:* Povrchové napätie neberte do úvahy. Atmosférický tlak p_a = 0,1 MPa. Tiažové zrýchlenie má hodnotu 9,81 m.s^{-2}. Hustota vody $\rho(H_2O)$ = 1000 kg.m^{-3})

Zápis:

h = 21 m

t_1 = 4 °C

T_1 = 277,15 K

r_1 = 1 cm = 0,01 m

t_2 = 27 °C

T_2 = 300,15 K

p_a = 0,1 MPa = 10^5 Pa

$\rho(H_2O)$ = 1000 kg.m^{-3}

g = 9,81 m.s^{-2}

r = ?

Riešenie:

Pre jednotlivé tlaky p_1 na dne jazera a p_2 tesne pod hladinou môžeme písať:

$$p_2 = p_a$$
$$p_1 = p_a + p_h$$
$$p_1 = p_a + h\rho g$$

Pri výpočte využijeme stavovú rovnicu v tvare:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{(p_a + h\rho g)\frac{4}{3}\pi r_1^3}{T_1} = \frac{p_a \frac{4}{3}\pi r_2^3}{T_2} \; / . \frac{T_2}{p_a \frac{4}{3}\pi}$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{(p_a + h\rho g) r_1^3 T_2}{T_1 p_a}}$$

$$r_2 = 0{,}0149224\,\mathrm{m} \cong 1{,}5\,\mathrm{cm}$$

Odpoveď:

Vzduchová bublina bude mať pri povrchu jazera polomer veľkosti približne 1,5 cm.

DALTONOV ZÁKON

Doteraz sme uvažovali, že v nádobe máme plyn pozostávajúci z rovnakých molekúl. V nasledujúcom sa budeme zaoberať sústavou, ktorá pozostáva zo zmesi dvoch alebo viacerých navzájom nereagujúcich plynov. V takomto prípade Dalton zistil, že tieto plyny sa v nádobe správajú navzájom nezávisle. Uvažujme zmes dvoch takýchto plynov. Nech objem nádoby sa rovná V a teplota zmesi T. Ak by sa v rovnovážnom stave v nádobe nachádzal len prvý plyn, potom pre jeho tlak dostaneme:

$$p_1 = n_1 R \frac{T}{V}$$

Toto je tlak prvého plynu, ktorý má v danej nádobe nezávisle od prítomnosti iných s ním nereagujúcich plynov. Nazýva sa **parciálnym tlakom** tohto plynu v danej nádobe pri danej teplote. Daltonov zákon pre zmes dvoch plynov tvrdí, že celkový tlak zmesi dvoch plynov v nádobe sa rovná súčtu parciálnych tlakov oboch zložiek:

$$p = p_1 + p_2 = n_1 R \frac{T}{V} + n_2 R \frac{T}{V} = (n_1 + n_2) R \frac{T}{V} . \tag{19}$$

Tento výsledok možno prirodzene zovšeobecniť aj na zmes N nereagujúcich plynov:

$$p = \sum_{i=1}^{N} p_i , \tag{20}$$

kde p_i je parciálny tlak i-tej zložky.

Daltonov zákon priamo vyplýva z molekulárno-kinetickej teórie plynov.

Úlohy:

Úloha 32 (Hajko, V. et al., 1983, str. 206/352)

Suchý vzduch obsahuje (ak neberieme do úvahy vzácne plyny) 23,2 % kyslíka (O_2) a 76,8 % dusíka (N_2). Aké sú parciálne tlaky jednotlivých zložiek, keď celkový tlak vzduchu je 99991,5 Pa?

Zadanie:

m_1 = 0,232 kg

$M_1(O_2) = 32.10^{-3}$ kg.mol^{-1}

$m_2 = 0{,}768$ kg

$M_2(N_2) = 28.10^{-3}$ kg.mol^{-1}

$p_1 = ?$

$p_2 = ?$

Riešenie:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT$$

$$\frac{p_1 V}{pV} = \frac{\frac{m_1}{M_1} RT}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT}$$

$$\frac{p_1}{p} = \frac{\frac{m_1}{M_1}}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right)} \,/\, .p$$

$$p_1 = \frac{\frac{m_1}{M_1}}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right)} p$$

$$p_1 = \frac{\frac{0{,}232\,\text{kg}}{32.10^{-3}\,\text{kg.mol}^{-1}}}{\left(\frac{0{,}232\,\text{kg}}{32.10^{-3}\,\text{kg.mol}^{-1}} + \frac{0{,}768\,\text{kg}}{28.10^{-3}\,\text{kg.mol}^{-1}} \right)} .99991{,}5\,\text{Pa}$$

$$p_1 = 20904{,}5\,\text{Pa}$$

$p_1 + p_2 = p /- p_1$

$p_2 = p - p_1$

$p_2 = 99991{,}5\,\mathrm{Pa} - 20904{,}5\mathrm{Pa}$

$p_2 = 79087\,\mathrm{Pa}$

Odpoveď:

Parciálny tlak kyslíka má hodnotu 20904,5 Pa a parciálny tlak dusíka má hodnotu 79087 Pa.

Úloha 33 (Hajko, V. et al., 1983, str. 206/349)

V jednom valci objemu 5 m^3 je oxid uhoľnatý (CO) s tlakom 15 MPa, v druhom valci objemu 8 m^3 je vodík (H_2) s tlakom 22 MPa a pri rovnakej teplote. Aký bude výsledný tlak zmesi po spojení oboch nádob? (Poznámka: Uvažujme, že teplota sa meniť nebude.)

Zápis:

$V_1 = 5\ \mathrm{m}^3$

$p_1 = 15\ \mathrm{MPa} = 15.10^6\ \mathrm{Pa}$

$M_1(\mathrm{CO}) = 28\ \mathrm{g.mol^{-1}} = 28.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}$

$\mathrm{M}_2(\mathrm{H_2}) = 2\ \mathrm{g.mol^{-1}} = 2.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}$

$p = ?$

Riešenie:

$$p_1V_1 = n_1RT_1$$

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{M_1}RT_1 \,/ .\frac{1}{RT_1}$$

$$\frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{m_1}{M_1}$$

$$p_2V_2 = n_2RT_1$$

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{M_2}RT_1 \,/ .\frac{1}{RT_1}$$

$$\frac{p_2V_2}{RT_1} = \frac{m_2}{M_2}$$

$$pV = \frac{m}{M}RT_1$$

$$p(V_1 + V_2) = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT_1$$

$$p(V_1+V_2)=\left(\frac{p_1V_1}{RT_1}+\frac{p_2V_2}{RT_1}\right)RT_1$$

$$p(V_1+V_2)=\left(\frac{p_1V_1+p_2V_2}{RT_1}\right)RT_1\;/\;.\frac{1}{(V_1+V_2)}$$

$$p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$$

$$p=\frac{15.10^6\,\mathrm{Pa}.5\,\mathrm{m}^3+22.10^6\,\mathrm{Pa}.8\,\mathrm{m}^3}{5\,\mathrm{m}^3+8\,\mathrm{m}^3}$$

$$p=19{,}3.10^6\,\mathrm{Pa}=19{,}3\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Po spojení oboch nádob bude tlak zmesi plynu 19,3 MPa.

PRVÁ VETA TERMODYNAMIKY

Predstavme si plyn uzavretý v nádobe s tuhými stenami. Molekuly plynu sa chaoticky pohybujú vnútri nádoby. Tento pohyb nazveme vnútorným pohybom. Okrem toho aj samotná nádoba ako celok sa môže pohybovať nejakou rýchlosťou. Rýchlosť jednotlivých molekúl vzhľadom na vzťažnú sústavu voči ktorej sa nádoba pohybuje pozostáva z vektorového súčtu rýchlosti nádoby plus rýchlosti jednotlivých molekúl vzhľadom na nádobu. Prirodzene tento fakt relatívnosti rýchlosti sa odráža aj na kinetickej energii. Kinetická energia molekúl vzhľadom na nádobu bude iná ako kinetická energia vzhľadom na vzťažnú sústavu, voči ktorej sa nádoba pohybuje. Kinetická energia chaotického pohybu molekúl vzhľadom na nádobu sa nazýva vnútornou kinetickou energiou plynu. Pripočítaním potenciálnej energie vzájomného pôsobenia molekúl dostaneme vnútornú energiu U plynu. Úvahy možno rozšíriť aj na telesá iného skupenstva a definovať vnútornú energiu ako súčet kinetickej energie molekúl a potenciálnej energie ich vzájomnej interakcie vo vzťažnej sústave pevne spojenej s hmotným stredom telesa.

$$U=\sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{v\,súst.HS}}\frac{1}{2}mv_i^2+\sum_i\sum_j E_{ij}^{(p)} \tag{21}$$

Ak na sústavu nepôsobia vonkajšie sily vnútorná energia sústavy sa nemení ($U=const.$). Ak vonkajšie sily pôsobia, potom U sa mení: $U_0\to U$. Prírastok vnútornej energie sa bude rovnať práci vonkajších síl:

$$\Delta U = U - U_0 = W_{ext}$$

Pôsobenie medzi molekulami sústavy a okolia je vzájomné a podľa princípu akcie a reakcie je súvis medzi prácou $W_{súst}$ molekúl sústavy, ktorú vykonajú na svojom okolí a prácou W_{ext}, ktorú vykonajú molekuly okolia na sústave daný vzťahom:

$$W_{súst} = -W_{ext} \,.$$

Teda môžeme písať

$$U_0 - U = W_{súst}$$

Určenie práce vonkajších síl ako súčtu prác mikroskopických síl je prakticky nemožné. Z makroskopického hľadiska zjavne pozorujeme ako mechanickú prácu len časť práce vonkajších mikroskopických síl, ktoré sa prejavia ako makroskopická sila. Túto časť budeme nazývať prácou okolia na sústave a značiť W' na rozdiel od práce vonkajších mikroskopických síl, ktoré nie sú manifestované makroskopickou silou a tú nazveme teplom a označíme Q':

$$W_{ext} = W' + Q' \,. \tag{22}$$

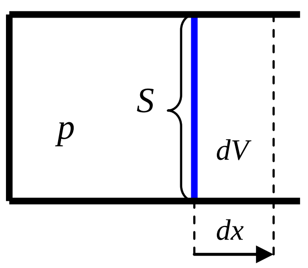
Prírastok vnútornej energie sústavy je teda daný súčtom dodaného tepla Q' z okolia a (zjavnej) práce W' okolia na sústave:

$$\Delta U = Q' + W' \,. \tag{23}$$

Vzťah (23) vyjadruje tvrdenie prvej vety termodynamiky.

Práca plynu

Predstavme si plyn uzavretý v nádobe s pohyblivým piestom (obr. 2). Ak tlak plynu vnútri



Obr. 2 K práci plynu

nádoby sa rovná p a obsah plochy piestu S, potom v dôsledku tlaku plynu pôsobí plyn na plochu piestu kolmou silou:

$F = pS$.

Pri infinitezimálnom posunutí piestu o dx vykoná tlaková sila piestu (zjavnú) prácu dW

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = pS\mathrm{d}x = p\mathrm{d}V \,, \tag{24}$$

kde $\mathrm{d}V$ je zmena objemu plynu. Hovoríme, že plyn koná objemovú prácu (kladnú v prípade expanzie, zápornú v prípade kompresie). Keďže pôsobenie plynu a okolia je vzájomné, táto práca je rovnako veľká ako (zjavná) práca dW' okolia na plyne, len s opačným znamienkom:

$\mathrm{d}W' = -\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V$.

Prvú vetu termodynamiky možno v prípade dodaného tepla $\mathrm{d}Q'$ v takomto prípade napísať v tvare

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q' - p\mathrm{d}V \tag{25}$$

Pozn:

Výraz $p\mathrm{d}V$ rovnako ako $\mathrm{d}Q'$ závisí od spôsobu akým sa realizuje expanzia plynu, resp. ako sa plyn zohrieva. Z toho dôvodu nie sú z matematického hľadiska totálnymi diferenciálmi nejakej funkcie stavových premenných. Na rozdiel od toho $\mathrm{d}U$ je totálnym diferenciálom vnútornej energie ako funkcie stavových veličín (samotná vnútorná energia je stavovou veličinou).

Tepelná kapacita sústavy

Pri dodávaní tepla telesu (sústave) sme spravidla svedkami zohrievania sa telesa, zvyšovania jeho teploty. Experimentálna skúsenosť hovorí, že na zohriatie telesa o 1 K treba u rôznych telies dodať rôzne množstvo tepla. Napr. na privedenie dvoch litrov vody 20 °C teplej do varu potrebujeme dodať väčšie množstvo tepla než na jeden liter. Množstvom tepla potrebného na zohriatie telesa o 1 K (°C) je definovaná tepelná kapacita telesa ako podiel dodaného tepla a prírastku teploty

$$C_t = \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T} \,. \tag{26}$$

Ako sme uviedli v príklade, tepelná kapacita závisí od množstva látky v telese. Preto ak chceme charakterizovať pre danú látku schopnosť zohriať sa na základe dodaného množstva tepla musíme porovnávať tepelnú kapacitu rovnakého množstva látky. Jednou z možností ako merať množstvo látky v danom telese je hmotnosť telesa. V takom prípade prepočítavame tepelnú kapacitu na jednotku hmotnosti, v SI na 1 kg. Tepelná kapacita hmotnostnej jednotky látky sa nazýva hmotnostnou tepelnou kapacitou (po starom: mernou tepelnou kapacitou, špecifickou tepelnou kapacitou, merným, resp. špecifickým teplom). Značí sa obyčajne malým písmenom *c*:

$$c = \frac{1}{m} C_t = \frac{1}{m} \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T}, \qquad (27)$$

kde *m* je hmotnosť telesa ktorého tepelná kapacita je *C*. Množstvo látky však môžeme merať aj ako látkové množstvo *n* (v móloch). Tepelná kapacita jednotky látkového množstva sa nazýva molárnou tepelnou kapacitou, označovanou veľkým písmenom C:

$$C = \frac{1}{n} C_t = \frac{1}{n} \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T}. \qquad (28)$$

Množstvo látky nie je jedinou skutočnosťou ovplyvňujúcou tepelnú kapacitu. Ukazuje sa, že tepelná kapacita závisí aj od samotného procesu dodávania tepla (ohrievania telesa) a preto pri danej nameranej hodnote musíme vždy uviesť akým spôsobom sme teleso zohrievali. Z praktického hľadiska sú dôležité dva spôsoby zohrievania:

i. Teleso zohrievame tak, že jeho objem zostáva konštantný (*V* = *const.*). V takom prípade hovoríme o hmotnostnej tepelnej kapacite za konštantného objemu c_V, resp. molárnej tepelnej kapacite za konštantného objemu C_V:

$$c_V = \frac{1}{m} \left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T} \right]_V, \text{ resp.} \qquad (29)$$

$$C_V = \frac{1}{n} \left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T} \right]_V \qquad (30)$$

ii. Teleso zohrievame tak, že jeho tlak zostáva konštantný (*p* = *const.*). V takom prípade hovoríme o hmotnostnej tepelnej kapacite za konštantného tlaku c_p, resp. molárnej tepelnej kapacite za konštantného tlaku C_p:

$$c_p = \frac{1}{m} \left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T} \right]_p, \text{ resp.} \qquad (31)$$

$$C_p = \frac{1}{n} \left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T} \right]_p \qquad (32)$$

Teplo dodané telesu pri konštantnom objeme môžeme teda vyjadriť

$$[\mathrm{d}Q']_V = mc_V \mathrm{d}T = nC_V \mathrm{d}T\,, \tag{33}$$

pri konštantnom tlaku

$$[\mathrm{d}Q']_p = mc_p \mathrm{d}T = nC_p \mathrm{d}T\,. \tag{34}$$

Využitím prvej vety termodynamiky dostaneme v prípade ideálneho plynu pre tepelné kapacity za konštantného objemu vyjadrenia:

$$c_V = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T}\right]_V = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_V = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right]_V = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right],$$

$$C_V = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T}\right]_V = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_V = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right]_V = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right],$$

pretože v prípade konštantného objemu je $\mathrm{d}V = 0$ a vnútorná energia ideálneho plynu nezávisí od objemu.

Podobne pre tepelné kapacity za konštantného tlaku

$$c_p = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T}\right]_p = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right]_p + \frac{p}{m}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right] + \frac{p}{m}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p = c_V + \frac{p}{m}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p$$

$$C_p = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}T}\right]_p = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right]_p + \frac{p}{n}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right] + \frac{p}{n}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p = C_V + \frac{p}{n}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p$$

Diferencovaním stavovej rovnice ideálneho plynu v prípade konštantného tlaku dostaneme:

$$\frac{p}{n}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p = R\mathrm{d}T\,.$$

Dosadením do vzťahu pre molárnu tepelnú kapacitu dostaneme, že molárna tepelná kapacita ideálneho plynu za konštantného tlaku je väčšia než molárna tepelná kapacita za konštantného objemu:

$$C_p = C_V + \frac{p}{n}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right]_p = C_V + R\,. \tag{35}$$

Tento vzťah sa nazýva Mayerovým vzťahom. Jeho modifikácia pre hmotnostné tepelné kapacity je :

$$c_p = c_V + \frac{R}{M}\,, \tag{36}$$

kde M je molárna hmotnosť ideálneho plynu.

Úlohy:

Úloha 34 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/404)

Zo známej hmotnosti 1 mólu plynu a pomeru hmotnostných tepelných kapacít $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ určite hodnotyy hmotnostných tepelných kapacít c_p a c_v. Vypočítajte ich hodnoty pre dusík.

Zápis:

κ (N_2) = 1,47

M (N_2) = 28,016 g.mol^{-1} = 28,016 .10^{-3} kg.mol^{-1}

n = 1 mol

R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}

c_p = ?

c_v = ?

Riešenie:

Z pomeru hmotnostných tepelných kapacít vyplýva:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_p = \kappa c_v$$

Z Mayerovho vzťahu vyplýva:

$$C_p - C_v = R$$

$$M(c_p - c_v) = R$$

$$M\left[(\kappa c_v) - c_v)\right] = R$$

$$M(\kappa - 1)c_v = R$$

$$c_v = \frac{R}{M(\kappa - 1)}$$

$$c_v = \frac{8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{28{,}016\,.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}.(1{,}47 - 1)}$$

$$c_v = \frac{8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{0{,}0131675\ \mathrm{kg.mol^{-1}}}$$

$$c_v = 631{,}4\ \mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$$

$$C_p - C_v = R$$

$$M(c_p - c_v) = R$$

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}$$

$$c_p - \frac{c_p}{\kappa} = \frac{R}{M}$$

$$c_p(1 - \frac{1}{\kappa}) = \frac{R}{M}$$

$$c_p\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) = \frac{R}{M}$$

$$c_p = \frac{R\kappa}{M(\kappa - 1)}$$

$$c_{\mathrm{p}} = \frac{8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.1{,}47}{28{,}016\,.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}.(1{,}47-1)}$$

$$c_{\mathrm{p}} = 928{,}158\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} \cong 928{,}2\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

Odpoveď: Hodnota c_{v} pre dusík je 631,4 J.K^{-1}.kg^{-1}. Hodnota c_{p} pre dusík je 928,2 J.K^{-1}.kg^{-1}.

Úloha 35 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/405)

Určte molárnu hmotnosť vzduchu, keď je známa hmotnostná tepelná kapacita vzduchu c_{v} a pomer hmotnostných tepelných kapacít $\kappa = \frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}}$.

Zápis:

κ (vzduch) = 1,47

c_{v} (vzduch) =728 J.kg^{-1}.K^{-1}

R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}

M(vzduch) = ?

Riešenie:

$$\kappa = \frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}}$$

$$c_{\mathrm{p}} = \kappa c_{\mathrm{v}}$$

$$C_{\mathrm{p}} - C_{\mathrm{v}} = R$$

$$M\,(c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{v}}) = R$$

$$M\left[(\kappa c_{\mathrm{v}}) - c_{\mathrm{v}})\right] = R$$

$$M(\kappa - 1)c_{\mathrm{v}} = R$$

$$M = \frac{R}{(\kappa - 1)c_{\mathrm{v}}}$$

$$M = \frac{8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{(1{,}47-1).\,728\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}}$$

$$M = \frac{8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{291{,}2\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}}$$

$$M = 0{,}02855\,\mathrm{kg.mol^{-1}}$$

Odpoveď:

Molárna hmotnosť vzduchu je 0,02855 $kg.mol^{-1}$ (28,55 $g.mol^{-1}$)

Úloha 36 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/ 409)

Vypočítajte, na akú teplotu poklesne teplota oxidu uhličitého CO_2 tiaže G = 5,9 N a začiatočnej teploty t_0 = 50 ˚C, keď sa jeho vnútorná energia zmenší o 15696 J. (*Poznámka:* g = 9,81 $m.s^{-2}$)

Zápis:

G = 5,9 N

g = 9,81 $m.s^{-2}$

ΔU = 15696 J

t_0 = 50 ˚C

T_0 = 323,15 K

$c_v(CO_2)$ = 653 $J.kg^{-1}.K^{-1}$

t = ?

m = ?

Riešenie:

$$G = mg$$

$$m = \frac{G}{g}$$

$$m = \frac{5{,}9\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}}$$

$$m = 0{,}601\,\mathrm{kg}$$

$$\Delta U = mc_\mathrm{v}\Delta T$$

$$\Delta U = mc_\mathrm{v}(T_0 - T)$$

$$\frac{\Delta U}{mc_\mathrm{v}} = T_0 - T$$

$$\frac{\Delta U}{mc_\mathrm{v}} - T_0 = -T$$

$$\frac{15696\ \mathrm{J}}{0{,}601\,\mathrm{kg}.653\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}} - 323{,}15\,\mathrm{K} = -T$$

$39{,}99\,\mathrm{K} - 323{,}15\,\mathrm{K} = -T$
$-283{,}16\,\mathrm{K} = -T\ /.(-1)$
$10\,^{\circ}\mathrm{C} = t$

Odpoveď:

Teplota CO_2 poklesne na 10 °C.

Úloha 37 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/ 407)

Vypočítajte, koľko tepla treba na ohriatie zmesi m_1 = 2 g kyslíka s m_2 = 5 g dusíka pri stálom objeme z teploty t_1 = 20 °C na teplotu t_2 = 40 °C.

Zápis:

$m_1(O_2)$ = 2 g = 2 . 10^{-3} kg

$m_2(N_2)$ = 5 g = 5 . 10^{-3} kg

t_1 = 20 °C

T_1 = 293,15 K

t_2 = 40 °C

T_2 = 313,15 K

ΔT = 20 K

$c_{\mathrm{v}_1} = 648\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$

$c_{\mathrm{v}_2} = 741\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$

$Q_1' = ?$

$Q_2' = ?$

$Q' = ?$

Riešenie:

$Q' = Q_1' + Q_2'$
$Q' = c_{\mathrm{v}_1} m_1 \Delta T + c_{\mathrm{v}_2} m_2 \Delta T$
$Q' = (648\,\mathrm{J.kg^{\ 1}.K^{\ 1}}.2.10^{\ 3}\,\mathrm{kg}.20\,\mathrm{K}) + (741\,\mathrm{J.kg^{\ 1}.K^{\ 1}}.5.10^{\ 3}\,\mathrm{kg}.20\,\mathrm{K})$
$Q' = 25{,}92\,\mathrm{J} + 74{,}1\,\mathrm{J}$
$Q' = 100{,}02\,\mathrm{J}$

Odpoveď:

Na ohriatie zmesi kyslíka a dusíka pri stálom objeme treba 100,02 J tepla.

Úloha 38 (Hajko, V. et al., 1983, str. 216/375)

Sústava látok prijala od svojho okolia 4186 J tepla a súčasne vykonala prácu 1680 J. Určite, ako sa pri tomto deji zmenila vnútorná energia sústavy.

Zápis:

$Q' = 4186\ \mathrm{J}$

$W = 1680\ \mathrm{J}$

$\Delta U = ?$

Riešenie:

$Q' = \Delta U + W$

$\Delta U = Q' - W'$

$\Delta U = 4186\ \mathrm{J} - 1680\ \mathrm{J}$

$\Delta U = 2506\ \mathrm{J}$

Odpoveď:

Vnútorná energia sústavy sa pri tomto deji zmení o 2506 J.

Úloha 39

Akú prácu vykoná kyslík hmotnosti 65 g, ak sa pri stálom tlaku zvýši jeho teplota zo 120 °C na 240 °C?

Zápis:

$m(O_2)$ = 65 g = 65 . 10^{-3} kg

$M(O_2)$ = 32 g.mol^{-1} = 32 .10^{-3} kg.mol^{-1}

t_1 = 120 °C

T_1 = 393,15 K

t_2 = 240 °C

T_2 = 513,15 K

ΔT = 120 K

R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}

$\Delta W = ?$

Riešenie:

Pre začiatočný a konečný stav kyslíka zo stavovej rovnice vyplýva:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{mRT_1}{Mp}$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{mRT_2}{Mp}$$

Kyslík vykonáva prácu pri stálom tlaku (izobarický dej), preto platí: $p_1 = p_2 = p$

Práca vykonaná plynom pri izobarickom deji je určená vzťahom:

$$W = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$$

$$W = p\left(\frac{mRT_2}{Mp} - \frac{mRT_1}{Mp}\right)$$

$$W = p\frac{mR}{Mp}\left(T_2 - T_1\right)$$

$$W = \frac{mR}{M}\left(\Delta T\right)$$

$$W = \frac{65.10^{-3}\,\text{kg}.8{,}314\ \text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.120\,\text{K}}{32.10^{-3}\,\text{kg.mol}^{-1}}$$

$$W = 2026{,}5375\,\text{J} \cong 2\,\text{kJ}$$

Odpoveď:

Ak sa zvýši teplota kyslíka hmotnosti 65 g pri izobarickom deji o 120 K, kyslík vykoná prácu približne 2 kJ.

Úloha 40

Plyn uzavretý vo valci s pohyblivým piestom má objem 1,5 m^3, teplotu 5 °C a tlak 240 kPa. Akú prácu vykoná plyn, ak pri stálom tlaku zvýšime jeho teplotu o 30 °C? (*Poznámka:* Trenie medzi piestom a stenami valca neuvažujeme.

Zápis:

V_1 = 1,5 m^3

t_1 = 5 °C

T_1 = 278, 15 °C

p = 240 kPa = 2,4 . 10^5 Pa

ΔT = 25 °C

$W = ?$

Riešenie:

Práca vykonaná plynom pri izobarickom deji je určená vzťahom:

$$W = p\Delta V = p(V_2 - V_1) \qquad (37)$$

Ak plyn koná prácu pri stálom tlaku (izobarický dej), platí Gay-Lussacov zákon:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{T_2}{T_1}V_1$$

Po dosadení do vzťahu (37)

$$W = p\left(\frac{T_2}{T_1}V_1 - V_1\right)$$

$$W = pV_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

$$W = pV_1\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$$

$$W = pV_1\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)$$

$$W = 2{,}4.10^5\ \mathrm{Pa}\,.1{,}5\,\mathrm{m}^3.\frac{25\,\mathrm{K}}{278{,}15\,\mathrm{K}}$$

$$W = 32356{,}64\,\mathrm{J} \cong 32\,\mathrm{kJ}$$

Odpoveď:

Plyn vykoná za daných podmienok prácu veľkosti približne 32 kJ.

Úloha 41

Ideálny plyn zväčšil pri stálom tlaku 5 MPa svoj objem o 0,25 m^3 a prijal pri tom teplo 4 MJ. Určite zmenu jeho vnútornej energie.

Zápis:

p = 5 MPa = 5.10^6 Pa

ΔV = 0,25 m^3

Q' = 4 MJ = 4.10^6 J

ΔU = ?

Riešenie:

Podľa 1. vety termodynamickej sa teplo, ktoré prijme plyn rovná prírastku jeho vnútornej energie a práci W, ktorú plyn pri tom vykoná. Pri izobarickom deji plyn vykoná prácu $W = p\Delta V$, platí:

$$Q' = \Delta U + W$$

$$\Delta U = Q' - p\Delta V$$

$$\Delta U = 4.10^6\,\mathrm{J} - (5.10^6\,\mathrm{Pa}.0{,}25\mathrm{m}^3)$$

$$\Delta U = 2750000\,\mathrm{J} = 2{,}75\,\mathrm{MJ}$$

Odpoveď:

Vnútorná energia plynu sa zväčší o 2,75 J.

POLYTROPICKÉ DEJE V IDEÁLNOM PLYNE

Pod súhrnný názov polytropické deje v plynoch zahŕňame deje, pri ktorých zostáva tepelná kapacita plynu konštantná. V reálnej situácii stačí, ak sa počas deja mení kapacita len veľmi málo. V takom prípade možno polytropický dej považovať za dobré priblíženie skutočne prebiehajúceho deja. Pre polytropické deje platí vzťah (zákon polytropy):

$$pV^q = const., \qquad (38)$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem a q tzv. index (konštanta) polytropy. Podobný vzťah platí aj pre iné dvojice stavových veličín.

Odvodíme si zákon polytropy pre ideálny plyn. Pre ideálny plyn platí stavová rovnica v tvare:

$$pV = nRT,$$

kde n je látkové množstvo, R (molárna) plynová konštanta a T termodynamická teplota. Z predchádzajúcej rovnice pre diferenciály dostaneme:

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = nR\mathrm{d}T. \qquad (39)$$

Pre príslušný dej platí samozrejme aj prvá veta termodynamiky.

$$\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W,$$

kde dQ' je plynu dodané teplo, dU je prírastok vnútornej energie plynu a dW je práca vykonaná plynom počas deja. Pre ideálny plyn je

$$\mathrm{d}U = nC_V\mathrm{d}T \quad \text{a} \quad \mathrm{d}W = p\mathrm{d}V,$$

kde C_V je molárna tepelná kapacita plynu pri konštantnom objeme. Ak uvažujeme, že tepelná kapacita plynu sa počas deja nemení, potom

$$\mathrm{d}Q' = nC\mathrm{d}T\,,$$

kde C je molárna tepelná kapacita plynu pri tomto deji a je konštantná. Takže prvú vetu termodynamiky môžeme zapísať v tvare:

$$nC\mathrm{d}T = nC_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V \tag{40}$$

Tento vzťah spolu so vzťahom (39) nám umožní vylúčiť teplotu jej vyjadrením napr. zo vzťahu (39) a dosadením do vzťahu (40). Dostaneme:

$$\frac{C - C_V}{R}\left(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p\right) = p\mathrm{d}V$$

Po úprave

$$V\mathrm{d}p = \left(\frac{R}{C - C_V} - 1\right)p\mathrm{d}V \tag{41}$$

S použitím Mayerovho vzťahu medzi molárnymi tepelnými kapacitami ideálneho plynu za konštantného tlaku a za konštantného objemu:

$$R = C_p - C_V$$

môžeme výraz v zátvorke upraviť, pričom predstavuje konštantu, ktorú označíme (-q).

$$\frac{C_p - C}{C - C_V} \equiv -q\,.$$

Po separácii premenných dostaneme diferenciálnu rovnicu pre závislosť tlaku a objemu

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -q\frac{\mathrm{d}V}{V}\,, \tag{42}$$

ktorú môžeme zintegrovať

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{p} = -q\int\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$\ln p = -q\ln V + const.$$

Z toho po jednoduchej úprave dostaneme vzťah (38):

$$pV^q = const.$$

Deje, s ktorými sa často v ideálnych plynoch stretávame, môžeme považovať za špeciálne prípady polytropického deja. Index (konštanta) polytropy

$$q = \frac{C - C_p}{C - C_V}$$

bude v týchto prípadoch nadobúdať hodnoty:

1. **Izobarický dej**
   $C = C_p$, teda $q = 0$ a vzťah (1) prejde do vzťahu pre izobarický dej $p = const.$

2. **Izotermický dej**
   $C \to \infty$, potom $q \to 1$ a vzťah (1) prejde do vzťahu pre izotermický dej $pV = const.$

3. **Adiabatický dej**
   $C = 0$, z toho $q = \dfrac{C_p}{C_V} \equiv \kappa$ a vzťah (1) prejde do vzťahu pre adiabatický dej

   $pV^{\kappa} = const.$ (modifikácie: $TV^{\kappa-1} = const.$, $p^{1-\kappa}T^{\kappa} = const.$)

4. **Izochorický dej**
   V tomto prípade je vhodné zapísať vzťah (1) v inom variante:

   $$p^{\frac{1}{q}}V = const.$$

   Molárna tepelná kapacita pri tomto deji $C = C_V$ z čoho vyplýva, že $\dfrac{1}{q} = 0$, a teda dostávame $V = const.$

V prípade adiabatického deja sa index polytropy u nás zvykne nazývať Poissonovou konštantou a príslušný vzťah Poissonovým zákonom resp. Poissonovou rovnicou.

Úlohy:

Úloha 42 (Hajko, V. et al., 1983, str. 225/383) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)
Vo valci s kruhovou základňou l_1 = 50 cm je vzduch teploty t_1 = 20 °C a tlaku p_1 = 0,1 MPa. Ako sa zmení tlak a teplota vzduchu, keď sa pri adiabatickom stlačení piest posunie o vzdialenosť l_2 = 20 cm? (**Poznámka:** Poissonova konštanta pre vzduch κ = 1,4)

Zápis:

l_1 = 50 cm = 0,5 m

p_1 = 0,1 MPa = 10^5 Pa

t_1 = 20 °C

κ (vzduch) = 1,4

t_2 = ?

Riešenie:

Tlak vzduchu po adiabatickej kompresii určíme podľa Poissonovej rovnice:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \qquad V_1 = \pi r^2 l_1 \qquad V_2 = \pi r^2 (l_1 - l_2)$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa$$

$$p_2 = 10^5 \text{ Pa} \left(\frac{0{,}5 \text{ m}^3}{0{,}3 \text{ m}^3} \right)^{1{,}4} \qquad p_2 = 10^5 \text{ Pa} . 2{,}0445053$$

$$p_2 = 2{,}0445053 . 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r^2 l_1}{\pi r^2 (l_1 - l_2)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{0{,}5}{0{,}5 - 0{,}2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{0{,}5 \text{ m}^3}{0{,}3 \text{ m}^3}$$

$$pV = nRT$$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Po dosadení do Poissonovej rovnice dostaneme:

$$\frac{nRT}{V} V^\kappa = \text{konšt.} / . \frac{1}{nR}$$

$$T \frac{V^\kappa}{V} = \text{konšt.}$$

$$TV^{(\kappa - 1)} = \text{konšt.}$$

Platí:

$$T_1 V_1^{(\kappa-1)} = T_2 V_2^{(\kappa-1)}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{(\kappa-1)}$$

$$T_2 = 293{,}15\,\mathrm{K} \left(\frac{0{,}5}{0{,}3} \right)^{1{,}4-1}$$

$$T_2 = 293{,}15\,\mathrm{K} \left(\frac{0{,}5}{0{,}3} \right)^{0{,}4}$$

$$T_2 = 293{,}15\,\mathrm{K}.1{,}2267032$$

$$T_2 = 359{,}608\,\mathrm{K}$$

$$t_2 = 86{,}46\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Odpoveď:

Po adiabatickom stlačení bude tlak vzduchu $2{,}0445053.10^5$ Pa a jeho teplota bude 86,46 ˚C.

Úloha 43 (Hajko, V. et al., 1983, str. 251/417)

Koľko tepla treba na izotermickú expanziu 2 litrov vodíka tlaku 0,08 MPa na štvornásobný objem? Aký bude výsledný tlak?

Zápis:

V_0 = 2 l = 2.10^{-3} m^3

V = 8 l = 8.10^{-3} m^3

p_0 = 0,08 MPa = 8.10^4 Pa

p = ?

Riešenie:

$$p_0 V_0 = pV$$

$$p = \frac{p_0 V_0}{V}$$

$$p = \frac{p_0 V_0}{V} = \frac{p_0 V_0}{4V_0} = \frac{p_0}{4} = \frac{0{,}08.10^6\ \mathrm{Pa}}{4} = 0{,}02.10^6\ \mathrm{Pa} = 0{,}02\ \mathrm{MPa}$$

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$$
$$\mathrm{d}T = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{d}U = 0$$
$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W$$
$$\mathrm{d}Q = \int_{V_0}^{V} p\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = \int_{V_0}^{V} \frac{p_0 V_0}{V}\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = \int_{V_0}^{V} \frac{p_0 V_0}{V}\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = p_0 V_0 \int_{V_0}^{V} \frac{1}{V}\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = p_0 V_0 \ln \frac{V}{V_0}$$
$$\mathrm{d}Q = 8.10^4 \text{ Pa}.2.10^{-3}\,\text{m}^3 \ln \frac{4V_0}{V_0}$$
$$\mathrm{d}Q = 80.2 \ln 4 [\text{J}]$$
$$\mathrm{d}Q = 221{,}8\,\text{J}$$

Odpoveď:

Na izotermickú expanziu 2 litrov vodíka je potrebné dodať 221,8 J tepla. Výsledný tlak bude mať hodnotu 0,02 MPa.

Úloha 44 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/410)

Ideálny plyn má pri tlaku p_a = 0,1 MPa objem V_0 = 1 *l*. Vypočítajte, ako sa zmení vnútorná energia plynu, keď sa jeho tlak zvýši na štvornásobok a objem poklesne na polovicu. Berte do úvahy plyn: a) jednoatómový $\left(\kappa = \frac{5}{3}\right)$

b) dvojatómový $\left(\kappa = \frac{7}{5}\right)$.

Zápis:

p_1 = 0,1 MPa = 10^5 Pa

V_1 = 1 *l* = 10^{-3} m^3

$p_2 = 4\, p_1$

$V_2 = \frac{1}{2} V_1$

a) $\left(\kappa = \frac{5}{3} \right)$

b) $\left(\kappa = \frac{7}{5} \right)$

dU = ?

Riešenie:

Úpravou stavovej rovnice dostaneme vzťah pre výpočet T_1 a T_2:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \qquad\qquad p_2 V_2 = nRT_2$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} \qquad\qquad T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR}$$

Pri riešení príkladu využijeme aj Mayerov vzťah a vzťah na výpočet Poissonovej konštanty:

$$C_\mathrm{p} - C_\mathrm{v} = R \qquad C_\mathrm{p} = Mc_\mathrm{p} \qquad C_\mathrm{v} = Mc_\mathrm{v} \qquad \kappa = \frac{c_\mathrm{p}}{\mathrm{c_v}}$$

$$\mathrm{d}U = nC_\mathrm{v} dT$$

$$\mathrm{d}U = \int_{T_1}^{T_2} nC_\mathrm{v} dT$$

$$\mathrm{d}U = nC_\mathrm{v} (T_2 - T_1)$$

$$\mathrm{d}U = nC_\mathrm{v} \left(\left(\frac{p_2 V_2}{nR} \right) - \left(\frac{p_1 V_1}{nR} \right) \right)$$

$$\mathrm{d}U = nC_\mathrm{v} \left(\frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{nR} \right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{nC_\mathrm{v}}{nR} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{C_\mathrm{v}}{C_\mathrm{p} - C_\mathrm{v}} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{Mc_\mathrm{v}}{Mc_\mathrm{p} - Mc_\mathrm{v}} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{Mc_\mathrm{v}}{Mc_\mathrm{v} \left(\frac{Mc_\mathrm{p}}{Mc_\mathrm{v}} - 1 \right)} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{(\kappa - 1)} \left(p_2 V_2 - p_1 V_1 \right)$$

a) jednoatómový plyn

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{(\kappa - 1)}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\left(\frac{5}{3} - 1\right)}\left(4p_1\frac{V_1}{2} - p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\left(\frac{5}{3} - 1\right)}\left(2p_1V_1 - p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\left(\frac{5}{3} - 1\right)}\left(p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{3}{2}\left(10^5\ \mathrm{Pa}.10^{-3}\ \mathrm{m}^3\right)$$

$$\mathrm{d}U = 150\ \mathrm{J}$$

Odpoveď:

Vnútorná energia jednoatómového plynu sa zmení o 150 J.

b) dvojatómový plyn

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{(\kappa - 1)}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\left(\frac{7}{5} - 1\right)}\left(4p_1\frac{V_1}{2} - p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\left(\frac{7}{5} - 1\right)}\left(2p_1V_1 - p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\left(\frac{7}{5} - 1\right)}\left(p_1V_1\right)$$

$$\mathrm{d}U = \frac{5}{2}\left(10^5\ \mathrm{Pa}.10^{-3}\ \mathrm{m}^3\right)$$

$$\mathrm{d}U = 250\ \mathrm{J}$$

Odpoveď:

Vnútorná energia dvojatómového plynu sa zmení o 250 J.

Úloha 45 (Hajko, V. et al., 1983, str. 251/413)

0,5 kg vzduchu so začiatočnou teplotou 35 °C sme dodali pri stálom tlaku 97,9 kJ tepla. Na akú teplotu sa vzduch ohrial?

Zápis:

t_1 = 35 °C

T_1 = 308,15 K

κ(vzduch)= 1,4

c_v (vzduch) = 728 J.kg^{-1}.K^{-1}

Q' = 97,9 kJ = 97,9.10^3 J

m = 0,5 kg

t_2= ?

T_2 = ?

Riešenie:

Pri riešení príkladu využijeme aj Mayerov vzťah a vzťah na výpočet Poissonovej konštanty:

$$C_\mathrm{p} - C_\mathrm{v} = R$$

$$C_\mathrm{p} = R + C_\mathrm{v}$$

$$\kappa = \frac{c_\mathrm{p}}{\mathrm{c_v}}$$

$$c_p = \kappa c_\mathrm{v}$$

$$C_p = M c_p$$

p = konšt. $\Rightarrow$ dp = 0

Stavovú rovnicu v tomto prípade zapíšeme v tvare:

$$p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$$

$$\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$$
$$\Delta Q' = nC_v(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1)$$
$$\Delta Q' = nC_v(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1)$$
$$\Delta Q' = n(T_2 - T_1).(R + C_\mathrm{v})$$
$$\Delta Q' = n(T_2 - T_1)C_\mathrm{p}$$
$$\Delta Q' = \frac{m}{M}(T_2 - T_1)\kappa c_v M$$
$$\Delta Q' = m\kappa c_v(T_2 - T_1)$$

$$\frac{\Delta Q'}{m\kappa c_v} + T_1 = T_2$$
$$\frac{97{,}9.10^3\ \mathrm{J}}{0{,}5\,\mathrm{kg}.1{,}4.728\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}} + 308{,}15\,\mathrm{K} = T_2$$
$$\frac{97{,}9.10^3\ \mathrm{J}}{509{,}6\,\mathrm{J.K^{-1}}} + 308{,}15\,\mathrm{K} = T_2$$
$$192{,}11\,\mathrm{K} + 308{,}15\,\mathrm{K} = T_2$$
$$500{,}26\,\mathrm{K} = T_2$$
$$227{,}11\,^\circ C = t_2$$

Odpoveď:

Vzduch sa ohrial na teplotu 227,11 °C.

Úloha 46 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/406)

Zmiešame 2 g oxidu uhličitého (CO_2) s 3 g dusíka N_2. Vypočítajte, aký je pomer hnotnostných tepelných kapacít pre túto plynnú zmes. Známe sú iba hmotnostné tepelné kapacity c_{v1} a c_{v2}.

Zápis:

$m_1(CO_2)$ = 2 g = 2.10^{-3} kg

$m_2(N_2)$ = 3 g = 3.10^{-3} kg

$c_{v1}(CO_2)$ = 653 J .kg^{-1}.K^{-1}

$c_{v2}(N_2)$ = 741 J .kg^{-1}.K^{-1}

R = 8,314 J .K^{-1}.mol^{-1}

$M(CO_2)$ = 44.10^{-3} kg.mol^{-1}

$M(N_2)$ = 28.10^{-3} kg.mol^{-1}

c_{p1} = ?

c_{p2} = ?

c_v = ?

c_p = ?

κ = ?

Riešenie:

Hmotnostné tepelné kapacity pri konštantnom objeme resp. tlaku sú definované:

$$c_{\mathrm{v}} = \frac{(\mathrm{d}Q')_{\mathrm{v}}}{m\mathrm{d}T} \qquad\qquad c_{\mathrm{p}} = \frac{(\mathrm{d}Q')_{\mathrm{p}}}{m\mathrm{d}T}$$

Teplo potrebné na ohriatie zmesi plynov sa rovná súčtu tepiel potrebných na ohriatie jednotlivých zložiek.

Pre zmes dvoch plynov možno písať:

$$mc_{\mathrm{v}}\mathrm{d}T = m_1 c_{v_1}\mathrm{d}T + m_2 c_{v_2}\mathrm{d}T$$

$$mc_{\mathrm{v}}\mathrm{d}T = \mathrm{d}T\left(m_1 c_{v_1} + m_2 c_{v_2}\right)$$

$$c_{\mathrm{v}} = \frac{m_1 c_{v_1} + m_2 c_{v_2}}{m_1 + m_2}$$

$$c_{\mathrm{v}} = \frac{\left(2.10^{-3}\ \mathrm{kg}.653\ \mathrm{J\ .kg^{-1}.K^{-1}}\right) + \left(3.10^{-3}\ \mathrm{kg}.741\ \mathrm{J\ .kg^{-1}.K^{-1}}\right)}{2.10^{-3}\ \mathrm{kg} + 3.10^{-3}\ \mathrm{kg}}$$

$$c_{\mathrm{v}} = 705{,}8\ \mathrm{J\ .kg^{-1}.K^{-1}}$$

$$c_{\mathrm{p}_1} - c_{\mathrm{v}_1} = \frac{R}{M_1}$$

$$c_{\mathrm{p}_1} = c_{\mathrm{v}_1} + \frac{R}{M_1}$$

$$c_{\mathrm{p}_1} = 653\ \mathrm{J\ .kg^{-1}.K^{-1}} + \frac{8{,}314\ \mathrm{J\ .K^{-1}.mol^{-1}}}{44.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}}$$

$$c_{\mathrm{p}_1} = 841{,}95\ \mathrm{J\ .kg^{-1}.K^{-1}}$$

$$c_{p_2} - c_{v_2} = \frac{R}{M_2}$$

$$c_{p_2} = c_{v_2} + \frac{R}{M_2}$$

$$c_{p_2} = 741\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} + \frac{8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{28.10^{-3}\,\mathrm{kg.mol^{-1}}}$$

$$c_{p_2} = 1037{,}92\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

$$mc_\mathrm{p}\mathrm{d}T = m_1 c_{p_1}\mathrm{d}T + m_2 c_{p_2}\mathrm{d}T$$

$$mc_\mathrm{p}\mathrm{d}T = \mathrm{d}T\left(m_1 c_{p_1} + m_2 c_{p_2}\right)$$

$$c_\mathrm{p} = \frac{m_1 c_{p_1} + m_2 c_{p_2}}{m_1 + m_2}$$

$$c_\mathrm{p} = \frac{\left(2.10^{-3}\,\mathrm{kg}.841{,}95\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}\right) + \left(3.10^{-3}\,\mathrm{kg}.1037{,}92\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}\right)}{2.10^{-3}\,\mathrm{kg} + 3.10^{-3}\,\mathrm{kg}}$$

$$c_\mathrm{p} = 958\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

$$\kappa = \frac{c_\mathrm{p}}{c_\mathrm{v}}$$

$$\kappa = \frac{958\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}}{705{,}8\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}}$$

$$\kappa = 1{,}357 \cong 1{,}36$$

Odpoveď:

Pomer hmotnostných tepelných kapacít pre túto plynnú zmes je 1,36.

Úloha 47 (Hajko, V. et al., 1983, str. 251/411)

Vzduchu hmotnosti 6 kg uzavretému v nádobe sme dodali teplo veľkosti 368,4 kJ. Vzduch zväčšil svoj objem a vykonal prácu 181,5 kJ, pričom jeho teplota stúpla z 10 °C na 52°C. Na základe týchto údajov vypočítajte hmotnostné tepelné kapacity c_p a c_v pre vzduch. Poissonova konštanta pre vzduch je 1,4.

Zápis:

m = 6 kg

κ(vzduch) = 1,4

$Q' = 368{,}4 \text{ kJ} = 368{,}4\,.10^3 \text{ J}$

$W = 181{,}5 \text{ kJ} = 181{,}5\,.10^3 \text{ J}$

$t_1 = 10\ °\text{C}$

$T_1 = 283,\ 15 \text{ K}$

$t_2 = 52\ °\text{C}$

$T_2 = 325,\ 15 \text{ K}$

$\Delta T = 42 \text{ K}$

$c_\text{p} = ?$

$c_\text{v} = ?$

Riešenie:

$$\text{d}Q' = \text{d}U + \text{d}W$$

$$\text{d}Q' - \text{d}W' = \text{d}U$$

$$\text{d}Q' - \text{d}W' = mc_\text{v}\Delta T$$

$$\frac{\text{d}Q' - \text{d}W'}{m\Delta T} = c_\text{v}$$

$$\frac{(368{,}4 - 181{,}5).10^3 \text{ J}}{6 \text{ kg}.42 \text{ K}} = c_\text{v}$$

$$741{,}67 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} = c_\text{v}$$

$$\kappa = \frac{c_\text{p}}{c_\text{v}}$$

$$c_\text{p} = \kappa c_\text{v}$$

$$c_\text{p} = 1{,}4.741{,}67 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$c_\text{p} = 1038{,}3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Odpoveď:

Hmotnostná tepelná kapacita pri stálom objeme má hodnotu 741,64 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Hmotnostná tepelná kapacita pri stálom tlaku má hodnotu 1038,3 $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Úloha 48 (Hajko, V. et al., 1983, str. 251/416)

V zvislom valci s piestom výšky l_0 a s prierezom S je plyn s tlakom p_0. Aká veľká práca sa vykoná pri zmenšení plynom vyplneného priestoru na 0,1 pôvodnej výšky pri stálej teplote?

Zápis:

l_0

S

p_0

$V_2 = 0{,}1 l_0 S$

$V_1 = S l_0$

$W = ?$

Riešenie:

Ide o izotermický dej, platí:

$$W = p_0 V_0 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = p_0 V_0 \ln \frac{\frac{l_0}{10} S}{S l_0}$$

$$W = p_0 V_0 \ln \frac{1}{10}$$

$$W = p_0 V_0 (\ln 1 - \ln 10)$$

$$W = p_0 V_0 2{,}3$$

$$W = 2{,}3 p_0 S l_0$$

Odpoveď:

Pri zmenšení plynom vyplneného priestoru na 0,1 pôvodnej výšky pri stálej teplote sa vykoná práca $2{,}3 p_0 S l_0$.

Úloha 49 (Hajko, V. et al., 1983, str. 251/412)

Vo valci s pohyblivým piestom sa pri stálom tlaku 0,2 MPa rozpína vzduch z teploty 18 °C na 200 °C. Koľko tepla na to vzduch potrebuje a akú prácu pri rozopnutí vykoná? Vypočítajte, o akú dĺžku sa posunie pohyblivý piest pri uvedenej stavovej zmene, keď priemer kruhovej základne valca je 6 cm?

Zápis:

p_0 = 0,2 MPa = 2.10^5 Pa

m = 5 g = 5.10^{-3} kg

t_0 = 18 °C

T_0 = 291,15 K

t_1 = 200 °C

T_1 = 473,15 K

d = 6 cm

r = 3 cm = 3.10^{-2} m

κ(vzduch) = 1,4

c_v (vzduch) = 728 J.kg^{-1}.K^{-1}

$\Delta Q'$ = ?

ΔU = ?

$W = ?$

Δl = ?

Riešenie:

$$C_p - C_v = R$$
$$C_p = R + C_v$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$
$$c_p = \kappa c_v$$
$$C_p = M c_p$$

p = konšt. $\Rightarrow$ dp = 0

Stavovú rovnicu v tomto prípade zapíšeme v tvare:

$$p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$$

$$\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$$
$$\Delta Q' = nC_v(T_1 - T_0) + p(V_1 - V_0)$$

$$\Delta Q' = nC_\mathrm{v}(T_1 - T_0) + nR(T_1 - T_0)$$
$$\Delta Q' = n(T_1 - T_0).(R + C_\mathrm{v})$$
$$\Delta Q' = n(T_1 - T_0)C_\mathrm{p}$$
$$\Delta Q' = \frac{m}{M}(T_1 - T_0)\kappa c_\mathrm{v} M$$
$$\Delta Q' = m\kappa c_\mathrm{v}(T_1 - T_0)$$
$$\Delta Q' = 5.10^{-3}\,\mathrm{kg}.1{,}4.728\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}(473{,}15\,\mathrm{K} - 291{,}15\,\mathrm{K})$$
$$\Delta Q' = 927{,}47\,\mathrm{J}$$

$$\Delta U = nC_\mathrm{v}(T_1 - T_0)$$
$$\Delta U = \frac{m}{M} c_\mathrm{v} M(T_1 - T_0)$$
$$\Delta U = mc_\mathrm{v}(T_1 - T_0)$$
$$\Delta Q' = 5.10^{-3}\,\mathrm{kg}.728\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}(473{,}15\,\mathrm{K} - 291{,}15\,\mathrm{K})$$
$$\Delta Q' = 662{,}48\,\mathrm{J}$$

$$\Delta W = \Delta Q' - \Delta U$$
$$\Delta W = 927{,}472\,\mathrm{J} - 662{,}48\,\mathrm{J}$$
$$\Delta W = 264{,}99\,\mathrm{J}$$

$$\Delta W = p\Delta V = p(V_1 - V_0)$$
$$\Delta W = p(Sl_1 - Sl_0)$$
$$\Delta W = pS(l_1 - l_0)$$
$$\Delta W = pS\Delta l$$
$$\Delta l = \frac{\Delta W'}{pS}$$
$$\Delta l = \frac{264{,}99\,\mathrm{J}}{2.10^5\,\mathrm{Pa}.0{,}0028274\,\mathrm{m^2}}$$
$$\Delta l = \frac{264{,}99\,\mathrm{J}}{565{,}49\,\mathrm{Pa.m^2}}$$
$$\Delta l = 0{,}469\,\mathrm{m} = 46{,}9\,\mathrm{cm}$$

Odpoveď:

Na rozpínanie potrebuje vzduch 927,47 J tepla.

Pri rozpínaní vykoná vzduch prácu veľkosti 264,99 J.

Pri uvedenej stavovej zmene sa pohyblivý piest posunie o 46,9 cm.

Úloha 50 (Hajko, V. et al., 1983, str. 251/414)

V nádobe s objemom 60 litrov sú pod tlakom 1 MPa uzavreté 0,2 kg vzduchu. Vypočítajte, koľko tepla treba vzduchu dodať, aby pri stálom tlaku zmenil svoj objem na dvojnásobný. Ako sa pri tom zmenila jeho vnútorná energia a akú prácu vzduch navonok vykonal? (*Poznámka:* Poissonova konštanta pre vzduch má hodnotu 1,4.)

Zápis:

V_0 = 60 l = 6.10^{-2} m^3

p_0 = 1 MPa = 10^6 Pa

$V_1 = 2V_0$ = 12.10^{-2} m^3

κ(vzduch) = 1,4

$\Delta Q'$ = ?

ΔU = ?

W = ?

p = konšt.

Riešenie:

$$\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$$

$$\Delta Q' = nC_\mathrm{v}(T_1 - T_0) + p(V_1 - V_0)$$

Pri izobarickom deji platí: $p_1 = p_0$. Úpravou stavovej rovnice dostaneme vzťah pre výpočet T_1 a T_0, ktorý ďalej využijeme vo výpočte ΔU:

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} R T_0 \;/. \left(\frac{1}{T_0}\right)$$

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{m}{M} R \;/. \left(\frac{1}{p_0 V_0}\right)$$

$$\frac{1}{T_0} = \frac{mR}{M p_0 V_0}$$

$$T_0 = \frac{M p_0 V_0}{mR}$$

$$p_0 V_1 = \frac{m}{M} R T_1 \;/. \left(\frac{1}{T_1}\right)$$

$$\frac{p_0 V_1}{T_1} = \frac{m}{M} R \;/. \left(\frac{1}{p_0 V_1}\right)$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{mR}{M p_0 V_1}$$

$$T_1 = \frac{M p_0 V_1}{mR}$$

Pri výpočte ΔU využijeme Mayerov vzťah, ktorý upravíme nasledovne:

$$C_p - C_v = R$$
$$M(c_p - c_v) = R$$
$$M\left[(\kappa c_v) - c_v\right] = R$$
$$M(\kappa - 1)c_v = R$$
$$M = \frac{R}{(\kappa - 1)c_v}$$

$$\Delta U = nC_v\left(T_1 - T_0\right)$$
$$\Delta U = \frac{m}{M}c_v M\left(T_1 - T_0\right)$$
$$\Delta U = mc_v\left(\frac{Mp_0V_1}{mR} - \frac{Mp_0V_0}{mR}\right)$$
$$\Delta U = mc_v\,\frac{Mp_0}{MR}\left(V_1 - V_0\right)$$
$$\Delta U = \frac{R}{(\kappa - 1)c_v}\cdot\frac{p_0c_v}{R}\left(V_1 - V_0\right)$$
$$\Delta U = \frac{p_0}{(\kappa - 1)}\left(V_1 - V_0\right)$$
$$\Delta U = \frac{10^6\ \mathrm{Pa}}{\left(1{,}4 - 1\right)}\left(12.10^{-2}\ \mathrm{m}^3 - 60.10^{-2}\ \mathrm{m}^3\right)$$
$$\Delta U = 150000\ \mathrm{J} = 150\ \mathrm{kJ}$$

$$\Delta W = p_0\Delta V$$
$$\Delta W = p_0(V_1 - V_0)$$
$$\Delta W = 10^6\ \mathrm{Pa.}\left(12.10^{-2}\ \mathrm{m}^3 - 6.10^{-2}\ \mathrm{m}^3\right)$$
$$\Delta W = 60000\ \mathrm{J} = 60\ \mathrm{kJ}$$

$$\Delta Q' = \Delta U + \Delta W$$
$$\Delta Q' = 150000\ \mathrm{J} + 60000\ \mathrm{J}$$
$$\Delta Q' = 210000\ \mathrm{J}$$

Odpoveď:

Vzduchu je treba dodať 210 kJ tepla. Jeho vnútorná energia sa zmení o 150 kJ. Vzduch navonok vykonal prácu veľkosti 60 kJ.

Úloha 51 (Hajko, V. et al., 1983, str. 222/380) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)

Hélium objemu 3 litre zväčšilo pri stálom tlaku 0,2 MPa svoj objem na dvojnásobný. Vypočítajte, koľko tepla na to bolo treba. (*Poznámka:* Poissonova konštanta pre hélium je 1,67.)

Zápis:

V_0 = 3 l = 3.10^{-3} m^3

p_0 = 0,2 MPa = 2.10^5 Pa

$V_1 = 2V_0$ = 6.10^{-3} m^3

κ(He) = 1,67

R = 8,314 J .K^{-1}.mol^{-1}

Q' = ?

p = konšt.

Riešenie:

$$\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$$

$$\Delta Q' = nC_\mathrm{v}(T_1 - T_0) + p(V_1 - V_0)$$

Pri izobarickom deji platí: $p = p_0 = p_1$

$$\Delta Q' = \frac{m}{M} C_\mathrm{v}(T_1 - T_0) + p_0(V_1 - V_0)$$

$$\Delta Q' = \frac{m}{M} C_\mathrm{v}(T_1 - T_0) + p_0(2V_0 - V_0)$$

$$\Delta Q' = \frac{m}{M} C_\mathrm{v}(T_1 - T_0) + p_0 V_0$$

Vzhľadom na to, že m, T_0, T_1 nepoznáme, napíšeme si stavové rovnice:

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} R T_0 \ / . \left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{p_0 V_0}{R} = \frac{m}{M} T_0$$

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1 \ / . \left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{p_0 V_1}{R} = \frac{m}{M} T_1$$

$$\frac{p_0 V_1}{R} = \frac{m}{M} T_1$$

$$\frac{m}{M} T_1 - \frac{m}{M} T_0 = \frac{p_0 V_1}{R} - \frac{p_0 V_0}{R}$$

$$\frac{m}{M}(T_1 - T_0) = \frac{p_0 2V_0 - p_0 V_0}{R}$$

$$\frac{m}{M}(T_1 - T_0) = \frac{p_0(2V_0 - V_0)}{R}$$

$$\frac{m}{M}(T_1 - T_0) = \frac{p_0 V_0}{R}$$

Dosadením do rovnice pre výpočet ΔQ môžeme písať:

$$\Delta Q' = \frac{p_0 V_0}{R} C_{\mathrm{v}} + p_0 V_0$$

$$\Delta Q' = p_0 V_0 \left(\frac{C_{\mathrm{v}}}{R} + 1 \right)$$

$$\Delta Q' = p_0 V_0 \left(\frac{C_{\mathrm{v}} + R}{R} \right)$$

$$\Delta Q' = p_0 V_0 \left(\frac{C_{\mathrm{p}}}{R} \right)$$

$$\Delta Q' = p_0 V_0 \left(\frac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{p}} - C_{\mathrm{v}}} \right)$$

$$\Delta Q' = p_0 V_0 \left(\frac{\kappa C_{\mathrm{v}}}{\kappa C_{\mathrm{v}} - C_{\mathrm{v}}} \right)$$

$$\Delta Q' = p_0 V_0 \left(\frac{\kappa C_{\mathrm{v}}}{C_{\mathrm{v}}(\kappa - 1)} \right)$$

$$\Delta Q' = p_0 V_0 \left(\frac{\kappa}{(\kappa - 1)} \right)$$

$$\Delta Q' = 2.10^5\,\mathrm{Pa}.3.10^{-3}\,\mathrm{m}^3.\left(\frac{1{,}67}{1{,}67 - 1} \right)$$

$$\Delta Q' = 2.10^5\,\mathrm{Pa}.3.10^{-3}\,\mathrm{m}^3.2{,}4925373$$

$$\Delta Q' = 1495{,}52\,\mathrm{J} \cong 1496\,\mathrm{J}$$

Odpoveď:

Na dvojnásobné zväčšenie objemu hélia pri stálom tlaku bolo potrebné dodať približne 1496 J tepla.

Iný spôsob riešenia:

$$\mathrm{d}Q' = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$$

$$\Delta Q' = nC_{\mathrm{v}}(T_1 - T_0) + p_0 V_0$$

Pri izobarickom deji platí: $p = p_0 = p_1$

Vzhľadom na to, že m, T_0, T_1 nepoznáme, napíšeme si stavové rovnice:

$$p_0 V_0 = nRT_0$$

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{nR}$$

$$p_1 V_1 = nRT_1$$

$$p_0 V_1 = nRT_1$$

$$T_1 = \frac{p_0 V_1}{nR}$$

Po dosadení do vzťahu na výpočet $\Delta Q'$ dostaneme:

$$\Delta Q' = nC_{\mathrm{v}}\left(\frac{p_0V_1}{nR} - \frac{p_0V_0}{nR}\right) + p_0V$$

$$\Delta Q' = \frac{nC_{\mathrm{v}}}{nR}\,p_0\left(2V_0 - V_0\right) + p_0V$$

$$\Delta Q' = \frac{C_{\mathrm{v}}}{C_{\mathrm{p}} - C_{\mathrm{v}}}\,p_0V_0 + p_0V$$

$$\Delta Q' = \frac{Mc_{\mathrm{v}}}{M\left(c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{v}}\right)}\,p_0V_0 + p_0V$$

$$\Delta Q' = \frac{c_{\mathrm{v}}}{\left(c_{\mathrm{p}} - c_{\mathrm{v}}\right)}\,p_0V_0 + p_0V$$

$$\Delta Q' = \frac{c_{\mathrm{v}}}{c_{\mathrm{v}}\left(\kappa - 1\right)}\,p_0V_0 + p_0V$$

$$\Delta Q' = p_0V_0\left(\frac{1}{\kappa - 1} + 1\right)$$

$$\Delta Q' = 2.10^5\ \mathrm{Pa}.3.10^{-3}\ \mathrm{m}^3.\left(\frac{1}{1{,}67 - 1} + 1\right)$$

$$\Delta Q' = 1495{,}52\ \mathrm{J} \cong 1496\ \mathrm{J}$$

Odpoveď:

Na dvojnásobné zväčšenie objemu hélia pri stálom tlaku bolo potrebné dodať približne 1496 J tepla.

Úloha 52 (Hajko, V. et al., 1983, str. 223/381) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)

Vypočítajte, koľko tepla sa musí chladením odňať pri izotermickom stlačení 45 g oxidu uhličitého (CO_2) teploty -15 °C z tlaku 0,23 MPa na tlak 0,58 MPa.

Zápis:

m = 45 g = 45.10^{-3} kg

t_1 = -15 °C

T_1 = 258,15 K

$M(CO_2)$ = 44 g.mol^{-1} = 44.10^{-3} kg.mol^{-1}

p_1 = 0,23 MPa = 23.10^4 Pa

p_2 = 0,58 MPa = 58.10^4 Pa

$Q = ?$

Riešenie:

Pri izotermickom deji sa vnútorná energia ideálneho plynu nemení. T = konšt., dT = 0, dU = 0

Zo stavovej rovnice vyplýva:

$$pV = nRT$$

$$p = \frac{mRT}{MV}$$

Pri izotermickej zmene platí podľa Boylovho-Mariottovho zákona:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Na základe uvedených skutočností môžeme písať:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W'$$

$$Q = \int_1^2 \mathrm{d}W'$$

$$Q = -\int_1^2 p\,\mathrm{d}V$$

$$Q = -\int_1^2 \frac{mRT}{MV}\mathrm{d}V$$

$$Q = -\frac{mRT}{M}\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$Q = -\frac{mRT}{M}\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$Q = -\frac{mRT}{M}\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Pretože $p_1 < p_2$ je logaritmus v poslednom vzťahu záporný. Na izotermickú kompresiu zvonka dodaná práca W', sa úplne premení na teplo Q, ktoré plyn vydá a ktoré sa ochladením plynu zoberie.

$$Q = W' = -\frac{mRT}{M}\ln\frac{p_1}{p_2}$$

$$Q = -\frac{mRT}{M}\ln\frac{p_1}{p_2}$$

$$Q = -\frac{45.10^{-3}\,\mathrm{kg}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.258{,}15\,\mathrm{K}}{44.10^{-3}\,\mathrm{kg.mol^{-1}}}\ln\frac{23.10^4\,\mathrm{Pa}}{58.10^4\,\mathrm{Pa}}$$

$$Q = 2030{,}2975\,\mathrm{J} \cong 2030\,\mathrm{J}$$

Odpoveď:

Ochladením sa musí odňať 2030 J tepla.

Úloha 53 (Hajko, V. et al., 1983, str. 224/382) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)

Kompresor nasáva 150 m^3 atmosférického vzduchu za hodinu a stláča ho na tlak 1,1 MPa. Ochladzuje sa tečúcou vodou, takže stláčanie možno považovať za izotermický dej. Vypočítajte, koľko vody pretieklo chladiacim zariadením za hodinu, keď sa v ňom voda ohriala z 10 °C na 18 °C. Vonkajší tlak vzduchu má hodnotu 0,1 MPa.

Zápis:

V_0 = 150 m^3

p_0 = 0,1 MPa = 10^5 Pa

p_1 = 1,1 MPa = 11.10^5 Pa

t_0 = 10 °C

t_1 = 18 °C

$c(H_2O)$ = 4186 $J.kg^{-1}.K^{-1}$

m = ?

Riešenie:

Voda pretekajúca chladiacim zariadením prijme za každú hodinu teplo Q, ktoré jej odovzdal plyn a tým sa ohreje o Δt.

Platí:

$$Q = mc\Delta t$$

$$m = \frac{Q}{c\Delta T}$$

Pri izotermickom deji sa vnútorná energia ideálneho plynu nemení. T = konšt., dT = 0, dU = 0
Celá zvonku dodaná práca W sa mení na teplo Q.

Podľa prvej vety termodynamickej platí:

$$W' = -\int_{V_0}^{V_1} p \mathrm{d}V = Q$$

Podľa Boylovho-Mariottovho zákona platí:

$\frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} \Rightarrow p = \frac{V_0 p_0}{V}$, po dosadení dostaneme:

$$Q = \int_{V_1}^{V_0} \frac{p_0 V_0}{V} \mathrm{d}V$$

$$Q = p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V_1}$$

$$Q = p_0 V_0 \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Po dosadení môžeme písať:

$$m = \frac{p_0 V_0 \ln \frac{p_1}{p_0}}{c\Delta T}$$

$$m = \frac{10^5\ \mathrm{Pa}.150\,\mathrm{m}^3 \ln \frac{11.10^5\ \mathrm{Pa}}{10^5\ \mathrm{Pa}}}{4186\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.8\,\mathrm{K}}$$

$$m = 1074{,}069\,\mathrm{kg} \cong 1074\,\mathrm{kg}$$

Odpoveď:

Za hodinu pretieklo chladiacim zariadením 1074 kg vody.

Úloha 54 (Hajko, V. et al., 1983, str. 219/378) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)

Vo valci s pohyblivým piestom je 36 g vodíka teploty 27 °C pod tlakom 0,4 MPa. Na jeho stlačenie na tretinu pôvodného objemu bolo treba vykonať prácu $1{,}5.10^5$ J a súčasne sa mu chladením odňalo $5{,}95.10^4$ J tepla. Vypočítajte teplotu a tlak vodíka po stlačení.

Zápis:

$m = 36\ \text{g} = 36.10^{-3}\ \text{kg}$

$t_1 = 27\ °\text{C}$

$T_1 = 300{,}15\ \text{K}$

$p_1 = 0{,}4\ \text{MPa} = 4.10^5\ \text{Pa}$

$V_2 = \frac{1}{3} V_1$

$W = 1{,}5.10^5\ \text{J}$

$Q' = 5{,}95.10^4\ \text{J}$

$c_v(H_2) = 10130\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$T_2 = ?$

$p_2 = ?$

Riešenie:

Vzhľadom na to, že teplo prijaté sústavou Q je záporné a sústava vydáva navonok kladné teplo $Q' = -Q$

Z prvej vety termodynamickej vyplýva:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W$$

$$\int_{T_1}^{T_2} m c_v \mathrm{d}T = \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}Q + \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}W$$

$$m c_v (T_2 - T_1) = Q + W$$

$$T_2 - T_1 = \frac{Q + W}{m c_v}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{Q + W}{m c_v}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{W - Q'}{m c_v}$$

$$T_2 = 300{,}15\,\mathrm{K} + \frac{\left(-5{,}95.10^4\,\mathrm{J}\right) + 1{,}5.10^5\,\mathrm{J}}{36.10^{-3}\,\mathrm{kg}.10130\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}}$$

$$T_2 = 548{,}31\,\mathrm{K}$$

$$t_2 = 275{,}16\,°\mathrm{C}$$

Zo stavovej rovnice plynu vyplýva:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1$$

$$V_1 = \frac{m R T_1}{M p_1}$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2$$

$$p_2 \frac{1}{3} V_1 = \frac{m}{M} R T_2$$

$$p_2 = \frac{m R T_2 3}{\dfrac{M m R T_1}{M p_1}}$$

$$p_2 = \frac{m R T_2 3 p_1}{m R T_1}$$

$$p_2 = 3 p_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$p_2 = 3.4.10^5\,\mathrm{Pa}.\frac{548{,}31\,\mathrm{K}}{300{,}15\,\mathrm{K}}$$

$$p_2 = 21{,}9.10^5\,\mathrm{Pa} \cong 2{,}19\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Teplota vodíka po stlačené bude 275,16 °C.

Tlak vodíka po stlačení je 2,19 MPa.

Úloha 55 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/408)

Keď sme dodali určitému množstvu argónu teploty 60 °C pri stálom objeme 209,3 J tepla, zvýšila sa jeho teplota na 88 °C. Koľko bolo argónu?

Zápis:

Q' = 209,3 J

t_0 = 60 °C

t = 80 °C

c_v = 319 J.kg^{-1}.K^{-1}

m(Ar) = ? kg

Riešenie:

$$Q' = mc_v\Delta T$$

$$m = \frac{Q'}{c_v\Delta T}$$

$$m = \frac{209{,}3\,\mathrm{J}}{319\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.28\,\mathrm{K}}$$

$$m = 0{,}02343\,\mathrm{kg}$$

$$m = 23{,}43\,\mathrm{g}$$

Odpoveď:

Argónu bolo 23,43 g.

Úloha 56 (Hajko, V. et al., 1983, str. 250/403)

Stroj pracujúci s výkonom 368 W vyvŕta za dve minúty otvor do liatinového bloku hmotnosti 20 kg. O koľko stupňov sa blok ohreje, keď 80 % práce, konanej pri vŕtaní, prispieva k zväčšeniu vnútornej energie bloku? (*Poznámka:* Hmotnostná tepelná kapacita liatiny je 544,2 J.kg^{-1}.K^{-1}.)

Zápis:

P = 368 W

τ = 2 min = 120 s

c(liatina) = 544,2 J.kg^{-1}.K^{-1}

m = 20 kg

$$U = 0{,}8W \Rightarrow W = \frac{U}{0{,}8}$$

Δt = ?

Riešenie:

$$P = \frac{W}{\tau}$$

$$W = P\tau$$

$$\frac{U}{0{,}8} = P\tau$$

$$\frac{mc\Delta T}{0{,}8} = P\tau$$
$$\Delta T = \frac{P\tau 0{,}8}{mc}$$
$$\Delta T = \frac{368\,\mathrm{W}.120\,\mathrm{s}.0{,}8}{20\mathrm{kg}.544{,}2\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}}$$
$$\Delta T = 3{,}2458655\,\mathrm{K} \cong 3{,}25\,\mathrm{K}$$
$$\Delta t = 3{,}25\,°\mathrm{C}$$

Odpoveď:

Liatinový blok sa ohreje o 3,25 °C.

Úloha 57 (Hajko, V. et al., 1983, str. 252/418)

Pri izotermickom stlačení 4,5 litrov vzduchu z pôvodného tlaku 98658 Pa sa okoliu odovzdalo 1046,5 J tepla. Vypočítajte tlak a objem vzduchu po stlačení.

Zápis:

V_1 = 4,5 l = 4,5.10^{-3} m^3

p_1 = 98658 Pa

Q = 1046,5 J

p_2 = ?

V_2 = ?

Riešenie:

$$p_1V_1 = p_2V_2$$
$$pV = p_1V_1$$
$$p = \frac{p_1V_1}{V}$$

$$\mathrm{d}Q = -p\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = \int_1^2 -p\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = \int_{V_0}^{V} -\frac{p_1V_1}{V}\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = -p_1V_1\int_1^2 \frac{1}{V}\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}Q = -p_1V_1\ln[V]_1^2$$
$$\mathrm{d}Q = -p_1V_1(\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$\ln V_2 - \ln V_1 = \frac{\Delta Q}{-(p_1 V_1)} \;/ + \ln V_1$$

$$\ln V_2 = \frac{\Delta Q}{-(p_1 V_1)} + \ln V_1$$

$$\ln V_2 = \frac{1046{,}5\,\mathrm{J}}{-(98658\,\mathrm{Pa}\,.\,4{,}5.10^{-3}\,\mathrm{m}^3)} + \ln 4{,}5.10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

$$\ln V_2 = -7{,}7608669\,\mathrm{m}^3$$

$$V_2 = 0{,}0004261\,\mathrm{m}^3 = 0{,}4261\,\mathrm{l}$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2}$$

$$p_2 = \frac{98658\,\mathrm{Pa}\,.\,4{,}5.10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{0{,}0004261\,\mathrm{m}^3}$$

$$p_2 = 1041917{,}39\,\mathrm{Pa} \cong 1{,}04\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Po stlačení bude objem vzduchu 0,4261 a jeho tlak bude 1,04 MPa.

Úloha 58 (Hajko, V. et al., 1983, str. 252/419)

Po ukončení izotermického stláčania určitého množstva plynu sa dosiahol tlak 0,22 MPa pri objeme 4 litre a chladením sa odviedlo 25,1 J tepla. Vypočítajte, aký bol tlak plynu na začiatku deja, keď teplota plynu bola 20 °C.

Zápis:

p_2 = 0,22 MPa = 0,22.10^6 Pa

V_2 = 4 l = 4.10^{-3} m^3

Q = 25,1 J

t = 20 °C

p_1 = ?

Riešenie:

$$\mathrm{d}Q = -\,p\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}Q = \int_1^2 -\,p\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}Q = \int_{V_0}^{V} -\frac{p_2V_2}{V}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}Q = -\,p_2V_2\int_1^2 \frac{1}{V}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}Q = -\,p_2V_2 \ln[V]_1^2$$

$$\mathrm{d}Q = -\,p_2V_2(\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$\ln V_2 - \ln V_1 = \frac{\Delta Q}{-(p_1V_1)} \;/ -\ln V_2$$

$$-\ln V_1 = \frac{\Delta Q}{-(p_2V_2)} - \ln V_2$$

$$-\ln V_1 = \frac{25{,}1\,\mathrm{J}}{-(0{,}22.10^6\,\mathrm{Pa}.4.10^{-3}\,\mathrm{m}^3)} + \ln 4.10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

$$-\ln V_1 = 5{,}4929382\,\mathrm{m}^3 \;/.(-1)$$

$$\ln V_1 = -5{,}4929382\,\mathrm{m}^3$$

$$V_1 = 0{,}0041157\,\mathrm{m}^3 \cong 4{,}1\mathrm{l}$$

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$pV = p_2V_2$$

$$p = \frac{p_2V_2}{V}$$

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$p_1 = \frac{p_2V_2}{V_2}$$

$$p_1 = \frac{90{,}22.10^6\,\mathrm{Pa}.4.10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{0{,}0041157\,\mathrm{m}^3}$$

$$p_1 = 213815{,}39\,\mathrm{Pa} \cong 0{,}2138\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Na začiatku deja bol tlak plynu 0,2138 MPa.

Úloha 59 (Hajko, V. et al., 1983, str. 252/420)

Kompresor nasáva atmosférický vzduch s tlakom 0,1 MPa a teplotou 27 °C a stláča ho pri stálej teplote na tlak 3,5 MPa. Vypočítajte, koľko tepla sa odvádza chladiacej vode za hodinu, keď za tento čas sa stlačí 10 kg vzduchu.

Zápis:

c_v(vzduch) = 728 J.kg^{-1}.K^{-1}

p_0 = 0,1 MPa = 10^5 Pa

p_1 = 3,5 MPa = 3,5.10^6 Pa

m = 10 kg

t_0 = 27 °C

T_0 = 300,15 K

κ(vzduch) = 1,4

V_0 = ?

V = ?

Riešenie:

Vo výpočte budeme využívať Mayerov vzťah, ktorého úpravou dostaneme:

$$C_p - C_v = R$$
$$M(c_p - c_v) = R$$
$$M\left[(\kappa c_v) - c_v)\right] = R$$
$$M(\kappa - 1)c_v = R$$
$$M = \frac{R}{(\kappa - 1)c_v}$$

Ide o izotermické stláčanie, z toho vyplýva, že systému treba dodať prácu:

$$W' = -Q = p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V}$$

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} R T_0 \; / . \frac{1}{T_0}$$
$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{m}{M} R$$
$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{mR}{\frac{R}{(\kappa - 1)c_v}}$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{mR(\kappa-1)c_v}{R}/.T_0,.\frac{1}{p_0}$$

$$V_0=\frac{mc_v(\kappa-1)T_0}{p_0}$$

$$V_0=\frac{10\,\mathrm{kg}.728\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.(1{,}4-1).300{,}15\,\mathrm{K}}{10^5\ \mathrm{Pa}}$$

$$V_0=8{,}74\,\mathrm{m^3}$$

Na základe uvedeného, možno pre V_1 písať vzťah:

$$V_1=\frac{mc_v(\kappa-1)T_0}{p_1}$$

Oba vzťahy ďalej využijeme vo výpočte:

$$Q=p_0V_0\ln\frac{V_0}{V}$$

$$Q=p_0V_0\ln\frac{\frac{mc_v(\kappa-1)T_0}{p_0}}{\frac{mc_v(\kappa-1)T_0}{p_1}}$$

$$Q=p_0V_0\ln\frac{p_1}{p_0}$$

$$Q=10^5\ \mathrm{Pa}.8{,}74\,\mathrm{m^3}.\ln\frac{3{,}5.10^6\ \mathrm{Pa}}{10^5\ \mathrm{Pa}}$$

$$Q=3107374{,}2\ \mathrm{J}$$

Odpoveď:

Chladiacej vode sa odovzdá 3107374,2 J tepla.

Úloha 60 (Hajko, V. et al., 1983, str. 252/421)

Vzduch s hmotnosťou 1 kg a teplotou 0 °C sme stlačili z tlaku 0,1 MPa na desaťnásobný tlak. Vypočítajte, akú prácu na to potrebujeme, keď stláčanie prebieha a) izotermicky; b) adiabaticky.

Zápis:

t_0 = 0 °C

T_0 = 273,15 K

p_0 = 0,1 MPa = 10^5 Pa

p_1 = 10^6 Pa

κ(vzduch) = 1,4

c_v(vzduch) = 728 J.kg^{-1}.K^{-1}

W' = ?

Riešenie:

Vo výpočte budeme využívať Mayerov vzťah, ktorého úpravou dostaneme:

$$C_p - C_v = R$$
$$M(c_p - c_v) = R$$
$$M\left[(\kappa c_v) - c_v)\right] = R$$
$$M(\kappa - 1)c_v = R$$
$$M = \frac{R}{(\kappa - 1)c_v}$$

a) izotermické stláčanie

$$W' = -W$$
$$\mathrm{d}W' = -p\mathrm{d}V$$
$$W' = -\int_0^1 p\mathrm{d}V$$
$$W' = -\int_0^1 \frac{p_0V_0}{V}\mathrm{d}V$$
$$W' = -p_0V_0\int_0^1 \frac{1}{V}\mathrm{d}V$$
$$W' = -p_0V_0\ln\left[V\right]_0^1$$
$$W' = -p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}$$
$$W' = p_0V_0\ln\frac{V_0}{V_1}$$

Zo stavovej rovnice vyplýva:

$$p_0V_0 = \frac{m}{M}RT_0 \ / .\frac{1}{T_0}$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{m}{M}R$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{mR}{\dfrac{R}{(\kappa - 1)c_v}}$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{mR(\kappa - 1)c_v}{R} \ / .T_0, .\frac{1}{p_0}$$

$$V_0 = \frac{mc_v(\kappa - 1)T_0}{p_0}$$

$$V_0 = \frac{10\,\mathrm{kg}.728\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.(1{,}4-1).300{,}15\,\mathrm{K}}{10^5\ \mathrm{Pa}}$$

$$V_0 = 8{,}74\,\mathrm{m^3}$$

Na základe uvedeného, možno pre V_1 písať vzťah:

$$V_1 = \frac{mc_v(\kappa - 1)T_0}{p_1}$$

Po dosadení vzťahov pre výpočet V_0 a V_1 do rovnice pre výpočet W, môžeme písať:

$$W = mc_v(\kappa - 1)T_0 \ln \frac{\dfrac{mc_v(\kappa - 1)T_0}{p_0}}{\dfrac{mc_v(\kappa - 1)T_0}{p_1}}$$

$$W = p_0V_0 \ln \frac{p_1}{p_0}$$

$$W = 1\,kg.(1{,}4-1).728\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.273{,}15\mathrm{K}.\ln \frac{10^6\ \mathrm{Pa}}{10^5\ \mathrm{Pa}}$$

$$W = 183150{,}5656\,\mathrm{J} \cong 183151\,\mathrm{J}$$

Odpoveď:

Na izotermické stlačenie vzduchu potrebujeme vykonať prácu veľkosti 183151 J.

b) adiabatické stláčanie

$$dQ = 0$$

$$dU = -\,dW = dW'$$

$$dW = mc_v\left(T_1 - T_0\right)$$

$$p_0V_0 = \frac{m}{M}RT_0 \;/\,.\frac{1}{T_0}$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{m}{M}R$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{mR}{\frac{R}{(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}}$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{mR(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}{R} \;/\,.\frac{1}{p_0V_0}$$

$$\frac{1}{T_0} = \frac{mR(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}{Rp_0V_0}$$

$$T_0 = \frac{p_0V_0}{m(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}$$

$$p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1 \;/\,.\frac{1}{T_1}$$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{m}{M}R$$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{mR}{\frac{R}{(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}}$$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{mR(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}{R} \;/\,.\frac{1}{p_1V_1}$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{mR(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}{Rp_1V_1}$$

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{m(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}$$

$$p_0V_0 = \frac{m}{M}RT_0 \;/\,.\frac{1}{T_0}$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{m}{M}R$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{mR}{\frac{R}{(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}}$$

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{mR(\kappa\text{-}1)c_\mathrm{v}}{R} \;/\,.T_0,.\frac{1}{p_0}$$

$$V_0 = \frac{mc_\mathrm{v}(\kappa\text{-}1)T_0}{p_0}$$

$$V_0 = \frac{1\,\mathrm{kg}.728\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.(1{,}4-1).273{,}15\,\mathrm{K}}{10^5\ \mathrm{Pa}}$$

$$V_0 = 0{,}795\,\mathrm{m}^3$$

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$$

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\kappa}$$

$$\ln \frac{p_0}{p_1} = \kappa \ln \frac{V_1}{V_0}$$

$$\ln \frac{10^5 \text{ Pa}}{10^6 \text{ Pa}} = \kappa \ln \frac{V_1}{V_0}$$

$$\ln 0{,}1 = \kappa \ln \frac{V_1}{V_0} \, / . \frac{1}{\kappa}$$

$$\frac{\ln 0{,}1}{\kappa} = \ln \frac{V_1}{V_0}$$

$$e^{\frac{\ln 0{,}1}{\kappa}} = \frac{V_1}{V_0} \, / . V_0$$

$$V_0 e^{\frac{\ln 0{,}1}{\kappa}} = V_1$$

$$0{,}795 \, \text{m}^3 . e^{\frac{\ln 0{,}1}{1{,}4}} = V_1$$

$$0{,}795 \, \text{m}^3 . 0{,}1930698 = V_1$$

$$0{,}153 \ \text{m}^3 = V_1$$

$$W' = m c_v \left(\frac{p_1 V_1}{m(\kappa - 1) c_v} - \frac{p_0 V_0}{m(\kappa - 1) c_v} \right)$$

$$W' = m c_v \left(\frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{m(\kappa - 1) c_v} \right)$$

$$W' = \frac{1}{(\kappa - 1)} \left(p_1 V_1 - p_0 V_0 \right)$$

$$W' = \frac{1}{(1{,}4 - 1)} \left(10^6 \, Pa . 0{,}153 \, m^3 \, 10^5 \, Pa . 0{,}795 \, m^3 \right)$$

$$W' = 183750 \, J$$

Odpoveď:

Na adiabatické stlačenie plynu potrebujeme vykonať prácu veľkosti 183750 J.

Úloha 61 (Hajko, V. et al., 1983, str. 252/422)

Dieslov motor má kompresný pomer $V_1:V_2 = k$. Vzduch vo valci má začiatočný tlak p_1, objem V_1 a teplotu t_1.

a) Aký je tlak p_2 a teplota t_2 vzduchu vo valci motora na konci adiabatickej kompresie pri uvedenom kompresnom pomere?

b) Akú prácu vykonali pri kompresii vonkajšie sily?

Zápis:

p_1, V_1, t_1

$V_1:V_2 = k$

$p_2 =?$

$t_2= ?$

$W' =?$

Riešenie:

Vychádzame z Poissonovej rovnice:

$$p_0V_0^{\kappa} = \text{konšt.}$$

$$p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa}$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}$$

$$p_2 = p_1\mathrm{k}^{\kappa}$$

Tento vzťah platí pre tlak vzduchu vo valci motora na konci adiabatickej kompresie.

Zo stavovej rovnice:

$$pV = nRT$$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

dosadíme do Poissonovej rovnice:

$$\frac{nRT}{V}V^{\kappa} = \text{konšt.}/.\frac{1}{nR}$$

$$\frac{V^{\kappa}}{V} = \text{konšt.}$$

$$TV^{(\kappa-1)} = \text{konšt.},$$

potom platí:

$$T_1V_1^{(\kappa-1)} = T_2V_2^{(\kappa-1)}$$

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\kappa-1)}$$

$$T_2 = T_1k^{(\kappa-1)}$$

b)

V prípade adiabatického deja prvá veta termodynamiky dáva:

$$W' = \Delta U = nR\Delta T = nR(T_2 - T_1)$$

Zo stavovej rovnice dostaneme vyjadrenie pre *nR*:

$$nR = \frac{p_1V_1}{T_1} \quad .$$

Preto

$$W' = \frac{p_1V_1}{T_1}(T_2 - T_1) = p_1V\left(k^{(\kappa-1)} - 1\right)$$

Odpoveď:

Pre teplotu vzduchu vo valci na konci adiabatickej kompresie platí vzťah: $T_2 = T_1\mathrm{k}^{(\kappa-1)}$.

Práca, ktorú pritom vykonajú vonkajšie sily bude: $W' = p_1V\left(k^{(\kappa-1)} - 1\right)$.

Úloha 62 (Hajko, V. et al., 1983, str. 252/423)

V nádobe s objemom 2 litre sú pri teplote 27 °C 2 móly dusíka (N_2). Vypočítajte, aké budú tlaky dusíka pri objemoch 1,5 *l*; 4 *l*; 5 *l*; 6 *l*, keď plyn mení svoj objem: a) izotermicky; b) adiabaticky.

Zápis:

t_0 = 27 °C

T_0 = 300,15 K

V_0 = 2 l = 2.10^{-3} m^3

n = 2 mol

V_1 = 1,5 l = 1,5.10^{-3} m^3

V_2 = 4 l = 4.10^{-3} m^3

V_3 = 5 l = 5.10^{-3} m^3

V_4 = 6 l = 6.10^{-3} m^3

$\kappa(N_2)$ = 1,41

R = 8,314 J .K^{-1}.mol^{-1}

p_1 = ?

p_2 = ?

p_3 = ?

p_4 = ?

Riešenie:

a) izotermicky

I.) V_1 = 1,5 l

Napíšeme si stavovú rovnicu v tvare: $p_0 V_0 = nRT_0$

Platí:

$$p_0 V_0 = p_1 V_1$$

$$p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_1}$$

$$p_1 = \frac{nRT_0}{V_1}$$

$$p_1 = \frac{2\,\mathrm{mol}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.300{,}15\,\mathrm{K}}{1{,}5.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}$$

$$p_1 = 3327262{,}8\,\mathrm{Pa} \cong 3{,}33\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Pri izotermickej zmene pri objeme 1,5 l bude tlak dusíka 3,33 MPa.

II.) V_2 = 4 *l*

$$p_0V_0 = p_2V_2$$
$$p_2 = \frac{p_0V_0}{V_2}$$
$$p_2 = \frac{nRT_0}{V_2}$$
$$p_2 = \frac{2\,\mathrm{mol}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.300{,}15\,\mathrm{K}}{4.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}$$
$$p_2 = 1247723{,}55\,\mathrm{Pa} \cong 1{,}25\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Pri izotermickej zmene pri objeme 4 *l* bude tlak dusíka 1,25 MPa.

III.) V_3 = 5 *l*

$$p_0V_0 = p_3V_3$$
$$p_3 = \frac{p_0V_0}{V_3}$$
$$p_3 = \frac{nRT_0}{V_3}$$
$$p_3 = \frac{2\,\mathrm{mol}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.300{,}15\,\mathrm{K}}{5.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}$$
$$p_3 = 998178{,}84\,\mathrm{Pa} \cong 0{,}998\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Pri izotermickej zmene pri objeme 5 *l* bude tlak dusíka 0,998 MPa.

IV.) V_4 = 6 *l*

$$p_0V_0 = p_4V_4$$
$$p_4 = \frac{p_0V_0}{V_4}$$
$$p_4 = \frac{nRT_0}{V_4}$$

$$p_4 = \frac{2\,\text{mol}.8{,}314\,\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.300{,}15\,\text{K}}{6.10^{-3}\,\text{m}^3}$$

$$p_4 = 831815{,}7\,\text{Pa} \cong 0{,}832\,\text{MPa}$$

Odpoveď:

Pri izotermickej zmene pri objeme 6 *l* bude tlak dusíka 0,832 MPa.

b) adiabaticky

I.) V_1 = 1,5 *l*

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$$

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa}$$

$$p_1 = \frac{nRT_0}{V_0}\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa}$$

$$p_1 = \frac{2\,\text{mol}.8{,}314\,\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.300{,}15\,\text{K}}{2.10^{-3}\,\text{m}^3}\left(\frac{2.10^{-3}\,\text{m}^3}{1{,}5.10^{-3}\,\text{m}^3}\right)^{1{,}41}$$

$$p_1 = 3743794{,}366\,\text{Pa} \cong 3{,}74\,\text{MPa}$$

Odpoveď:

Pri adiabatickej zmene pri objeme 1,5 *l* bude tlak dusíka 3,74 MPa.

II.) V_2 = 4 *l*

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$$

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa}$$

$$p_2 = \frac{nRT_0}{V_0}\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa}$$

$$p_2 = \frac{2\,\text{mol}.8{,}314\,\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.300{,}15\,\text{K}}{2.10^{-3}\,\text{m}^3}\left(\frac{2.10^{-3}\,\text{m}^3}{4.10^{-3}\,\text{m}^3}\right)^{1{,}41}$$

$$p_2 = 939065{,}9076\,\text{Pa} \cong 0{,}939\,\text{MPa}$$

Odpoveď:

Pri adiabatickej zmene pri objeme 4 *l* bude tlak dusíka 0,939 MPa.

III.) $V_3 = 5\ l$

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_3 V_3^{\kappa}$$

$$p_3 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_3}\right)^{\kappa}$$

$$p_3 = \frac{nRT_0}{V_0}\left(\frac{V_0}{V_3}\right)^{\kappa}$$

$$p_3 = \frac{2\,\mathrm{mol}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.300{,}15\,\mathrm{K}}{2.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}\left(\frac{2.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}{5.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}\right)^{1{,}41}$$

$$p_3 = 685571{,}8164\,\mathrm{Pa} \cong 0{,}686\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Pri adiabatickej zmene pri objeme 5 *l* bude tlak dusíka 0,686 MPa.

IV.) $V_4 = 6\ l$

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_4 V_4^{\kappa}$$

$$p_4 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_4}\right)^{\kappa}$$

$$p_4 = \frac{nRT_0}{V_0}\left(\frac{V_0}{V_4}\right)^{\kappa}$$

$$p_4 = \frac{2\,\mathrm{mol}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.300{,}15\,\mathrm{K}}{2.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}\left(\frac{2.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}{6.10^{-3}\,\mathrm{m^3}}\right)^{1{,}41}$$

$$p_4 = 530160{,}5384\,\mathrm{Pa} \cong 0{,}530\,\mathrm{MPa}$$

Odpoveď:

Pri adiabatickej zmene pri objeme 6 *l* bude tlak dusíka 0,530 MPa.

Úloha 63 (Hajko, V. et al., 1983, str. 252/424)

Určité množstvo dusíka (N_2) hmotnosti 8 g a teploty 20 °C adiabaticky stlačíme na objem, ktorý sa rovná pätine pôvodného objemu. Akú prácu sme pri tomto deji plynu dodali a ako sa zmenila jeho vnútorná energia? Vypočítajte aj teplotu dusíka po skončení stláčania.

Zápis:

$m = 8\ \text{g} = 8.10^{-3}\ \text{kg}$

$t_0 = 20\ °\text{C}$

$T_0 = 293{,}15\ \text{K}$

$V_1 = \frac{1}{5} V_0$

$\kappa(N_2) = 1{,}41$

$c_v(N_2) = 741\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$W' = ?$

$\Delta U = ?$

$T_1 = ?$

Riešenie:

Môžeme písať:

$$dQ' = dU + dW$$

$$dQ' = 0$$

$$dW = -dU$$

$$dW' = dU$$

$$T_0 V_0^{(\kappa-1)} = T_1 V_1^{(\kappa-1)}$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{(\kappa-1)}$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{\frac{V_0}{5}} \right)^{(\kappa-1)}$$

$$T_1 = T_0 .5^{(\kappa-1)}$$

$$T_1 = 293{,}15\,\text{K}.5^{(1{,}41-1)}$$

$$T_1 = 567{,}11\,\text{K}$$

$$t_1 = 293{,}96\,°\text{C}$$

$$\Delta U = mc_{\mathrm{v}}\left(T_1 - T_0\right)$$
$$\Delta U = 8.10^{-3}\ \mathrm{kg}.741\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.\left(567{,}11\,\mathrm{K} - 293{,}15\,\mathrm{K}\right)$$
$$\Delta U = 1624\,\mathrm{J}$$

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}U \Rightarrow W = 1624\,\mathrm{J}$$

Odpoveď:

Pri tomto deji sme plynu dodali prácu veľkosti 1624 J a jeho vnútorná energia sa zmenila o 1624 J. Po skončení stláčania bude teplota dusíka 293,96 °C.

Úloha 64 (Hajko, V. et al., 1983, str. 253/425)

Vzduch teploty 25 °C a tlaku 0,1 MPa náhle stlačíme z objemu 15 *l* na objem 3,4 *l*. Aká je teplota a tlak vzduchu na konci stlačenia a ako sa zmení vnútorná energia vzduchu, keď stláčanie možno považovať za adiabatický dej? (*Poznámka*: Poissonova konštanta pre vzduch κ = 1,4)

Zápis:

t_1 = 25 °C

T_0 = 298,15 K

p_1 = 0,1 MPa = 10^5 Pa

V_1 = 15 *l* = 15.10^{-3} m^3

V_2 = 3,4 *l* = $3{,}4.10^{-3}$ m^3

κ(vzduch) = 1,4

ΔU = ?

T_2 = ?

p_2 = ?

Riešenie:

Môžeme písať:

$$dQ = 0$$
$$dU = dW'$$

$$T_1 V_1^{(\kappa-1)} = T_2 V_2^{(\kappa-1)}$$
$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\kappa-1)}$$

$$T_2 = 298{,}15\,\mathrm{K}.\left(\frac{15.10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{3{,}4.10^{-3}\,\mathrm{m}^3}\right)$$

$$T_2 = 539{,}86\,\mathrm{K}$$

$$t_2 = 266{,}7\,°\mathrm{C}$$

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}$$

$$p_2 = 10^5\,\mathrm{Pa}\left(\frac{15.10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{3{,}4.10^{-3}\,\mathrm{m}^3}\right)^{1{,}4}$$

$$p_2 = 7{,}9883536.10^5\,\mathrm{Pa} \cong 0{,}8\,\mathrm{MPa}$$

Úpravou Poissonovej rovnice dostaneme:

$$pV^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$$

$$p = p_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\kappa}$$

Zmena vnútornej energie sa bude rovnať práci vonkajších síl W'.

$$\mathrm{d}W' = -\,\mathrm{d}W$$

$$\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}W$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{p}\,\mathrm{d}V$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^{\kappa}}{V^{\kappa}}\,\mathrm{d}V$$

$$W = p_1 V_1^{\kappa} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{\kappa}}\,\mathrm{d}V$$

$$W = p_1 V_1^{\kappa} \left[\frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right]_{V_1}^{V_2}$$

$$W = p_1 V_1^{\kappa} \left[\frac{V_2^{1-\kappa}}{1-\kappa} - \frac{V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right]$$

$$W = \frac{p_1 V_1^{\kappa} V_2^{1-\kappa} - p_1 V_1^{\kappa} V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa}$$

$$W = \frac{p_2 V_2^{\kappa} V_2^{1-\kappa} - p_1 V_1^{\kappa} V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa}$$

$$W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-\kappa} = -W'$$

$$W' = \frac{\left(7{,}9883536.10^5\, Pa.3{,}4.10^{-3}\, m^3\right) - \left(10^5\, Pa.15.10^{-3}\, m^3\right)}{1-1{,}4}$$

$$W' = 3040\, J \Rightarrow \Delta U = 3040\, J$$

Odpoveď:

Na konci stlačenia bude teplota vzduchu 266,7 °C a tlak vzduchu približne 0,8 MPa. Vnútorná energia sa zmení o 3040 J.

Úloha 65 (Hajko, V. et al., 1983, str. 253/426)

Určité množstvo vzduchu sme nechali rozopnúť zo začiatočného objemu 2 l na päťnásobný . Začiatočný tlak vzduchu je 0,1 MPa. Vypočítajte, akú prácu sme získali, keď sa expanzia uskutočnila: a) izobaricky; b) izotermicky; c) adiabaticky.

Zápis:

V_0 = 2 l = 2.10^{-3} m^3

V_1 = $5V_0$ = 10^{-2} m^3

p_0 = 0,1 MPa = 10^5 Pa

W = ?

Riešenie:

a) izobaricky

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p dV$$

$$W = p \int_{V_0}^{V_1} dV$$

$$W = p\left(V_1 - V_0\right)$$

$$W = 10^5\, Pa\left(10^{-2}\, m^3 - 2.10^{-3}\, m^3\right)$$

$$W = 800\, J$$

Odpoveď:

Pri izobarickej expanzii sme získali prácu veľkosti 800 J.

b) izotermicky

Tlak vyjadríme z Boylovho zákona:

$$p_0 V_0 = pV$$

$$p = \frac{p_0 V_0}{V}$$

$$dW = \int pdV$$

$$dW = \int_1^2 pdV$$

$$dW = \int_1^2 \frac{p_0 V_0}{V} dV$$

$$dW = p_0 V_0 \int_1^2 \frac{1}{V} dV$$

$$dW = p_0 V_0 \ln [V]_1^2$$

$$dW = p_0 V_0 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$dW = 10^5\, Pa .2.10^{-3}\, m^3 \ln \frac{5V_0}{V_0}$$

$$dW = 321{,}89\, J \cong 322\, J$$

Odpoveď:

Pri izotermickej expanzii sme získali prácu veľkosti približne 322 J.

c) adiabaticky

$$pV^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa}$$

$$p = \frac{p_0 V_0^{\kappa}}{V^{\kappa}}$$

$$dW = pdV$$

$$W = \int_{V_0}^{V_1} dW$$

$$W = \int_{V_0}^{V_1} pdV$$

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^{\ \kappa}}{V^{\kappa}} dV$$

$$W = p_0 V_0^{\ \kappa} \int_{V_{01}}^{V_1} \frac{1}{V^{\kappa}} dV$$

$$W = \frac{p_0 V_0^{\ \kappa}}{1-\kappa} \left[V_1^{1-\kappa} - V_0^{\ 1-\kappa} \right]$$

$$W = \frac{p_0 V_0^{\ \kappa} V_0^{\ 1-\kappa}}{1-\kappa} \left[5^{1-\kappa} - 1 \right]$$

$$W = \frac{p_0 V_0}{1-\kappa} \left[5^{(1-1,4)} - 1 \right]$$

$$W = \frac{10^5\, Pa\,.2.10^{-3}\, m^3}{1-1,4} \left[5^{-0,4} - 1 \right]$$

$$W = 237,34\, J \cong 237\, J$$

Odpoveď:

Pri adiabatickej expanzii sme získali prácu veľkosti približne 237 J.

Úloha 66 (Hajko, V. et al., 1983, str. 253/427)

Plyn s tlakom $4{,}9.10^4$ Pa sme adiabaticky stlačili na polovičný objem, a potom izochoricky ochladili na teplotu, ktorú mal na začiatku stláčania. Vypočítajte konečný tlak plynu.

Zápis:

$p_1 = 4{,}9.10^4$ Pa

$$V_2 = \frac{1}{2} V_1$$

$p_3 = ?$

Riešenie:

$$p_1 \xrightarrow{adiabaticky} p_2 \xrightarrow{izochoricky} p_3$$

$$V_1 \qquad V_2 = \frac{1}{2}V_1 \qquad V_3 = V_2 = \frac{1}{2}V_1$$

$$T1 \qquad T_2 \qquad T_3 = T_1$$

1) adiabaticky

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} \qquad T_1 V_1^{(\kappa-1)} = T_2 V_2^{(\kappa-1)}$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} \qquad T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\kappa-1)}$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{\frac{V_1}{2}}\right)^{\kappa} \qquad T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{\frac{V_1}{2}}\right)^{(\kappa-1)}$$

$$p_2 = p_1.2^{\kappa} \qquad T_2 = T_1 2^{(\kappa-1)}$$

2) izochoricky

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} /.T_3$$

$$\frac{p_2 T_3}{T_2} = p_3$$

$$\frac{p_1.2^{\kappa} T_1}{T_1.2^{\kappa-1}} = p_3$$

$$p_1.2^{\kappa}.2^{-(\kappa-1)} = p_3$$

$$p_1.2^1 = p_3$$

$$4{,}9.104\,\mathrm{Pa}.2 = p_3$$

$$98000\,\mathrm{Pa} = p_3$$

$$9{,}8.10^4\,\mathrm{Pa} = p_3$$

Odpoveď:

Konečný tlak plynu bude 9,8.10^4 Pa.

Úloha 67 (Hajko, V. et al., 1983, str. 253/428)

Dva móly vodíka teploty 27 °C a tlaku 99325 Pa sme adiabaticky stlačili na $\frac{1}{3}$ pôvodného objemu. Potom sme nechali plyn izotermicky rozopnúť na pôvodný objem. Aká bola konečná teplota a tlak a akú prácu pritom plyn vykonal?

Zápis:

t_0 = 27 °C

T_0 = 300,15 K

p_0 = 99325 Pa

$V_1 = \frac{1}{3}V_0$

n = 2 mol

M(H2) = 22.10-3 kg.mol-1

T_1 = ?

p_2 =?

W' = ?

Riešenie:

$$p_0 \xrightarrow{adiabaticky} p_1 \xrightarrow{izotermicky} p_2$$

$$V_0 \qquad \frac{V_0}{3} \qquad V_0$$

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$$

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa}$$

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{\frac{V_0}{3}}\right)^{\kappa}$$

$$p_1 = p_0 3^{\kappa}$$
$$p_1 = 99325\,\mathrm{Pa}\,.\,3^{1,41}$$
$$p_1 = 467519{,}3\,\mathrm{Pa}$$

$$p_0 V_0 = nRT_0$$
$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0}$$
$$V_0 = \frac{2\,\mathrm{mol}.8{,}314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.300{,}15\,\mathrm{K}}{99325\,\mathrm{Pa}}$$
$$V_0 = 0{,}0502481\,\mathrm{m^3} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{1}{3} V_0 = 0{,}0167494\,\mathrm{m^3}$$

$$p_1 V_1 = nRT_1$$
$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}$$
$$T_1 = \frac{467519{,}3\,\mathrm{Pa}\,.\,0{,}0167494\,\mathrm{m^3}}{2\,\mathrm{mol}\,.\,8{,}314\,\mathrm{J.K^{\ 1}.mol^{\ 1}}}$$
$$T_1 = 470{,}93\,\mathrm{K}$$
$$t_1 = 197{,}8\,°\mathrm{C}$$

Odpoveď:

Konečná teplota plynu bola 197,8 °C.

Úloha 68 (Hajko, V. et al., 1983, str. 253/429)

V balóne je plynná zmes vytvorená rovnakým množstvom hélia a vodíka pri teplote 0 °C a tlaku 0,1 MPa. Vypočítajte, ako sa zmení teplota a tlak tejto zmesi, keď sa adiabaticky rozopne na dvojnásobný objem.

Zápis:

$m_1(\mathrm{He}) = m_2(\mathrm{H_2})$

$t_0 = 0$ °C

$T_0 = 273{,}15$ K

$p_0 = 0{,}1$ MPa $= 10^5$ Pa

$\kappa_1(\mathrm{He}) = 1{,}66$

$\kappa_2(H_2) = 1{,}41$

$c_{v1}(He) = 3152\ J.kg^{-1}.K^{-1}$

$c_{v2}(H_2) = 10130\ J.kg^{-1}.K^{-1}$

$V_1 = 2V_0$

$t_1 = ?$

$p_1 = ?$

κ(zmes He a H_2) = ?

Riešenie:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\kappa = \frac{c_{p_1} + c_{p_2}}{c_{v_1} + c_{v_2}}$$

$$\kappa = \frac{(1{,}66.3152\,J.kg^{-1}.K^{-1}) + (1{,}41.10130\,J.kg^{-1}.K^{-1})}{\left(3152\,J.kg^{-1}.K^{-1} + 10130\,J.kg^{-1}.K^{-1}\right)}$$

$$\kappa = 1{,}469 \cong 1{,}47$$

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$$

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa}$$

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{2V_0}\right)^{\kappa}$$

$$p_1 = p_0 \,\frac{1}{2}^{\kappa}$$

$$p_1 = 10^5\,Pa.0{,}5^{1{,}47}$$

$$p_1 = 0{,}36.10^5\,Pa = 0{,}036\,MPa$$

$$T_0 V_0^{(\kappa-1)} = T_1 V_1^{(\kappa-1)}$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{(\kappa-1)}$$

$$T_1 = 273{,}15\,K \left(\frac{V_0}{2V_0}\right)^{(1{,}47-1)}$$

$$T_1 = 273{,}15\,K\,.\,0{,}5^{0{,}47}$$

$$T_1 = 197{,}2\,K$$

$$T_1 = -\,75{,}95\,^{\circ}C$$

Odpoveď:

Tlak tejto zmesi sa zmení na 0,036 MPa a jej teplota sa zmení na -75,95 °C.

Úloha 69 (Hajko, V. et al., 1983, str. 253/430)

Dusík hmotnosti 200 g, začiatočnej teploty 27 °C a tlaku 0,4 MPa podrobíme termodynamickému deju, pri ktorom jeho tlak klesne na 0,3 MPa. Koľko tepla sme dodali dusíku, akú prácu dusík vykonal a ako sa zmenila jeho vnútorná energia, keď dej prebiehal: a) izochoricky; b) izotermicky; c) adibaticky.

Zápis:

$m = 200$ g = 0,2 kg

$t_1 = 27$ °C

$T_1 = 300{,}15$ K

$M_1(N_2) = 28{,}016.10^{-3}$ kg.mol^{-1}

$p_1 = 0{,}4$ MPa = $0{,}4.10^6$ Pa

$p_2 = 0{,}3$ MPa = $0{,}3.10^6$ Pa

$\kappa(N_2) = 1{,}41$

$c_v(N_2) = 741$ J.kg^{-1}.K^{-1}

$R = 8{,}314$ J.K^{-1}.mol^{-1}

$Q = ?$

$W' = ?$

$\Delta U = ?$

Riešenie:

a) izochoricky

$$V = \text{konšt.}; \mathrm{d}V = 0; \mathrm{d}W' = 0; \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1}$$

$$Q' = mc_v(T_2 - T_1)$$

$$Q' = mc_v\left(\frac{T_1 p_2}{p_1} - T_1\right)$$

$$Q' = 0{,}2\,kg.741\,J.kg^{-1}.K^{-1}\left(\frac{300{,}15\,K.0{,}3.10^6\,Pa}{0{,}4.10^6\,Pa} - 300{,}15\,K\right)$$

$$Q = -Q' = 11120{,}5575\,J \cong 11121\,J$$

Odpoveď: Pri izochorickom deji plyn nevykonáva (ani neprijíma) žiadnu prácu. Pri izochorickom deji dusík odovzdal 11121 J tepla. Jeho vnútorná energia poklesla o 11121 J.

b) izotermicky

$$T = \text{konšt.}; \mathrm{d}T = 0; \mathrm{d}U = 0; \mathrm{d}Q = \mathrm{d}W'$$

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1$$

$$Q' = W = p_1 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$Q' = p_1 V_1 \ln\frac{p_1}{p_2}$$

$$Q' = \frac{m}{M} R T_1 \ln\frac{p_1}{p_2}$$

$$Q' = \frac{0{,}2\,kg}{28{,}016.10^{-3}\,kg.mol^{-1}}.8{,}314\,J.K^{-1}.mol^{-1}.300{,}15\,K.\ln\frac{0{,}4.10^6\,Pa}{0{,}3.10^6\,Pa}$$

$$Q' = 5124{,}9\,J$$

Odpoveď: Pri izotermickom deji sme dusíku dodali 5124,9 J tepla. Všetko teplo prijaté plynom sa spotrebuje na vykonanú prácu *W'*. Vnútorná energia plynu sa nemení.

c) **adiabaticky**

$$dQ = 0; dW = -dU$$

výpočte teploty T_2 vychádzame z rovnice:

$$pV = nRT$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$

$$pV^{\kappa} = \text{konšt.}$$

$$p\left(\frac{nRT}{p}\right)^{\kappa} = \text{konšt.} /.\frac{1}{nR}$$

$$p.p^{-\kappa}.T^{\kappa} = \text{konšt.}$$

$$p^{1-\kappa}.T^{\kappa} = \text{konšt.}$$

Potom platí:

$$p_1^{1-\kappa}.T_1^{\kappa} = p_2^{1-\kappa}.T_2^{\kappa}$$

$$T_2^{\kappa} = \frac{p_1^{1-\kappa}.T_1^{\kappa}}{p_2^{1-\kappa}}$$

$$T_2^{\kappa} = \frac{\left(0{,}4.10^6\,Pa\right)^{1-1{,}41}.(300{,}15\,K)^{1{,}41}}{\left(0{,}3.10^6\,Pa\right)^{1-1{,}41}}$$

$$T_2^{\kappa} = 2765{,}8\,K^{1{,}41}$$

$$T_2 = \sqrt[1{,}41]{2765{,}8\,K}$$

$$T_2 = 276{,}063K \cong 276{,}1K$$

$$W = mc_v\left(T_2 - T_1\right)$$

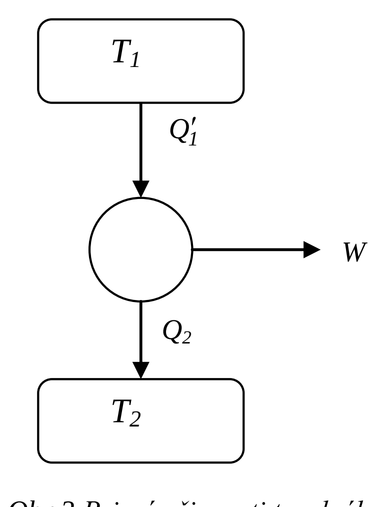
$$W = 0{,}2\,kg.741\,J.kg^{-1}.K^{-1}.(300{,}15\,K - 276{,}063\,K)$$

$$W = 3569{,}69\,J \cong 3570\,J$$

$$\Delta U \cong -3570\,J$$

Odpoveď: Adiabatický dej s ideálnym plynom je dej, pri ktorom je plyn tepelne izolovaný Q = 0 J. Pri adiabatickom deji, ktorému sme podrobili dusík práca plynu veľkosti približne 3570 J sa koná na úkor vnútornej energie plynu.

TEPELNÝ STROJ



Obr.3 Princíp činnosti tepelného stroja

Pod tepelným strojom rozumieme zariadenie, ktoré na základe dodaného tepla Q'_1 zo zásobníka teploty T_1 vykoná mechanickú (zjavnú) prácu W, pričom odovzdá teplo Q_2 zásobníku teploty T_2. Účinnosť takéhoto zariadenie je definovaná ako podiel vykonanej práce W a dodaného tepla Q'_1:

$$\eta = \frac{W}{Q'_1}.$$

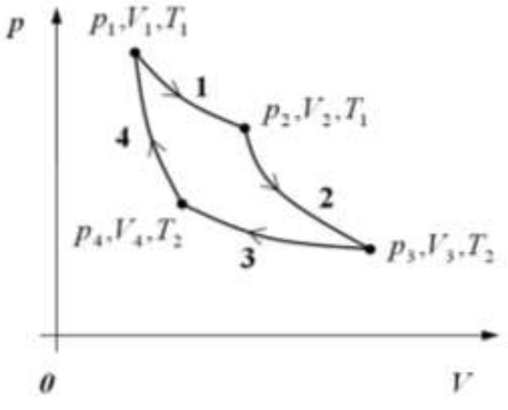
Ak sa okrem toho v stroji nedialo zo zákona zachovania energie vyplýva, že

$$W = Q'_1 - Q_2.$$

Z toho dostaneme pre účinnosť tepelného stroja vzťah

$$\eta = \frac{W}{Q'_1} = \frac{Q'_1 - Q_2}{Q'_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q'_1} < 1. \qquad (43)$$

Špeciálnym prípadom tepelného stroja s pracovným ideálnym plynom je tzv. Carnotov tepelný stroj, ktorý pracuje v cyklickom režime, t. j. jeho konečný stav na konci cyklu sa rovná jeho začiatočnému stavu (obr.4). Počas celého cyklu uvažujeme,že pracovný plyn prechádza cez rovnovážne stavy (tzv. vratný proces).



Obr.4 Carnotov cyklus v p – V diagrame

Počas cyklu plyn najprv vykoná:

1. Izotermickú expanziu

   Plyn je v tepelnom kontakte so zásobníkom teploty T_1. Začiatočné hodnoty tlaku p_1 a objemu V_1 sa počas expanzie zmenia na p_2, V_2. Pritom plyn prijme od zásobníka teplo Q'_1 a vykoná prácu $W_1 = Q'_1$.

   Potom:

2. Adiabatickú expanziu

   Keďže pri adiabatickom deji je plyn tepelne izolovaný od svojho okolia, pri expanzii bude konať prácu na úkor svojej vnútornej energie $W_2 = -\Delta U_2$. To je sprevádzané znížením teploty na hodnotu T_2, pričom sa tlak plynu zmení na p_3, a objem na V_3. V tejto fáze plyn teda vykoná prácu $W_2 = -\Delta U_2 = -nR(T_2 - T_1) = nR(T_1 - T_2)$.

   V ďalšej fáze nasleduje:

3. Izotermická kompresia

   Počas nej, keďže plyn je stláčaný kladnú prácu koná okolie $W'_3 > 0$, v dôsledku princípu akcie a reakcie stroj koná zápornú prácu $W_3 = -W'_3$. Podľa prvej vety termodynamiky teda stroj odovzdá druhému zásobníku teploty T_2 teplo $Q_2 = W_3' = -W_3$. Objem a tlak sa zmenia z hodnôt V_3, p_3 na V_4, p_4.

Nakoniec plyn je podrobený:

4. Adiabatickej kompresii

   Izotermická a adiabatická kompresia sú realizované takým spôsobom, že výsledný stav (p, T, V) sa bude rovnať začiatočnému stavu (p_1, T_1, V_1). Teda teplota T_2 sa zmení na T_1, tlak p_4 sa zmení na p_1 a objem V_4 na V_1. Pri kompresii koná kladnú prácu okolie a v dôsledku tepelnej izolácie pri adiabatickom deji celá táto práca spôsobí ekvivalentný prírastok vnútornej energie $W_4' = \Delta U_4$. Práca plynu je záporná a rovná sa: $W_4 = -W_4' = -\Delta U_4 = -nR(T_1 - T_2)$.

Celková práca Carnotovho stroja počas cyklu sa rovná

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = Q_1' + nR(T_1 - T_2) - Q_2 - nR(T_1 - T_2) = Q_1' - Q_2 .$$

Pre účinnosť Carnotovho tepelného stroja dostaneme

$$\eta = \frac{W}{Q'} = \frac{Q_1' - Q_2}{Q_1'} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1'} .$$

Tieto teplá sú dodané resp. odovzdané pri izotermických dejoch. Pri nich sa nemení vnútorná energia plynu takže ako už bolo uvedené budú sa rovnýť príslušným prácam pri izotermických dejoch:

$$Q_1' = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Dosadenie týchto vzťahov do vzťahu pre účinnosť vedie k vyjadreniu

$$\eta == 1 - \frac{Q_2}{Q_1'} = 1 - \frac{nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} .$$

Využitím Poissonovho zákona v adiabatických dejoch Carnotovho cyklu máme:

2. časť: $T_1 V_2^{\kappa-1} = T_2 V_3^{\kappa-1}$

4. časť: $T_2 V_4^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1}$

Z toho máme pre pomer objemov:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Teda účinnosť takéhoto stroja pracujúceho na základe Carnotovho cyklu je určená len teplotami oboch zásobníkov:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{44}$$

Táto účinnosť je najväčšia možná pre akýkoľvek tepelný stroj pracujúci medzi dvoma teplotami T_1 a T_2. Rovnako účinne pracujú všetky vratne pracujúce stroje medzi týmito teplotami, nevratne pracujúce stroje majú nižšiu účinnosť. Vyplýva to z tzv. Carnotovej vety, ktorú možno dokázať ako dôsledok druhej vety termodynamiky.

Úlohy:

Úloha 70

Tepelný motor pracuje s účinnosťou 25 %. Teplota ohrievača (horiace palivo) je 915 ˚C a teplota chladiča (výfukové plyny) je 428 ˚C. Vypočítajte účinnosť ideálneho tepelného stroja, ktorý pracuje s rovnakými teplotami ohrievača a chladiča. O koľko percent je účinnosť tohto stroja väčšia než účinnosť daného tepelného motora?

Zápis:

$t_1 = 915$˚C

$T_1 = 1188{,}15$ K

$t_2 = 428$˚C

$T_2 = 701{,}15$ K

$\eta_{max} = ?$

$\eta_{max} - \eta = ?$

Riešenie:

Pre účinnosť ideálneho tepelného stroja pracujúceho s teplotou ohrievača T_1 a chladiča T_2 platí:

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{1188{,}15\,\mathrm{K} - 701{,}15\,\mathrm{K}}{1188{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}4098809 \cong 0{,}41 = 41\%$$

Hľadaný rozdiel účinností je:

$$\eta_{\max} - \eta = 41\% - 25\% = 16\%$$

Odpoveď:

Účinnosť ideálneho tepelného stroja, ktorý pracuje s rovnakými teplotami ohrievača a chladiča ako daný tepelný motor je 41 %. Táto účinnosť je o 16 % väčšia než účinnosť daného tepelného motora.

(Poznámka: Účinnosť tepelných motorov je vždy menšia než horná hranica ich účinnosti $\eta < \eta_{\max}$.)

Úloha 71

V ideálnom tepelnom stroji odovzdal plyn chladiču 72 % tepla, ktoré získal od ohrievača. Určite teplotu chladiča, ak teplota ohrievača je 502 K.

Zápis:

$$\frac{Q_2}{Q_1'} = 0{,}72$$

T_1 = 502 K

T_2 = ?

Riešenie:

Účinnosť ideálneho tepelného stroja je:

$\eta_{\max} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1'}$

$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Môžeme písať:

$\frac{Q_2}{Q_1'} = \frac{T_2}{T_1} = 0{,}72$

$T_2 = 0{,}72 . T_1$

$T_2 = 0{,}72 . 502\, K$

$T_2 = 361{,}44\, K \cong 361\, K$

Odpoveď:

Chladič má teplotu 288 K.

Úloha 72

Tepelný motor pracujúci s ohrievačom teploty 300 ˚C a chladičom teploty 0 ˚C dvíha teleso hmotnosti 550 kg. Do akej maximálnej výšky ho môže zdvihnúť, ak príjme od ohrievača teplo 90 kJ? (g = 10 m.s^{-2})

Zápis:

t_1 = 300 ˚C

T_1 = 573,15 K

t_2 = 0˚C

T_2 = 273,15 K

m = 550 kg

Q_1' = 9.10^4 J

g = 10 m.s^{-2}

h = ?

Riešenie:

Vo výpočte využijeme vzťah: $W = mgh$

$$\eta_{\max} = \frac{W}{Q_1'} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$mgh = Q_1' \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$h = Q_{11}' \frac{T_1 - T_2}{mgT_1}$$

$$h = 9.10^4 \text{ J} \frac{(573{,}15\,\text{K} - 273{,}15\,\text{K})}{550\,\text{kg}.10\,\text{m.s}^{-2}.573{,}15\,\text{K}}$$

$$h = 8{,}5651067\,\text{m} \cong 8{,}6\,\text{m}$$

Odpoveď:

Maximálna výška, do ktorej môže tepelný stroj zdvihnúť teleso hmotnosti 550 kg je približne 8,6 m.

Úloha 73

Účinnosť ideálneho tepelného stroja, ktorý pracuje podľa kruhového deja je 30 %. Aká bude jeho účinnosť, ak sa teplo, ktoré príjme pracovná látka stroja v priebehu jedného cyklu od ohrievača, zväčší o 45 % a teplo, ktoré odovzdá v priebehu jedného cyklu chladiču, sa zmenší o 30 %?

Zápis:

$\eta_1 = 0{,}3$

$p_1 = 0{,}45$

$p_2 = 0{,}3$

$\eta_2 = ?$

Riešenie:

Pre účinnosť η_1 a η_2 pôvodného a upraveného tepelného stroja platí:

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{Q}_1'}$$

$$\tilde{Q}_1' = Q_1 + 0{,}45Q_1 = 1{,}45Q_1$$
$$\tilde{Q}_2 = Q_2 - 0{,}3Q_2 = 0{,}7Q_2$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{Q}_1'}$$
$$\eta_2 = 1 - \frac{0{,}7Q_2}{1{,}45Q_1}$$
$$\eta_2 = 1 - \frac{0{,}7}{1{,}45}(1-\eta_1)$$
$$\eta_2 = 1 - \frac{0{,}7}{1{,}45}(1-0{,}3)$$
$$\eta_2 = 0{,}662069 \cong 0{,}66$$

Odpoveď:

Účinnosť tepelného stroja sa zväčší na 66 %.

Úloha 74

Ideálny tepelný stroj, ktorý pracuje s hornou hranicou účinnosti $\eta_{\max}$, vykonal v priebehu jedného kruhového deja prácu $8{,}1.10^4$ J. Teplota ohrievača je 412 K, chladiča 300 K. Určite teplo, ktoré pracovná látka získala v priebehu jedného cyklu od ohrievača a teplo, ktoré v priebehu jedného cyklu odovzdala chladiču.

Zápis:

$W = 8{,}1.10^4$ J

$T_1 = 412$ K

$T_2 = 300$ K

$Q_1 = ?$

$Q_2 = ?$

Riešenie:

$$\eta_{\max} = \frac{W}{Q_1'} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$Q_1' = W\frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Celková práca W, ktorú vykoná pracovná látka v priebehu jedného cyklu kruhového deja, sa rovná celkovému teplu $Q' = Q_1' + Q_2' = Q_1' - Q_2$, ktoré prijme v priebehu tohto cyklu od okolia.

Platí: $W = Q_1' - Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_1' - W$

$$Q_1' = 8{,}1.10^4\ \mathrm{J}\frac{412\,\mathrm{K}}{412\,\mathrm{K} - 300\,\mathrm{K}}$$

$$Q_1' = 9072000\,\mathrm{J}$$

$$Q_2 = 9072000\,\mathrm{J}\ \text{-}8{,}1.10^4$$

$$Q_2 = 8991000\,\mathrm{J}$$

Odpoveď:

Tepelný stroj príjme v priebehu jedného cyklu od ohrievača 9072000 J tepla a odovzdá chladiču 8991000 J tepla.

Úloha 75 (Hajko, V. et al., 1983, str. 254/ 434)

Aký najmenší musí byť výkon stroja, ktorý má odoberať vode stálej teploty 17 ˚C teplo 41,9 kJ za sekundu a dodávať ho tepelnému radiátoru teploty 46 ˚C. Koľko tepla sa odovzdá vonkajšiemu zásobníku?

Zápis:

t_1 = 17 ˚C

T_1 = 290,15 K

t_2 = 46 ˚C

T_2 = 319,15 K

Q_1 = 41,9 kJ = 41900 J

τ = 1 s

$Q_2 = ?$

$W = ?$

$P = ?$

Riešenie:

Najmenší výkon bude mať najúčinnejšie pracujúci stroj. V prípade tepelného stroja pracujúceho medzi teplotami T_1 a T_2 je to Carnotov tepelný stroj. V tomto prípade, aby sme odoberali teplo chladnejšiemu telesu a dodávali ho teplejšiemu musí pracovať v obrátenom režime – pri chladnejšej teplote bude prebiehať izotermická expanzia a pri vyššej teplote izotermická kompresia (vonkajšie sily musia konať prácu).

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1$$

$$Q_2 = 1{,}0999483 . 41900\,\mathrm{J}$$

$$Q_2 = 46087{,}83\,\mathrm{J} \cong 46{,}1\,\mathrm{kJ}$$

$$W' = Q_2 - Q_1$$

$$W' = 46087{,}83\,\mathrm{J} - 41900\,\mathrm{J}$$

$$W' = 4187{,}83\,\mathrm{J}$$

Všetky predchádzajúce údaje sa vzťahujú na 1s. Preto

$$P = \frac{W'}{\tau}$$

$$P = \frac{4187{,}83\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}}$$

$$P = 4187{,}83\,\mathrm{W} \cong 4{,}19\,\mathrm{kW}$$

Odpoveď:

Najmenší výkon stroja musí byť 4,19 kW.

Teplejšiemu zásobníku sa odovzdá 46,1 kJ tepla.

Úloha 76 (Hajko, V. et al., 1983, str. 254/433)

Carnotov tepelný stroj naberá pri každom cykle zo zásobníka 419 J tepla a chladiču odovzdáva 335 J. Vypočítajte, aká je teplota chladiča, keď zásobník tepla udržiavame na teplote 127 °C.

Zápis:

t_1 = 127 ˚C

T_1 = 400,15 K

Q_1' = 419 J

Q_2 = 335 J

t_2 = ?

Riešenie:

$$\eta = \frac{Q_1' - Q_2}{Q_1'}$$

$$\eta = \frac{419\,\mathrm{J} - 335\,\mathrm{J}}{419\,\mathrm{J}}$$

$$\eta = 0{,}2$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \;/ .T_1$$

$$T_1\eta = T_1 - T_2 \;/ - T_1$$

$$T_1\eta - T_1 = -T_2 \;/ .(-1)$$

$$T_1 - T_1\eta = T_2$$

$$T_1(1-\eta) = T_2$$

$$400{,}15\,\mathrm{K}(1-0{,}2) = T_2$$

$$T_2 = 320{,}12\,\mathrm{K}$$

$$t_2 = 46{,}97\,°\mathrm{C}$$

$$t_2 \cong 47\,°\mathrm{C}$$

Odpoveď:

Teplota chladiča je približne 47 °C.

Úloha 77 (Hajko, V. et al., 1983, str. 253/431)

Aký je teoreticky najpriaznivejší stupeň účinnosti parného stroja, ktorý pracuje s parou teploty 190 °C a ktorého kondenzátor má teplotu 40 °C?

Zápis:

t_1 = 190 °C

T_1 = 463,15 K

t_2 = 40 °C

T_2 = 313,15 K

η_{max} = ?

Riešenie:

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\eta_{\max} = \frac{463{,}15\,\mathrm{K} - 313{,}15\,\mathrm{K}}{463{,}15\,\mathrm{K}}$$

$$\eta_{\max} = 0{,}3238.100\,\%$$

$$\eta_{\max} = 32{,}4\,\%$$

Odpoveď:

Teoreticky najpriaznivejší stupeň účinnosti parného stroja je 32,4 %.

Úloha 78 (Hajko, V. et al., 1983, str. 237/391) (Úloha riešená in: Hajko, V. et al., 1983)

Carnotov stroj pracuje s účinnosťou η_1 = 40 %. Ako sa má zmeniť teplota zásobníka tepla, aby účinnosť stroja vzrástla na η_2 = 50 %? Teplota chladiča pritom ostáva stála, t_2 = 9 °C

Zápis:

η_1 = 40 %

η_2 = 50 %

t_2 = 9 °C

T_2 = 282,15 K

T_1 - teplota zásobníka pri účinnosti η_1

T_1' - teplota zásobníka pri účinnosti η_2

$\Delta T = T_1' - T_1 = ?$

Riešenie:

$$\eta_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$
$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1} \; / .T_1$$
$$T_1\eta_1 = T_1 - T_2 \; /(-T_1)$$
$$T_1\eta_1 - T_1 = -T_2 \; / .(-1)$$
$$T_1 - T_1\eta_1 = T_2$$
$$T_1(1-\eta_1) = T_2 \; / : (1-\eta_1)$$
$$T_1 = \frac{T_2}{(1-\eta_1)}$$

$$\eta_2 = \frac{T_1' - T_2}{T_1'}$$
$$\eta_2 = 1 - \frac{T_2}{T_1'} \; / .T_1'$$
$$T_1'\eta_2 = T_1' - T_2 \; /- T_1'$$
$$T_1'\eta_2 - T_1' = -T_2 \; / .(-1)$$
$$T_1' - T_1'\eta_2 = T_2$$
$$T_1'(1-\eta_2) = T_2 \; / : (1-\eta_2)$$
$$T_1' = \frac{T_2}{(1-\eta_2)}$$

$$T_1 = \frac{282{,}15\,K}{(1-0{,}4)}$$
$$T_1 = 470{,}25\,\mathrm{K}$$

$$T_1' = \frac{282{,}15K}{(1-0{,}5)}$$
$$T_1' = 564{,}3\,\mathrm{K}$$

$$\Delta\mathrm{T} = T_1' - T_1$$
$$\Delta\mathrm{T} = 564{,}3\,\mathrm{K} - 470{,}25\,\mathrm{K}$$
$$\Delta\mathrm{T} = 94{,}05\,\mathrm{K}$$

Odpoveď:

Teplota zásobníka sa zmení o 94,05 K.

LITERATÚRA

1. VEIS, Š. – MAĎAR, P. – MARTIŠOVITŠ, V.: Všeobecná fyzika I. Mechanika a molekulová fyzika. ALFA: Bratislava, 1981.
2. HAJKO, V. a kol. *Fyzika v príkladoch*, (5. vydanie), Bratislava, Alfa 1983.
3. ZÁMEČNÍK, J. Prehľad stredoškolskej fyziky (2. vydanie), Bratislava, Alfa, 1988.
4. FERMI, E.: Thermodynamics. New York: Dover Publications Inc., 1956