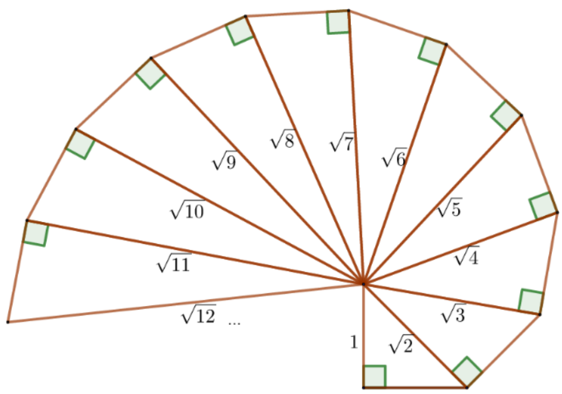
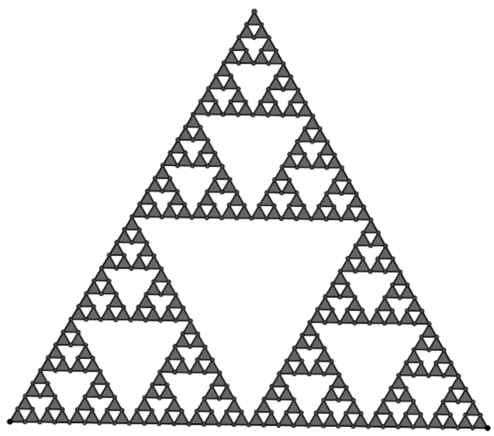
Trnavská Univerzita v Trnave

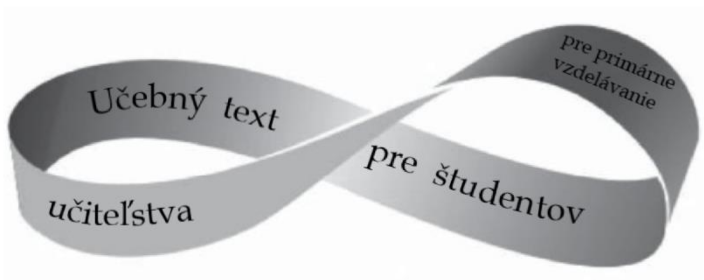
Pedagogická fakulta

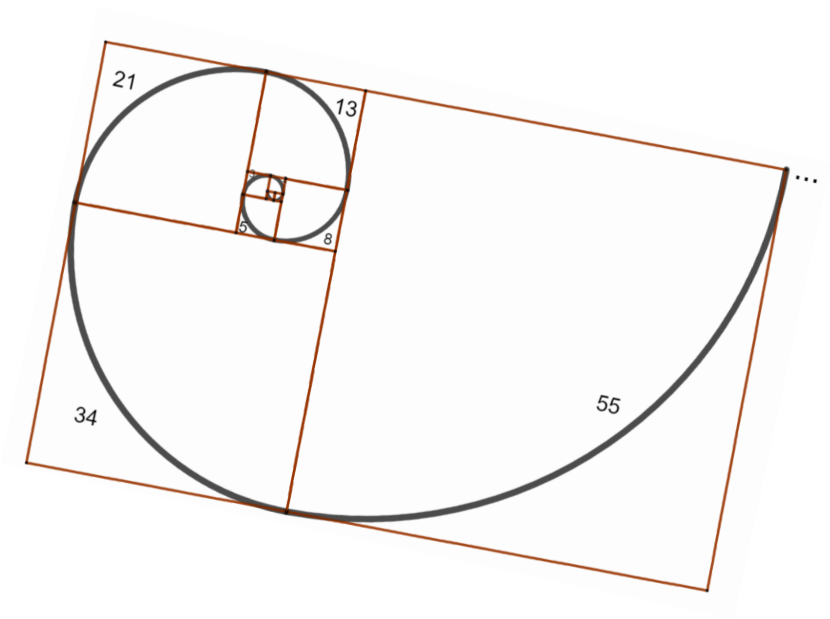


# Prechádzka po svete geometrie

Prechádzka po svete geometrie




2020

Jana Fialová

**Prechádzka po svete geometrie** (Učebný text pre študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie)

© PaedDr. Jana Fialová, PhD.

**Odborní recenzenti:**

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.

Mgr. Marek Mokriš, PhD.

Vydala Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave v roku 2020.

121 strán

**ISBN 978-80-568-0327-1**

# Úvod

Tento netradičný učebný text si kladie za cieľ nielen oboznámiť čitateľa so základnými geometrickými poznatkami, ale je písaný tak, aby čitateľa viedol vybranými zákutiami súčasnej aj historickej geometrie a ukázal mu výber toho, čo považujeme za zaujímavé či krásne.

Publikácia je rozdelená do deviatich kapitol. Každá z nich ukazuje geometriu z iného pohľadu. Časti klasickej školskej geometrie sú zahrnuté v druhej až šiestej kapitole. Siedma kapitola je venovaná analytickej geometrii, ktorá ešte nedávno bývala neoddeliteľnou súčasťou gymnaziálneho učiva. Posledné dve kapitoly sa venujú oblastiam, ktoré sa, pokiaľ vieme, do žiadneho školského programu nedostali.

Myslíme si, že budúci učiteľ by mal byť aspoň v minimálnej forme oboznámený aj s tými oblasťami geometrie, ktoré nie sú súčasťou aktuálneho školského vzdelávacieho programu. Napokon vzdelávacie programy sa časom menia a navyše pozorný čitateľ určite nájde inšpiráciu, ako sa vybrané problémy aj z novších oblastí geometrie, ako je topológia či fraktálna geometria, dajú použiť vo vyučovacom procese, alebo v rámci krúžkovej či mimoškolskej aktivity.

Na druhej strane pripúšťame, že to, čo sme zahrnuli do tohto textu je iba špičkou ľadovca v každej z uvedených oblastí. Výber problémov by sa dal opísať frázou: „Z každého rožka troška.“ Rozsah publikácie ani časová dotácia predmetu Matematika pre primárne vzdelávanie 2, pre ktorý je tento učebný text primárne určený, nedovoľuje rozobrať vybrané témy do väčšej hĺbky.

Veríme však, že týmto textom vzbudíme v čitateľovi záujem venovať sa vybranej problematike hlbšie, objavovať pre neho nové a zaujímavé poznatky, vytvárať zaujímavé aktivity pre deti a svoje nadšenie odovzdávať svojim žiakom.

# Obsah

# I. Geometria ako veda a jej história

*„Byli doby, kdy jsme geometrický svět neznali. Děti, které se dosud neučili geometrii, ho neznají. Učitel jim tento svět otevře. Jeho úkol je zdánlivě nesplnitelný, neboť ho nemůže ukázat, ani nenalezne dostatek slov, jimiž by ho popsal. Může tento svět různě navozovat, například rýsovat čáry pomocí pravítka a kružítka a říci, že se úsečkám a kružnicím podobají, avšak ukázat na nich může jen to, čím se jim nepodobají. Do geometrického světa můžeme někoho vést jen na kus cesty, můžeme ho přivést jen před jeho bránu, rozhodující krok však musí učinit každý sám." P. Vopěnka*

Geometria je oblasť matematiky, ktorá skúma vlastnosti geometrických objektov. Základným geometrickým útvarom je priestor. Nie je to však fyzikálny priestor, v ktorom žijeme, ale matematická abstrakcia podnietená štúdiom tohto priestoru. Geometrickými útvarmi sú potom časti tohto priestoru, napríklad roviny, priamky, úsečky, trojuholníky, kružnice, elipsy, gule, kužele, … Obyčajne chápame geometrické útvary ako množiny bodov. (Kuřina, 1996, s.11)

## História geometrie

Uvedomenie si geometrického tvaru niektorých predmetov a účelné využívanie v praktickej činnosti patrí medzi najstaršie mentálne výdobytky ľudstva. Je vlastné dokonca predchodcom dnešného človeka – hominidom – a v obmedzenej miere a nesystematickom rozsahu aj dnešným ľudoopom. Prejavom tejto schopnosti je aktívne vyhľadávanie predmetov žiadaného tvaru, neskoršie výroba pracovných nástrojov.

Osobitne dôležité boli pre pračloveka tie geometrické poznatky, ktoré umožňovali stavbu obydlí poskytujúcich ľudskému spoločenstvu útočište pred nepriazňou počasia a útokmi dravých zvierat. (Čižmár, 2017, s.26)

Slovo geometria pochádza z gréckeho *geo* (Zem) a *metro* (meranie). Išlo teda o meranie základných prvkov prírody. Geometria našla praktické využitie v zememeračstve, no grécki učenci rýchlo zistili, že za rôznymi tvarmi sa skrývajú isté vzory a pravidlá.

Grécky matematik *Euklides z Alexandrie* okolo roku 300 pred n.l. zozbieral a rozšíril princípy geometrie v 13 knihách s názvom *Základy*. Euklidov prínos pre matematiku bol taký veľký, že si vyslúžil označenie "otec geometrie". (Jackson, 2013, s. 20)

*Základy (Principia)* sú najvplyvnejšou učebnicou všetkých čias a aj po 23 storočiach sú stále na trhu.

Prvých šesť hníh je venovaných planimetrii. Výklad celej geometrie začal zavedením niekoľkých elementárnych pojmov a piatimi axiómami. Z nich Euklides odvodil kompletne celú známu geometriu roviny. To, že sa celá rozvetvená a bohatá veda, akou je planimetria, dá odvodiť z piatich celkom jednoduchých pravidiel, fascinovalo celé generácie matematikov a stalo sa vzorom stavby logických teórií aj v modernej dobe.

Knihy 7, 8 a 9 sú venované teórii čísel. Euklidovým pôvodným výsledkom je okrem iného dôkaz, že prvočísel je nekonečne veľa.

V knihe 10 sú po prvý raz spracované iracionálne čísla. Euklides v nej napríklad dokázal, že $\sqrt{2}$ nemôže byť racionálne číslo.

Záverečné tri knihy sú venované geometrii v priestore. (Mareš, 2008, s. 60)

## Delenie geometrie

Geometriu ako vednú oblasť môžeme rozdeliť do viacerých podoblastí. Klasifikácia podľa spôsobu riešenia problémov je nasledovná.

*Syntetická geometria* – nepoužíva žiadny pomocný aparát, je ňou napr. Euklidovská geometria.

*Analytická geometria* – používa súradnicovú sústavu, kde každý geometrický objekt získava svoje číselné charakteristiky odvodené od jeho polohy vzhľadom na danú súradnicovú sústavu.

*Geometria transformácií* - skúma geometrické problémy z algebrického hľadiska.

Ďalej môžeme geometriu rozdeliť podľa toho, v koľkých rozmeroch pracuje:

*Planimetria* - geometria roviny. Jej objektmi sú časti roviny.

*Stereometria* - geometria priestoru. Jej objektmi sú časti trojrozmerného priestoru.

*Fraktálna geometria* - skúma objekty, ktorých dimenzia nie je celočíselná.

Podľa toho, z akých axióm vychádza, rozdeľujeme geometriu takto: (Prvé štyri axiómy sú v oboch rovnaké.)

*Euklidovská geometria* - piata axióma hovorí, že daným bodom možno viesť k danej priamke jedinú rovnobežku.

*Neeuklidovská (Lobačevského) geometria* - piata axióma hovorí, že daným bodom možno viesť k danej priamke viac ako jednu rovnobežku.

Tieto spôsoby delenia geometrie rozhodne nie sú vyčerpávajúce. Popisujú iba najčastejšie podoblasti, do ktorých možno geometriu členiť.

Školské geometrické úlohy bývajú zväčša týchto typov:

1. Dôkazové – dokazujeme pravdivosť tvrdení, používame pri tom platné axiómy a ďalšie dokázané vety.
2. Konštrukčné – hľadáme konkrétne geometrické objekty spĺňajúce dané vlastnosti. Nestačí dokázať, že taký objekt existuje, treba ho aj zostrojiť a popísať spôsob, ako sa dá zostrojiť.
3. Výpočtové – počítame dĺžky úsečiek, obsahy plôch, objemy telies, veľkosti uhlov.

# II. Euklidovská geometria

Budovanie Euklidovskej geometrie je založené na axiomatickom prísne logickom základe. Vychádza z piatich základných axióm. **Axióma** je tvrdenie, ktorého pravdivosť prijímame bez dôkazov. Z axióm sa logickou cestou odvodzujú vety. **Veta** je tvrdenie, ktorého pravdivosť musí byť dokázaná pomocou axióm a ďalších platných viet.

**Definícia** je tvrdenie, ktoré zavádza nový pojem alebo vzťah. Nemá zmysel dokazovať definície. Tieto vznikajú dohodou medzi odborníkmi v danej teórii. V priebehu času sa môžu obmieňať. K dohodnutej definícii obyčajne existuje viacero rovnocenných formulácií (v tomto texte ich nazveme "vlastnými definíciami"). Takéto definície musia byť jednoznačné, čiže ak definujeme nejaký pojem, ten musí zahŕňať všetky objekty, ktoré tam patriť majú, ale žiadny taký, ktorý tam patriť nemá.

1. *Vytvorte vlastnú definíciu pojmu "štvorec".*

Skúsme začať takýmto výrokom: "Štvorec je štvoruholník, ktorý má všetky strany zhodné".

Táto definícia skutočne platí pre všetky štvorce, avšak spadnú do nej aj kosoštvorce. Preto ju musíme upraviť: "Štvorec je štvoruholník, ktorý má všetky strany zhodné a susedné strany zvierajú pravý uhol."

Alebo: "Štvorec je taký štvoruholník, ktorý má všetky strany zhodné a aj jeho uhlopriečky sú zhodné."

- Formulácia vlastných definícií je vhodnou úlohou pre rozvíjanie schopnosti formulovať abstraktné pojmy, matematicky sa vyjadrovať a argumentovať.

## Základné geometrické objekty

Základnými geometrickými objektmi, ktoré nedefinujeme, sú: bod, priamka a rovina. Tieto objekty sa zadávajú axiomaticky. Predstavu o nich si vytvárame pomocou konkrétnych ukážok. *Bod* potom chápeme ako bezrozmerný útvar – nemá dĺžku ani šírku. Priamka je zasa rovná nekonečná čiara, ktorá nemá žiadnu hrúbku. Sú to abstraktné pojmy, ktoré vo fyzikálnom svete neexistujú. Treba rozlišovať medzi bodom v predstave, ktorý má abstraktný charakter, a bodom, ktorý zakreslíme – tento v skutočnosti nie je bodom (pri vhodnom zväčšení má šírku aj dĺžku), iba pomáha našej predstavivosti vytvoriť bod v mysli. Body označujeme veľkými tlačenými písmenami, napr. bod $A$.

Po prijatí existencie bodu je vytvorenie predstavy *priamky* možné napríklad spôsobom, ktorý je známy už od Euklidových čias. Euklides chápal priamku ako nekonečné predĺženie úsečky. Úsečka je chápaná ako najkratšia čiara spájajúca dané dva body. (Pozri axiómy A1 a A2.) Priamky označujeme malými tlačenými alebo písanými písmenami, napr. priamka $p$. Priamka môže byť označená aj pomocou jej dvoch rôznych bodov, napr. priamka $AB$.

Axiómy Euklidovskej geometrie. (Existuje veľa rôznych ekvivalentných formulácií.)

*A1: Ľubovoľné dva body možno spojiť úsečkou.*

*A2: Ľubovoľná úsečka sa dá nekonečne predĺžiť.*

*A3: Ak je daná úsečka, existuje kružnica, ktorá ju má za svoj polomer a jeden jej koniec je stredom tejto kružnice.*

*A4: Všetky pravé uhly sú zhodné.*

*A5: Bodom, ktorý neleží na priamke, možno viesť práve jednu rovnobežku s danou priamkou.*

Lobačevského geometria je založená na axiómach 1 - 4 a na opačnej axióme *A′5: Bodom, ktorý neleží na priamke, možno viesť aspoň dve rôzne rovnobežky.*

*Rovina* je ďalším základným pojmom, ktorý nedefinujeme. Môžeme nanajvýš poukázať na niektoré zaujímavé súvislosti s ďalšími základnými pojmami:

Rovina je jednoznačne určená troma bodmi, ktoré neležia na jednej priamke. Rovina je jednoznačne určená dvojicou rôznobežných alebo rovnobežných priamok, prípadne priamkou a bodom, ktorý na nej neleží.

Na značenie rovín používame písmená gréckej abecedy, napr. rovina $\beta$. Rovinu môžeme označiť pomocou priamky a bodu, ktorý na nej neleží, napr. rovina $pA$, resp. troch nekolineárnych bodov, napr. rovina $ABC$.

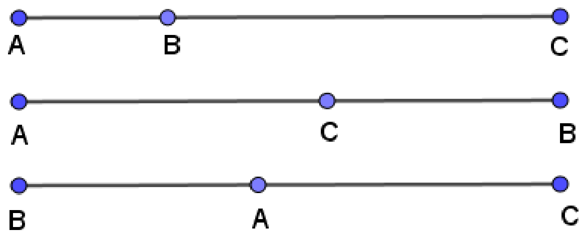
- Skutočnosť, že tri body určujú rovinu, využívame napríklad vtedy, keď chceme vyrobiť stoličku, ktorá sa zaručene na žiadnom povrchu nebude kývať – je to trojnožka.

## Tri body

**Definícia:** Tri rôzne body sú *kolineárne*, ak existuje priamka, na ktorej všetky tri zároveň ležia.

**Definícia:** Tri rôzne body sú *nekolineárne*, ak nie sú kolineárne.

**Veta:** Pre kolineárne body $A$, $B$, $C$ platí práve jedna z nasledujúcich rovností: $|AB| + |BC| = |AC|$ alebo $|AC| + |BC| = |AB|$ alebo $|AB| + |AC| = |BC|$.




Obrázok 1. Kolineárne body

**Veta** (Trojuholníková nerovnosť): Pre nekolineárne body $A$, $B$, $C$ platia všetky nasledujúce nerovnosti: $|AB| + |BC| > |AC|$ a $|AC| + |BC| > |AB|$ aj $|AB| + |AC| > |BC|$.

## Priamka a jej časti

Priamku $AB$ môžeme rozdeliť jedným bodom $V$, ktorý na nej leží, na dve navzájom opačné *polpriamky*. Označujeme ich $\overrightarrow{VA}$ a $\overrightarrow{VB}$ pričom $V$ je začiatok polpriamok a $A$, resp. $B$ je niektorý z bodov, ktorý na nej leží.

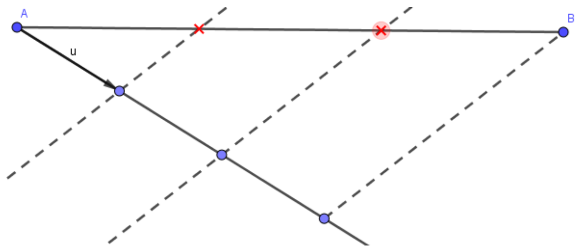
*Úsečka* je ohraničená časť priamky. Označujeme ju pomocou hraničných bodov.

**Veta:** $n$ rôznych bodov priamky $p$ delí túto priamku na $n+1$ častí: dve polpriamky a $n-1$ úsečiek.

2. *Rozdeľte úsečku AB na tri rovnako veľké časti:*

Na to, aby sme rozdelili danú úsečku na tri rovnaké časti, použijeme nasledujúci postup:

Zostrojíme pomocnú polpriamku $\overrightarrow{AC}$, na ktorej umiestnime 3 body tak, aby vytvorili žiadaný pomer. Posledný bod spojíme s bodom $B$ a rovnobežne premietneme ostatné dva na úsečku $AB$, čím sme ju rozdelili na tretiny.




Obrázok 2. Delenie úsečky

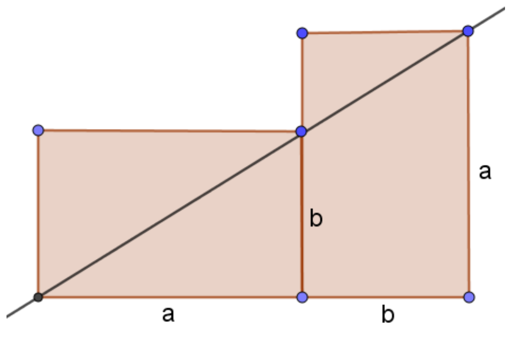
Dôkaz toho, že týmto postupom sme skutočne rozdelili úsečku na tri rovnako veľké časti, vyplýva z podobnosti trojuholníkov. (Viď príslušnú kapitolu.)

***Zlatý rez***

*"Geometria má dva poklady: Pytagorovu vetu a zlatý rez. Prvý má cenu zlata, druhý pripomína skôr drahocenný kameň."* (Johannes Kepler)

Ide o taký deliaci pomer, ktorý vznikne rozdelením úsečky na dve časti, pričom pomer väčšej časti k menšej je rovnaký, ako pomer celej úsečky k väčšej časti. Tento pomer nájdeme v prírode, umení, architektúre a mnohých ďalších oblastiach. Jeho definíciu nájdeme už v Euklidových Základoch.

- Vyskúšajte, či vaše identifikačné karty spĺňajú pomer zlatého rezu, t.j. ich strany sú v pomere zlatého rezu. Dajte k sebe jednu kartu dlhšou stranou vodorovne a druhú dlhšou stranou zvislo. Pravítkom overte, či ľavý spodný roh, pravý horný roh prvej karty a pravý horný roh druhej ležia na jednej priamke. Ak áno, tak strany sú v pomere zlatého rezu. Skutočne, z podobnosti trojuholníkov vyplýva, že $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.




Obrázok 3. Zlatý obdĺžnik

Zlatý rez označujeme písmenom $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$.

Zaujímavá je jeho spojitosť s *Fibonacciho postupnosťou* – to je postupnosť čísel: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …, kde každé číslo je súčtom predchádzajúcich dvoch. Ak dáme do pomeru niektoré susedné čísla, dostaneme číslo veľmi blízke zlatému rezu – dokonca, čím vyššie čísla použijeme, tým bližšie k zlatému rezu budeme.

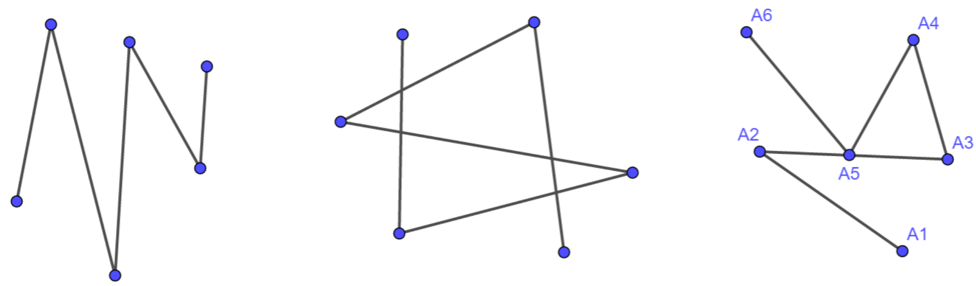
Druhou zaujímavou vlastnosťou čísla $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}618$ je to, že jeho obrátená hodnota, teda $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}618$ je presne o jednotku menšia ako $\varphi$.

To znamená, že ak dávame do pomeru väčšie číslo k menšiemu, vyjde nám približne 1,618. Ak menšie k väčšiemu, tak 0,618.

## Lomená čiara a mnohouholník

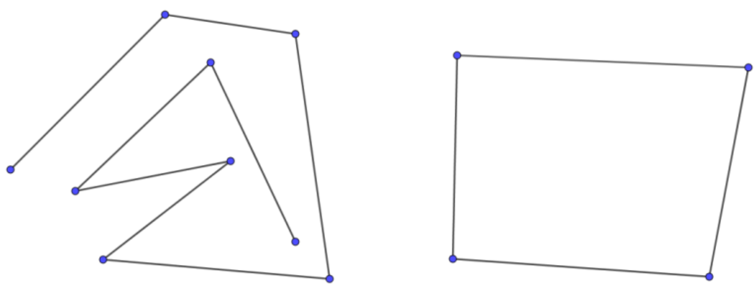
*Čiara* je nepretržitý sled bodov. Vzniká napríklad pohybom bodu. Ak bod počas tohto pohybu nemení smer, tak takéto čiary nazývame *rovnými* (priamka, polpriamka, úsečka). Ak mení smer, tak sú to *krivé čiary*. Príkladom krivej čiary je tzv. lomená čiara.

*Lomenou čiarou* $A_1A_2...A_n$ nazývame zjednotenie úsečiek $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup ... \cup A_{n-1}A_n$, z ktorých žiadne dve susedné neležia na tej istej priamke.




Obrázok 4. Lomené čiary

Dve susedné úsečky teda majú spoločný práve jeden bod. Ak žiadne ďalšie úsečky tvoriace lomenú čiaru nemajú spoločný bod, tak takúto lomenú čiaru nazývame **jednoduchou**.



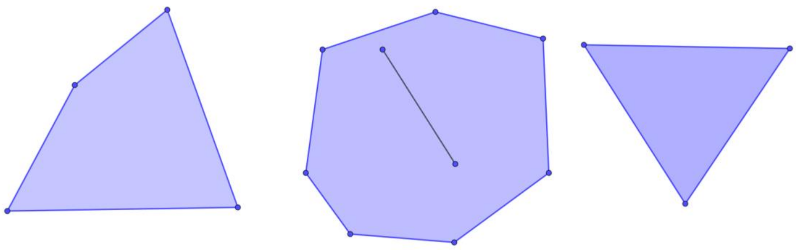
Obrázok 5. Jednoduché lomené čiary

Ak $A_1 = A_n$, tak takúto lomenú čiaru nazývame **uzavretou.**

Každá uzavretá jednoduchá lomená čiara delí rovinu na dve časti, z ktorých jedna je ohraničená - tú nazývame **mnohouholník** a druhá je neohraničená.

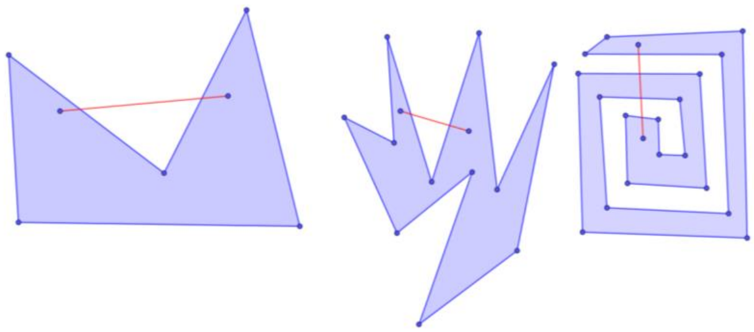
Úsečky, ktoré tvoria jednoduchú uzavretú lomenú čiaru budeme nazývať *stranami* mnohouholníka. Body, ktoré sú krajnými bodmi strán mnohouholníka nazveme *vrcholy* mnohouholníka.

Mnohouholník sa nazýva **konvexný**, ak pre každú dvojicu jeho bodov *A*, *B* platí, že celá úsečka *AB* leží v tomto mnohouholníku.



Obrázok 6. Konvexné mnohouholníky

Mnohouholník sa nazýva **nekonvexný**, ak existuje taká dvojica jeho bodov *A*, *B*, že úsečka *AB* neleží celá v tomto mnohouholníku.



Obrázok 7. Nekonvexné mnohouholníky

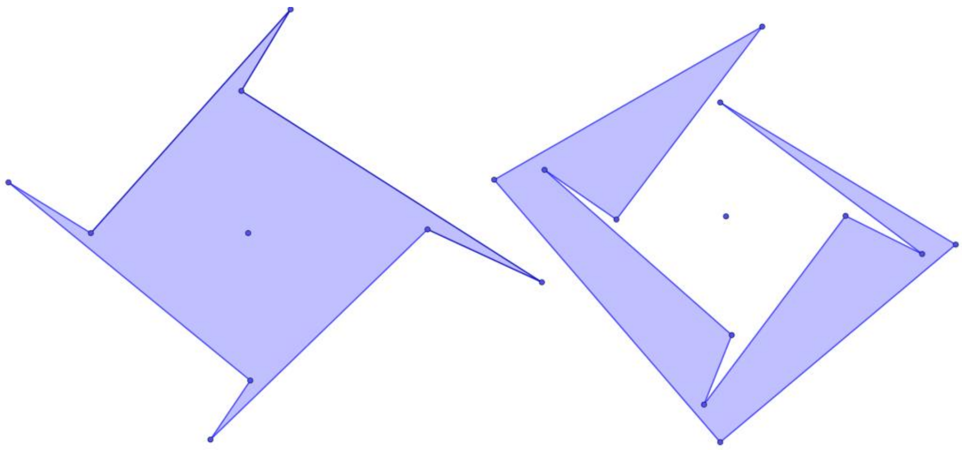
- V prázdnej miestnosti s konvexným pôdorysom nemá význam hrať sa na schovávačku – nech sú hráči kdekoľvek, každý vidí na každého. V miestnosti s nekonvexným pôdorysom je niekedy možné sa na chvíľu stratiť z dohľadu.

3. *Nakreslite mnohouholník, v ktorom existuje taký bod, že z neho nie je vidieť žiadnu stranu celú.*

Úloha má zrejme viacero rôznych riešení. Jedno z nich je na obrázku 8 vľavo.

4. *Nakreslite mnohouholník, že existuje taký bod, ktorý v ňom neleží, a z ktorého ani jednu stranu nie je vidieť celú.*

Úloha má viacero rôznych riešení, jedno z nich je na obrázku vpravo.



Obrázok 8. Mnohouholník, ku ktorému existuje bod, z ktorého žiadnu stranu mnohouholníka nevidieť celú

# Uhol

Pojem uhol zadefinujeme niekoľkými spôsobmi. Začnime pojmami polrovina a polpriamka.

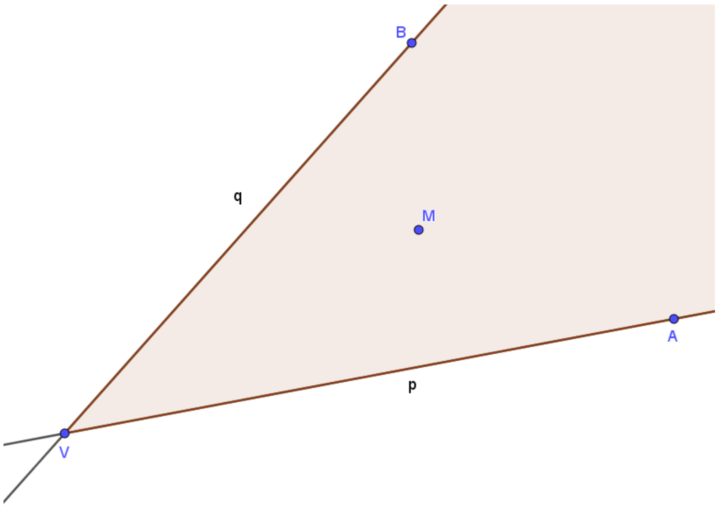
*Polrovina* je tá časť roviny, ktorá je z jednej strany ohraničená priamkou. Hovoríme, že priamka delí rovinu na dve polroviny. Pre jednoznačné určenie, o ktorú polrovinu ide, používame jeden bod, ktorý danej polrovine patrí a neleží na hraničnej priamke. Označenie $\overrightarrow{pA}$ znamená, že polrovina je ohraničená priamkou $p$ a patrí jej bod $A$. Polrovinu môžeme označiť aj trojicou nekolineárnych bodov $\overrightarrow{ABC}$, kde $AB$ je hraničná priamka.

**Definícia 1**: *Uhol je prienik dvoch polrovín ohraničených rôznobežnými priamkami $p$ a $q$.*

Na obrázku 9 vidíme uhol, korý je prienikom polrovín $\overrightarrow{pM}, \overrightarrow{qM}$.

Význačnými prvkami uhla sú: *vrchol $V$* – bod, v ktorom sa dané priamky pretínajú. *Rameno* uhla je polpriamka, ktorá je prienikom jednej hraničnej priamky, napr. $p$ a druhej polroviny $\overrightarrow{qM}$.

Úskalím tejto definície je nemožnosť definovať nulový, plný ani priamy uhol, keďže hraničné priamky by tu boli totožné. Ak by sme definíciu zmenili na prienik dvoch polrovín ohraničených priamkami, ktoré majú aspoň jeden spoločný bod, potom by sme vyriešili problém nulového uhla (opačné polroviny) a priameho uhla (totožné polroviny), ale nie plného uhla a navyše pri nulovom a priamom uhle by sme nevedeli určiť vrchol uhla (otázkou je, či by to malo vadiť?)



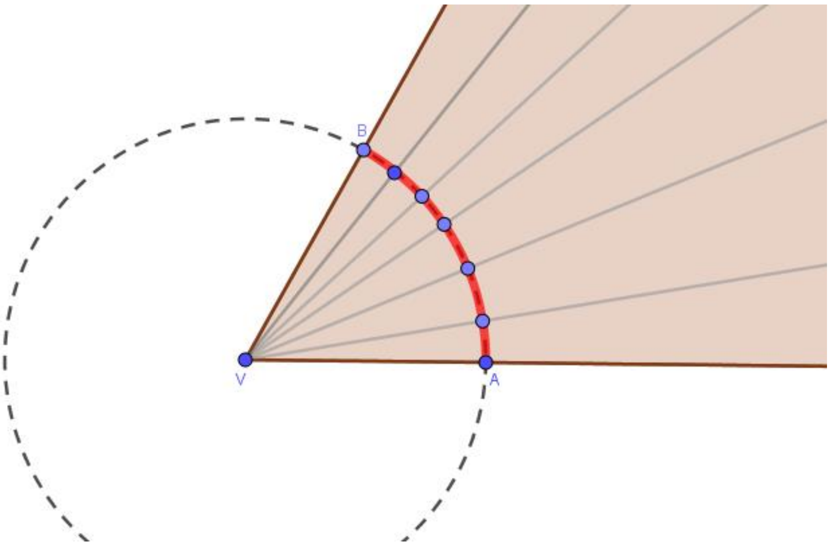

Obrázok 9. Uhol ako prienik rovín

**Definícia 2**: *Uhol je množina bodov ležiacich na niektorej z polpriamok, ktoré majú všetky začiatok v strede danej kružnice a ich druhý bod leží na danom kružnicovom oblúku.*

Uhol je tu definovaný cez daný kružnicový oblúk (viď príslušnú kapitolu). Táto definícia je jednoznačná, pretože k ľubovoľnému danému kružnicovému oblúku existuje práve jeden uhol, ktorý je ním určený.

Vrchol je potom definovaný ako stred tejto kružnice, alebo spoločný bod všetkých polpriamok a ramená sú krajné polpriamky – polpriamky, ktorým patria krajné body kružnicového oblúka.

Nulový uhol je potom jediná polpriamka a plný uhol sú body všetkých polpriamok so začiatkom v bode $V$ – čiže celá rovina. Priamy uhol je prirodzene ohraničený navzájom opačnými polpriamkami.




Obrázok 10. Uhol ako zjednotenie polpriamok

Takáto definícia je vhodnou prípravou na operácie s uhlami, ako je prenášanie uhlov, sčítanie, odčítanie uhlov, delenie na polovice a podobne – všetky tieto operácie robíme vlastne s daným kružnicovým oblúkom.

A do tretice ešte jednoduchšia definícia:

**Definícia 3**: *Uhol je časť roviny ohraničená dvoma polpriamkami so spoločným začiatkom.*

Táto definícia ale nie je jednoznačná, keďže dvojica polpriamok so spoločným začiatkom delí rovinu na dva uhly – jeden konvexný a jeden nekonvexný (prípadne dva priame).

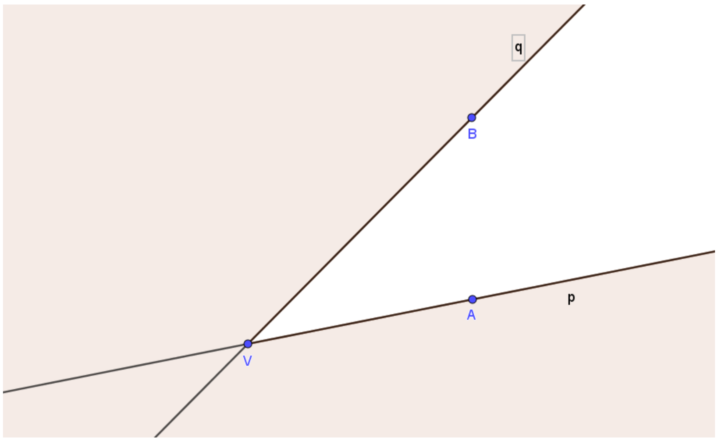
Túto nejednoznačnosť obvykle riešime buď dodatočným označením, o ktorý z nich sa jedná. Niekedy sa zamlčiava podmienka, že máme na mysli konvexný uhol. Správnejšie je však zaviesť pojem tzv. orientovaného uhla. Vtedy určíme, ktoré rameno je začiatočné a ktoré koncové. Uhol je tá časť roviny, ktorá ide od začiatočného ramena proti smeru hodinových ručičiek.

Uhly často označujeme značkou pre uhol a trojicou bodov $\sphericalangle AVB$. Stredné písmeno je vždy vrchol uhla. Prvé písmeno označuje ľubovoľný bod na prvom ramene uhla a tretie na druhom ramene uhla. Poradie ramien by malo ísť proti smeru hodinových ručičiek.

Druhou možnosťou je označovanie uhlov malými písmenami gréckej abecedy, najčastejšie sa používajú prvé písmená $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, … Kompletný zoznam písmen je na nasledujúcom obrázku. Písmená gréckej abecedy sa v matematike používajú veľmi často na označovanie rôznych objektov.

| Symbol | [výsl.] | pomenovanie | Symbol | [výsl.] | pomenovanie |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$; $A$ | [a] | alfa | $\xi$; $\Xi$ | [x] | ksí |
| $\beta$; $B$ | [b] | beta | $o$; $O$ | [o] | omikrón |
| $\gamma$; $\Gamma$ | [g] | gama | $\pi, \varpi$; $\Pi$ | [p] | pí |
| $\delta$; $\Delta$ | [d] | delta | $\rho, \varrho$; $R$ | [r] | ró |
| $\epsilon, \varepsilon$; $E$ | [e] | epsilon | $\sigma, \varsigma$; $\Sigma$ | [s] | sigma |
| $\zeta$; $Z$ | [z] | zéta | $\tau$; $T$ | [t] | tau |
| $\eta$; $H$ | [é] | éta | $\upsilon$; $\Upsilon$ | [ü,y] | ypsilon (üpsilon) |
| $\theta, \vartheta$; $\Theta$ | [th] | théta | $\phi, \varphi$; $\Phi$ | [f] | fí |
| $\iota$; $I$ | [i,j] | iota (jota) | $\chi$; $X$ | [ch] | chí |
| $\kappa, \varkappa$; $K$ | [k] | kapa | $\psi$; $\Psi$ | [ps] | psí |
| $\lambda$; $\Lambda$ | [l] | lambda | $\omega$; $\Omega$ | [ó] | omega |
| $\mu$; $M$ | [m] | mí (mű) | | | |
| $\nu$ $N$ | [n] | ní (nű) | $\aleph$ | [a] | alef |

Obrázok 11. http://www.kf.fpv.ukf.sk/pracovnici/teleki/GreckeABC.pdf




Obrázok 12. Uhol $\measuredangle BVA$

Uhly delíme podľa ich veľkosti na konvexné: *ostré, pravé, tupé, priame* a *nekonvexné*.

# Trojuholník

Mnohouholník s najmenším počtom strán je trojuholník. Je to dôležitý útvar, nakoľko všetky ostatné mnohouholníky vieme rozdeliť na trojuholníky a pracovať s nimi.

Hlavnými význačnými prvkami trojuholníka sú vrcholy, strany a vnútorné uhly. Podľa strán delíme trojuholníky na *rovnostranné, rovnoramenné a rôznostranné*.

Podľa uhlov delíme trojuholníky na *ostrouhlé, pravouhlé a tupouhlé*. V pravouhlom trojuholníku nazývame stranu oproti pravému uhlu: *prepona* a ostatné dve strany *odvesny*.

Vzťah medzi stranami trojuholníka určuje trojuholníková nerovnosť. Vrcholy trojuholníka totiž musia byť nekolineárne.

**Zhodnosť trojuholníkov**

**Definícia:** Dva trojuholníky sú zhodné, ak možno ich vrcholy navzájom priradiť tak, že zodpovedajúce strany a uhly sú zhodné.

**Vety o zhodnosti trojuholníkov:**

Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú:

**sss**: vo všetkých navzájom zodpovedajúcich stranách.

**sus**: v dvoch navzájom zodpovedajúcich stranách a uhle, ktorý zvierajú.

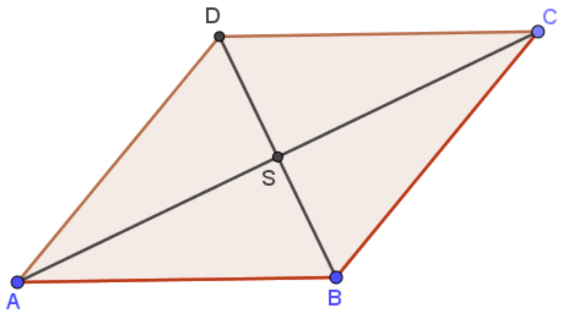
**usu**: v jednej strane a navzájom zodpovedajúcich uhloch k nej priľahlých.

**Ssu**: v dvoch navzájom zodpovedajúcich stranách a uhle oproti väčšej z nich.

Vety o zhodnosti trojuholníkov sú veľmi často využívané v dôkazových úlohách.

5. *Dokážte, že uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé.*

Dôkaz priamo vyplýva zo zhodnosti trojuholníkov $\Delta ABS \cong \Delta CBS\ (sss)$. Zhodnosť strán vychádza z vlastnosti uhlopriečok kosoštvorca – navzájom sa rozpoľujú. (Pozri príslušnú kapitolu.)
(V tomto zápise je nevyhnutné správne poradie vrcholov.)

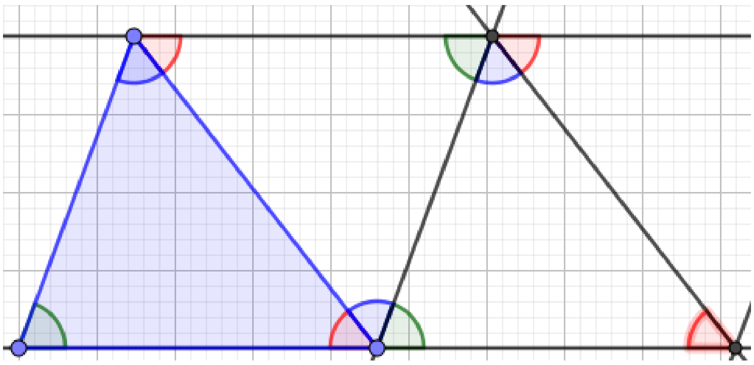



Obrázok 13. Uhlopriečky kosoštvorca

Uhly $\measuredangle ASB$ a $\measuredangle CSB$ sú preto tiež zhodné, ich súčet je 180°, takže musia byť pravé.

6. *Dokážte, že pre vnútorné uhly ľubovoľného trojuholníka platí:* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Pomocou rovnobežiek vyplníme celú rovinu zhodnými trojuholníkmi. Potom vidíme, že tri uhly trojuholníka skutočne tvoria spolu priamy uhol.



Obrázok 14. Súčet uhlov v trojuholníku je priamy uhol

- K objavu: "súčet všetkých troch vnútorných uhlov trojuholníka je rovný priamemu uhlu" možno doviesť žiakov samostatným objavovaním. Začneme súčtom uhlov v pravouhlom trojuholníku. Potom už stačí len pripustiť možnosť rozdelenia ľubovoľného trojuholníka na dva pravouhlé.

**Podobnosť trojuholníkov**

**Definícia:** Dva trojuholníky sú podobné, ak majú rovnaký pomer zodpovedajúcich strán. Tento pomer dĺžok strán nazývame pomer podobnosti.

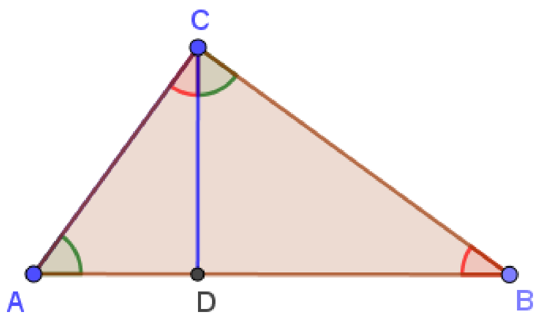
**Veta:** Dva trojuholníky sú podobné ak

**uu**: sa zhodujú v dvoch uhloch.

**sus**: sa zhodujú v pomere dĺžok dvoch strán a majú rovnaký uhol, ktorý tieto dve strany zvierajú.

7. *Dokážte, že pravouhlý trojuholník je výškou na preponu rozdelený na dva podobné trojuholníky. Navyše tieto trojuholníky sú podobné aj celému trojuholníku.*

Všetky tri trojuholníky majú tie isté uhly, preto podľa vety (uu) sú všetky navzájom podobné. Pri zapisovaní podobnosti musíme dávať pozor na poradie vrcholov. (Všímame si uhly pri vrcholoch.) $\Delta ABC \approx \Delta CBD \approx \Delta ACD$

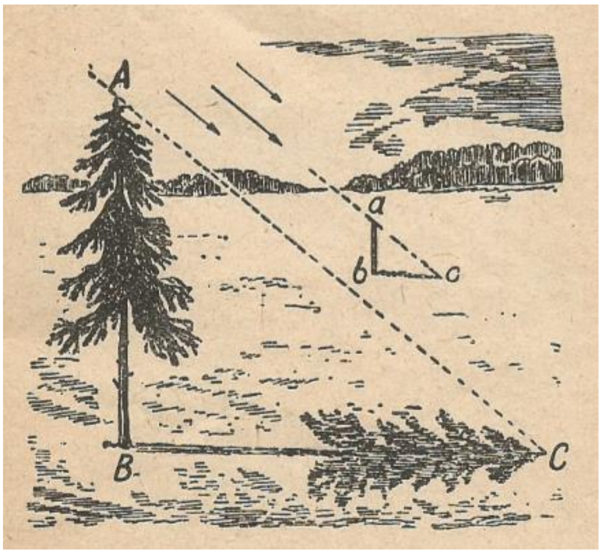



Obrázok 15. Podobnosť trojuholníkov

8. *Určte výšku stromu bez toho, že by ste naň museli vyliezť.*

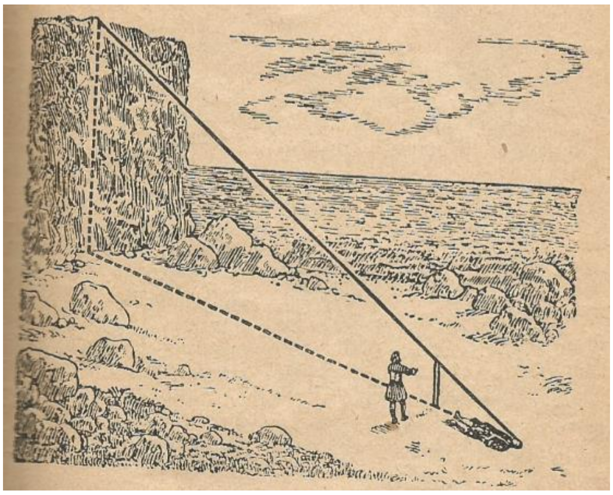
Táto praktická úloha má hneď niekoľko možných riešení. Známym spôsobom je ten, ktorý použil Táles v šiestom storočí p. n. l. Táles odmeral výšku pyramídy tak, že si počkal na deň a hodinu, kedy jeho vlastný tieň mal rovnakú dĺžku, ako bola jeho výška. Presne vtedy odmeral tieň pyramídy a vedel jej výšku. (Perelman, 1952).

Vďaka vedomostiam o podobnosti trojuholníkov je možné tento postup prispôsobiť tak, aby sa ho dalo použiť v akýkoľvek jasný slnečný deň a hodinu. Slnečné lúče totiž dopadajú na Zem v podstate rovnobežne. Stačí teda zabodnúť kolmo do zeme nejakú tyč, odmerať jej výšku a tieň a vieme, že v rovnakom pomere bude aj výška a tieň stromu.




Obrázok 16. Meranie výšky stromu pomocou jeho tieňa

Druhý zaujímavý spôsob je popísaný v románe Jula Verna *Tajuplný ostrov*. Na obrázku 17 vidíme spôsob, akým bola meraná výška skaly. Použitá pri tom bola opäť iba jedna tyč zabodnutá do zeme. V tomto prípade bola využitá skutočnosť, že svetlo sa pohybuje po priamke. Pozorovateľ si ľahol na zem tak, aby videl vrch tyče v "zákryte" s vrcholom hory. Postup sa dal aplikovať aj pri zamračenej oblohe.

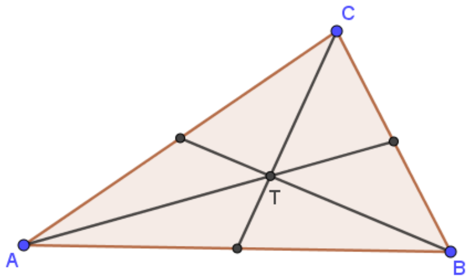


Obrázok 17. Meranie výšky skaly

Ďalšie zaujímavé spôsoby merania používajúce podobnosť trojuholníkov môžeme nájsť v knižke J. I. Perelmana – *Geometrie v přírode* vydanej v roku 1952.

Ďalej si pripomenieme niektoré význačné pojmy súvisiace s trojuholníkom.

**Ťažnica** je úsečka spájajúca stred strany s protiľahlým vrcholom.

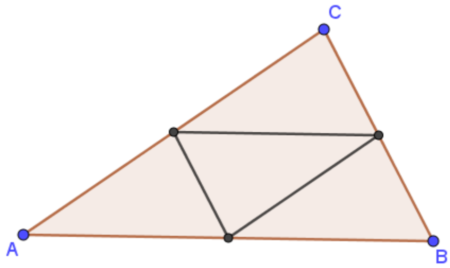



Obrázok 18. Ťažnice trojuholníka

- ✓ Ťažnica delí trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom.
- ✓ Všetky ťažnice sa pretínajú v jedinom bode, ktorý voláme *ťažisko*.
- ✓ Ťažisko delí každú ťažnicu v pomere 1:2

- ➢ Pojem *ťažisko* je v tomto zmysle totožný s fyzikálnym ťažiskom – ak vyrobíme trojuholníkový model z rovnorodého všade rovnako hrubého materiálu, tak práve na ťažisko ho môžeme položiť na hrot ihly a nespadne.

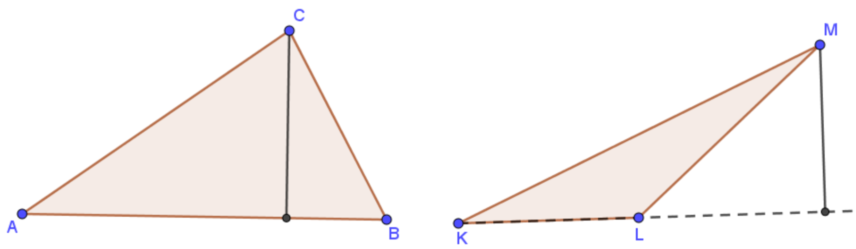
**Stredná priečka** je úsečka, ktorá spája stredy strán daného trojuholníka.




Obrázok 19. Stredné priečky trojuholníka

- ✓ Všetky tri stredné priečky delia trojuholník na štyri zhodné trojuholníky.
- ✓ Stredná priečka je rovnobežná s protiľahlou stranou.
- ✓ Dĺžka strednej priečky je polovicou dĺžky protiľahlej strany.

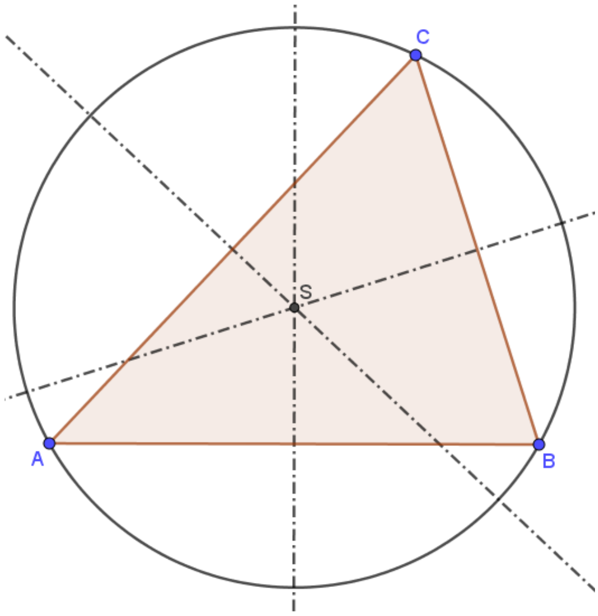
**Výška** je úsečka spájajúca jeden vrchol trojuholníka s pätou kolmice, ktorá prechádza týmto vrcholom a je kolmá na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana.




Obrázok 20. Výška trojuholníka

- ✓ Priamky, na ktorých ležia výšky trojuholníka, sa pretínajú v jedinom bode, ktorý nazývame *ortocentrum*.

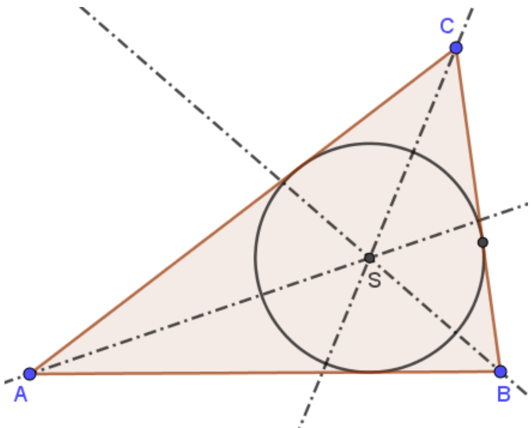
**Os strany** je priamka, ktorá prechádza stredom strany a je na ňu kolmá.




Obrázok 21. Osi strán

- ✓ Všetky tri osi strán sa pretínajú v jedinom bode, ktorý je zároveň stredom opísanej kružnice.
- ✓ V pravouhlom trojuholníku leží stred opísanej kružnice v strede prepony. Kružnicu opísanú pravouhlému trojuholníku nazývame *Tálesova kružnica*.

**Os uhla** je polpriamka, ktorá delí vnútorný uhol trojuholníka na dva zhodné uhly.



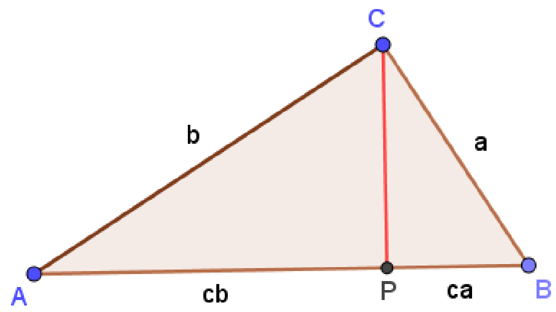

Obrázok 22. Osi vnútorných uhlov

- ✓ Všetky tri osi uhlov sa pretínajú v jedinom bode, ktorý je zároveň stredom vpísanej kružnice.

## Euklidova veta o výške

Euklidove vety sú dve tvrdenia o pravouhlom trojuholníku nachádzajúce sa v knihách Euklidových Základov. Euklidova veta o výške hovorí, že ak $v$ je výška na preponu pravouhlého trojuholníka, táto delí preponu na dve časti, pričom $c_a$ je tá časť prepony, ktorá je bližšie k strane $a$ (analogicky $c_b$), tak platí

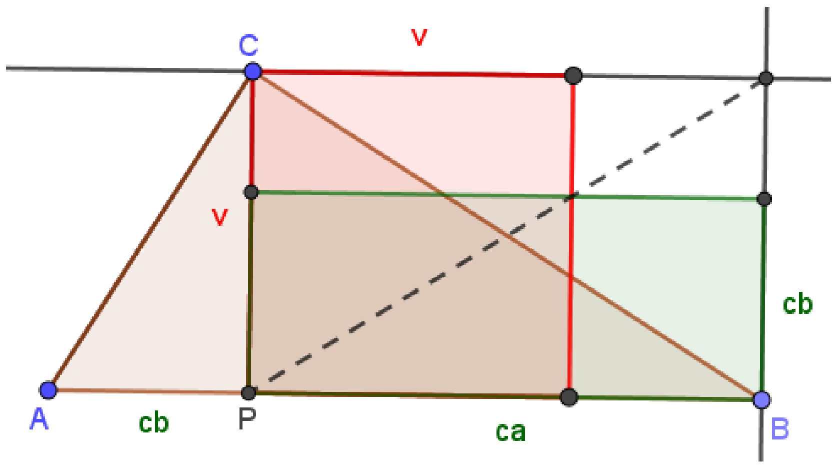
$$c_a \cdot c_b = v^2$$




Obrázok 23. Euklidova veta o výške

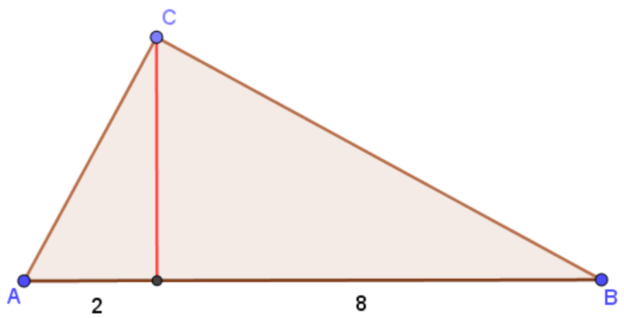
Dôkaz vyplýva z podobnosti trojuholníkov: $\Delta APC \sim \Delta CPB (uu)$. Preto pomer strán $\frac{c_a}{v} = \frac{v}{c_b}$. Úpravou tejto rovnice dostávame hľadaný vzťah.

O platnosti Euklidovej vety o výške sa môžeme presvedčiť aj graficky. Zostrojíme štvorec s obsahom $v^2$ (na obrázku 24 ten červený) a obdĺžnik so stranami $c_a$ a $c_b$ (zelený). Umiestnime ich tak ako na obrázku 24. Ak čiarkovaná úsečka prechádza priesečníkom strán obdĺžnika a štvorca, tak ich obsahy sú zhodné. (Dôkaz ponechávame čitateľovi ako cvičenie.)




Obrázok 24. Euklidova veta o výške graficky

9. *Určte obsah pravouhlého trojuholníka, o ktorom vieme, že výška na preponu delí túto preponu na dve časti, z ktorých jedna má dĺžku 2 cm a druhá 8 cm.*




Obrázok 25. Úloha na využitie Euklidovej vety o výške

Podľa Euklidovej vety o výške vypočítame výšku: $v = \sqrt{2.8} = 4\ cm$. Potom $S = \frac{10.4}{2} = 20\ cm^2$.

## Pytagorova veta a Euklidove vety o odvesne

Pytagorova veta je jedna z najznámejších viet v geometrii. Nesie meno Pytagora zo Samosu, ktorý žil v južnom Taliansku pred 2500 rokmi napriek tomu, že nie je jeho objavom. Pytagorovou zásluhou je jej dôkaz. Vlastnosť, ktorú dnes voláme Pytagorova veta, objavil počas svojich ciest po Egypte, kde zememerači dávno používali lano s uzlami, ktoré označovali 3, 4 a 5 jednotiek dĺžky. Trojuholník, ktorý s pomocou neho vytvorili, bol vždy pravouhlý.

Čísla 3, 4 a 5 sú prvou známou *Pytagorejskou trojicou* (t.j. čísla vyhovujúce Pytagorovej vete, ktoré sú všetky celé). Ďalšími Pytagorejskými trojicami sú okrem všetkých jej celočíselných násobkov (6, 8, 10, ďalej 9, 12, 15 a.t.ď.) aj napr. 5, 12, 13 a ich násobky, ďalej 8, 15, 17 a mnoho ďalších.

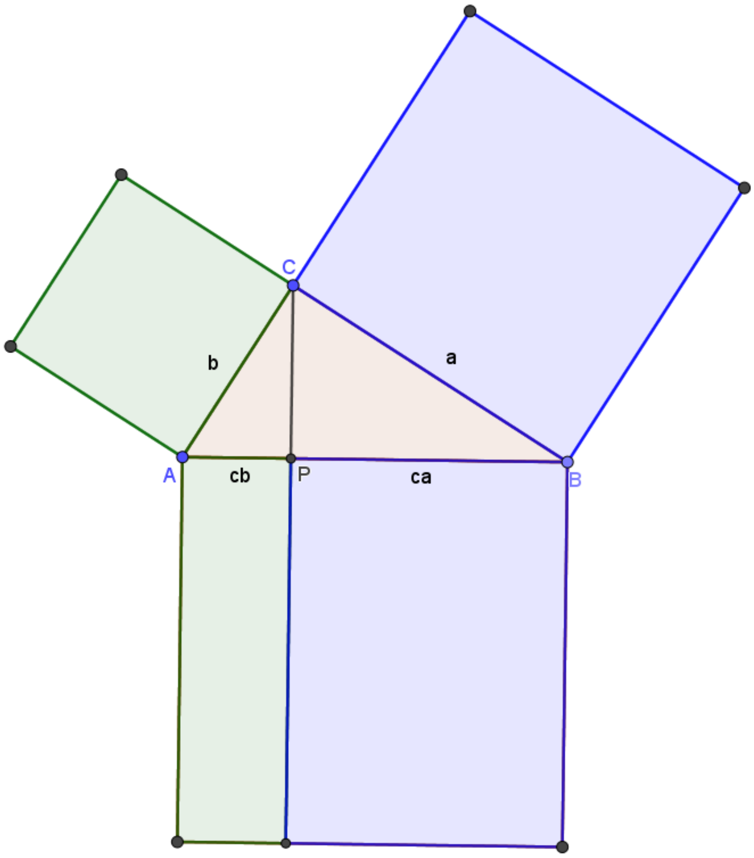
Historickou zaujímavosťou je, že Pytagorova veta síce asi najviac preslávila Pytagora, ale zároveň spôsobila prvú veľkú krízu vtedajšej matematiky. Pytagorejci boli niečo ako sekta uznávajúca celé čísla a ich pomery za základ všetkého. Jeden z Pytagorových nasledovníkov Hippasos poukázal na to, že ak majú odvesny trojuholníka dĺžku 1, tak dĺžka prepony sa nedá vyjadriť pomerom celých čísel. Legenda hovorí, že Pytagoras po tomto zničujúcom údere, ktorý podkopával jeho autoritu, pozval Hippasa na ryby, ale na breh sa vrátil sám... (Jackson, 2013, s. 13)

**Euklidove vety o odvesne** sú dve:

$$c.c_a = a^2, \quad c.c_b = b^2$$

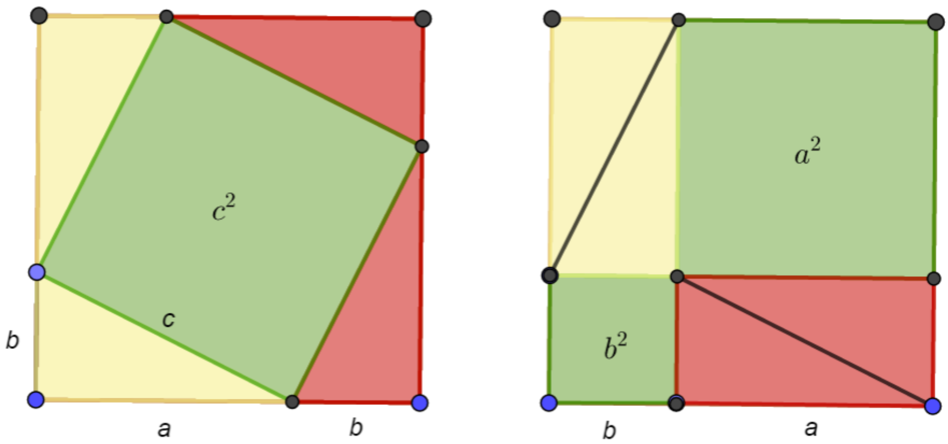
Dôkaz vyplýva z podobnosti trojuholníkov: $\Delta APC \sim \Delta ACB (uu)$. Potom totiž pomer strán $\frac{c_a}{a} = \frac{a}{c}$. Úpravou tejto rovnice dostávame hľadaný vzťah. Analogicky dokážeme aj druhý vzťah.

Graficky môžeme obe Euklidove vety o odvesne znázorniť nasledovne. Hneď aj budeme vidieť, ako z nich ľahko odvodíme Pytagorovu vetu.




Obrázok 26. Pytagorova veta a Euklidove vety

Pytagorovu vetu je možné dokázať aj pomocou nasledujúceho obrázka.

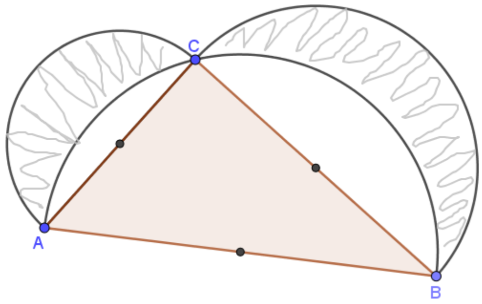



Obrázok 27. Dôkaz Pytagorovej vety

Pytagorova veta vyjde z dvoch spôsobov výpočtu obsahu štvorca so stranou dĺžky $a + b$. Obsah sa rovná $S = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ale dá sa vypočítať ako súčet obsahov 4 pravouhlých trojuholníkov a jedného štvorca so stranou dĺžky $c$, čiže $S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$. Keď dáme tieto dva vzťahy do rovnosti, dostaneme rovnosť $a^2 + b^2 = c^2$ z Pytagorovej vety.

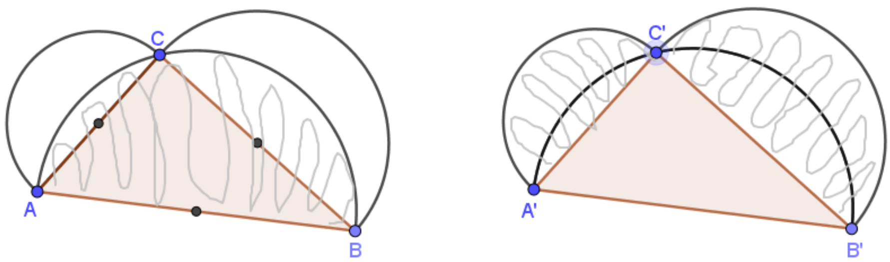
Nasledujúca úloha je zaujímavou ukážkou využitia Pytagorovej vety.

10. *Dokážte, že obsah pravouhlého trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov vyznačených mesiačikov.*




Obrázok 28. Úloha o mesiačikoch

Začneme rovnosťou, ktorá vyplýva z Pytagorovej vety – polkruhy zostrojené nad odvesnami majú spolu rovnaký obsah ako polkruh zostrojený nad preponou. Dôvod: $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$ je ekvivalentná rovnica ako rovnica v Pytagorovej vete (stačí ju celú vynásobiť 8 a vydeliť číslom $\pi$.)




Obrázok 29. Riešenie úlohy o mesiačikoch

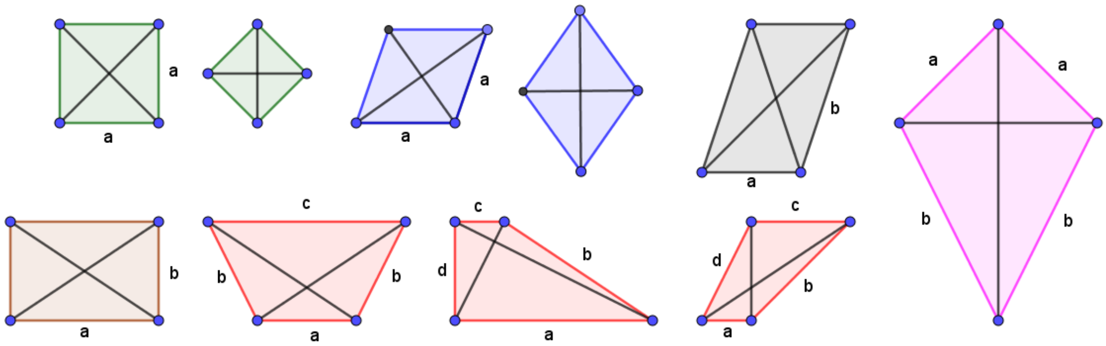
Z obrázka 29 vidíme, že ak odstránime časti, ktoré sú vyšrafované na oboch obrázkoch, tak vľavo zostane trojuholník a vpravo mesiačiky. Ich obsah teda musí byť zhodný.

- Pytagorovu vetu môžeme modifikovať: namiesto štvorcov nad odvesnami môžeme použiť akékoľvek podobné plošné útvary (ako polkruhy v predchádzajúcej úlohe), ktorých rozmery sú odvodené od dĺžok strán trojuholníka. Napríklad obsah pravidelných päťuholníkov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka je rovný obsahu pravidelného päťuholníka zostrojeného nad preponou. Alebo použijeme obdĺžniky, ktorých jedna strana je strana pravouhlého trojuholníka a druhá je jej polovicou a.t.ď.

# Štvoruholníky

„Štvoruholník je časť roviny ohraničená jednoduchou uzavretou lomenou čiarou zloženou zo štyroch úsečiek.“ Alebo, ak už máme definovaný pojem mnohouholník: „Štvoruholník je mnohouholník, ktorý má štyri strany.“

Štvoruholníky môžeme deliť podľa rôznych kritérií. Prvým kritériom býva rovnobežnosť protiľahlých strán. Tak dostávame tri možnosti:



Obrázok 30. Štvoruholníky

**Rovnobežníky** – majú obe dvojice protiľahlých strán rovnobežné. Tieto môžeme ďalej deliť buď podľa veľkostí strán a uhlov, ktoré zvierajú, alebo podľa veľkostí uhlopriečok a uhla, ktorý zvierajú na: *štvorce, obdĺžniky, kosoštvorce a kosodĺžniky*.

**Lichobežníky** – majú jednu dvojicu protiľahlých strán rovnobežnú. Rovnobežné strany nazývame *základne* a rôznobežné *ramená*. Môžeme z nich vyčleniť podskupinu – *rovnoramenné lichobežníky*, ak sú ramená rovnako dlhé, alebo *pravouhlé lichobežníky*, ak je jedno z ramien kolmé na základne.

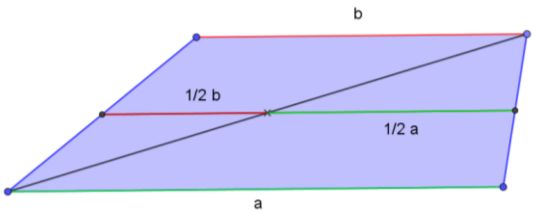
**Rôznobežníky** – nemajú žiadne rovnobežné strany. Špeciálnou podskupinou sú *deltoidy* (šarkany) – konvexné štvoruholníky, ktoré majú dve dvojice priľahlých strán zhodné. Medzi rôznobežníky patria aj všetky nekonvexné štvoruholníky.

Poznáme aj iné klasifikácie – napríklad na konvexné a nekonvexné štvoruholníky alebo *tetivové* (tie, ktorým sa dá opísať kružnica) a netetivové štvoruholníky.

11. *Dokážte, že dĺžka strednej priečky lichobežníka je rovná aritmetickému priemeru dĺžok základní.*

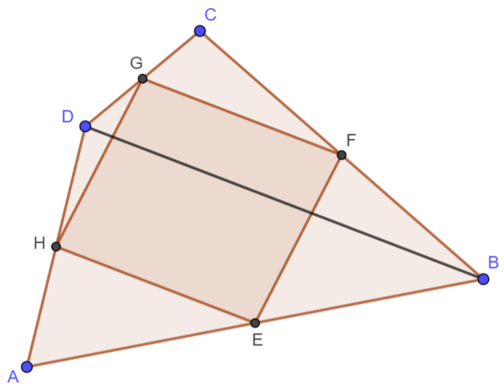
Lichobežník rozdelíme uhlopriečkou na dva trojuholníky. Stredná priečka lichobežníka sa skladá z dvoch stredných priečok týchto dvoch trojuholníkov.

Z vlastností stredných priečok trojuholníka dostávame hľadaný vzťah aj pre strednú priečku lichobežníka.




Obrázok 31. Rozdelenie strednej priečky lichobežníka uhlopriečkou

12. *Dokážte, že stredy strán ľubovoľného štvoruholníka tvoria vrcholy rovnobežníka.*

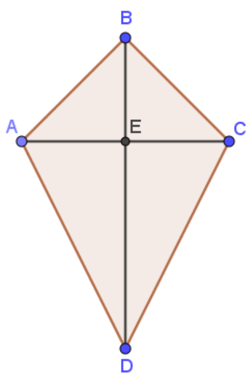



Obrázok 32. Stredné priečky štvoruholníka

Dôkaz je založený na fakte, že v trojuholníku $ABD$ je $HE$ strednou priečkou a preto je úsečka $HE$ rovnobežná so základňou $BD$, rovnako v trojuholníku $BCD$ je $FG$ strednou priečkou a preto je tiež rovnobežná so základňou $BD$. Vieme teda, že úsečky $HE$ a $FG$ sú rovnobežné. Ak štvoruholník rozdelíme uhlopriečkou $AC$, dostaneme ten istý záver aj pre úsečky $EF$ a $GH$.

13. *Dokážte, že v deltoide $ABCD$ sú uhlopriečky na seba kolmé a uhlopriečka $AC$ je uhlopriečkou $BD$ rozdelená na polovice.*

Stačí nám dokázať, že $\Delta ABE \cong \Delta CBE$ $(sus)$.

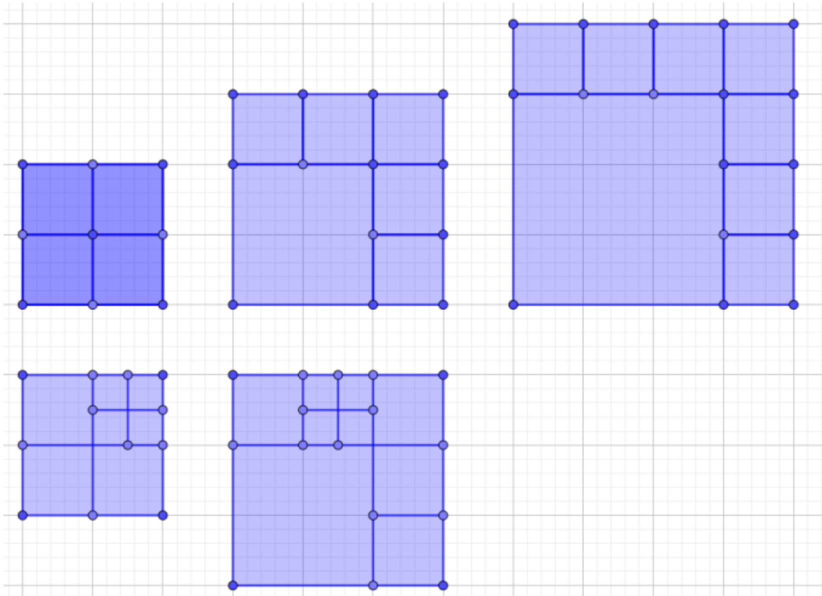



Obrázok 33. Uhlopriečky deltoidu

Na to potrebujeme dokázať rovnosť uhlov $\measuredangle ABE$ a $\measuredangle CBE$, ktorá ale vyplýva zo zhodnosti: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ $(sss)$.

14. *Ukážte, že štvorec možno rozdeliť na $n$ = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, … neprekrývajúcich sa štvorcov (nie nutne rovnakých).*

Začneme riešením pre pre $n$ = 4, 6, 8.



Obrázok 34. Delenie štvorca

Všetky ďalšie možnosti vieme získať tak, že niektorý zo štvorcov rozdelíme na štyri časti, čím nám celkový počet častí narastie o tri. Takto z delenia na 4 časti odvodíme delenie na 7, 10, 13, ..., všetky čísla tvaru $3k$+1. Z delenia na 6 častí dostaneme delenie na 9, 12, ..., $3k$ častí a z delenia na 8 častí dostaneme delenia na 11, 14, 17, ..., $3k$+2 častí.

# Pravidelné mnohouholníky

Definícia by mohla znieť takto: "Pravidelným mnohouholníkom je taký mnohouholník, ktorého všetky strany sú zhodné." Táto definícia je však príliš široká, pretože do nej spadajú rôznorodé útvary, napr.:

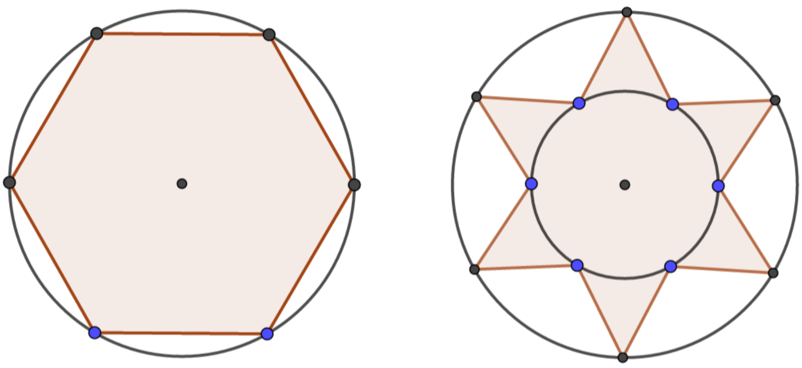
*Bežne chápané pravidelné mnohouholníky* – zhodujú sa nielen všetky strany, ale aj všetky vnútorné uhly. Tieto sú vždy konvexné a majú opísanú kružnicu.

*Pravidelné hviezdicové mnohouholníky* – majú dve skupiny vrcholov: vrcholy, ktoré sú vrcholmi konvexného vnútorného uhla ("vonkajšie") ležia všetky na jednej kružnici a vrcholy, ktoré sú vrcholmi nekonvexného vnútorného uhla ("vnútorné") ležia na druhej kružnici, ktorá je sústredná s prvou. (Majú spoločný stred.)

*Iné* – mnohouholníky zložené z rovnakých strán, ale majúce rôzne vnútorné uhly.

- Vytvorte rôzne mnohouholníky s rovnakými stranami tak, že spojíte rovnako dlhé paličky pružným spojom a vytvárajte z nich rôzne tvary.

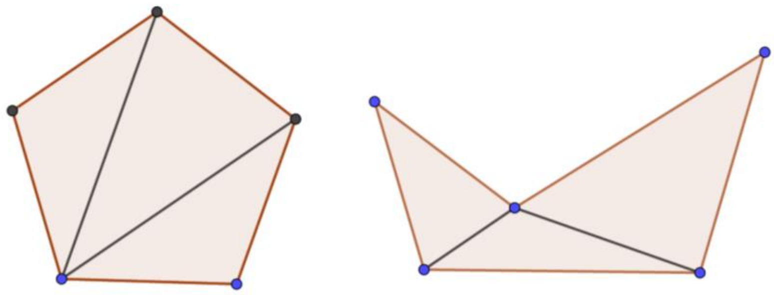
Na obrázku 35 vidíme pravidelný šesťuholník a pravidelný hviezdicový dvanásťuholník, ktorý niekedy nazývame aj šesťcípou hviezdou.



Obrázok 35. Pravidelný a hviezdicový mnohouholník

*15. Odvoďte vzorec pre súčet vnútorných uhlov pravidelného mnohouholníka*

Odvodenie je platné aj pre iné ako pravidelné mnohouholníky. Podstata spočíva v rozdelení *n*-uholníka na *n*-2 trojuholníkov, z ktorých má každý súčet uhlov 180°. Preto je súčet uhlov rovný $(n-2)\cdot 180°$.

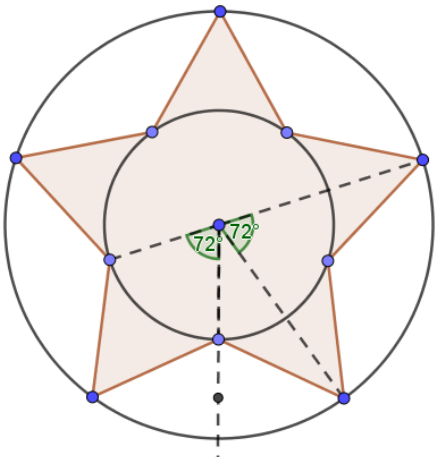


Obrázok 36. Rozdelenie päťuholníka na tri trojuholníky

*16. Narysujte pravidelnú päťcípu hviezdu.*

Keďže päť vonkajších vrcholov bude ležať na kružnici, začneme touto kružnicou. Na nej musíme rovnomerne rozložiť päť bodov. To dosiahneme pomocou rozdelenia uhla pri strede kružnice na päť častí: 360°: 5 = 72°.

Nakreslíme menšiu kružnicu sústrednú s prvou a body na nej rozmiestnime podobne, ale tak, aby prvý z nich ležal na spojnici stredu jedného z vonkajších oblúkov a stredu kružnice.

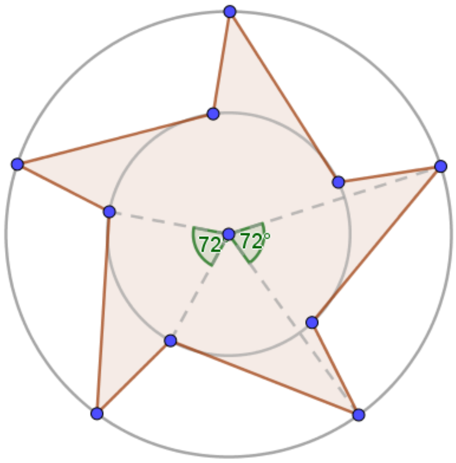



Obrázok 37. Pravidelná päťcípa hviezda

- Skúste, ako sa mení tvar hviezdy pri zmene polomeru menšej kružnice.

17. *Nakreslite päťcípu hviezdu podobne ako v predchádzajúcej úlohe s tým, že vnútorné body nebudú ležať na spojnici stredov oblúkov so stredom kružnice. (Budú pootočené.)*

Mnohouholník, ktorý takto dostaneme, nie je pravidelný, pretože obsahuje strany dvoch rôznych dĺžok.



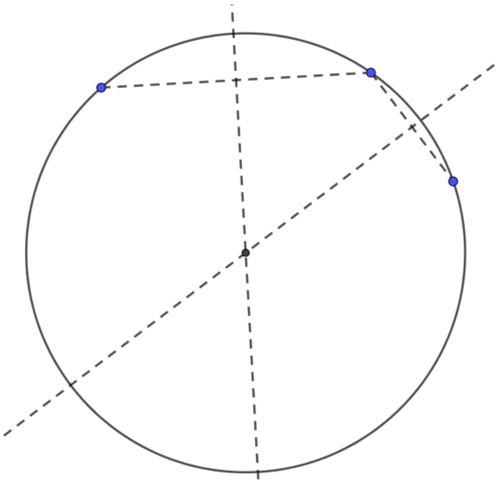

Obrázok 38. Nepravidelná päťcípa hviezda

## Kružnica a kruh

Kružnica je čiara v rovine spájajúca všetky body, ktoré majú od daného bodu, ktorý nazývame *stredom*, rovnakú vzdialenosť, ktorú nazývame *polomerom*. Kruh je plocha ohraničená kružnicou.

18. *Narysujte kružnicu, ak je daná tromi bodmi, ktoré na nej ležia.*

Úloha má totožné riešenie s hľadaním opísanej kružnice trojuholníku. Stačí však narysovať iba dve úsečky a ich osi. (Vieme, že tretia by prechádzala tiež ich priesečníkom.)

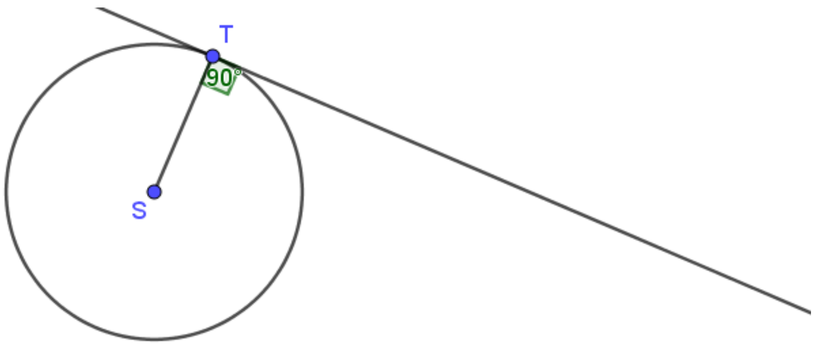


Obrázok 39. Kružnica určená tromi bodmi

Dva body na kružnici delia kružnicu na dva *kružnicové oblúky*. Kružnica s priamkou môžu mať spoločný bod. Ak je jeden, tak takúto priamku nazývame *dotyčnicou* ku kružnici. Ak majú dva spoločné body, tak *sečnicou* kružnice.

*19. Nájdite dotyčnicu ku kružnici idúcu bodom, ktorý leží na kružnici.*

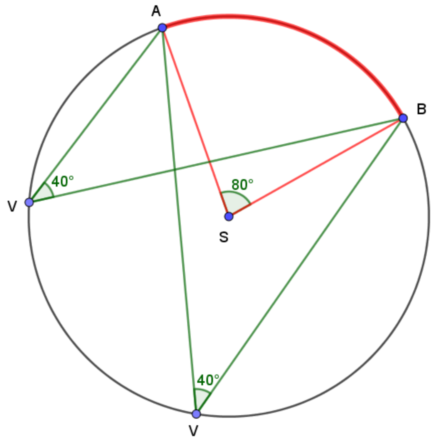
Dotyčnica je kolmá na polomer kružnice spájajúci stred kružnice a bod dotyku.




Obrázok 40. Dotyčnica ku kružnici

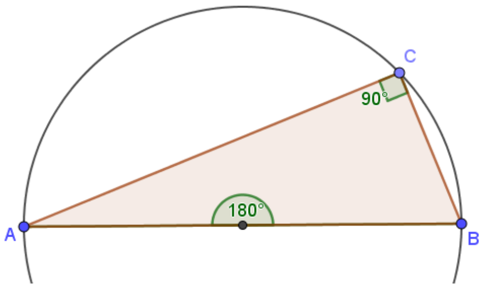
## Veta o obvodovom a stredovom uhle

K danému oblúku $\widehat{AB}$ na kružnici prislúcha jeden stredový uhol $\measuredangle ASB$ a nekonečne veľa obvodových uhlov $\measuredangle AVB$ ($V$ je ľubovoľný bod na kružnici okrem bodov na oblúku $\widehat{AB}$). Všetky obvodové uhly sú zhodné a rovné práve polovici veľkosti stredového uhla.




Obrázok 41. Stredový a obvodové uhly

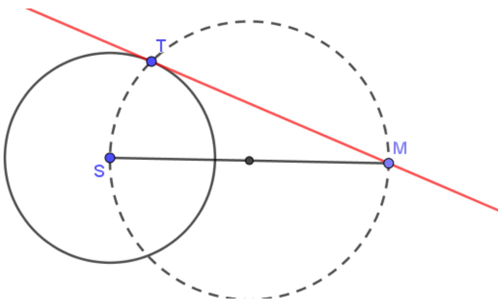
Špeciálnym prípadom vety o obvodovom a stredovom uhle je *Tálesova kružnica*. Tálesova kružnica je kružnica vytvorená nad úsečkou, ktorá tvorí jej priemer. Známe je, že trojuholník, ktorého jedna strana je priemerom jemu opísanej kružnice, je vždy pravouhlý. Toto je dôsledok vety o stredovom a obvodovom uhle. Stredový uhol je v tomto prípade 180°. Preto obvodový musí byť 90° bez ohľadu na to, kde na Tálesovej kružnici sa bod *C* nachádza.




Obrázok 42. Tálesova kružnica

*20. Nájdite dotyčnicu ku kružnici idúcu daným bodom, ktorý na kružnici neleží.*

Aby sme vyriešili túto úlohu, potrebujeme nájsť bod dotyku priamky a kružnice – využijeme skutočnosť, že polomer kružnice idúci bodom dotyku je kolmý na dotyčnicu. Čiže trojuholník *SMT* má byť pravouhlý. Bod *T* nájdeme pomocou Tálesovej kružnice nad priemerom *SM*.

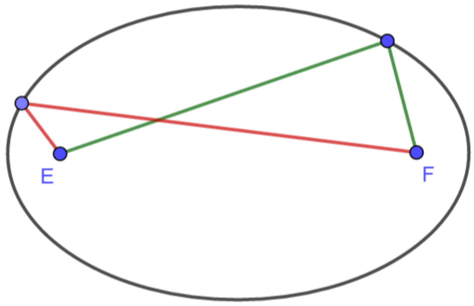



Obrázok 43. Dotyčnica ku kružnici idúca bodom M

# Elipsa a ovál

Elipsa je útvar, ktorý má nezanedbateľný význam v astronómii, optike a iných fyzikálnych vedách. Dráhy planét slnečnej sústavy sú totiž elipsy, pričom Slnko je umiestnené v jednom z ich ohnísk. Ďalšou zaujímavosťou je, že ak do jedného ohniska zrkadlovej elipsy umiestnime svetelný zdroj, všetky lúče sa odrazia do druhého ohniska.

Elipsa je definovaná ako množina bodov, ktorých súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov, ktoré voláme *ohniská,* je konštantný, ale väčší ako vzdialenosť týchto dvoch bodov.

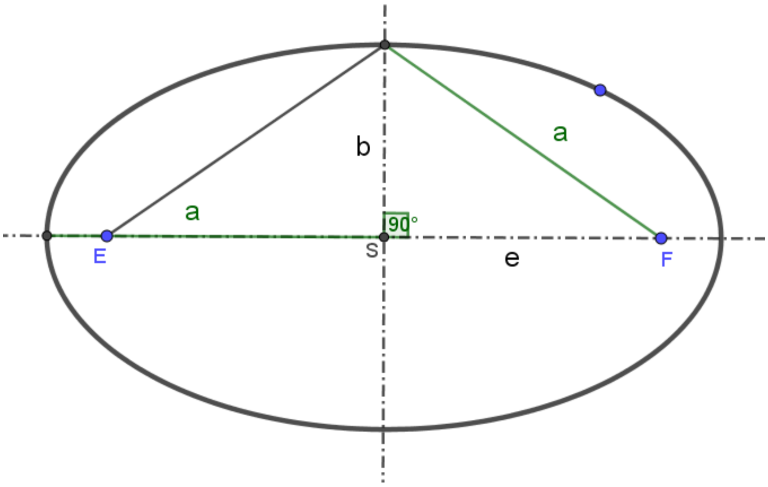



Obrázok 44. Elipsa

- *Záhradnícka konštrukcia*: Vytvoriť elipsu je možné pomocou dvoch pevných kolíkov a lana, ktorého konce priviažeme k týmto pevným kolíkom. Lano natiahneme a píšeme na zem krivku tak, ako s lanom stále natiahnutým pohybujeme.
- Známa je úloha o priviazanej koze – priviažeme konce lana, na ktorom je koza uviazaná, k dvom kolíkom. Toto lano je pretiahnuté cez uško obojku na koze, takže sa hladko pohybuje. Akú plochu trávnika koza spasie?

Elipsa má dve osi súmernosti (pozri príslušnú kapitolu). Os, ktorá prechádza ohniskami, voláme *hlavná os,* druhá na ňu kolmá os súmernosti sa nazýva *vedľajšia os.* Elipsa je teda stredovo súmerná podľa stredu, ktorý je priesečníkom osí súmernosti. Vzdialenosť stredu od bodov elipsy sa mení z najkratšej, ktorú meriame na vedľajšej osi a označujeme ju písmenom $b$ - *vedľajšia poloos,* až po najdlhšiu, ktorá je meraná na hlavnej osi a označujeme ju $a$ - *hlavná poloos.* Vzdialenosť stredu od ohniska označujeme písmenom $e$ - *excentricita*. Pozri obrázok 45.

Zaujímavý je vzťah medzi dĺžkou $a$ a dĺžkou lana, ktoré elipsu vytváralo: Lano má presne rovnakú dĺžku, ako je šírka elipsy na hlavnej osi, čiže $2a$.



Obrázok 45. Elipsa, vzťah medzi hlavnými prvkami

21. *Na pozemku je uviazaná koza o dva kolíky vzdialené 8 metrov od seba. Lano, na ktorom je koza uviazaná má dĺžku 10 metrov. Aké rozmery má plocha, ktorú koza spasie?*

Koza zrejme spasie plochu ohraničenú elipsou. Rozmermi elipsy budeme v tejto úlohe chápať dĺžky hlavnej a vedľajšej poloosi.

Ak je vzdialenosť kolíkov 8 metrov, tak $e = 4$ metre. Keďže dĺžka lana je presne šírkou elipsy na hlavnej osi, vieme, že šírka je 10 metrov. Číslo $a$ je polovicou, čiže 5 metrov. Hodnotu čísla $b$ dopočítame pomocou Pytagorovej vety: $5^2 = 4^2 + b^2$. Koza teda spasie plochu ohraničenú elipsou s dĺžkou hlavnej poloosi 5 metrov a dĺžkou vedľajšej poloosi 3 metre.

## Úlohy

1) Vytvorte takú definíciu pojmu *obdĺžnik*, pri ktorej sa bude štvorec považovať za špeciálny prípad obdĺžnika.
2) Vytvorte takú definíciu pojmu *kosoštvorec*, pri ktorej sa bude štvorec považovať za špeciálny prípad kosoštvorca.
3) Je daná úsečka $AB$, nájdite na nej bod $C$ tak, že jeho vzdialenosť od bodu $A$ bude štvrtinou vzdialenosti od bodu $B$. Dokážte správnosť vášho postupu.
4) Nájdite aspoň päť príkladov, kde možno nájsť v prírode či umení zlatý rez.
5) Nech je daný ľubovoľný trojuholník $ABC$, narysujme strednú priečku $UV$ rovnobežnú so stranou $AB$. Dokážte, že trojuholník $UVC$ je podobný trojuholníku $ABC$.
6) Lesník meral výšku stromu pomocou jeho tieňa. Strom mal tieň dlhý 24 metrov. V tom istom čase mal lesník vysoký 1,8 metra tieň dlhý 3 metre. Aký vysoký je strom?
7) Definujte rovnobežnosť úsečiek v rovine.
8) Definujte pojem rovnostranný trojuholník.
9) Zistite, kde leží ortocentrum pravouhlého a tupouhlého trojuholníka.
10) Narysujte ľubovoľný rovnoramenný trojuholník. Nájdite jeho ortocentrum a ťažisko. Kedy tieto dva body splývajú?
11) Dokážte, že červený štvorec a zelený obdĺžnik na obrázku 24 majú zhodný obsah.
12) Presvedčte sa graficky o platnosti Euklidovej vety o odvesne.
13) V druhom dôkaze Pytagorovej vety chýba dôkaz, že štvoruholník vytvorený vnútri štvorca so stranou dĺžky $a + b$ je skutočne štvorec. Doplňte ho.
14) Dokážte, že všetky rovnostranné trojuholníky sú si navzájom podobné.
15) Nájdite ťažnice, výšky, osi strán aj osi uhlov rovnostranného trojuholníka.
16) Je daný rôznostranný trojuholník $ABC$. Narysujte jemu vpísanú kružnicu.
17) Definujte pojem kosodĺžnik.

18) Definujte obdĺžnik pomocou dĺžok jeho strán a uhla medzi nimi. Potom dokážte, že uhlopriečky obdĺžnika sú rovnako dlhé.

19) Uhlopriečka rovnobežníka delí tento rovnobežník na dve dvojice zhodných trojuholníkov. Dokážte.

20) Ktoré typy štvoruholníkov sú tetivové?

21) Narysujte niekoľko rôznych tetivových deltoidov vpísaných do tej istej kružnice.

22) Narysujte jeden konvexný a jeden nekonvexný štvoruholník.

23) Urobte klasifikáciu rovnobežníkov podľa vzájomnej dĺžky uhlopriečok a uhla, ktorý zvierajú.

24) Nakreslite pravidelnú a nepravidelnú osemcípu hviezdu.

25) Navrhnite niekoľko metód vytvorenia elipsy pomocou dostupných pomôcok pre deti mladšieho školského veku.

26) Nakreslite všetky možnosti vzájomnej polohy dvoch rôznych kružníc.

27) Nakreslite všetky možnosti vzájomnej polohy kružnice a úsečky.

28) Aké dlhé lano je potrebné použiť, ak chceme vytvoriť elipsu s dĺžkou hlavnej poloosi 10 cm? Ako ďaleko od seba máme umiestniť ohniská, aby dĺžka vedľajšej poloosi bola 5 cm?

# III. Meranie v geometrii

Hoci praktická potreba mier nadobudla podstatný význam až so vznikom poľnohospodárstva a rozvojom výmeny produktov, zárodky merania sú zjavné už v období eneolitu. Prvotné dĺžkové miery boli bezprostredne odvodené od rôznych častí ľudského tela a tento charakter si udržali aj v takmer celej historickej dobe napriek častým a početným snahám o štandardizáciu, normalizáciu a unifikáciu mier a váh najmä v novodobej európskej histórii.

Názvy dĺžkových jednotiek ako *prst, palec, piaď, lakeť, stopa, siaha* štandardizované v Európe v stredoveku a novoveku na zákonné regionálne miery, vylučujú akúkoľvek pochybnosť o svojom pôvode z častí tela dospelého muža. Výrazný lokálny a regionálny charakter dĺžkových mier sa stal závažným ekonomickým problémom v čase, keď výmena produktov nadobúdala vzrastajúci význam v hospodárskom živote spoločenstiev.

Prvým medzinárodným zákonom upravujúcim jednotky miery bola: Medzinárodná konvencia o metri z roku 1875. Posledným legislatívnym krokom smerujúcim k unifikácii mier a váh bolo zavedenie Medzinárodnej sústavy jednotiek SI (z francúzskeho ***S****ystème* ***I****nternational (d'Unités))* od roku 1980, ktorá celosvetovo zjednotila jednotky merania vo vedeckej a odbornej sfére. (Čižmár, 2017, s.27-28)

Angloamerická merná sústava však dodnes nepoužíva striktne SI miery. Kým vo Veľkej Británii sa pôvodné jednotky používajú zo zvyku a v úradnej sfére paralelne s SI jednotkami, v USA je metrický system používaný výhradne vo vedeckej sfére. Preto sú dodnes používané jednotky ako *míľa, námorná míľa, palec, stopa, galón, barrel, …*

## Dĺžka úsečky

Každej úsečke vieme priradiť určité nezáporné číslo na základe porovnania tejto úsečky s dohodnutou jednotkovou úsečkou. Napríklad prenášaním jednotkovej úsečky na danú úsečku $AB$ zistíme, že ju môžeme takto preniesť trikrát vedľa seba. Tri jednotkové úsečky pokryjú celú úsečku $AB$ bezo zvyšku. Úsečke $AB$ teda priradíme číslo 3. Toto číslo nazveme jej *dĺžkou*. Keďže však v praxi často využívame rôzne jednotkové úsečky, pre odstránenie nedorozumení uvádzame za číslom vždy aj označenie konkrétnej jednotkovej úsečky. Dĺžku môžeme priradiť každej ohraničenej čiare, nielen úsečke.

- Na určovanie dĺžky čiar je vhodné zvoliť úlohy, pri ktorých deti manipulatívne prikladajú danú jednotku dĺžky (napríklad špagátik s dĺžkou 1 dm) na danú krivú čiaru.

Definícia základnej dĺžkovej jednotky *meter* prešla dlhým vývojom – od definície metra odvodenej z rozmerov Zeme z 18. storočia, cez platinoirídiovú tyč z roku 1886 uloženú v archíve až po dnešnú definíciu: *Jeden meter je dĺžka dráhy, ktorú prejde svetlo vo vákuu za 1/299 792 458 sekundy.*

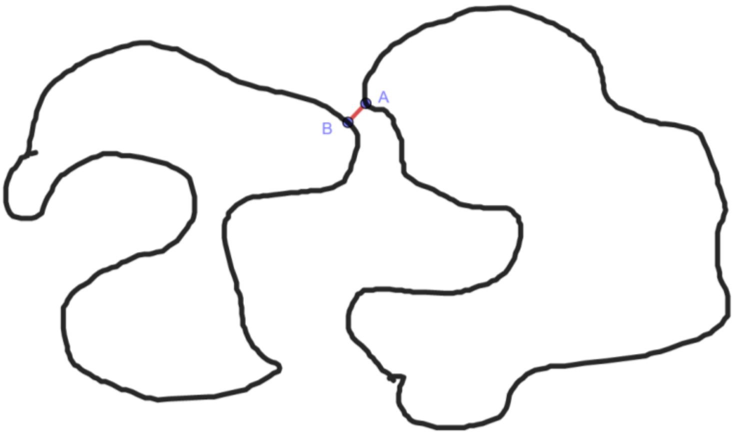
Z metra sú odvodené ďalšie používané jednotky. V diagrame na obrázku 46 sú znázornené najznámejšie z nich. Číslo nad šípkou znamená, koľkokrát je jednotka vpravo väčšia od jednotky vľavo. Pri samotných premenách jednotiek robíme opačný postup: Ak sa pýtame koľko centimetrov je 50 mm, tak musíme 50 vydeliť desiatkou.


Obrázok 46. Dĺžkové jednotky

- Významnou propedeutikou k samotným úlohám na premeny jednotiek sú hry, ktorých cieľom je objaviť vlastnosť: na vytvorenie rovnakej stavby potrebujem *viac menších* jednotiek alebo *menej väčších*.
- Vhodnou úlohou je spoločná výroba pásikov papiera danej jednotky dĺžky – napríklad 1 cm, 1 dm a 1 m. Týmito pásikmi potom majú žiaci merať určité predmety – raz väčšími, raz menšími jednotkami.
- Každú jednotku, aj odvodenú, je potrebné zavádzať jej ukážkou. Ideálne je nájsť nejaké dostupné predmety, ktorých dĺžky zodpovedajú týmto jednotkám (nielen pravítko). Úlohy na premeny jednotiek majú riešiť žiaci až vtedy, keď si dokážu každú zadanú dĺžku predstaviť. (Vedia ukázať, koľko je asi 30 cm, 5 mm, 1 m, …)

## Vzdialenosť dvoch útvarov

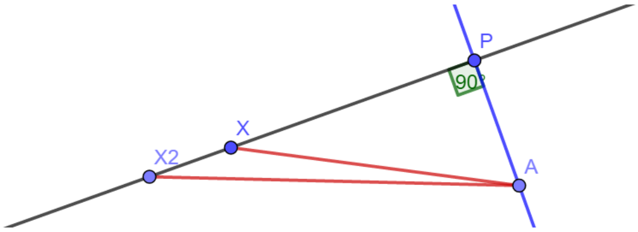
Vzdialenosť dvoch útvarov je definovaná ako dĺžka najkratšej úsečky zo všetkých možných úsečiek, ktorých jeden koncový bod leží na jednom útvare a druhý na druhom.




Obrázok 47. Vzdialenosť dvoch útvarov

1. *Dokážte, že vzdialenosť bodu A od priamky, na ktorej neleží, nájdeme na kolmici AP k tejto priamke.*

Ak zostrojíme ľubovoľnú inú úsečku $AX$ spájajúcu bod $A$ s priamkou, táto musí byť zaručene dlhšia ako kolmica $AP$, pretože $AX$ tvorí preponu pravouhlého trojuholníka $APX$, a tá je vždy dlhšia ako odvesna $AP$.




Obrázok 48. Vzdialenosť bodu od priamky

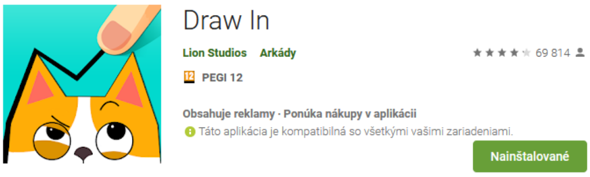
- Dôležitou aktivitou pre deti mladšieho školského veku je odhadovanie vzdialeností alebo dĺžok. Vďačné bývajú práve terénne práce, počas ktorých deti odhadujú väčšie vzdialenosti – aká je dĺžka budovy školy, vzdialenosť vchodu od bránky a.t.ď. Tieto úlohy môžu žiaci riešiť napríklad krokovaním, ak vedia určiť priemernú dĺžku svojho kroku.
- Hry na odhad: s deťmi hráme hru, pri ktorej majú odhadovať dĺžku (alebo šírku, či výšku) konkrétnych predmetov. Skutočnú dĺžku následne odmeriame a máme víťaza.

## Obvod mnohouholníka

Pod pojmom *obvod mnohouholníka* rozumieme súčet dĺžok všetkých jeho strán. Z tejto definície priamo odvodzujeme vzorce pre obvod špeciálnych mnohouholníkov, ako je obdĺžnik, trojuholník, pravidelný mnohouholník a pod. Obvod môžeme priradiť aj takému plošnému útvaru, ktorého hranicu tvorí iná, ako lomená čiara (napr. kruh). Vtedy obvod definujeme ako dĺžku hraničnej čiary tohto plošného útvaru.

V slovenčine obvod označujeme písmenom *O*, avšak v iných krajinách sa používajú aj iné značenia, napr. *P* (perimeter) alebo *l* (lenght).

- Didakticky zavádzame obvod, ako dĺžku špagátika, ktorým máme olemovať celý mnohouholník.
- Existujú viaceré zaujímavé hry, ktoré môžu poslúžiť na propedeutiku zavedenia obvodu mnohouholníka, ako aj na rozvoj odhadu pri určovaní obvodu. Jednou z nich je Google Play aplikácia *Draw In* zobrazená na obrázku nižšie. Cieľom je odhadnúť obvod daného obrázka čo najpresnejšie. Po odhade aplikácia pekne obalí celý obrázok lomenou čiarou a riešiteľ hneď uvidí, aký presný bol jeho odhad.




Obrázok 49. Aplikácia Draw In

## Plošný obsah

Plošný obsah je nezáporné konečné číslo, ktoré vieme priradiť každému ohraničenému plošnému útvaru.

Meranie plošného obsahu nadobudlo praktický význam v období prechodu k obrábaniu pôdy a trvalému osídleniu. Výmera pôdy bola dôležitá z hľadiska spotreby osiva, ľudskej sily alebo ťažnej sily zvierat a výnosu určitých plodín. Svedčia o tom aj staroveké a stredoveké názvy rozlohy pozemkov. Napríklad *lán* – výmera pozemkov, ktoré bolo možné obrobiť jedným konským záprahom za celý čas orby, *jutro* – rozloha, ktorú zoral jeden záprah za jeden deň.

Súčasne používanou jednotkou plochy je *meter štvorcový* – čiže plocha štvorca so stranou dĺžky jeden meter. Odvodené jednotky sú plochy štvorcov so stranou rovnou niektorej jednotke odvodenej od metra. Jeden ár je plocha štvorca so stranou 10 m a hektár je plocha štvorca so stranou 100 m.

$$\boxed{1\ \mathrm{mm}^2} \xrightarrow{.100} \boxed{1\ \mathrm{cm}^2} \xrightarrow{.100} \boxed{1\ \mathrm{dm}^2} \xrightarrow{.100} \boxed{1\ \mathrm{m}^2} \xrightarrow{.100} \boxed{1\ \mathrm{a}} \xrightarrow{.100} \boxed{1\ \mathrm{ha}} \xrightarrow{.100} \boxed{1\ \mathrm{km}^2}$$

Obrázok 50. Plošné jednotky

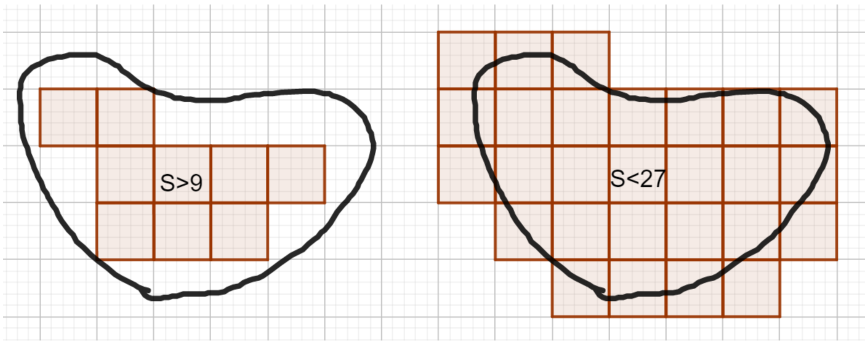
Plošný obsah sa označuje väčšinou veľkým písmenom $S$ (square) alebo $A$ (area).

- Pri riešení úloh na obsah je výhodné používať štvorčekový papier. Potom môžeme klásť otázky ako: Koľko štvorčekov máme vymaľovať? Koľko štvorčekov (dlaždičiek) potrebujeme nalepiť na vyznačené miesto?

## Jordanova metóda určenia obsahu

Táto metóda je pomenovaná po svojom objaviteľovi francuzskom matematikovi M. E. Camille Jordanovi (1838 - 1922). Pomocou tejto metódy je možné odhadnúť obsah akéhokoľvek plošného ohraničeného útvaru tak, že ho vhodne umiestnime do štvorcovej siete (napríklad s jednotkovými štvorčekmi). Spočítame všetky štvorčeky, ktoré ležia celé vo vnútri útvaru – to bude dolný odhad obsahu. Potom spočítame všetky štvorčeky, ktoré obsahujú aspoň kúsok z daného útvaru (určitú plochu, nielen bod) – to bude horný odhad obsahu. Teraz vieme, že obsah daného útvaru určite leží medzi týmito dvoma číslami.

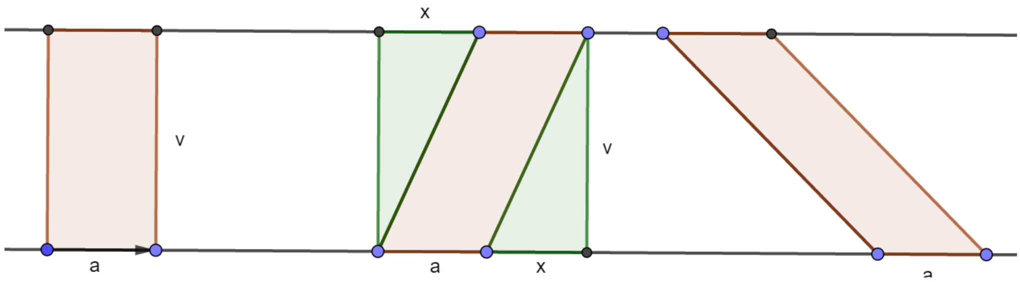
Ak by nám takýto odhad nestačil, môžeme zmenšiť štvorčeky, t.j. spočítame milimetrové štvorčeky namiesto centimetrových a dostaneme presnejší odhad obsahu.




Obrázok 51. Jordanova metóda určenia obsahu

## Obsah rovnobežníka (Cavalieriho princíp)

Cavalieriho princíp aplikovaný na obsah rovnobežníka hovorí o tom, že obsah každého rovnobežníka závisí len od dĺžky jednej ľubovoľnej strany a výšky na túto stranu. Na obrázku 52 vidíme tri rovnobežníky (hnedé), ktoré majú zhodný obsah.



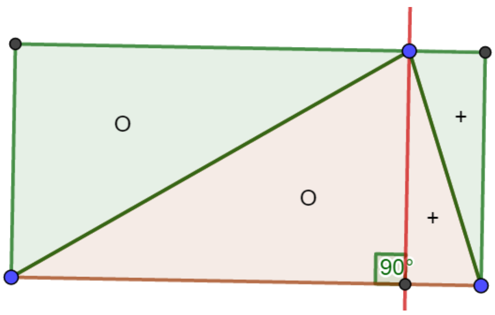

Obrázok 52. Cavalieriho princíp

Dôkaz: pozrime sa bližšie na prostredný rovnobežník na obrázku 52. Môžeme ho doplniť na obdĺžnik, ktorého obsah je potom $(a + x) \cdot v$. Aby sme dostali obsah rovnobežníka, musíme z tohto obdĺžnika odňať dva zelené trojuholníky, ktoré spolu dávajú obdĺžnik s plochou $x \cdot v$. Tak dostávame, že obsah nášho rovnobežníka je skutočne $a \cdot v$.

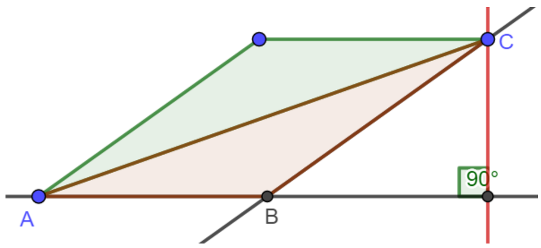
Cavalieriho princíp pomenovaný podľa talianskeho matematika Bonaventuru Francesca Cavalieriho (17. stor.) hovorí, že telesá s rovnakými výškami a podstavami majú rovnaký objem, ak ich rezy rovnobežné so základňami a vedené v rovnakej vzdialenosti od základní majú rovnaké obsahy. To môžeme aplikovať aj na obsahy útvarov v rovine.

## Obsah trojuholníka

Trojuholník vieme doplniť na rovnobežník. Potom vidíme, že obsah trojuholníka je presne polovicou obsahu rovnobežníka s rovnakou jednou stranou a výškou na túto stranu.

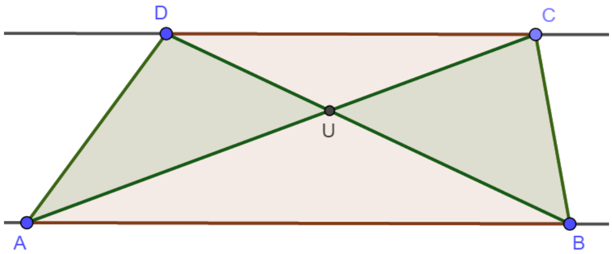



Obrázok 53. Obsah ostrouhlého trojuholníka




Obrázok 54. Obsah tupouhlého trojuholníka

2. *Označme* $U$ *priesečník uhlopriečok ľubovoľného lichobežníka* $ABCD$. *Majú trojuholníky* $ADU$ *a* $BCU$ *rovnaký obsah? Svoje tvrdenie dokážte.*

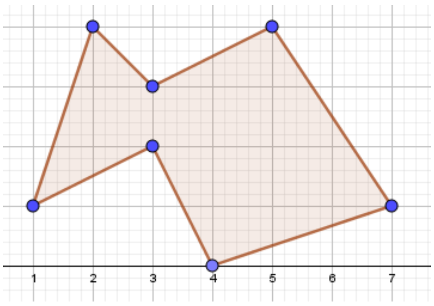



Obrázok 55. Trojuholníky v lichobežníku

Trojuholníky $ABC$ a $ABD$ majú rovnaký obsah, pretože majú spoločnú základňu $AB$ a rovnakú výšku, keďže $AB$ je rovnobežné s $CD$. Trojuholníky $ABC$ a $ABD$ sú zložené z dvoch trojuholníkov, a to zo spoločného $ABU$ a z $ADU$ resp. $BCU$. Preto sú obsahy $\Delta ADU$ a $\Delta BCU$ rovnaké.

## Obsah mrežového mnohouholníka a Pickova veta

Mrežový mnohouholník je mnohouholník zakreslený v štvorcovej sieti, v ktorej obsah každého štvorčeka je jednotkou obsahu. Navyše mrežový mnohouholník musí mať všetky vrcholy umiestnené na priesečníkoch mriežky. Tieto priesečníky sa nazývajú *mrežové body*.



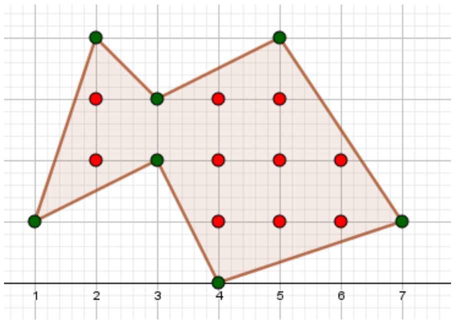

Obrázok 56. Mrežový sedemuholník 1

Vypočítať obsah mrežového mnohouholníka je možné dvoma spôsobmi: Prvým je použiť rozdelenie mnohouholníka na niekoľko jednoduchších útvarov a spočítať ich obsah. Tento spôsob je uplatniteľný aj na nemrežové mnohouholníky.

Druhou možnosťou je využitie *Pickovej vety*. Túto vetu vymyslel rakúsky matematik a priateľ Alberta Einsteina Georg Alexander Pick v roku 1899. Veta hovorí, že obsah ľubovoľného mrežového mnohouholníka možno vypočítať pomocou vzorca: $S = v + \frac{h}{2} - 1$, kde $v$ je počet mrežových bodov vnútri mnohouholníka a $h$ je počet mrežových bodov na hranici mnohouholníka.

3. *Vypočítajte obsah mrežového sedemuholníka z predchádzajúceho obrázka.*

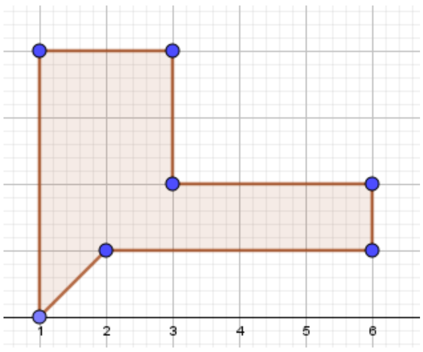
Spočítame vnútorné (červené) a hraničné (zelené) mrežové body.




Obrázok 57. Pickova veta

Obsah bude teda: $S = 10 + \frac{7}{2} - 1 = 12{,}5$

4. *Vypočítajte oboma spôsobmi obsah nasledujúceho mrežového mnohouholníka.*

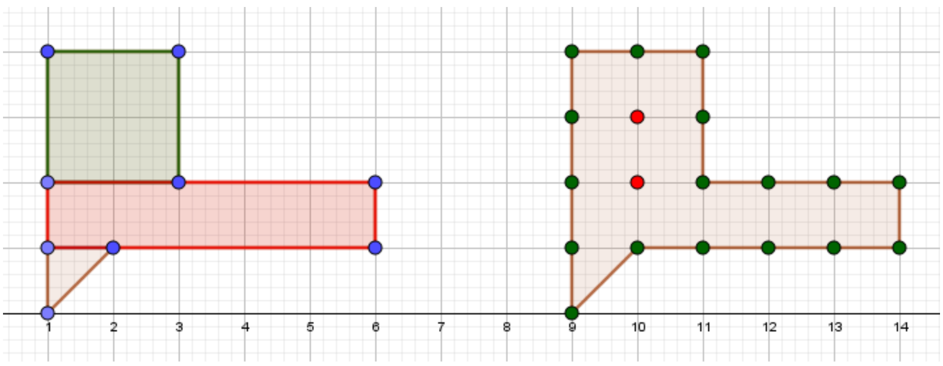



Obrázok 58. Mrežový sedemuholník 2

Na obrázku 58 vidíme rôzne riešenia: vľavo je rozdelenie na obdĺžnik, štvorec a trojuholník, ktorých obsahy sú: 5, 4 a 0,5. Čiže spolu 9,5. Samozrejme sme mohli rozdeliť mnohouholník aj inak, výsledok by však bol rovnaký.

Vpravo vidíme použitie Pickovej vety, kde podľa vzorca dostávame:

$S = 2 + \frac{17}{2} - 1 = 9{,}5.$

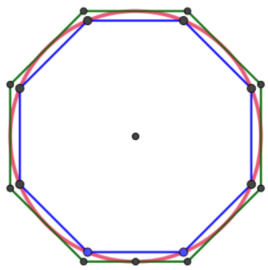



Obrázok 59. Obsah mnohouholníka

## Obvod a obsah kruhu

Vzťah medzi priemerom kružnice a jej obvodom sa vyvíjal postupne. Viaceré kultúry sa vysporiadavali s otázkou pomeru medzi priemerom a obvodom kružnice. Spočiaku nebolo zrejmé, že je rovnaký pre každú kružnicu. (Napr. v starovekej Číne používali rôzne hodnoty.) Postupne so zisťovaním presnejšej hodnoty sa prišlo na to, že pomer je vždy rovnaký. A tu začína história čísla, ktoré dnes nazývame $\pi$. Toto označenie bolo prvýkrát použité až v roku 1706. (Mareš, 2008, s.117) Predtým sa používalo značenie $\frac{\pi}{\delta}$, čo je skratka odvodená zo slov *perimeter/diameter*, čiže po slovensky *obvod/priemer*.

V Mezopotámii odhadli hodnotu čísla $\pi$ na 3, čo im po dlhý čas stačilo, potom odhad vylepšili na 25/8, čo je 3,125. Egypťania sa uspokojili s hodnotou 3,16. Archimedes na výpočet hodnoty použil metódu, kedy kružnicu nahradil 96-uholníkmi – jedným vpísaným a jedným opísaným. Tak dostal hodnotu $\pi$ medzi čísla 223/71 a 22/7, čiže 3,1408 a 3,14286.



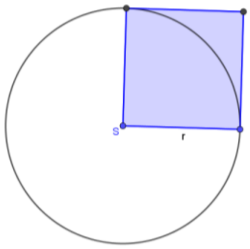
Obrázok 60. Aproximácia kružnice osemuholníkmi

Číslo $\pi$ sa nazýva aj *Ludolfovo číslo* a to podľa Ludolfa van Ceulena (čítaj fan Kélen), ktorý strávil všetok voľný čas po väčšinu svojho života počítaním presnej hodnoty čísla $\pi$. Použil takú istú metódu ako Archimedes, ale jeho mnohouholníky obsahovali $2^{62}$ vrcholov. Pre názornosť, keby sme vytvorili kružnicu okolo Slnka, ktorej polomer je stredná vzdialenosť Zeme od Slnka a nakrájali ju ako tortu na $2^{62}$ dielikov, tak do jednej tisíciny milimetra by sa pohodlne zmestili štyri dieliky. Práca, v ktorej uviedol hodnotu $\pi$ na 35 desatinných miest vyšla až po jeho smrti v roku 1615. (Mareš, 2008, s. 188)

Dnes vypočítavajú hodnotu $\pi$ počítače, ktoré už presiahli presnosť 10 biliónov desatinných miest. Pre zaujímavosť, už 39 desatinných miest by bohato stačilo na výpočet obvodu celého známeho vesmíru s odchýlkou, ktorá by bola menšia ako priemer atómu vodíka.

- Na zapamätanie si čísla $\pi$ slúži napríklad táto známa pomôcka. Každé slovo znamená také číslo, koľko písmen obsahuje. "*Daj, ó Bože, ó mocný,* *zapamätať si takýto čísel rad, veľký vznešený Archimedes, pomáhaj trápenému!"* T.j. *3,14 159 265 358 979* (Jackson, 2013, s. 24)

Je zaujímavé, že medzi obsahom kruhu a obsahom štvorca nad jeho polomerom je ten istý pomer ako medzi dĺžkou kružnice a jej priemerom. Je to opäť číslo $\pi$.




Obrázok 61. $S = \pi r^2$

Číslo $\pi$ sa vyskytuje aj vo vzorci pre výpočet obsahu plochy ohraničenej **elipsou**: $S = \pi ab$, kde $a, b$ sú dĺžky hlavnej a vedľajšej poloosi danej elipsy.

# Objem

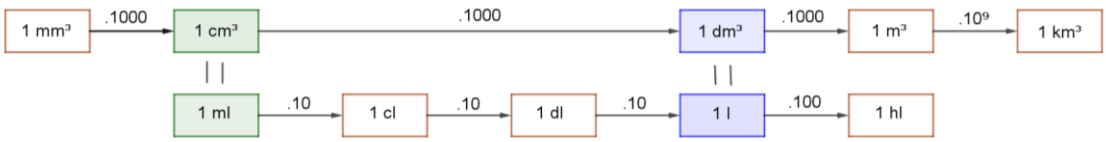
Objem telesa je, podobne ako obsah plošného útvaru či dĺžka čiary, *nezáporným konečným číslom*, ktoré priraďujeme ohraničeným častiam priestoru – telesám.

Vznik prvých mier objemu súvisí s trvalým používaním nádob prírodného alebo umelého pôvodu a s budovaním zásobníkov trvanlivých potravín a surovín. Nábeh k určitej štandardizácii objemu nádob podľa ich účelu sa objavuje so vznikom hrnčiarstva. Názvy prvých objemových jednotiek sa zhodovali s pomenovaním nádob, napríklad česká jednotka *hrnec*, poľská *garniec,* ďalej *vedro,* či *merica.* Objemové miery slúžili aj na meranie množstva sypkých materiálov, čím po dlhý historický čas nahrádzali hmotnostné jednotky. Pôvodne boli objemovými jednotkami aj také jednotky ako *hrivna* či *talent*, ktoré sa neskôr stali štandardom hmotnosti a po zavedení peňazí sa stali peňažnými jednotkami.

V súčasnosti používame jednotku *meter kubický* (familiárne kubík), ktorá je definovaná ako objem kocky s hranou dĺžky jeden meter.

Od nej odvodené jednotky sú objemy kociek s hranou rovnou niektorej jednotke odvodenej od metra.

Zároveň sa používa aj jednotka *liter*, ktorá má zaujímavejšiu históriu. Jeden liter bol pôvodne objem jedného kilogramu čistej vody maximálnej hustoty pri bežnom tlaku. Táto definícia však bola nahradená definíciou odvodenou od metra – čiže liter je objem kocky s hranou jeden decimeter. Voda má totiž rôznu hmotnosť pri rôznych teplotách. Jeden liter vody váži 0,999941 kg pri 0°C alebo 0,9653 kg pri 90°C. Jednotky odvodené od litra tak už nie sú vždy objemom kocky s hranou určitej dĺžky odvodenej od metra – napríklad deciliter, centiliter, hektoliter.



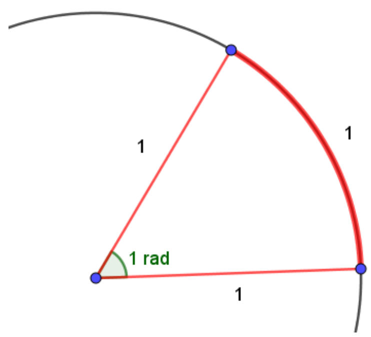

Obrázok 62. Objemové jednotky

Objem značíme obyčajne veľkým písmenom $V$ (volume).

# Meranie uhlov

Veľkosť uhla je nezáporné konečné číslo, ktoré priraďujeme uhlom. Na meranie uhlov používame súčasne dve jednotky. Historicky staršou je 1/360 z plného uhla. Túto jednotku označujeme jeden stupeň 1°. Na kalkulačkách býva označený možnosťou Deg. Vtedy je plný uhol 360°, priamy 180°, pravý 90°. Delenie plného uhla na 360 častí má svoj pôvod v starovekej Mezopotámii a v ich šesťdesiatkovej číselnej sústave. Jeden stupeň býva ešte ďalej delený na *minúty*, ktoré sú šesdesiatinou jedného stupňa (opäť pôvod v šesťdesiatkovej sústave) alebo *sekundy* – šesťdesiatina minúty.

Druhou využívanou jednotkou je 1 rad alebo radián. Je to uhol, ktorý na jednotkovej kružnici vytína oblúk dĺžky 1. Preto sa táto jednotka volá aj *oblúková miera*. Práve ona je kodifikovaná ako jednotka SI a mala by sa používať vo vedeckej a odbornej literatúre. Potom je plný uhol $2\pi$ (obvod kružnice s polomerom 1), priamy uhol $\pi$, pravý uhol $\pi/2$. Pre väčšiu presnosť sa používajú odvodené jednotky miliradián – mrad (tisícina radiána) a mikroradián µrad (milióntina radiána).




Obrázok 63. Jednotkový uhol – 1 rad

5. *Koľko stupňov je jeden radián?*

Výpočet odvodíme napríklad z vedomosti o veľkosti plného uhla v stupňoch a radiánoch. $2\pi = 360°$, t.j. $1 = \frac{360}{2\pi} \cong 57{,}3°$.

# Úlohy

1) Nájdite z dostupných zdrojov súčasnú definíciu jednotky barrel a jej prepočet na metrické jednotky.
2) Zistite, aká je cena benzínu v USA v dolároch za galón a porovnajte ju s cenou v eurách za liter.
3) Zistite, čo je a akú dĺžku v prepočte na metre mala jedna siaha.
4) Zistite, akú veľkosť v súčasných jednotkách malo jedno jutro.
5) Zistite, čo vo vašom najbližšom okolí má dĺžku približne jeden meter, decimeter a centimeter.
6) Určte spôsob, ako nájsť vzdialenosť dvoch rôznych kružníc, ktoré nemajú žiadny spoločný bod. Nakreslite všetky prípady. (Vrátane kružnice vnútri druhej kružnice.)
7) Nájdite vzdialenosť danej kružnice (jazera) od priamky, s ktorou nemá žiadny spoločný bod (cesta).
8) Zistite, akú dĺžku má váš priemerný krok. (Odkrokujte nejakú známu väčšiu vzdialenosť a vydeľte ju počtom krokov. Kroky robte také, aké obyčajne robíte, keď pokojne kráčate.)
9) Nakreslite do štvorcovej siete ľubovoľný mrežový mnohouholník, vypočítajte jeho obsah s použitím Pickovej vety aj bez nej.
10) Odvoďte známe vzorce pre obsah a obvod štvorca, obdĺžnika, kosoštvorca, kosodĺžnika a lichobežníka zakreslených v štvorcovej sieti pomocou počítania jednotkových štvorčekov, z ktorých sa skladajú.
11) Vytvorte slovnú úlohu na výpočet obvodu obdĺžnika.
12) V akom kontexte sa v bežnom živote stretávame s vyjadrením veľkosti plochy? Nájdite aspoň tri rôzne príklady a vytvorte k nim slovné úlohy.
13) Koľko metrov štvorcových trávy spasie koza z úlohy 21 (s. 34)?
14) Odhadnite a potom vypočítajte (potrebné vzorce si nájdite), koľko metrov kubických vzduchu je v miestnosti, v ktorej sa práve nachádzate.
15) Kráčajte rovno, otočte sa o 90° doprava, urobte 10 krokov, otočte sa o 180° doľava, zasa urobte 10 krokov, otočte sa o 270° doprava, zasa urobte 10 krokov a otočte sa o 360° doľava. Zakreslite do štvorcovej siete trajektóriu takéhoto pohybu.

# IV. Konštrukčná geometria

Konštrukčná alebo deskriptívna geometria sa zaoberá postupmi, ako zhotoviť reálny model geometrických objektov. Ide o postupy rysovania, kedy narysovaný obrázok má mať čo najviac vlastností podobných abstraktnému geometrickému útvaru. Napríklad priamky rysujeme ako ohraničené čiary (nekonečnú čiaru reálne nemôžeme zostrojiť) s minimálnou hrúbkou (priamka má nulovú – to by ale nebola vidno) a maximálnou rovnosťou, akú nám umožňujú fyzikálne podmienky (papier, ceruzka, pravítko). Konštrukcia však súčasne prebieha aj v abstraktnom svete geometrie (v predstave). Fyzické rysovanie na papier musí byť neustále konfrontované s ideálnou koštrukciou v abstraktnom geometrickom svete.

Samotné riešenie konštrukčnej úlohy pozostáva typicky z niekoľkých krokov:

- ✓ *Náčrt* – rýchla skica výsledného objektu s vyznačením dôležitých vlastností, ktoré využijeme v procese konštrukcie.
- ✓ *Rozbor* – krátky slovný popis vlastností a vzťahov, ktoré využijeme pri konštrukcii.
- ✓ *Postup* – očíslovaný presný postup konštrukcie. Je to návod, ako sa krok za krokom dopracujeme k želanému výsledku. Postup musí byť napísaný tak, aby podľa neho dokázal konštrukciu vytvoriť aj ktokoľvek iný ako autor postupu. Preto sa využívajú symboly, ktoré sú všeobecne platné v matematickom svete bez ohľadu na jazyk.

- ➢ Na prvom stupni postačí, ak žiaci vedia napísať taký postup, ktorému budú rozumieť oni sami aj spolužiaci – povoľujeme slovný popis.

- ✓ *Konštrukcia* – samotné rysovanie podľa napísaného postupu. Kvalita konštrukcie sa vyhodnocuje podľa podobnosti so skutočným geometrickým objektom (rovnosť čiar, ich rovnomerná hrúbka, správne dĺžky úsečiek, kolmosť úsečiek a pod.). Niekedy sa hodnotí aj správne označovanie objektov - body veľkými tlačenými písmenami, priamky malými a.t.ď. Pri tomto kroku môžeme okrem zaužívaného rysovania na papier, využiť aj rôzne programy na rysovanie, ktoré majú neporovnateľne lepšiu presnosť rysovania a veľmi užitočnú vlastnosť – dynamickosť výsledného obrázka - vieme ho zväčšiť, zmenšiť, zmeniť vstupné údaje a tak v jednom kroku vyriešiť hneď niekoľko podobných konštrukčných úloh.

- ✓ *Diskusia alebo záver* – v tejto časti najviac pracujeme s konštrukciou, ktorá vznikla v predstave – zisťujeme, či nami narysovaný obrázok je jediným riešením, alebo by sme použitím nášho postupu vedeli dostať aj iné riešenia. Záverom diskusie má byť nielen počet riešení, ale aj informácia o tom, či sú tieto rôzne riešenia zhodné, alebo nie.

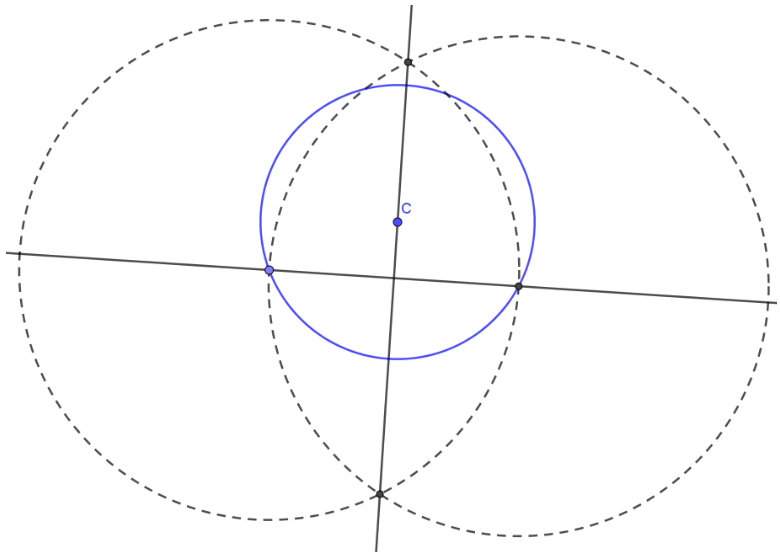
V ďalšom texte nebudeme zväčša používať všetky kroky riešenia konštrukčných úloh pre nedostatok priestoru.

## Euklidovské konštrukcie (pomocou kružidla a pravítka)

Zostrojiť niečo euklidovsky znamená použiť iba *rovné pravítko* na spájanie dvoch bodov a vytváranie úsečiek, priamok, či polpriamok a *kružidlo* na zostrojenie kružnice danej stredom a daným ďalším bodom.

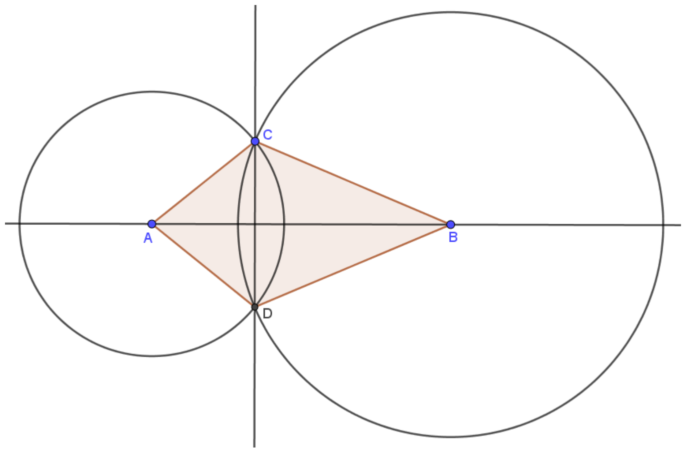
1. *Zostrojte euklidovsky kolmicu na priamku prechádzajúcu daným bodom C, ktorý neleží na tejto priamke.*

Úloha sa dá riešiť viacerými postupmi: napr. zostrojíme kružnicu so stredom v bode $C$ s takým polomerom, aby priamka bola jej sečnicou. Spoločné body priamky a kružnice budú stredmi dvoch zhodných kružníc, ktoré budú mať dva spoločné body. Spojnica týchto dvoch bodov je hľadaná kolmica.




Obrázok 64. Kolmica euklidovsky 1

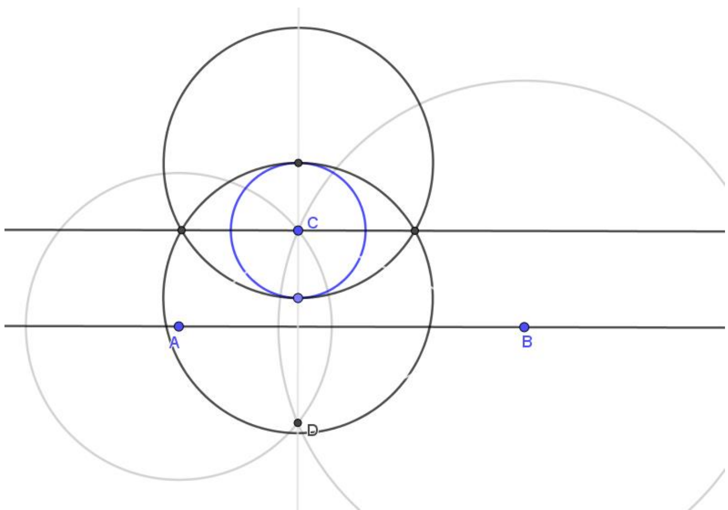
Alebo na priamke zvolíme ľubovoľné dva body a zostrojíme kružnice, ktoré majú stred v týchto bodoch a obe prechádzajú bodom $C$. (Pozri obrázok 65.) Priamka prechádzajúca bodom $C$ a druhým prienikom týchto dvoch kružníc je hľadaná kolmica. Zdôvodnenie, ktoré by sa malo nachádzať v rozbore vysvetlí, že sme narysovali deltoid a využívame kolmosť jeho uhlopriečok.




Obrázok 65. Kolmica euklidovsky 2

2. *Zostrojte euklidovsky rovnobežku k danej priamke prechádzajúcu bodom, ktorý na nej neleží.*

Opäť je viacero možných riešení. Použijeme napr. predchádzajúci postup na zostrojenie kolmice a potom zostrojíme kolmicu k tejto kolmici.




Obrázok 66. Rovnobežka euklidovsky

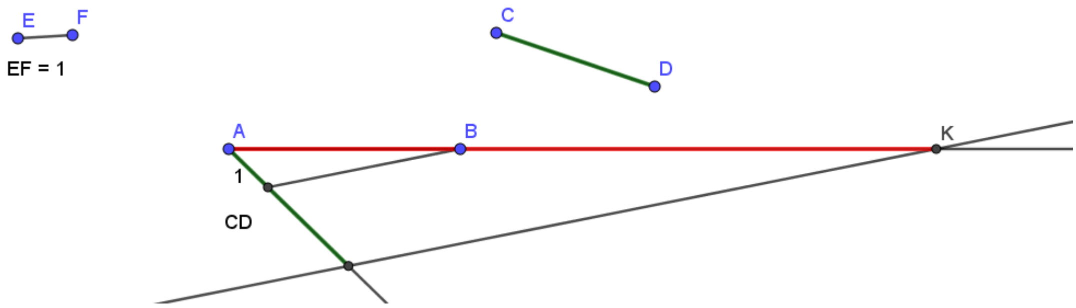
To znamená, že ak vo svojej konštrukcii používame dve pravítka na rysovanie rovnobežiek alebo pravítko s ryskou na rysovanie kolmice, tak by bolo možné urobiť konštrukciu aj euklidovsky, takže tieto pomôcky môžu byť v euklidovských konštrukciách povolené.

V roku 1837 francúzsky matematik Pierre Laurent Wantzel dokázal, že euklidovskou konštrukciou možno zostrojiť iba tieto početné operácie s úsečkami: sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie a druhú odmocnicu. (Mareš, 2008, s. 69)

Grafické sčítanie a odčítanie úsečiek je elementárnym cvičením. Ukážeme teda postupy, ako zostrojiť graficky súčin, podiel a druhú odmocnicu.

3. *Sú dané dve úsečky. Narysujte úsečku, ktorej dĺžka je súčinom dĺžok daných dvoch úsečiek.*

Na riešenie tejto úlohy potrebujeme okrem daných dvoch ľubovoľných úsečiek aj jednotkovú úsečku – teda úsečku, ktorej dĺžka je jednotka (tu jeden centimeter). Pri voľbe inej jednotky vyjde iný výsledok. Použijeme pomocnú polpriamku so začiatkom v bode $A$ a dve rovnobežky – jedna prechádza bodom $B$ a bodom na polpriamke vzdialenom o jednotku od $A$ a druhá prechádza bodom na polpriamke, ktorý je od $A$ vzdialený toľko, ako je dĺžka druhej danej úsečky $CD$.

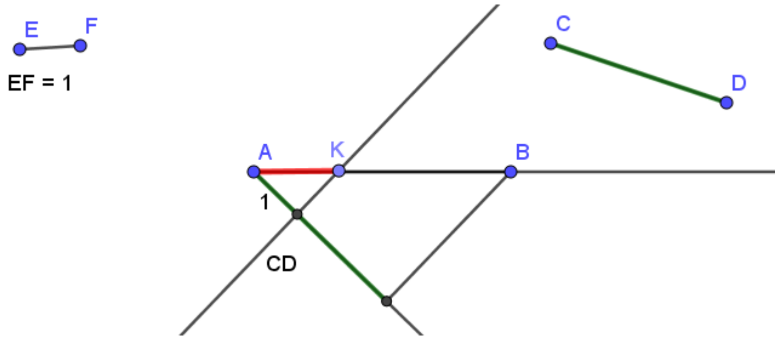



Obrázok 67. Grafický súčin dvoch úsečiek

Dokázať, že takto narysovaná úsečka $AK$ má dĺžku rovnú súčinu dĺžok úsečiek $AB$ a $CD$ je možné pomocou vety o podobnosti trojuholníkov.

4. *Narysujte úsečku, ktorej dĺžka je podielom dĺžok dvoch daných úsečiek.*

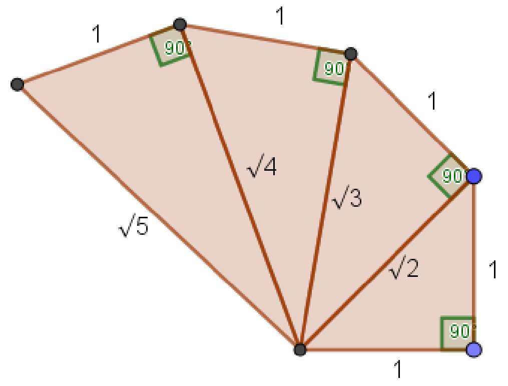
Táto úloha nie je jednoznačná. Musíme určiť, ktorá úsečka je prvá a ktorá druhá. Nech je teda daná úsečka $AB$ a úsečka $CD$. Nájdime úsečku, ktorej dĺžka je rovná $|AB|/|CD|$. Opäť budeme potrebovať jednotkovú úsečku. Tentokrát ale spojíme koncový bod na pomocnej polpriamke s bodom $B$ a narysujeme rovnobežku s touto úsečkou prechádzajúcu jednotkou.




Obrázok 68. Grafický podiel úsečiek

5. *Narysujte úsečku, ktorej dĺžka je odmocnina z nejakého prirodzeného čísla*

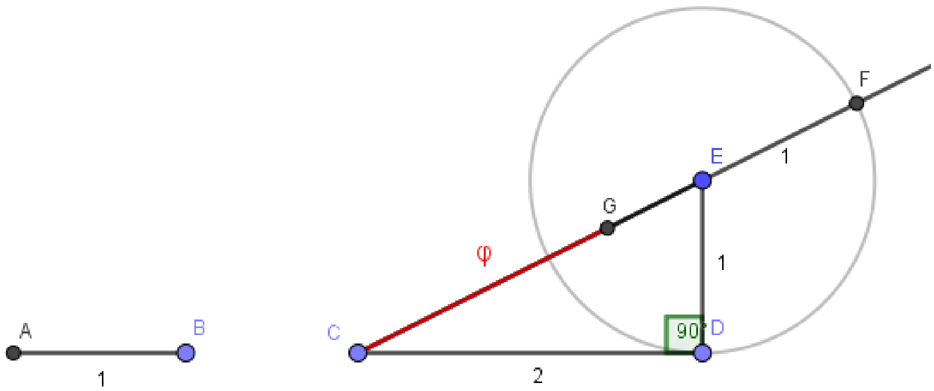
Takéto úsečky rysujeme napríklad využitím Pytagorovej vety. Všimnime si nasledujúcu schému popisujúcu postup narysovania ľubovoľnej druhej odmocniny z prirodzeného čísla.




Obrázok 69. Rysovanie druhých odmocnín

6. *Narysujte úsečku veľkosti zlatého rezu.*

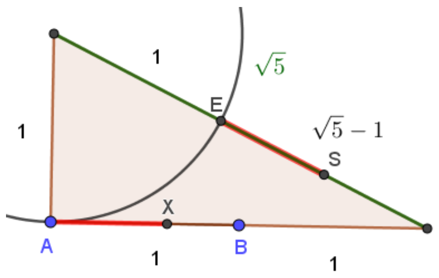
Vieme, že zlatý rez je číslo $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (pozri s.12-13). Úsečku tejto dĺžky môžeme narysovať tak, že začneme úsečkou veľkosti $\sqrt{5}$, ktorú získame ako preponu $CE$ pravouhlého trojuholníka $CDE$ s odvesnami 1 a 2. Pripočítame k nej jednotkovú úsečku $EF$ a nájdeme stred $G$. Úsečka $CG$ je potom v pomere zlatého rezu k jednotkovej úsečke $AB$.




Obrázok 70. Konštrukcia zlatého rezu

7. *Rozdeľte úsečku na dve časti tak, aby ich dĺžky boli v pomere zlatého rezu.*

V úlohách na pomery väčšinou nezáleží na zvolenej dĺžkovej jednotke. Preto nech naša úsečka je rovná práve nejakej dĺžkovej jednotke. Zlatý rez bude úsečkou, ktorej dĺžka má byť $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Použijeme teda veľmi podobný postup ako v predchádzajúcej úlohe. Na obrázku 71 je úsečka $AB$ rozdelená bodom $X$ v pomere zlatého rezu.



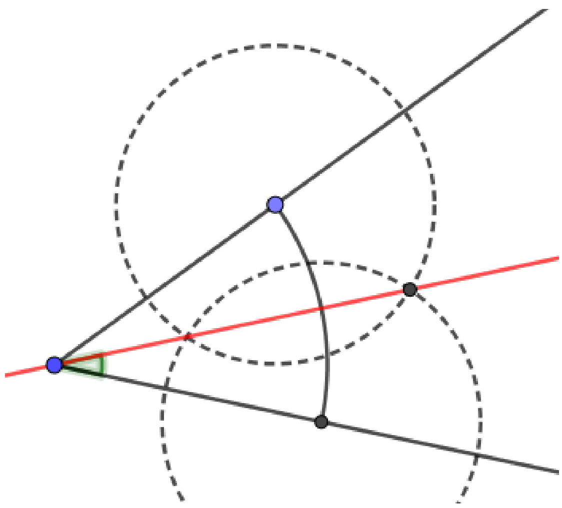

Obrázok 71. Rozdelenie úsečky v pomere zlatého rezu

## Rysovanie uhla euklidovsky

Euklidovsky vieme narysovať viacero uhlov, napr. 90° pomocou kolmice na priamku v bode, ktorý na nej leží.

8. *Euklidovsky narysujte uhol, ktorý má polovičnú veľkosť z daného uhla.*

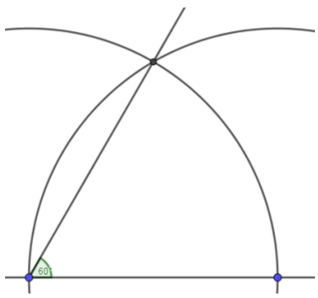
Stačí zostrojiť os tohto uhla pomocou kružidla.



Obrázok 72. Os uhla

9. *Euklidovsky narysujte uhol 60°.*

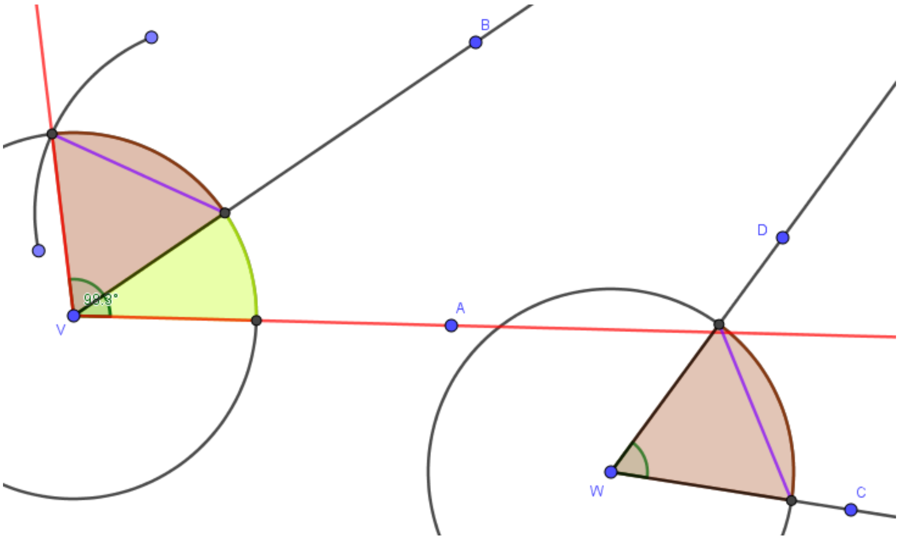
Použijeme rovnostranný trojuholník, o ktorom vieme, že veľkosti jeho uhlov sú 60°.



Obrázok 73. Uhol 60°

*10. Euklidovsky narysujte súčet dvoch daných uhlov $\measuredangle AVB$ a $\measuredangle CWD$.*

Prenesieme druhý z uhlov na koncové rameno prvého pomocou kružníc s rovnakým polomerom a stredmi vo $V$ a $W$. (Pozri obrázok 74.) Ďalšou kružnicou odmeriame dĺžku oblúčika, ktorý na kružnici vytína uhol $\measuredangle CWD$ a prenesieme od ramena $VB$ ďalej proti smeru hodinových ručičiek.




Obrázok 74. Súčet uhlov

Nie je však možné euklidovsky narysovať ľubovoľný uhol. Môžeme narysovať len vyššie spomínané uhly a uhly, ktoré získame týmito operáciami: súčet, rozdiel a delenie na polovice. Uhlomer je preto pomôckou, ktorú v euklidovských konštrukciách nepovoľujeme.

## Neriešiteľné úlohy starovekého Grécka

Sú to geometrické úlohy, ktoré majú byť vyriešené pomocou euklidovských konštrukcií. Ide o štyri problémy:

I. *Trisekcia uhla* – je možné euklidovsky rozdeliť ľubovoľný daný uhol na tri zhodné časti? Možné to nie je, čo je zaujímavé vzhľadom k tomu, že napríklad úsečku môžeme veľmi ľahko deliť na koľkokoľvek častí. Uhol však nie. Teda nie euklidovsky.

II. *Kvadratúra kruhu* - s určením obsahu kruhu súvisí ďalší známy problém, ktorý zamestnával matematikov asi dvetisíc rokov. Ide o úlohu nájsť k danému kruhu štvorec, ktorého obsah bude rovnaký ako obsah kruhu. Znie to jednoducho, avšak kvôli vlastnostiam čísla $\pi$ je táto úloha neriešiteľná. Dôkaz bol dokončený až v roku 1882, kedy Ferdinand Lindenmann ukázal, že číslo $\pi$ nie je algebrické a teda sa ani nedá euklidovsky zostrojiť úsečka s touto dĺžkou.

III. *Rektifikácia kružnice* je ďalší problém je podobný predchádzajúcemu. Ide o to, narysovať úsečku, ktorej dĺžka je rovná obvodu nejakej danej kružnice. Úloha je neriešiteľná znovu kvôli vlastnostiam čísla $\pi$.

IV. *Zdvojenie kocky* - s týmto problémom je spojená aj motivačná úloha: Isté mesto trápil mor a Orákulum v Delfách poradilo občanom, že epidémie sa zbavia, ak v miestnom chráme zdvojnásobia oltár – ten mal tvar kocky. (Mareš, 2008, s. 68) Neriešiteľnosť tohto problému vyplýva z faktu, že ak pôvodná kocka mala hranu dĺžky $a$, tak nová kocka musí mať hranu dĺžky $a\sqrt[3]{2}$, ale euklidovsky možno zostrojovať len druhé odmocniny.

## Množina bodov daných vlastností

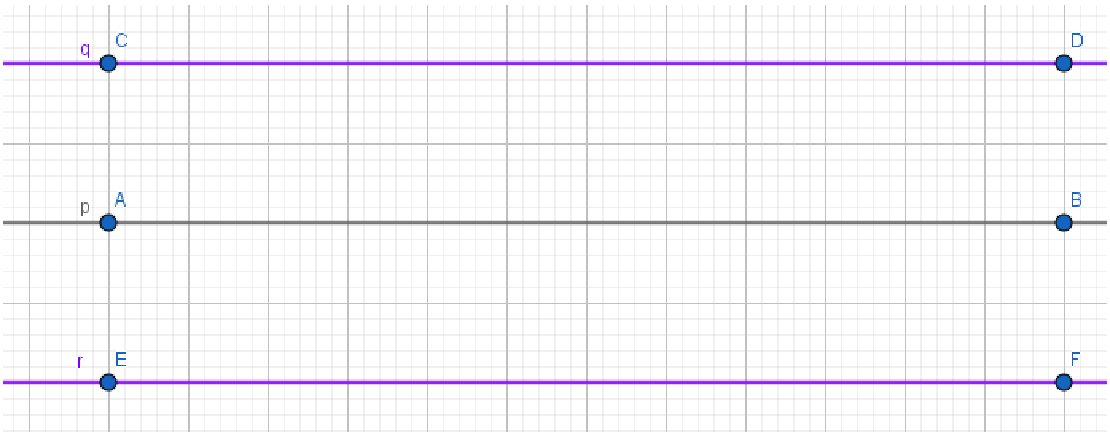
Množina bodov daných vlastností je množina všetkých tých bodov roviny, ktoré majú určitú danú vlastnosť.

11. *Určte množinu všetkých bodov, ktoré sú od bodu S vzdialené 5 cm.*

Všetky takéto body vytvárajú kružnicu so stredom v bode $S$ a polomerom 5 cm.

12. *Určte množinu bodov, ktoré majú od danej priamky p vzdialenosť 2 cm.*

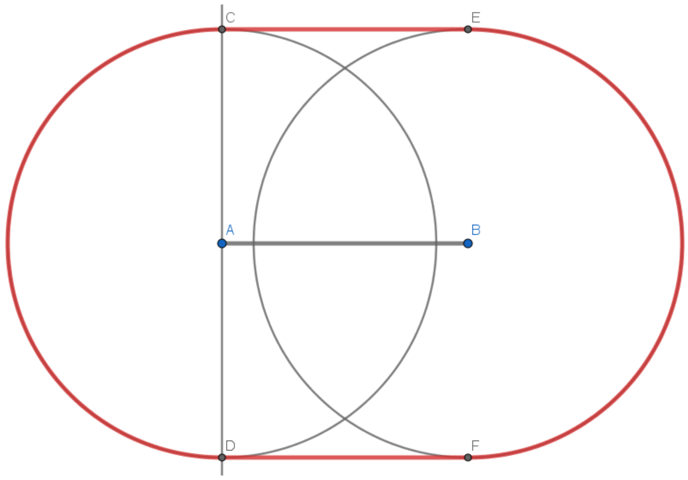
Riešením je zjednotenie dvoch priamok $q$ a $r$, ktoré sú rovnobežné s priamkou $p$ a sú od priamky $p$ vzdialené 2 cm.




Obrázok 75. Množina bodov vzdialených 2 cm od priamky *AB*

13. *Určte množinu bodov, ktoré sú vzdialené 2 cm od danej úsečky AB.*

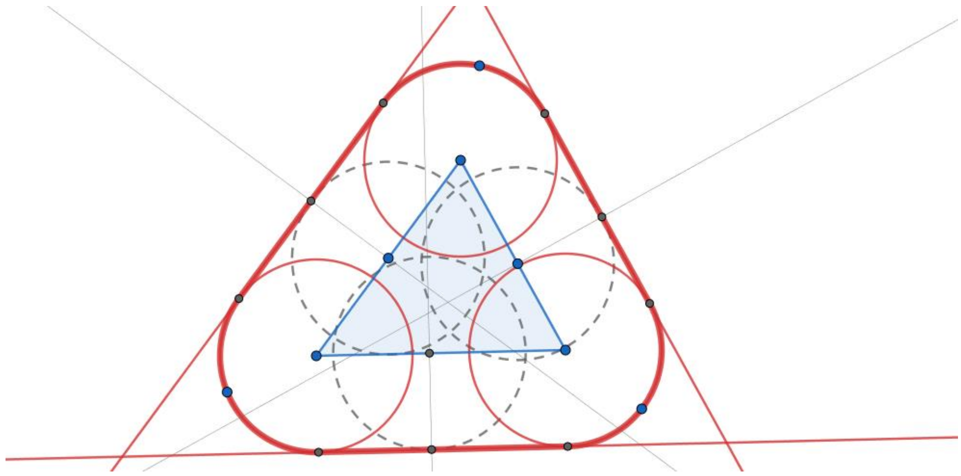
Riešením je zjednotenie dvoch úsečiek a dvoch polkružníc vyznačených na obrázku 76 červenou.




Obrázok 76. Množina bodov vzdialených 2 cm od úsečky

14. *Určte množinu bodov, ktoré sú vzdialené 2 cm od daného trojuholníka ABC.*

Riešením je zjednotenie troch úsečiek a troch kružnicových oblúkov vyznačených na obrázku 77 hrubočervenou farbou.



Obrázok 77. Množina bodov vzdialených 2 cm od trojuholníka

15. *Je daná kružnica s polomerom 5 cm. Nájdite množinu všetkých bodov, ktoré majú od nej vzdialenosť 3 cm.*

Riešením je zjednotenie dvoch kružníc so stredom $S$ a polomermi 2 cm a 8 cm.

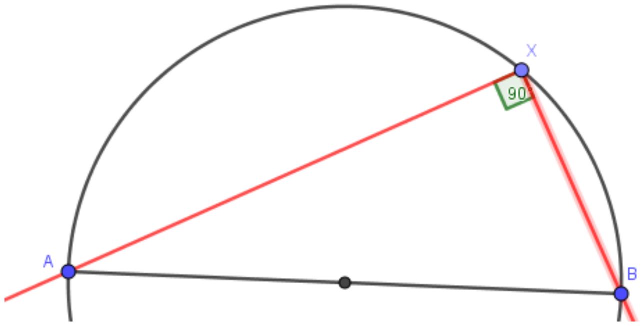
## Množina bodov, z ktorých je vidieť danú úsečku pod uhlom α

Tento typ množiny bodov daných vlastností je vždy zjednotením dvoch kružnicových oblúkov.

Ak je daný uhol ostrý, budeme brať do úvahy väčšie z kružnicových oblúkov, ak tupý, tak menšie.

16. *Zostrojte množinu bodov, z ktorých je vidieť danú úsečku pod uhlom 90°.*

Takéto body budú tvoriť Tálesovu kružnicu (pozri kapitolu o stredovom a obvodovom uhle).



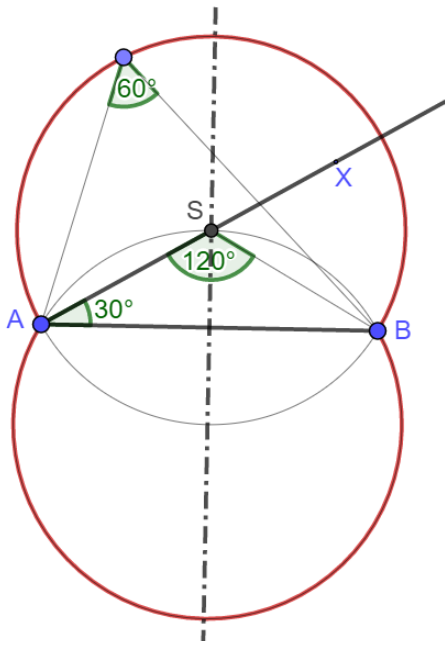

Obrázok 78. Množina bodov, z ktorých vidieť úsečku pod pravým uhlom

*17. Zostrojte množinu bodov, z ktorých je vidieť úsečku AB pod uhlom 60°.*

*Rozbor*: uhol $\measuredangle AVB$ bude obvodový uhol na kružnici so stredom $S$, ktorej stredový uhol bude $2 \cdot 60° = 120°$.

Musíme teda nájsť bod $S$. Trojuholník $ABS$ je rovnoramenný, takže ak uhol pri $S$ je 120°, pri $A$ aj pri $B$ bude (180 - 120) : 2 = 30°.

Všeobecne možno povedať, že pri $A$ bude uhol 90°- α. V tomto prípade 90° - 60° = 30°.




Obrázok 79. Množina bodov, z ktorých vidieť úsečku $AB$ pod uhlom 60°

*Postup:*

1. *AB*
2. *o; os úsečky AB,*

3. *uhol ∡BAX veľkosti 30°*

4. *S je priesečník AX a o*

5. *kružnica k (S; |AS|)*

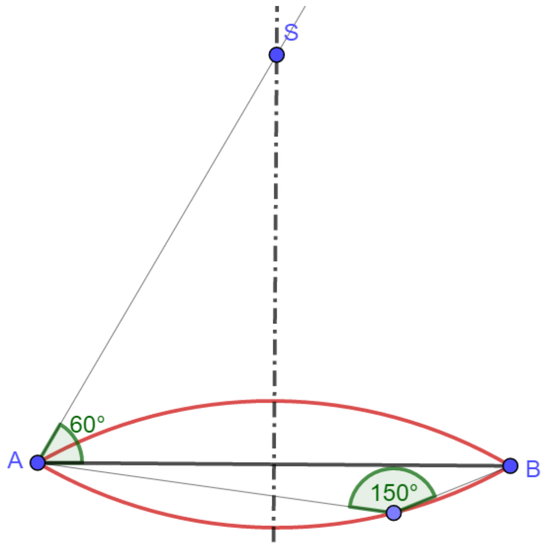
6. *väčší z kružnicových oblúkov AB bude jednou časťou hľadanej množiny*

7. *v osovej súmernosti podľa AB zostrojíme druhý kružnicový oblúk.*

Množina bodov, z ktorých je vidieť úsečku pod uhlom 60° je tvorená dvoma kružnicovými oblúkmi vyznačenými na obrázku 79 červenou farbou.

18. *Zostrojte množinu bodov, z ktorých je vidieť úsečku AB pod uhlom 150°.*

Postup riešenia bude totožný s riešením pre α = 30°. Pretože 30° + 150° = 180°, ale vyznačené budú menšie z kružnicových oblúkov. Uhol ∡*BAX* bude 90° - 30° = 60°. (Pozri obrázok 80.)



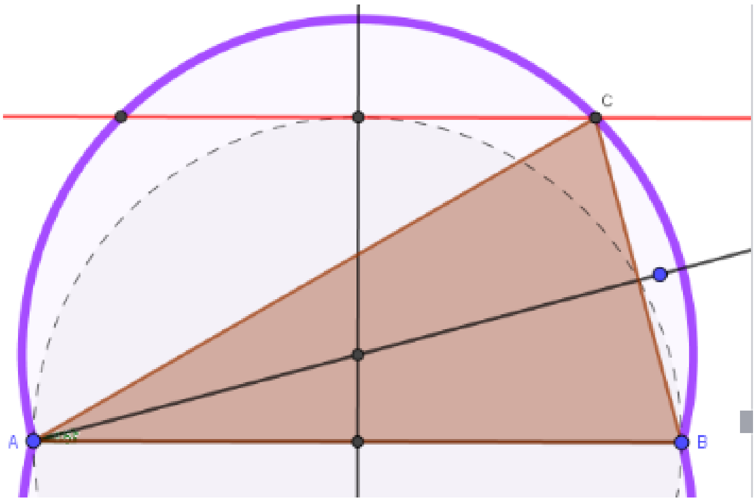

Obrázok 80. Množina bodov, z ktorých vidieť úsečku *AB* pod uhlom 150°

## Konštrukcie trojuholníkov

Na základe množín bodov daných vlastností vieme zostrojovať trojuholníky dané niektorými z význačných prvkov.

19. *Zostrojte trojuholník ABC, ak strana AB má dĺžku 10 cm, výška na túto stranu je 5 cm a uhol ∡ACB je 75°.*

*Rozbor:* začneme úsečkou *AB*, bod *C* nájdeme ako prienik dvoch množín bodov s danou vlastnosťou - množiny bodov, z ktorých je vidieť úsečku *AB* pod uhlom 75° a množiny bodov, ktoré majú vzdialenosť 5 cm od priamky *AB*.




Obrázok 81. Konštrukcia trojuholníka

*Postup:*

1. *AB*
2. *os úsečky AB*
3. *uhol ∡BAX = 15°*
4. *S ako prienik AX a osi úsečky AB*
5. *prvý kružnicový oblúk*
6. *druhý kružnicový oblúk ako obraz prvého v osovej súmernosti podľa AB*
7. *priamky (červené) vzdialené 5cm od AB*
8. *prienik oblúkov a červených priamok je bod C*

*Diskusia:* úloha má štyri možné riešenia, všetky vzniknuté trojuholníky sú zhodné.

## Úlohy

1) Narysujte grafický súčet a rozdiel dvoch daných úsečiek.
2) Sú dané dve úsečky. Dĺžka prvej je $a$ a dĺžka druhej $b$. Zostrojte úsečku, ktorej dĺžka je $\frac{ab-a}{b}$.
3) Zostrojte úsečku veľkosti $\sqrt{13}$ pomocou jedného pravouhlého trojuholníka. Zostrojte aj úsečku veľkosti $\sqrt{15}$ pomocou jedného trojuholníka.
4) Euklidovsky zostrojte úsečku veľkosti $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5) Euklidovsky zostrojte rozdiel uhlov 60°- 45°.
6) Aké konvexné uhly viete narysovať euklidovsky, ak ich veľkosti sú celé stupne?
7) Je daná úsečka $AB$. Zostrojte euklidovsky kolmicu na úsečku $AB$, prechádzajúcu bodom $A$.
8) Je daný ľubovoľný štvorec. Narysujte štvorec, ktorý má dvojnásobný obsah.
9) Narysujte deltoid, ktorého uhlopriečky sú v pomere zlatého rezu.
10) Je daná ľubovoľná úsečka $AB$, rozdeľte ju na 10 rovnakých častí. Body, ktoré vznikli, označte číslami 1, 2, 3, …, 9, pričom 1 je najbližšie k bodu $A$. Narysujte "horné" polkružnice, ktorých stredy sú body 1, 2, 3, 4, 5 a všetky prechádzajú bodom $A$, potom zostrojte "spodné" polkružnice, ktorých stredy sú body 5, 6, 7, 8, 9 a všetky prechádzajú bodom $B$.
11) Pravidelný päťuholník má nasledujúcu zaujímavú vlastnosť: pomer dĺžky uhlopriečky a dĺžky strany je zlatý rez. Využite túto skutočnosť pri euklidovskej konštrukcii pravidelného päťuholníka.
12) Nájdite množinu všetkých bodov, ktoré majú vzdialenosť 2 cm od daného štvorca.
13) Nájdite množinu všetkých bodov, ktoré majú vzdialenosť 2 cm od daného kruhu s priemerom 6 cm.
14) Zostrojte trojuholník $ABC$, ak $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CA| = 7$ cm.
15) Je daný pravouhlý trojuholník $ABC$. Zostrojte euklidovsky jemu opísanú kružnicu.
16) Zostrojte množinu bodov, z ktorých je vidieť úsečku $AB$ pod uhlom 45°.

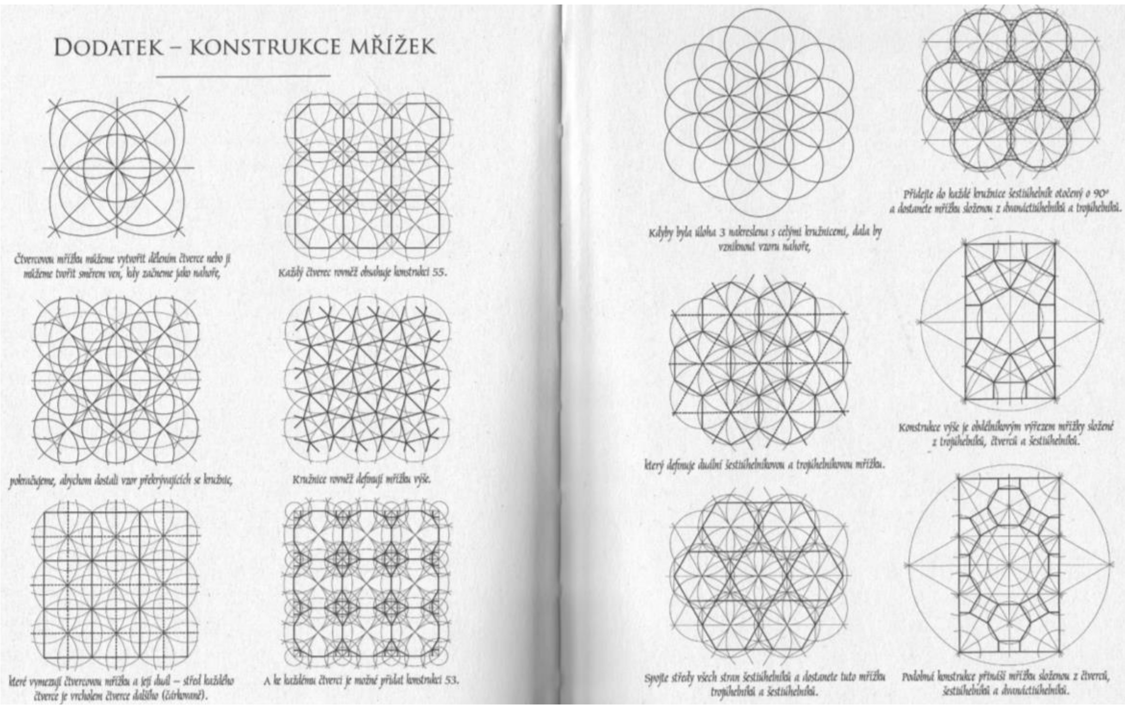
17) Zostrojte pravouhlý trojuholník $ABC$, ak $|AB| = 8$ cm a ťažnica na stranu $AB$ je 4 cm.

18) Zostrojte pravouhlý trojuholník $ABC$, ak $|AB| = 8$ cm a výška na stranu $AB$ je 3 cm.

19) Zostrojte trojuholník $ABC$, ak $|AB| = 10$ cm, uhol pri vrchole $C$ je 60° a ťažnica na stranu $AB$ je 7 cm.

20) Zostrojte trojuholník $ABC$, ak jedna jeho strana má dĺžku 5 cm a uhly sú 60°, 30° a 90°. Koľko má úloha riešení?

21) Vyskúšajte si niektorú z konštrukcií zobrazených na obrázku 82.




Obrázok 82. Sutton, A.: Pravítko a kružítko. Praktické geometrické konstrukce

# V. Geometria zobrazení

V tejto kapitole sa zameriame na zhodnostné a podobnostné zobrazenia. Pripomenieme si najmä osovú súmernosť, posunutie a otočenie. Stredovej súmernosti nebudeme venovať osobitnú pozornosť, keďže je špeciálnym prípadom otočenia.

## Zhodnostné zobrazenia

Zobrazenie v rovine je taký predpis, ktorý každému bodu $X$ roviny priradí práve jeden bod $X'$ tejto roviny. Ak zobrazenie priradí každému útvaru roviny útvar, ktorý je s ním zhodný, tak takéto zobrazenie nazývame *zhodnostným zobrazením*.

Skutočnosť, že útvar $U$ sa zobrazí na útvar $U'$ zapíšeme: $U \mapsto U'$.

Útvar $U$ nazývame vzor a útvar $U'$ obraz.

- Zhodnosť útvarov si môžeme predstaviť pomocou metódy *vystrihnúť a priložiť* - ak po vystrihnutí jedného z útvarov je možné priložiť ho na druhý tak, že sa presne prekryjú, tak sú zhodné.

Zhodnostné zobrazenia môžeme rozdeliť do týchto šiestich kategórií:

1. Identita - je zobrazenie, ktoré každý bod roviny zobrazí do toho istého bodu.
2. Osová súmernosť - je daná jednou priamkou.
3. Posunutie - je zobrazenie určené vektorom.
4. Rotácia - alebo otočenie je zobrazenie určené jedným bodom, ktorý nazývame stredom otočenia a orientovaným uhlom.
5. Stredová súmernosť - je zobrazenie určené jedným bodom, ide o špeciálny prípad rotácie - orientovaný uhol je presne 180°.
6. Posunutá súmernosť - vznikne zložením posunutia a osovej súmernosti.

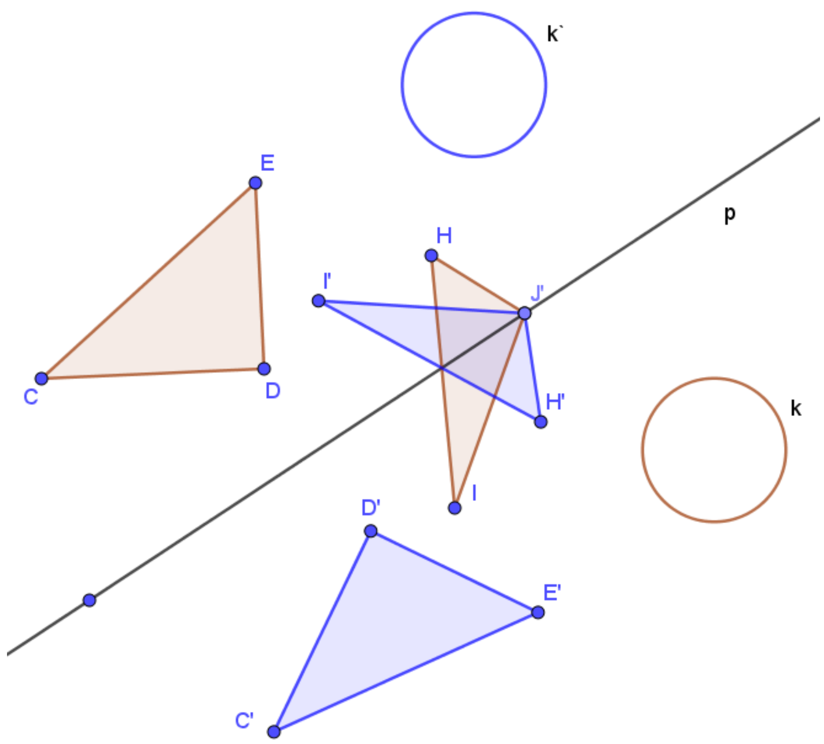
Zhodnostné zobrazenia majú viacero zaujímavých vlastností, napr.

- ✓ Všetky zhodnostné zobrazenia sú bijektívne. To znamená, že ku každému zhodnostnému zobrazeniu vieme nájsť inverzné zhodnostné zobrazenie.

- ✓ Zložením dvoch zhodnostných zobrazení dostaneme opäť zhodnostné zobrazenie.
- ✓ Zložením zhodnostného zobrazenia a jeho inverzného zobrazenia dostávame identitu.

Tieto a ďalšie zaujímavé vlastnosti jednotlivých zhodnostných zobrazení si podrobnejšie popíšeme v nasledujúcom texte.

## Osová súmernosť




Obrázok 83. Osová súmernosť

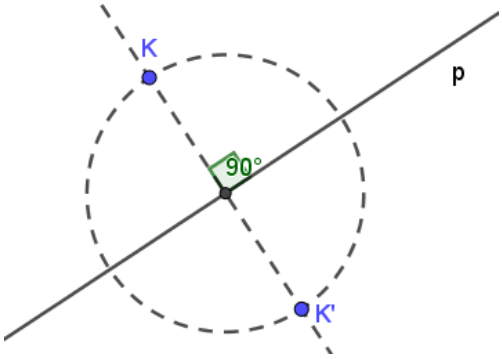
Existuje nekonečne veľa osových súmerností. Každá z nich je definovaná priamkou, ktorú nazývame *os súmernosti*. Na obrázku 83 je to priamka označená písmenom $p$. Osovú súmernosť danú osou súmernosti $p$ budeme označovať $O_p$.

Vidíme, že toto zobrazenie zobrazí ľubovoľný objekt roviny na objekt, ktorý je s ním zhodný. Na obrázku sú zobrazené tri príklady: kružnica $k$, trojuholník $ECD$ a trojuholník $IJH$ spolu s ich obrazmi.

- ➢ Osovú súmernosť môžeme manipulatívne priblížiť žiakom tak, že nakreslíme vybrané objekty pomaly schnúcou farbou, následne preložíme papier pozdĺž osi súmernosti. Odtlačky nakreslených objektov vytvoria obrazy objektov.

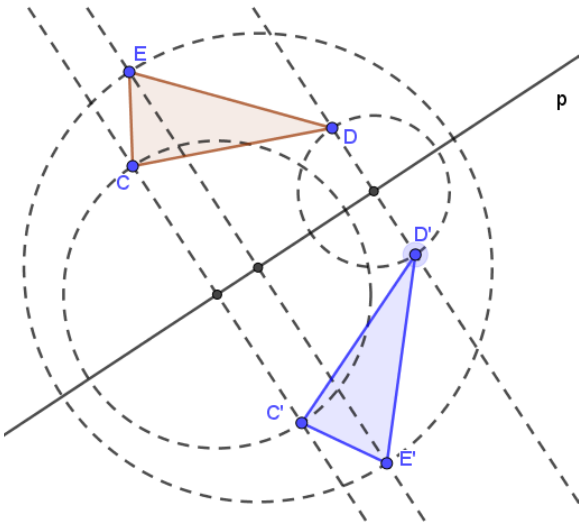
- Pri metóde vystrihnúť-priložiť je potrebné vystrihnutý útvar preklopiť. (Zameniť rub a líc.)

Obraz bodu $K$ v danej osovej súmernosti nájdeme tak, že zostrojíme kolmicu na os súmernosti idúcu týmto bodom. Bod $K'$ leží na tejto kolmici a jeho vzdialenosť od osi súmernosti je rovnaká ako vzdialenosť bodu K od osi súmernosti. (Použijeme kružidlo.)




Obrázok 84. Konštrukcia obrazu bodu v osovej súmernosti

Teoreticky by sme mali zobrazovať všetky body patriace danému útvaru. To je však nereálne. Preto pri úsečkách zobrazujeme len ich krajné body, pri mnohouholníkoch ich vrcholy, pri kruhoch a kružniciach stred a polomer a.t.ď. Útvary zobrazujeme tak, že podľa vyššie opísaného postupu zobrazíme charakteristické body daného útvaru.




Obrázok 85. Obraz trojuholníka v osovej súmernosti

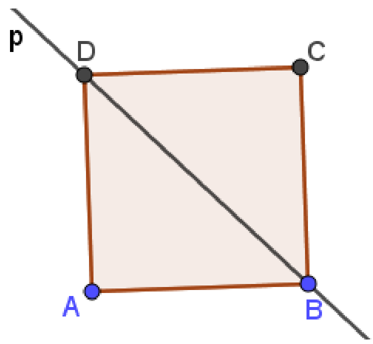
Existujú body roviny, ktoré sa zobrazia v danej osovej súmernosti samy na seba. Takéto body nazývame *samodružné body.*

1. *Ktoré body roviny sú samodružné v danej osovej súmernosti $O_p$?*

Keďže každý bod sa “preklopí” do opačnej polroviny ohraničenej osou súmernosti, jediné body, ktoré zostanú na mieste, môžu byť tie, ktoré ležia práve na osi súmernosti.

Podobne existujú objekty, ktoré sa v danej osovej súmernosti zobrazia samy na seba. To ale neznamená, že každý bod takéhoto objektu sa zobrazí sám na seba. Platí iba, že každý bod tohto útvaru sa zobrazí na bod, ktorý je bodom toho istého útvaru. Objekty, ktoré spĺňajú túto vlastnosť pre nejakú osovú súmernosť, sa nazývajú *osovo súmerné útvary.*

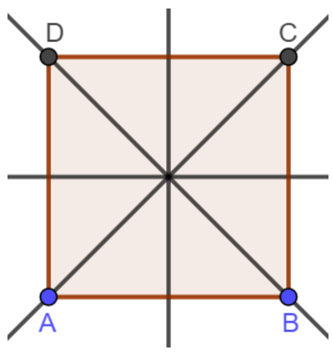
Štvorec *ABCD* z obrázka 86 je osovo súmerný, pretože existuje osová súmernosť, konkrétne napríklad tá s osou súmernosti *p*, v ktorej sa každý bod štvorca *ABCD* zobrazí na bod, ktorý tiež patrí štvorcu *ABCD*. (Napr. $A \mapsto C$, $C \mapsto A$, $B \mapsto B$.) Priamku *p* potom nazývame aj *osou súmernosti daného útvaru.*




Obrázok 86. Osovo súmerný útvar

2. *Nájdite všetky osové súmernosti, v ktorých sa štvorec ABCD zobrazí sám na seba.*

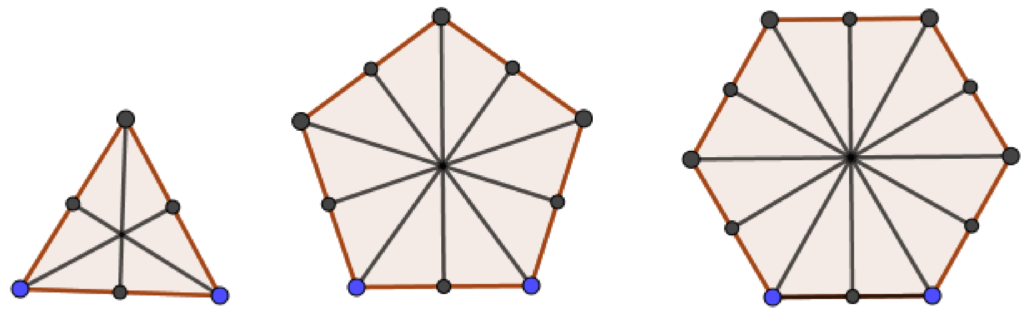
Os súmernosti je jednoznačne určená priamkou, ktorá je osou súmernosti. Preto stačí určiť priamky, ktoré sú osami súmerností daného štvorca. Sú to priamky prechádzajúce oboma uhlopriečkami a ešte priamky prechádzajúce stredmi protiľahlých strán.




Obrázok 87. Osi súmernosti štvorca

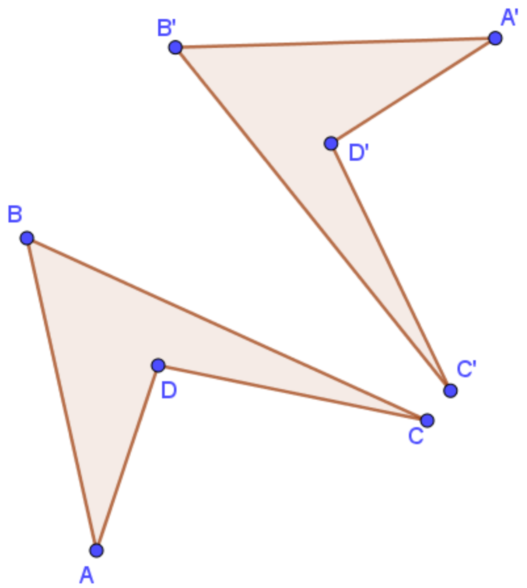
3. *Koľko osí súmernosti má pravidelný n-uholník?*

Zopár príkladov pre konkrétne hodnoty neznámej $n$ nám ukáže, že zrejme každý $n$-uholník má práve $n$ osí súmernosti. Zdôvodnenie: Ak je $n$ nepárne (trojuholník, päťuholník,...), tak každá os súmernosti prechádza jedným vrcholom a stredom protiľahlej strany. Ak je $n$ párne (štvorec, šesťuholník,...), tak polovica osí prechádza vždy dvojicou protiľahlých vrcholov a druhá polovica osí prechádza stredmi protiľahlých strán.



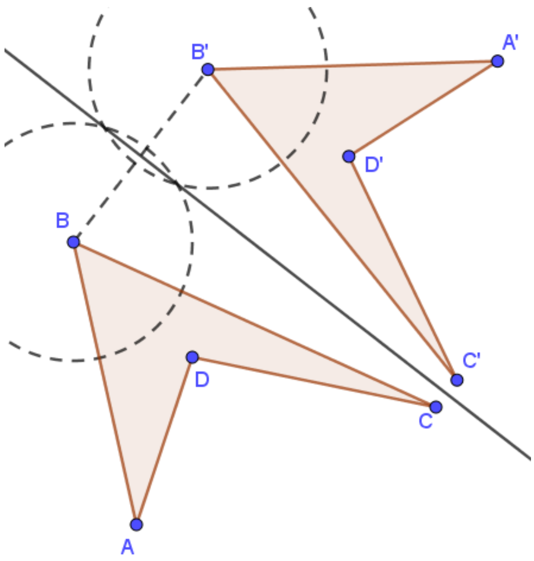
Obrázok 88. Osi súmernosti pravidelných $n$-uholníkov

4. *Nájdite osovú súmernosť, v ktorej sa štvoruholník ABCD zobrazí na štvoruholník A′B′C′D′.*



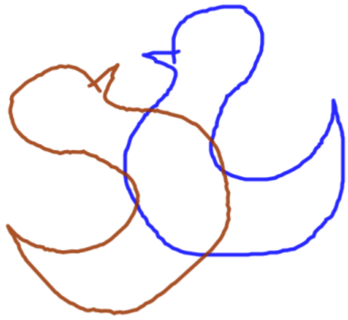

Obrázok 89. Osová súmernosť - úloha 4

Riešenie tejto úlohy nie je náročné. Máme označené zodpovedajúce body aj ich obrazy a keďže vieme, že tieto ležia na kolmici vedenej k osi súmernosti a navyše os leží presne v strede medzi nimi, stačí použiť jedinú dvojicu bodov napr. $B$, $B'$ na nájdenie stratenej osi súmernosti.



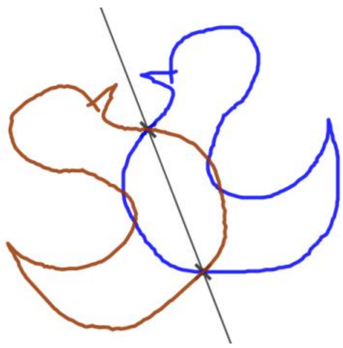

Obrázok 90. Riešenie úlohy 4

5. *Nájdite osovú súmernosť, ktorá zobrazí hnedú čiaru na modrú čiaru.*



Obrázok 91. Osová súmernosť – úloha 5

V tomto prípade by sme mohli postupovať dvoma spôsobmi. Buď si zvolíme dvojicu bodov - napríklad nejaký významný bod (špic zobáka) a os nájdeme tak, ako v predchádzajúcej úlohe, alebo využijeme samodružné body. Niektoré body sa zobrazili samy na seba a tieto predsa musia ležať na osi súmernosti.

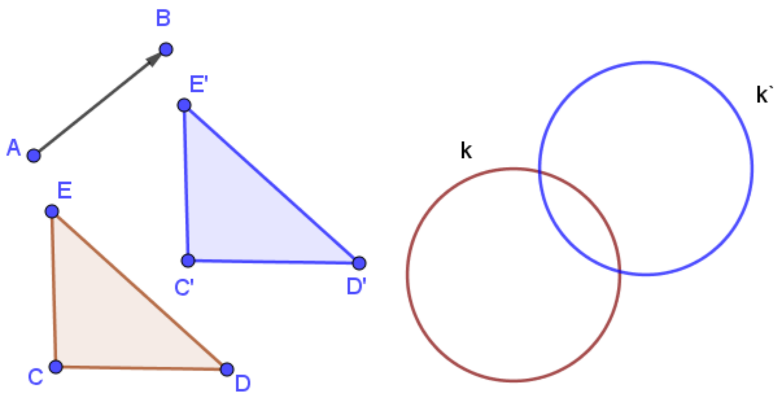


Obrázok 92. Riešenie úlohy 5

6. *Ktoré zhodnostné zobrazenie je inverzné k osovej súmernosti $O_p$?*

Inverzné zobrazenie zobrazuje obraz na jeho vzor. Ak osová súmernosť $O_p$ zobrazí napr. hnedú kačičku z predchádzajúcej úlohy na modrú kačičku, tak to isté zobrazenie zobrazí modrú kačičku na hnedú. Čiže osová súmernosť je sama sebe inverzným zobrazením.

## Posunutie



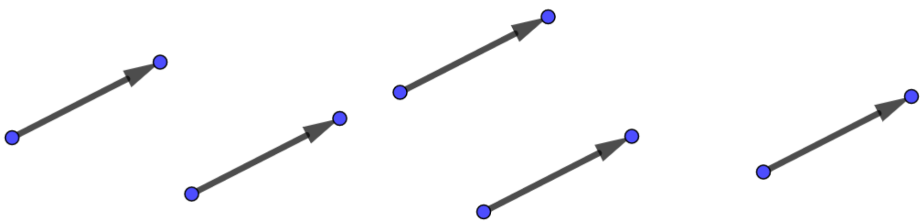

Obrázok 93. Posunutie

Posunutie (translácia) je definované jedným vektorom. Pre zadefinovanie pojmu *vektor*, potrebujeme poznať pojem *orientovaná úsečka*.

*Orientovaná úsečka* je úsečka, ktorej krajné body majú určené poradie. Označuje sa $\overrightarrow{AB}$, kde $A$ je začiatočný bod a $B$ koncový bod orientovanej úsečky. Veľkosť orientovanej úsečky $\overrightarrow{AB}$ je jednoducho dĺžka úsečky $AB$. V ďalšom texte budeme uvažovať len o orientovaných úsečkách, ktoré majú nenulovú veľkosť. Orientované úsečky majú aj svoj smer. Hovoríme, že dve orientované úsečky majú *rovnaký smer*, ak sú navzájom rovnobežné a smerujú na tú istú stranu.

*Vektor* je potom množina všetkých orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer.

Posunutie určené vektorom $\overrightarrow{AB}$ budeme označovať $T_{\overrightarrow{AB}}$.



Obrázok 94. Orientované úsečky patriace jednému vektoru

Posunutie $T_{\overrightarrow{AB}}$ je potom zobrazenie, pri ktorom do každého bodu $X$ umiestnime orientovanú úsečku patriacu vektoru $\overrightarrow{AB}$ tak, že vzor - bod $X$ bude začiatočným bodom orientovanej úsečky a jeho obraz $X'$ bude koncový bod orientovanej úsečky.

- Posunutie je možné manipulatívne znázorniť pomocou priesvitného papiera. Nakreslíme všetky útvary, ktoré majú byť vzorom, na papier. Potom ich prekryjeme mierne presvitajúcim papierom, na ktorý ich prekreslíme. Spodný papier následne posunieme v určitom smere o určitú dĺžku. Prekreslíme útvary.
- Pri metóde vystrihnúť - priložiť vystrihnutý útvar nepreklápame, len posunieme.

7. *Ktoré body roviny sú samodružné v posunutí* $T_{\overrightarrow{AB}}$ *?*

Odpoveď je: žiadne.

8. *Ktorý objekt roviny sa zobrazí sám na seba v posunutí* $T_{\overrightarrow{AB}}$ *?*

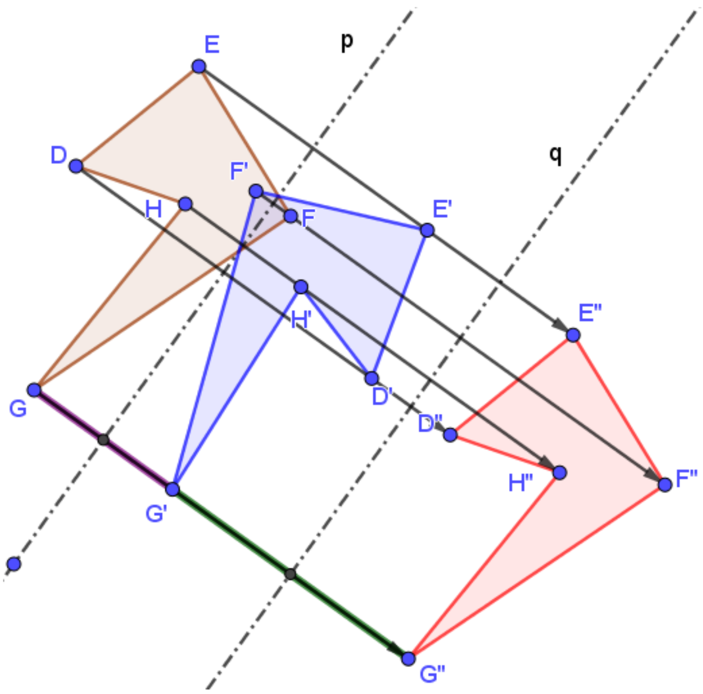
Žiadny ohraničený objekt sa nemôže zobraziť sám na seba v posunutí. Jedine celá rovina, polrovina, priamky alebo iné neohraničené objekty sa môžu zobraziť samy na seba.

9. *Sú dané dve rovnobežné priamky p a q. Aké zobrazenie vznikne zložením osových súmerností* $O_p$ *a* $O_q$*?*

Riešenie si ilustrujeme na príklade jedného ľubovoľne zvoleného päťuholníka *DEFGH*. (Pozri obrázok 95.) Päťuholník najprv zobrazíme pomocou osovej súmernosti s osou $p$, čím dostávame päťuholník $D'E'F'G'H'$, ktorý zobrazíme pomocou druhej osovej súmernosti s osou $q$ na päťuholník $D''E''F''G''H''$.

Všimnime si, že vzdialenosť začiatočného a koncového bodu, čiže napr. $G$ a $G''$ je stále rovnaká, a to presne dvakrát dlhšia ako vzdialenosť osí $p$ a $q$.

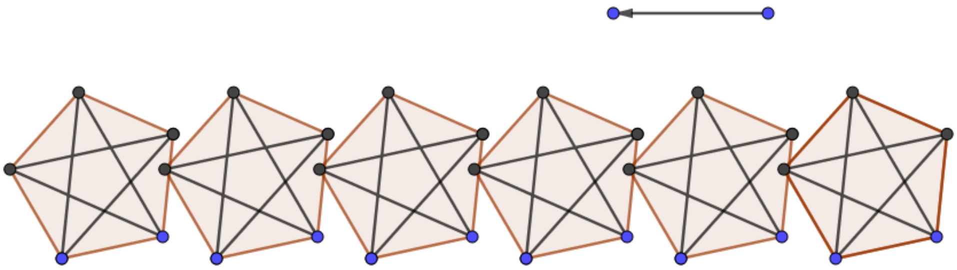
Zložením dvoch osových súmerností s navzájom rovnobežnými osami súmernosti vznikne posunutie s vektorom, ktorý je kolmý na tieto osi a jeho veľkosť je dvojnásobkom vzdialenosti týchto osí.




Obrázok 95. Posunutie ako zloženie dvoch osových súmerností

Posunutie je možné použiť na vytváranie ornamentov.

10. *Posuňte vybraný rovinný objekt v posunutí $T_{\overrightarrow{AB}}$, potom výsledok znovu posuňte v tom istom posunutí, výsledok znovu, a.t.ď.*

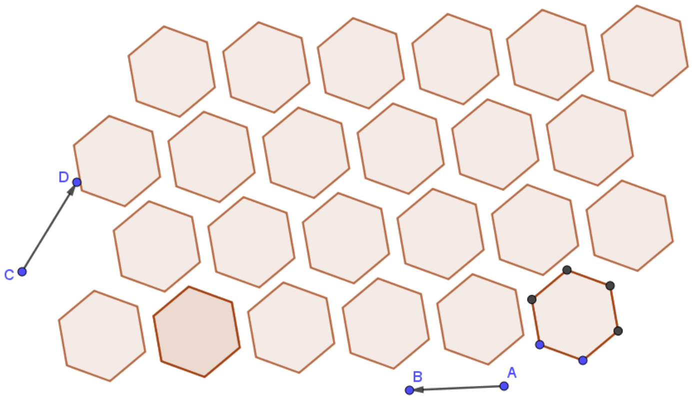


Obrázok 96. Ozdobný pás

To, čo dostávame, sa nazýva aj ozdobný pás (frýz). Vídavame ho napríklad na čipkách či iných ozdobách.

- Vytváranie ozdobných pásov opakovaným používaním posunutia je vďačným námetom pre rôzne výtvarné aktivity.

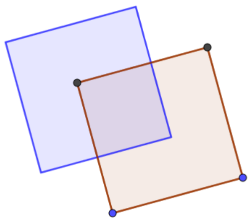
11. *Čo vznikne opakovaným používaním posunutia $T_{\overrightarrow{AB}}$ a posunutia $T_{\overrightarrow{CD}}$ vo všetkých možných kombináciách, ak sú vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ rôznobežné?*




Obrázok 97. Tapeta

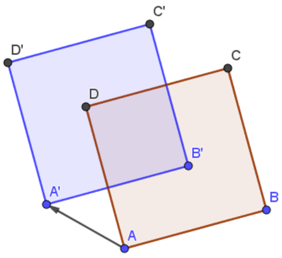
To, čo dostaneme, sa nazýva aj tapeta. Okrem využitia na ozdobenie stien sú tapetami v tomto zmysle často aj metrážne koberce.

12. *Nájdite posunutie, v ktorom sa vyznačený hnedý štvorec zobrazí na modrý štvorec.*



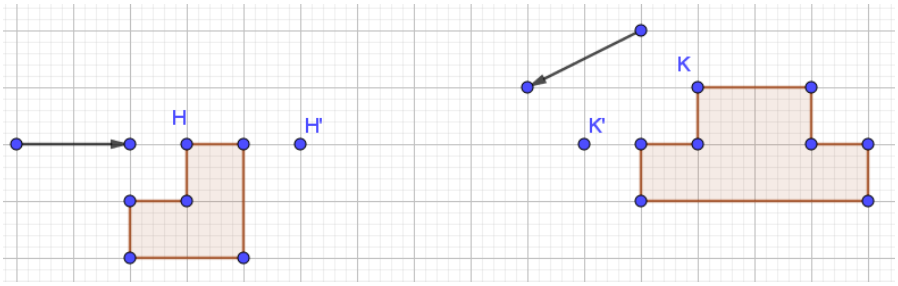
Obrázok 98. Posunutie – úloha 12

Keďže nemáme označené príslušné dvojice vrcholov, začnime označením. Potom už stačí jednu dvojicu spojiť a vytvoriť z nej orientovanú úsečku, ktorá jednoznačne určuje vektor posunutia.




Obrázok 99. Riešenie úlohy 12

- Úlohy na posunutie zadávame v štvorčekovej sieti - vtedy dieťa nepotrebuje používať dve pravítka na kreslenie rovnobežiek. Najľahšie sú úlohy, kde vektor posunutia prechádza po čiarach štvorčekového papiera. Ak toto deti už zvládajú, zadávame také posunutie, kde vektor posunutia nie je rovnobežný so štvorcovou sieťou, ale jeho vrcholy ležia na priesečníkoch štvorcovej siete.

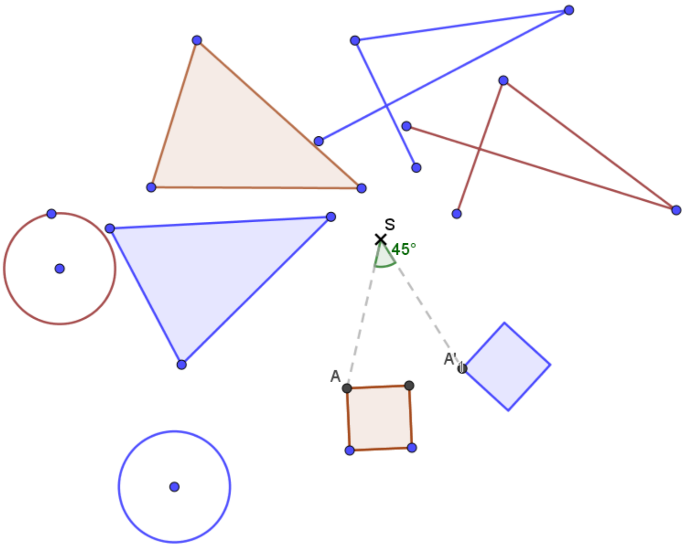



Obrázok 100. Posunutie v štvorcovej sieti

V úlohe na obrázku 100 vľavo dieťa každý bod posúva o dva štvorčeky doprava a v úlohe vpravo zasa o jeden štvorček nadol a o dva doľava.

## Otočenie

Otočenie (rotácia) je definované jedným bodom, ktorý nazývame stred otočenia a orientovaným uhlom. Otočenie označujeme $R_{S,\alpha}$ .




Obrázok 101. Otočenie

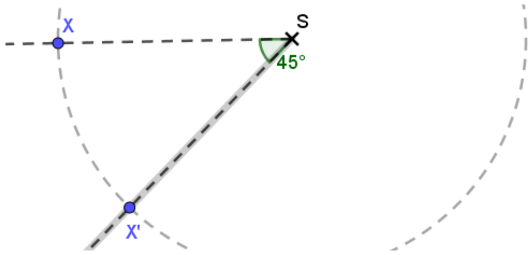
*Orientovaný uhol* $\measuredangle AVB$ je uhol, ktorého ramená majú určené poradie. Rameno $VA$ je začiatočné a rameno $VB$ koncové. Orientovaný uhol je potom tá časť roviny, ktorú vyplnia polpriamky so začiatkom v bode $V$ idúce od začiatočného ramena ku koncovému ramenu proti smeru hodinových ručičiek.

- Otočenie roviny podľa stredu $S$ o daný uhol môžeme demonštrovať tak, že na papier nakreslíme objekty, ktoré chceme otáčať. Prekreslíme ich na čiastočne priesvitný papier. Zapichneme kružidlo do bodu $S$ (aby sme zafixovali oba papiere v tomto bode) a otočíme celým spodným papierom o daný uhol. Výsledok opäť prekreslíme na priesvitný papier.

- Pri metóde vystrihnúť - prilepiť netreba objekt preklápať.

Postup rysovania obrazu daného objektu v otočení je náročnejší ako pri iných typoch zhodnostných zobrazení.

Bod $X$ je potrebné spojiť so stredom otočenia, následne vytvoriť orientovaný uhol s vrcholom v strede otočenia a začiatočným ramenom, na ktorom leží bod $X$. Na koncovom ramene bude ležať jeho obraz $X'$ v rovnakej vzdialenosti od stredu, ako má bod $X$. Rovnako postupujeme aj pri ďalších bodoch. (Pomocné čiary je potrebné kresliť veľmi jemne - býva ich veľa.)




Obrázok 102. Obraz bodu v otočení

*13. Ktoré body roviny sú samodružné v otočení* $R_{S,\alpha}$ *?*

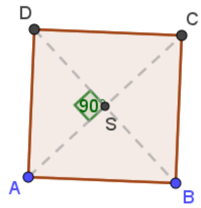
Jediný bod, ktorý zostáva na mieste po otočení celej roviny je práve stred otočenia.

*14. Existujú objekty, ktoré sa v otočení zobrazia samy na seba?*

Áno, napríklad kružnice a kruhy, ktorých stredom je práve stred otočenia. Tieto môžeme otáčať o akýkoľvek uhol.

Príkladov je však oveľa viac. Takéto objekty potom voláme objektami, ktoré majú *rotačnú symetriu.* Uhol rotačnej symetrie objektu je minimálny uhol, o ktorý môžeme objekt otočiť tak, že sa zobrazí sám na seba.

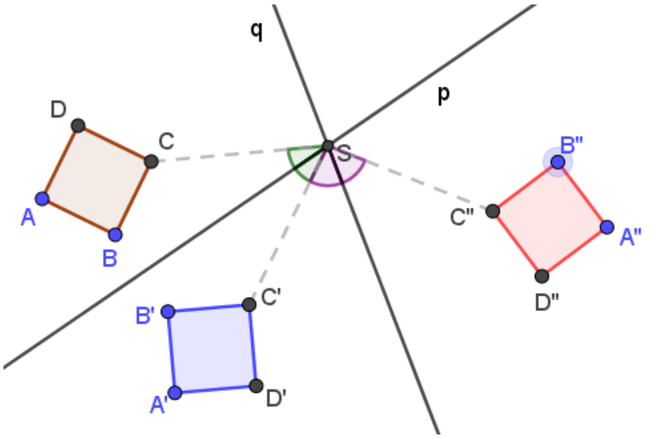
*15. Nájdite uhol rotačnej symetrie štvorca ABCD.*




Obrázok 103. Rotačná symetria štvorca

Stredom otočenia musí byť stred štvorca, uhol otočenia je 90°. Pri tomto uhle sa vrchol $A$ zobrazí na vrchol $B$, vrchol $B$ na vrchol $C$ a.t.ď.

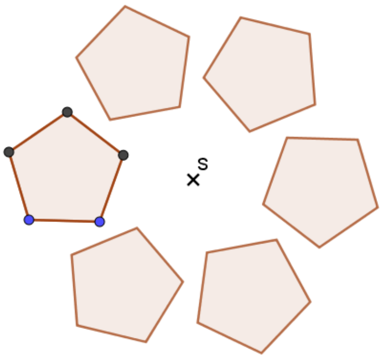
16. *Aké zobrazenie vznikne zložením dvoch osových súmerností s rôznobežnými osami p a q?*




Obrázok 104. Otočenie ako zloženie dvoch osových súmerností

Riešenie si ilustrujeme na jednom príklade (obr. 104). Vidíme, že štvorec *ABCD* sa po použití dvoch osových súmerností zobrazil na štvorec *A''B''C''D''*, ktorý je vzhľadom k pôvodnému štvorcu otočený. Stredom otočenia je priesečník osí a uhol otočenia je dvojnásobkom uhla, ktorý zvierajú tieto dve osi súmernosti. (Dôkaz tohto tvrdenia vyžaduje použitie viet o zhodnosti trojuholníkov.)

17. *Skúsme teraz opakovane použiť otočenie o 60° na pravidelný päťuholník, pričom stred otočenia leží mimo tohto päťuholníka.*

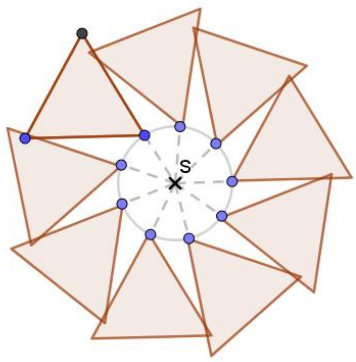



Obrázok 105. Rozeta

Obrázok, ktorý nám vznikne, sa nazýva aj rozeta. Pri uhle 60° sme dostali šesť opakovaní základného objektu (vrátane pôvodného), ďalšie opakovanie by sa prekrylo s pôvodným.

18. *Aký uhol otočenia máme zvoliť, ak chceme, aby rozeta mala deväť opakovaní základného motívu?*

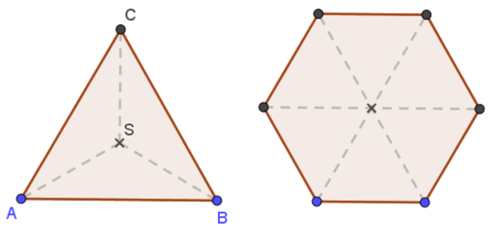
Pri uhle 60° sme mali 6 opakovaní, pretože $6 \cdot 60° = 360°$. Stačí teda zistiť, aké číslo treba vynásobiť deviatimi, aby sme dostali 360°.




Obrázok 106. Rozeta s rotačnou symetriou s uhlom 40°

- *Stredová súmernosť* je špeciálny typ otočenia - na zobrazovanie objektov nepotrebujeme uhlomer, pretože uhol otočenia je 180°.

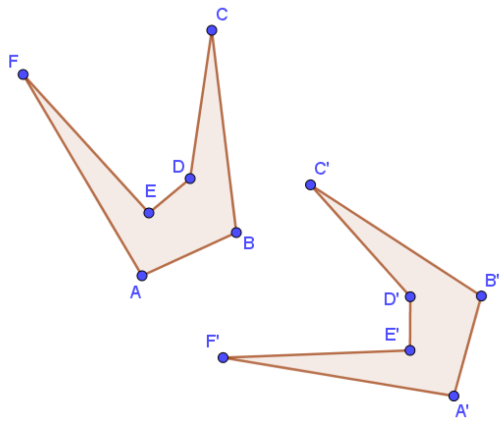
19. *Aký uhol má rotačná symetria pravidelného n-uholníka? Ktoré pravidelné n-uholníky sú stredovo súmerné?*




Obrázok 107. Rotačná symetria pravidelných $n$-uholníkov

Stredom otočenia bude stred mnohouholníka. Z niekoľkých príkladov možno vypozorovať, že uhol rotačnej symetrie sa dá vypočítať ako 360° : $n$. Stredovo súmerné sú práve tie pravidelné $n$-uholníky, ktoré majú párny počet vrcholov.

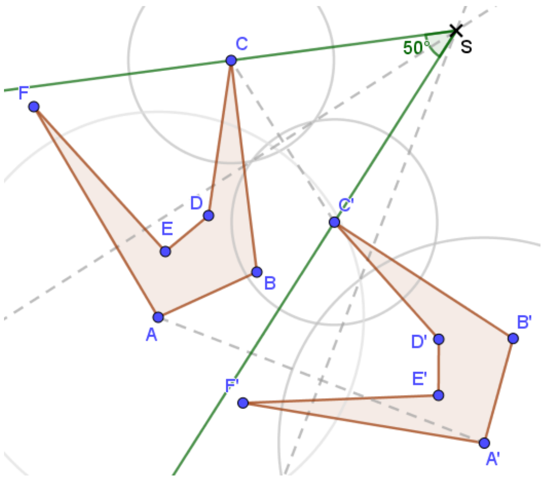
20. *Nájdite otočenie, v ktorom sa šesťuholník ABCDEF zobrazil na šesťuholník A′B′C′D′E′F′.*




Obrázok 108. Otočenie – úloha 20

Základným problémom tejto úlohy je nájsť stred otočenia. Na riešenie využijeme skutočnosť, že bod a jeho obraz sú rovnako vzdialené od stredu otočenia. Preto zostrojíme os úsečky spájajúcu dvojicu bodov $AA'$. (Os úsečky je množina všetkých bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od krajných bodov úsečky.) Niekde na tejto osi bude ležať bod $S$. Aby sme ho našli, zostrojíme ešte jednu takú množinu bodov rovnako vzdialených napríklad od $C$ a $C'$.

Uhol otočenia potom ľahko zmeriame - je to napríklad veľkosť uhla $\measuredangle CSC'$.




Obrázok 109. Riešenie úlohy 20

# Podobnostné zobrazenia

Podobnostné zobrazenie je predpis, ktorý zobrazí daný útvar $U$ na útvar $U'$, pričom vzor a obraz nie sú zhodné, ale zachovávajú podobnosť - to znamená, že dĺžky úsečiek sú skrátené alebo predĺžené vždy v tom istom pomere. Skrátenie či predĺženie určuje premenná $k$. Pre každú dvojicu bodov roviny platí, že $|A'B'| = k \cdot |AB|$.

Čiže napríklad, ak $k = 2$, tak obraz úsečky je dvakrát väčší ako vzor.

Ak $k = 1/2$, tak obraz úsečky má polovičnú veľkosť oproti vzoru.

Podobnostné zobrazenia nemajú takú presnú klasifikáciu ako zhodnostné zobrazenia. V nasledujúcom texte ukážeme dva príklady podobnostných zobrazení, ktoré po viacnásobnom opakovaní vytvárajú zaujímavé obrazce.

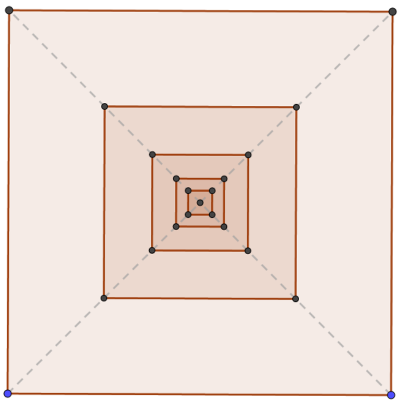
Najznámejším podobnostným zobrazením je **rovnoľahlosť**. *Rovnoľahlosť* (homotetia) je definovaná stredom $S$ a nenulovým koeficientom $h$. Je to zobrazenie, ktoré priraďuje bodu $X$ bod $X'$ tak, že platí $|SX'| = |h| \cdot |SX|$, pričom $X'$ leží pre kladné $h$ na polpriamke $SX$ a pre záporné $h$ na polpriamke opačnej k $SX$.

Ak $h$ je rovné jednej, rovnoľahlosť je identitou. Ak $h$ je rovné -1, rovnoľahlosť je stredovou súmernosťou. V ďalšom odseku ukážeme príklad rovnoľahlosti, v ktorej je $0 < h < 1$. Obraz bude v takomto zobrazení zmenšeninou svojho vzoru.

## Zmenšenie

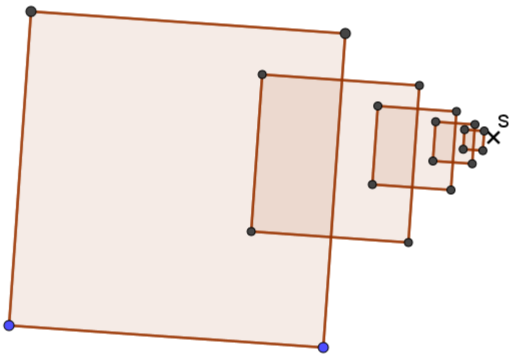
Nech je daný stred zmenšenia $S$. Každý bod roviny $X$ zobrazme tak, že ho spojíme so stredom $S$ a na tejto spojnici bude v jej strede ležať obraz bodu $X$. Ide teda o rovnoľahlosť s koeficientom ½.

Ilustrujme toto zobrazenie na štvorci, ktorého stredom je práve stred zmenšenia. Opakujme niekoľkokrát.



Obrázok 110. Zmenšenie štvorca so stredom zmenšenia v strede štvorca

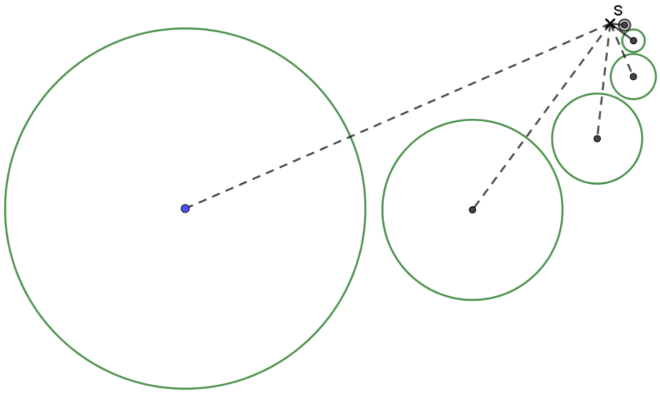
21. *Zobrazte štvorec v tomto zobrazení, ak stred zmenšenia leží mimo štvorca. Opakujte niekoľkokrát.*




Obrázok 111. Zmenšenie štvorca so stredom zmenšenia nepatriacim štvorcu

## Podobnostné otočenie

Nech je daný pevný bod - stred otočenia. Bod $X$ otočíme o uhol 30°, ale vzdialenosť bodu $X'$ od stredu otočenia bude polovicou vzdialenosti bodu $X$ od stredu $S$.




Obrázok 112. Podobnostné otočenie

# Úlohy

1) Určte počet osí súmernosti týchto útvarov: štvorec, kosoštvorec, obdĺžnik, kosodĺžnik, rovnoramenný lichobežník, polkruh, kruh.
2) Nájdite aspoň dve rôzne priamky, ktoré sú osovo súmerné podľa danej osi súmernosti $p$.
3) Zostrojte štvorec $ABCD$ a otočte ho podľa jeho stredu o 45 °.
4) Pri každej uvedenej dopravnej značke určte: počet osí súmernosti, uhol rotačnej symetrie a napíšte, či je stredovo súmerná.


Obrázok 113. Dopravné značky

5) Nakreslite ľubovoľný obrázok, ktorý má práve dve osi súmernosti.
6) Nakreslite ľubovoľný stredovo súmerný obrázok.
7) Nakreslite ľubovoľný obrázok s uhlom rotačnej symetrie rovným 45°.
8) Narysujte začiatočné písmeno svojho mena a použite naň osovú súmernosť podľa osi, ktorá prechádza týmto písmenom v ľubovoľnom smere.
9) Nakreslite ľubovoľný obrázok a použite postupne posunutia s dvoma vektormi, ktoré zvierajú uhol 60°.
10) Narysujte pravidelný päťuholník a použite niekoľkokrát podobnostné otočenie popísané v rovnomennej podkapitole.
11) Narysujte rovnostranný trojuholník a použite zmenšenie so stredom v bode, ktorý leží vnútri tohto trojuholníka, ale nie v strede.

# VI. Stereometria

Stereometria je geometria priestoru. Ide o časť Euklidovskej geometrie. Do tejto kapitoly zaraďujeme aj niektoré problémy z deskriptívnej geometrie zaoberajúce sa úlohou nakreslenia obrazu priestorových útvarov do roviny, čím zasahujeme okrajovo aj výtvarné umenie.

## Telesá a ich siete

Teleso je časť priestoru. Je to trojrozmerný útvar, ktorý má určitý nenulový objem. Spravidla za telesá považujeme také časti priestoru, ktorých objem je konečné číslo. To znamená, že telesá sú ohraničené. Hranicu telesa tvoria plochy, ktoré majú merateľný obsah. Tieto plochy môžu byť napríklad mnohouholníky. Takými telesami sú napríklad hranoly alebo ihlany. Hranicu môžu tvoriť aj kruhy a časti kruhu. Takými telesami sú napríklad valec či kužeľ. Prípadne je hranicou útvar, ktorý síce má obsah, ale nedá sa rozvinúť do roviny (povrch gule, povrch donutu - áno, myslíme ten koláčik ☺).

*Sieť telesa* je súvislá časť roviny, ktorá po vhodnom poohýbaní dokáže vytvoriť hranicu telesa. Sieť môžeme vytvoriť iba z tých telies, ktorých hranicu tvoria útvary, ktoré je možné rozvinúť do roviny.

Podobne ako v prípade rovinných útvarov, telesá sú ideálne objekty, ktoré existujú len v predstave. Aby sme mohli žiakom priblížiť ideálne teleso, používame rôzne *modely telies*. Model telesa je reálny objekt, ktorý má také vlastnosti, aby sa čo najviac priblížil ideálnemu telesu. Modely telies delíme na tieto typy:

- **Plný model** – tento model najlepšie vystihuje podstatu telesa. Vytvárame ho napríklad z plastelíny alebo používame drevené modely, ktoré si ale žiaci sami vytvoriť nedokážu. Plný model je často jedinou možnosťou pre telesá, ktorých steny sa nedajú rozvinúť do roviny, ako je guľa či donut.
- **Stenový model** – je vytvorený zo siete telesa. Jeho prednosťou je ľahká konštruovateľnosť – stačí papier, ceruzka, nožnice a lepiaca páska.
- **Hranový model** – model tvorený iba hranami telesa. Používa sa pri rôznych stavebniciach, ako napríklad Geomag. Deti môžu takéto modely tvoriť aj pomocou špajdlí a nejakého materiálu na spájanie.

Jeho výhodou je prístup do vnútra telesa. Môžeme tak napríklad deťom ukázať, kde je telesová uhlopriečka.

- V školskej praxi by sme mali pracovať so všetkými typmi modelov. Obmieňanie modelov pomáha žiakom vytvoriť si správnu predstavu o telese.

V nasledujúcom texte pripomenieme základné telesá, s ktorými sa stretáva žiak základnej školy.

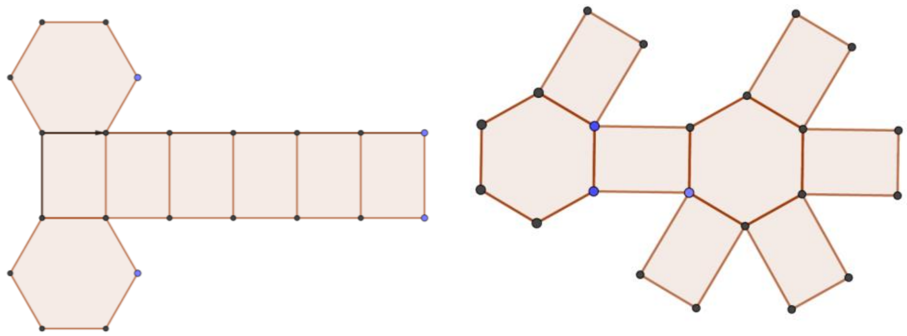
## Hranoly

Hranol je také teleso, ktoré je ohraničené dvoma rovnobežnými zhodnými mnohouholníkmi – *podstavami* a niekoľkými obdĺžnikmi – *stenami.* Úsečky, ktoré sú spoločné pre dve rôzne steny alebo stenu a podstavu, nazývame *hranami* telesa. Body, v ktorých sa stretávajú aspoň tri hrany, nazývame *vrcholmi* telesa. *Výškou* hranola je vzdialenosť jeho podstáv. V tomto texte budeme hovoriť len o tzv. kolmých hranoloch. To sú také hranoly, ktorých bočné steny sú kolmé na podstavy.

Klasifikáciu hranolov robíme najčastejšie podľa typu podstavy. Ak je podstavou trojuholník, hranol sa nazýva trojboký, ak štvoruholník, tak štvorboký. Päťboký hranol je taký, ktorého podstavou je päťuholník a pod. Pravidelné hranoly sú také, ktorých podstavou je pravidelný mnohouholník.

1. *Narysujte sieť pravidelného šesťbokého hranola s hranou podstavy 3 cm a výškou 4 cm.*

K tomuto hranolu (ako aj k akémukoľvek inému hranolu) je možné priradiť sieť, keďže všetky jeho steny sú mnohouholníky, a to: dva pravidelné šesťuholníky a 6 zhodných obdĺžnikov.



Obrázok 114. Siete hranola

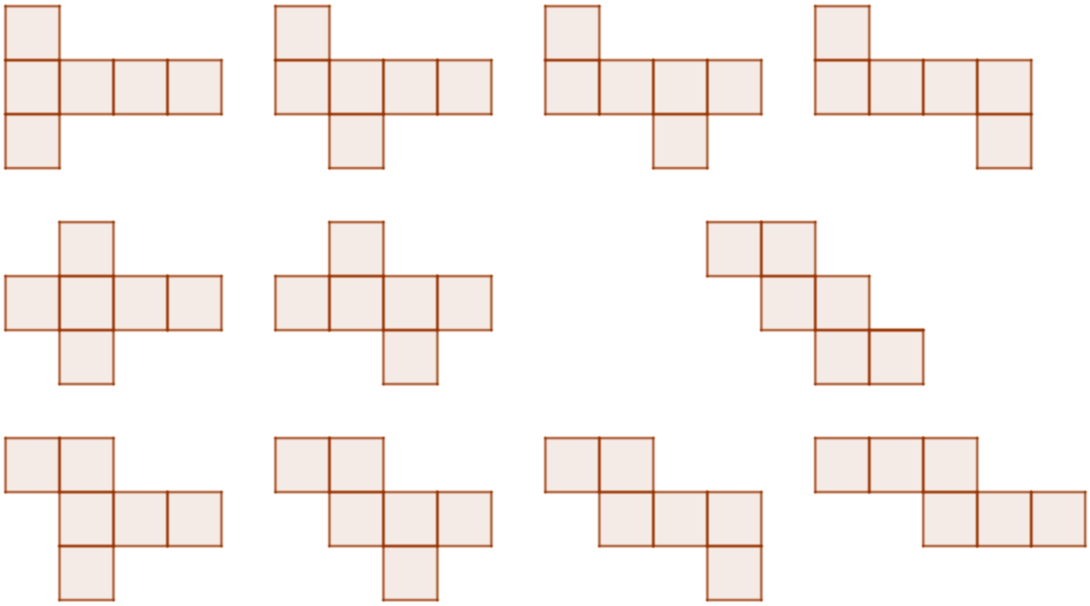
Na obrázku 114 nie sú jediné možné siete tohto hranola. Jednotlivé steny môžu byť pospájané aj iným spôsobom. Dôležité je, aby sieť bola celistvá –

jedna súvislá plocha, a aby boli pospájané len tie strany mnohouholníkov tvoriach steny telesa, ktoré sú skutočne hranami telesa. Tým, že nie je dané, ktoré hrany necháme spojené a ktoré nie, dostávame veľa rôznych možností.

Špeciálnymi typmi hranolov sú *kvádre a kocky*. Kváder je hranol, ktorého podstavou je obdĺžnik alebo štvorec a kocka je hranol, ktorého podstavou je štvorec a navyše výška je zhodná s dĺžkou hrany podstavy. Zaujímavou vlastnosťou týchto dvoch typov hranolov je to, že u nich nevieme jednoznačne určiť, ktoré steny sú podstavami. Preto ich ani nenazývame podstavami, ale všetky sú stenami.

2. *Narysujte všetky možné rôzne siete kocky. (Siete, ktoré by sme po ich vystrihnutí vedeli tak priložiť na seba, že by sa celkom prekryli, považujeme za zhodné.)*

Všetky rôzne siete kocky sú na obrázku 115.



Obrázok 115. Siete kocky

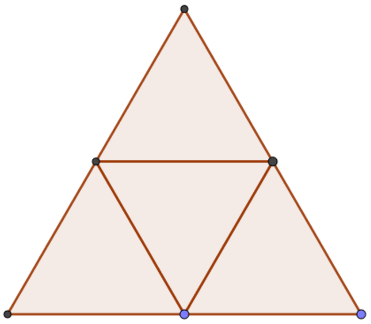
## Ihlany

Ihlany sú telesá, ktorých stenu tvorí jeden mnohouholník, ktorý nazývame podstava, a niekoľko bočných stien, ktoré majú tvar trojuholníka. Bod, v ktorom sa stretávajú všetky bočné steny, nazývame vrcholom ihlana. V školskej praxi pracujeme zväčša s kolmými ihlanmi – vtedy je spojnica stredu podstavy a vrchola kolmá na podstavu. Podobne, ako pri hranoloch, aj ihlany klasifikujeme podľa typu podstavy.

Špeciálnym ihlanom je štvorsten, čo je ihlan s trojuholníkovou podstavou. Významné postavenie má *pravidelný štvorsten* – všetky steny, vrátane podstavy, sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Pravidelný štvorsten patrí medzi platónske telesá a má mnoho zaujímavých vlastností.

3. *Zostrojte sieť pravidelného štvorstena s hranou dĺžky 4 cm.*

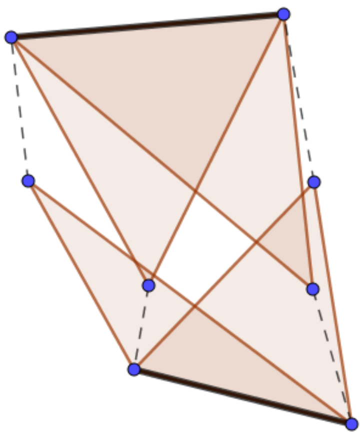
Jediné dve možné siete sú na obrázku 116. Vľavo je sieť vytvorená tak, že v strede je podstava a ku každej hrane podstavy je pripojená jedna stena. Sieť vpravo je zaujímavá tým, že ide o rovnobežník.



Obrázok 116. Siete pravidelného štvorstena

4. *Máme model pravidelného štvorstena. Teraz zoberme prúžok papiera dvojnásobnej dĺžky hrany štvorstena. Prúžok na koncoch zlepme k sebe tak, aby sme vytvorili prstenec, ktorý sa dá navliecť na jednu hranu štvorstena. Vyskúšajme ho prevliecť cez celý štvorsten.*

Toto sa ťažko predstavuje, ak máme v predstave pravidelný štvorsten, ktorý je ihlanom, čiže hranicu tvorí podstava a tri bočné steny. Ak si dokážeme predstaviť hranicu štvorstena ako dve dvojice trojuholníkov, je táto zaujímavá vlastnosť zrozumiteľnejšia.



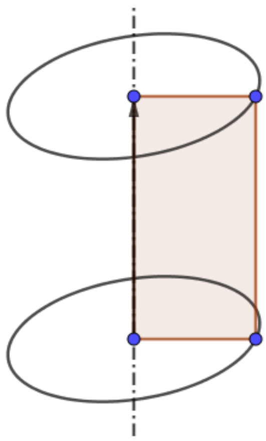
Obrázok 117. Pravidelný štvorsten z dvoch dvojíc trojuholníkov

## Rotačné telesá

Každé teleso, ktoré vznikne rotáciou nejakej ohraničenej plochy okolo nejakej priamky v priestore sa nazýva rotačným telesom. Medzi základné rotačné telesá zaraďujeme valec, kužeľ a guľu.

- Ak necháme rotovať kruh okolo priamky ležiacej v tej istej rovine, pričom kruh a priamka nemajú žiaden spoločný bod, vznikne nám tvar pripomínajúci donut alebo nafukovacie koleso.

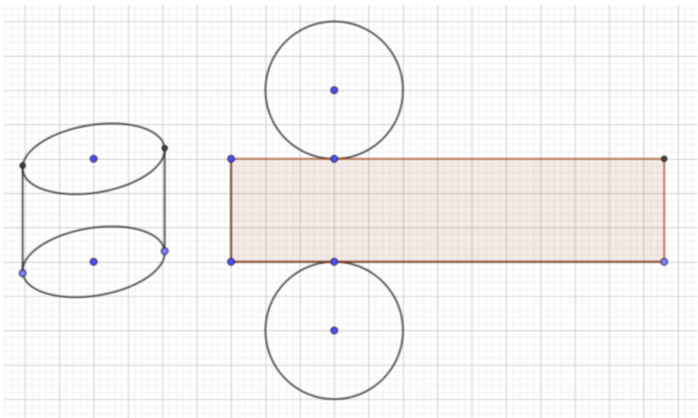
***Valec*** vznikne otočením obdĺžnika okolo jednej jeho strany. Hranicu valca tvoria dva kruhy, ktoré nazývame *podstavami* a jeden obdĺžnik, ktorý nazývame *plášťom* valca. Vzdialenosť podstáv je *výškou* valca. Kružnice, v ktorých sa stretávajú podstavy s plášťom, nazývame *hranami* valca. Valec nemá žiaden vrchol.



Obrázok 118. Tvorba rotačného valca

Valec môže vzniknúť aj otočením obdĺžnika okolo akejkoľvek osi, ktorá je rovnobežná s niektorou stranou a zároveň prechádza týmto obdĺžnikom.

5. *Zostrojte sieť rotačného valca s polomerom podstavy 2 cm a výškou 3 cm.*



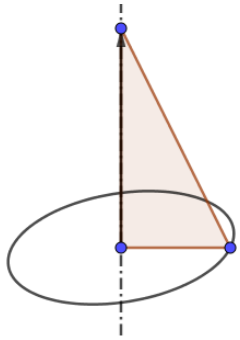
Obrázok 119. Sieť valca

Sieť tohto valca sa bude skladať z dvoch kruhov s polomerom 2 cm – to budú podstavy. Plášťom bude obdĺžnik s jednou stranou rovnou výške valca, druhá strana bude rovná obvodu podstavy: $2\pi \cdot 2 \cong 12{,}6$ cm.

Nemožnosť skonštruovať presnú sieť valca vyplýva z problému popísanému na s. 59 – rektifikácia kružnice.

***Kužeľ*** vznikne otočením pravouhlého trojuholníka okolo jednej odvesny.

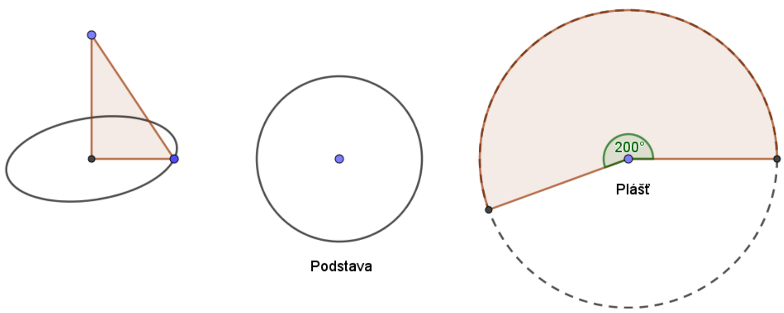
Môže vzniknúť aj otočením rovnoramenného trojuholníka okolo osi prepony.



Obrázok 120. Tvorba rotačného kužeľa

Hranicu kužeľa tvorí jeden kruh, to je *podstava* a jeden útvar, ktorý sa po rozvinutí do roviny ukáže ako časť väčšieho kruhu. Túto časť nazývame *plášťom* kužeľa. Kružnicu, v ktorej sa stretáva podstava s plášťom, nazývame hranou kužeľa. Kužeľ má jeden *vrchol* – bod kužeľa, ktorý má najväčšiu vzdialenosť od podstavy. Táto jeho vzdialenosť od podstavy sa nazýva *výškou* kužeľa.

6. *Zostrojte sieť kužeľa, ktorý vznikol otočením pravouhlého trojuholníka s odvesnami 2 cm a 3 cm okolo dlhšej odvesny.*




Obrázok 121. Sieť rotačného kužeľa

Podstavou bude kruh s polomerom 2 cm. Plášťom kužeľa bude časť kruhu, ktorého polomer potrebujeme vypočítať. Tento polomer je vzdialenosťou vrchola kužeľa od hrany podstavy. Z Pytagorovej vety to bude $\sqrt{4+9} =$

$\sqrt{13} \cong 3,6$ cm. Otázkou však je, akú veľkú časť z tohto kruhu použijeme na plášť. Na zodpovedanie otázky si musíme predstaviť, ako plášť vzniká – obvod časti hľadaného kruhu sa spojí s obvodom podstavy. Preto musíme vziať takú časť kruhu, aby dĺžka kružnicového oblúka bola presne taká istá, aký je obvod podstavy, čiže $2\pi \cdot 2 \cong 12,57$ cm.

Toto zabezpečíme určením uhla kruhovej časti. Pomer medzi týmto hľadaným uhlom a plným uhlom 360° je rovnaký ako pomer vypočítanej dĺžky 12,57 k obvodu celého kruhu:

$$\frac{\omega}{360°} = \frac{2\pi \cdot 2}{2\pi \cdot 3,6}$$

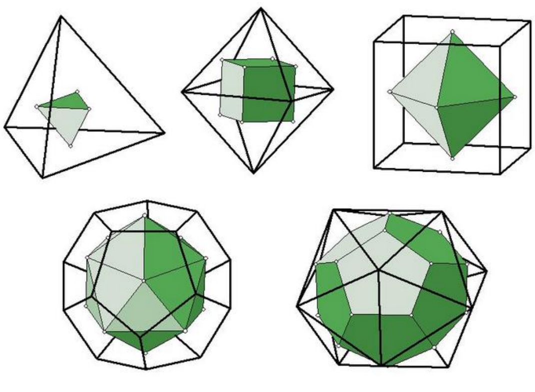
Hľadaný uhol je teda približne 200°.

***Guľa*** vznikne otočením kruhu okolo jeho priemeru. Sieť gule neexistuje, jej hranica sa nedá rozvinúť do roviny tak, aby vytvorila súvislú plochu. Preto používame najčastejšie plné modely gule.

- S týmto je spojený problém vytvárania máp Zeme. Každá mapa je nutne skresľovaná – objekty bližšie k pólom sú zobrazované väčšie než v skutočnosti sú, a objekty bližšie k rovníku zas naopak. Pozrite sa napríklad na mapu sveta – Grónsko vyzerá byť väčšie ako Austrália, ale v skutočnosti je Austrália asi tri a polkrát rozľahlejšia ako Grónsko.

## Platónske telesá

Platónske telesá sú také telesá, ktorých steny tvoria zhodné pravidelné mnohouholníky. Jediné možné platónské telesá sú: pravidelný štvorsten, osemsten, kocka, dvanásťsten a dvadsaťsten. Zaujímavosťou je ich dualita – to znamená, že ak zostrojíme v strede každej steny stred a z týchto stredov vytvoríme teleso, ktoré ich bude mať za svoje vrcholy, tak toto teleso bude tiež platónske. Konkrétne dvojice platónskych telies vidíme na obrázku.

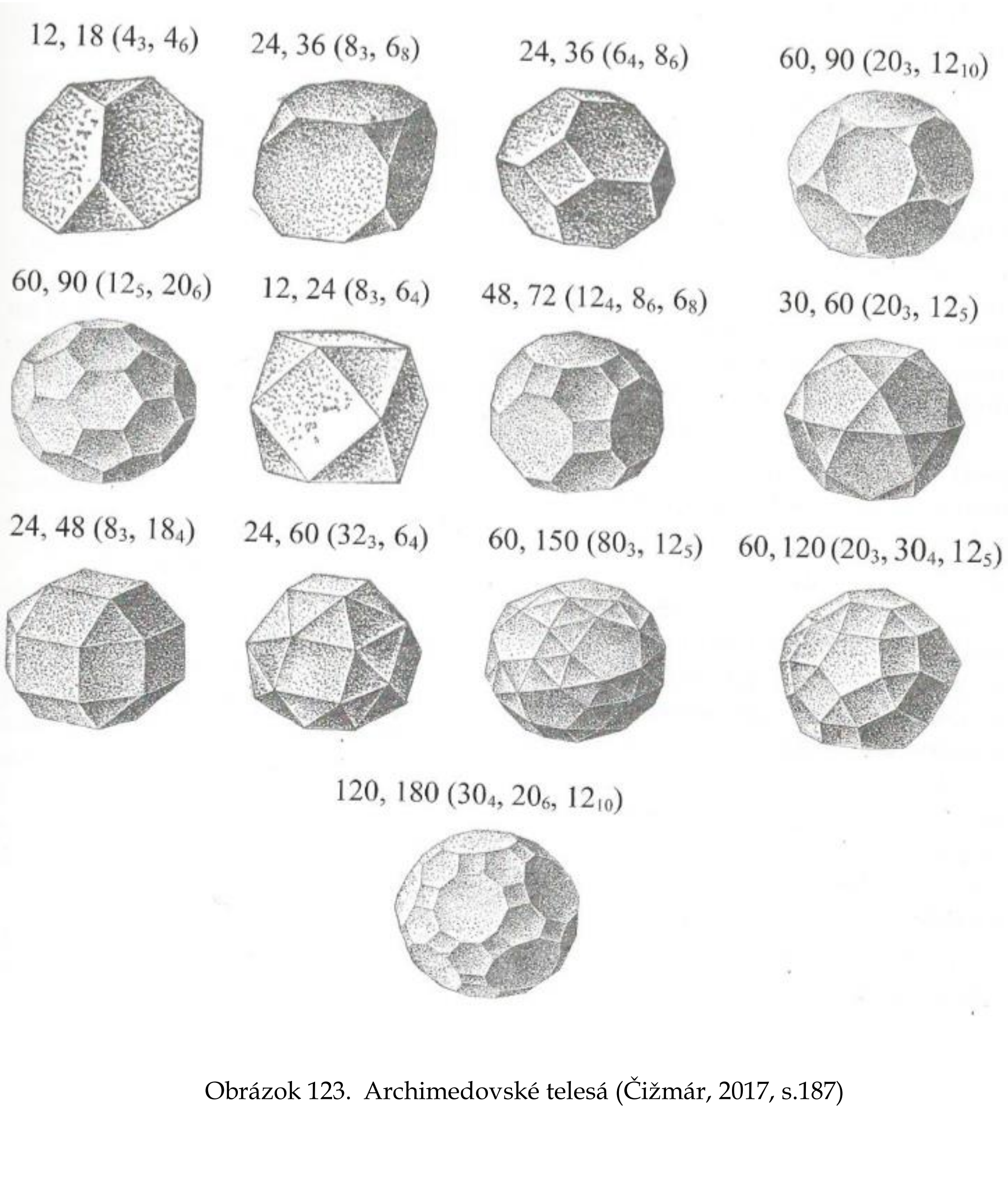


Obrázok 122. Platónske telesá (https://slideplayer.cz/slide/1885219/)

## Archimedovské telesá

Archimedovské telesá sa nazývajú aj polopravidelné telesá. Sú to také telesá, ktorých steny tvoria pravidelné mnohouholníky aspoň dvoch rôznych druhov a všetky uhly, ktoré zvierajú susedné steny, sú navzájom zhodné. Všetkých polopravidelných mnohostenov je trinásť typov.

Na obrázku nižšie sú popísané nasledovne – prvé číslo je počet vrcholov, druhé číslo počet hrán. Čísla v zátvorkách udávajú počet stien, v dolnom indexe je typ steny. T.j. prvé teleso vľavo hore má 12 vrcholov, 18 hrán, 4 trojuholníkové a 4 šesťuholníkové steny.




Obrázok 123. Archimedovské telesá (Čižmár, 2017, s.187)

# Zobrazovanie priestorových objektov v rovine

V nasledujúcom texte priblížime tri spôsoby, ako možno zakresliť priestorové objekty do roviny: najvyužívanejší spôsob v školskej praxi– voľné rovnobežné premietanie, najjednoduchší spôsob na zakresľovanie – kolmé premietanie a najnázornejší spôsob – lineárnu perspektívu.

Pri zakresľovaní trojrozmerných objektov do roviny môžeme použiť viacero techník. Všetky pracujú s pojmom *priemetňa* alebo *nákresňa*, čo je rovina, do ktorej objekt zakresľujeme. Pred samotným zakresľovaním je vhodné predstaviť si nielen teleso, ale aj presné umiestnenie priemetne vzhľadom na polohu telesa v priestore, aby sme vedeli určiť, ktoré hrany telesa sú rovnobežné s priemetňou a ktoré sú kolmé na priemetňu.

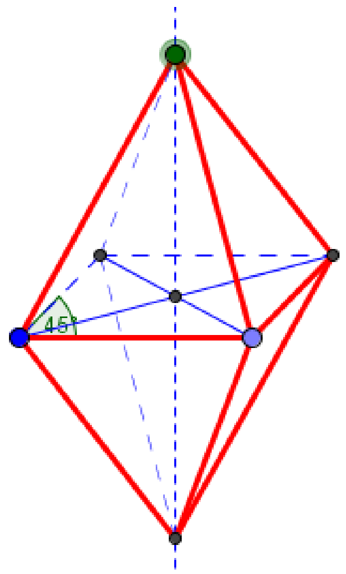
## Voľné rovnobežné premietanie (VRP)

Na rysovanie priestorových objektov využívame najčastejšie tzv. voľné rovnobežné premietanie. V tomto type premietania rysujeme nasledovne:

- ✓ Úsečky, ktoré sú rovnobežné s priemetňou, narysujeme presne také, aké sú (smer aj dĺžka).
- ✓ Úsečky, ktoré sú kolmé na priemetňu, nakreslíme pod 45 stupňovým uhlom a skrátené na polovicu skutočnej dĺžky.
- ✓ Ostatné úsečky získavame používaním predchádzajúcich dvoch postupov s prihliadnutím na to, že rovnobežné priamky sa zobrazia zasa do rovnobežných priamok a spoločné body (priesečníky) sa zobrazia na spoločné body.

*7. Narysujte vo voľnom rovnobežnom premietaní ihlan so štvorcovou podstavou.*

Narysujeme základňu v tvare rovnobežníka, nájdeme stred základne a vedieme ním výšku. Táto výška je rovnobežná s priemetňou, takže nanesieme jej skutočnú dĺžku. Tak získame vrchol ihlana. Na obrázku 124 vidíme dva zhodné ihlany so spoločnou základňou.

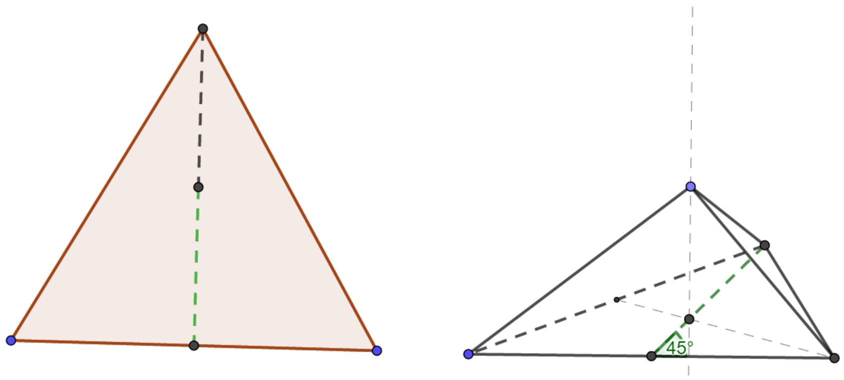


Obrázok 124. VRP - štvorboké ihlany

8. *Nakreslite vo VRP ihlan s podstavou rovnostranného trojuholníka*

Jednu stranu základne môžeme narysovať priamo. Ďalšie dve nemôžeme kresliť priamo, pretože nie sú ani rovnobežné s priemetňou, ani kolmé na priemetňu. Využijeme skutočnosť, že v rovnostrannom trojuholníku je ťažnica zároveň výškou – teda ťažnica je kolmá na priemetňu, a tak ju môžeme priamo rysovať. Pravdaže, bude otočená o 45° a skrátená na polovicu skutočnej dĺžky. Jej skutočnú dĺžku vypočítame pomocou Pytagorovej vety alebo použijeme pomocný nákres (viď obr. 125), kde presne narysujeme podstavu a polovicu ťažnice prenesieme.

Výšku ihlana sme zvolili ľubovoľnú, keďže v zadaní nebola presne určená.



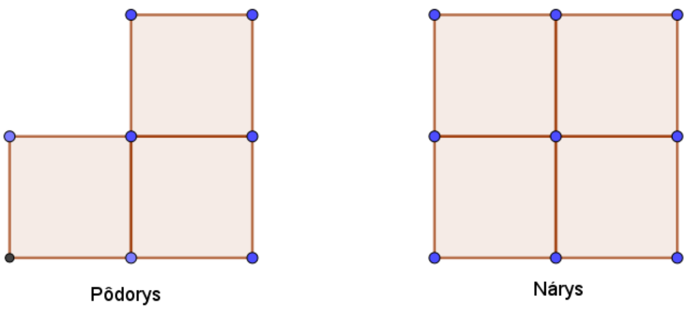
Obrázok 125. VRP - štvorsten

## Kolmé premietanie

V kolmom premietaní používame niekoľko priemetní. Nazývajú sa *pôdorys* (pohľad zhora), *nárys* (pohľad spredu) a *bokorys* (pohľad zboku). Tieto priemetne musia byť navzájom kolmé. Nie vždy sa používajú všetky tri súčasne. Napríklad pri rozmiestňovaní nábytku v izbe zväčša postačí pôdorys. Ak potrebujeme umiestňovať aj poličky v rôznych výškach, budeme potrebovať aj nárys alebo bokorys.

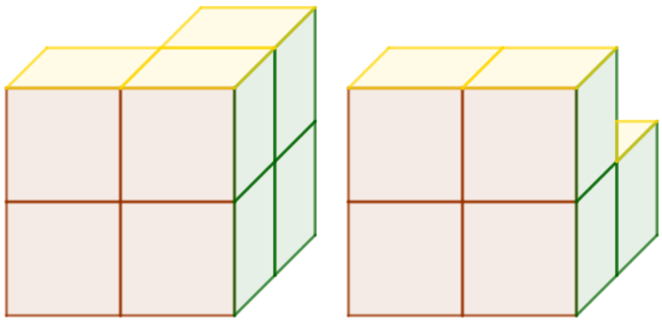
Kolmé premietanie nie je vždy jednoznačné (nedá sa zrekonštruovať pôvodný objekt).

*9. Aká stavba je zobrazená na obrázku?*




Obrázok 126. Kolmé premietanie – kocky1

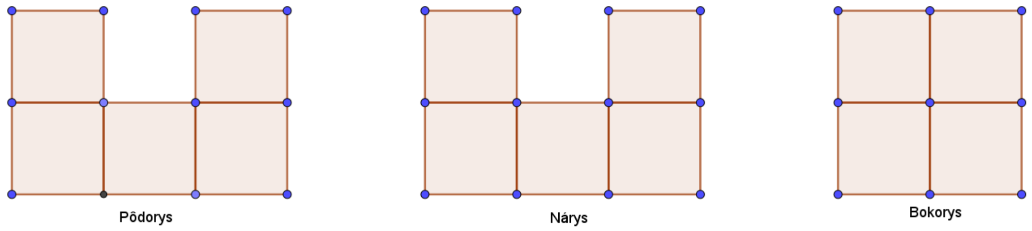
Odpoveď nie je jednoznačná, pretože nevidíme bokorys – nevieme, či je zadná kocka iba jedna, alebo sú dve na sebe, prípadne chýba predná pravá kocka. Vo voľnom rovnobežnom premietaní by nákresy dvoch z možných stavieb kociek vyzerali nasledovne:



Obrázok 127. Stavba z kociek vo VRP

Všimnime si, že ani VRP nedáva jednoznačnú odpoveď na rozloženie kociek. Podľa ktoréhokoľvek z obrázkov stavieb vo VRP by sme na tomto obrázku nevedeli jednoznačne určiť pôdorys stavby. Vľavo vzadu totiž môže byť ešte jedna kocka.

*10. Z koľkých kociek je zložená stavba zobrazená na obrázku 128?*

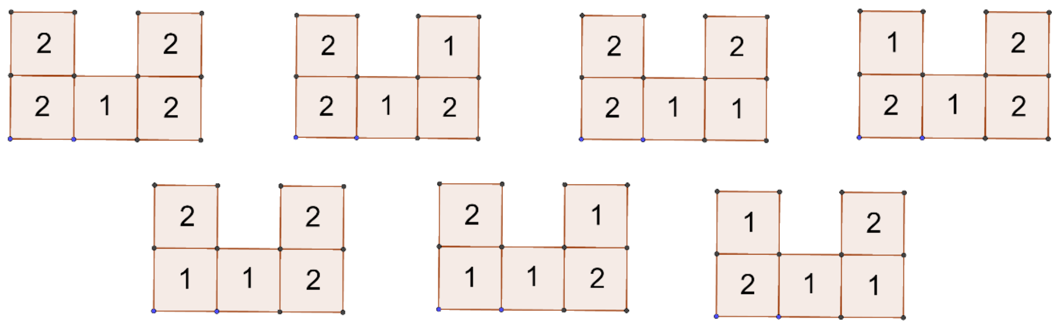



Obrázok 128. Kolmé premietanie – kocky2

Toto je stavba, pri ktorej ani použitie všetkých troch priemetní nedáva jednoznačnú odpoveď.

- V školskej matematike používame často na zobrazenie stavieb z kociek pôdorys, ktorý upravíme tak, že do každého štvorčeka vpíšeme číslo označujúce počet kociek položených nad sebou, čím dosiahneme jednoznačnosť zobrazenia. To však platí iba pre stavby, ktoré vzniknú tak, že kocky ukladáme vždy celými stenami na seba.

Stavba z úlohy 10 môže mať niektorý z nasledujúcich pôdorysov:




Obrázok 129. Stavby z kociek – kódovanie

*11. Aký tvar bude mať pôdorys, nárys a bokorys kužeľa?*

V prípade, že podstava kužeľa je umiestnená rovnobežne s pôdorysnou nákresňou, tak pôdorysom kužeľa je kruh, nárysom a bokorysom je rovnoramenný trojuholník.

## Lineárna perspektíva

Lineárna perspektíva je spôsob, ako na obraze vytvoriť ilúziu hĺbky. Lineárna perspektíva sa opiera o skutočnosť, že vzdialenejšie objekty sa nám zdajú byť menšie a navzájom rovnobežné priamky, ktoré nie sú rovnobežné s nákresňou, sa z pohľadu pozorovateľa zbiehajú v úbežníku.

S touto skutočnosťou pracovali maliari už v období ranej renesancie. Známym predstaviteľom tzv. trojrozmerného realizmu bol Giotto di Bondone (1267-1337), ktorý vytváral ilúziu hĺbky pomocou sklonu čiar. Čiary nad úrovňou očí pozorovateľa sa zvažovali nadol, zatiaľ čo tie pod ňou stúpali nahor. Čiary na krajoch boli zošikmené smerom do stredu.

Najlepší matematický popis perspektívy z obdobia renesancie v 15. storočí pochádza od popredného matematika a maliara Piera della Francescu (1410/1420-1492). Vytvoril vzorec na výpočet veľkosti objektu na plátne v závislosti od vzdialenosti od pozorovateľa. Pomocou dvoch pravítok sa dokázal popasovať aj so zobrazením zložitých objektov. Jedným meral šírku objektu a druhým výšku, čím vlastne vytvoril systém súradníc, ktorý mu slúžil na správne zakreslenie bodov zobrazovaného objektu. (Jackson, 2013, s.36-37)

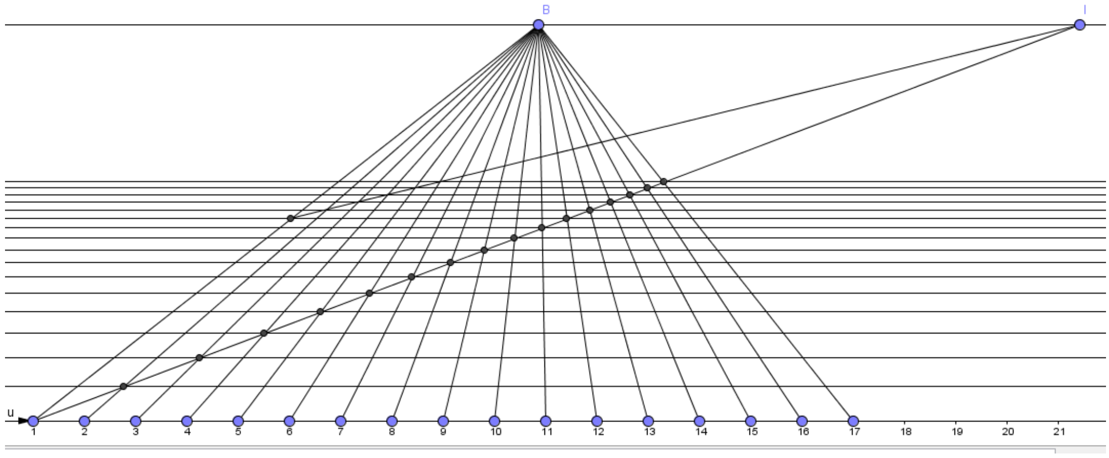
Obrázok 130. Piero della Francesca – Bičovanie Krista, 1455

Lineárnou perspektívou znázorňujeme väčšie objekty, u ktorých nám záleží na tom, aby bol obraz čo najviac podobný obrazu, ktorý vidíme očami.

Základnými prvkami, ktoré volíme, sú:

*Horizont* - priamka rovnobežná so spodnou hranou nákresne.

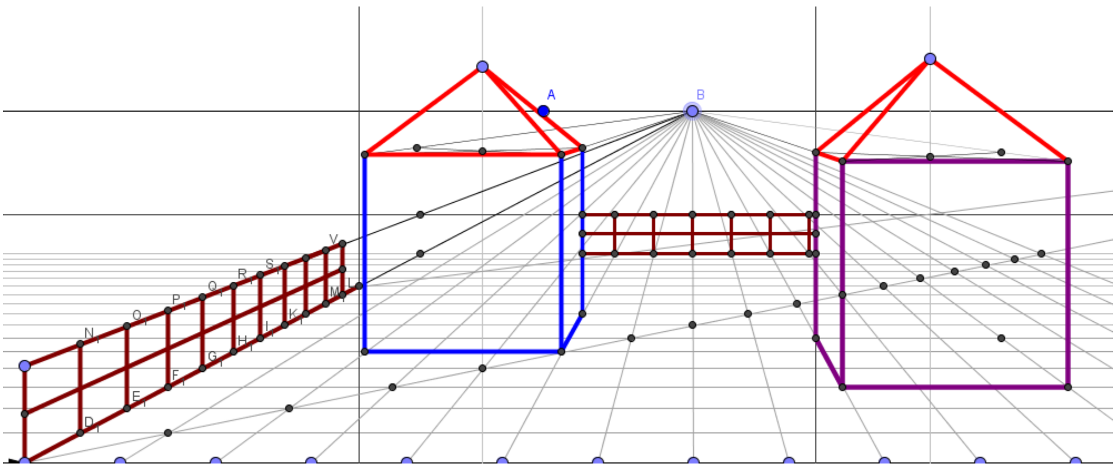
*Úbežník* - bod na horizonte, do ktorého sa zbiehajú všetky navzájom rovnobežné priamky, ktoré nie sú rovnobežné s nákresňou.




Obrázok 131. Lineárna perspektíva – horizont a úbežníky

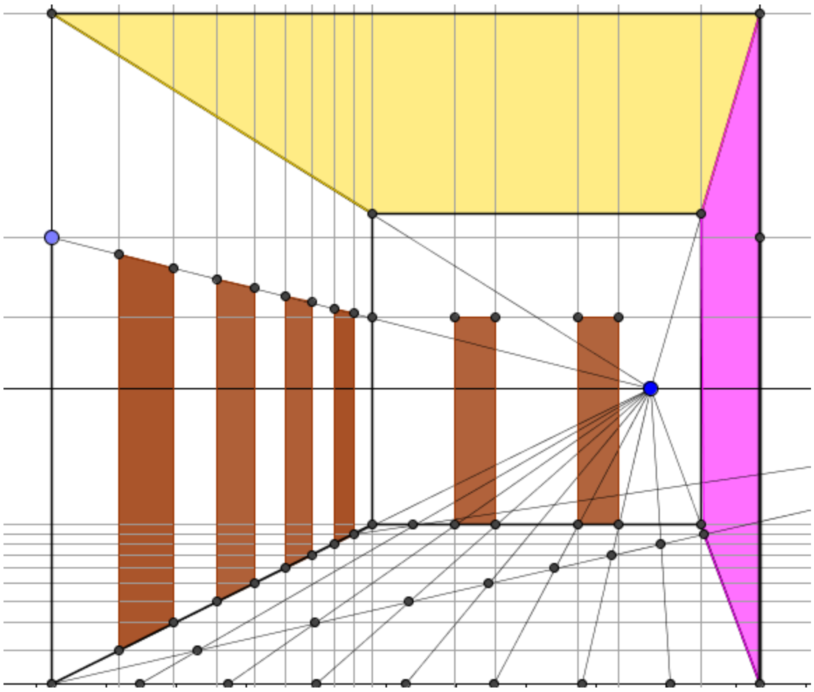
Na obrázku 131 vidíme jeden úbežník v strede a druhý pomocný, do ktorého sa zbiehajú všetky uhlopriečky štvorčekov (tie sú v skutočnosti navzájom rovnobežné). Tento druhý úbežník bolo potrebné zaviesť kvôli správnemu narysovaniu postupne sa skracujúcich dĺžok.

Priamky rovnobežné s nákresňou: rovnobežky s horizontom, a takisto výšky sa zobrazia do rovnobežiek.




Obrázok 132. Lineárna perspektíva - domy

Úsečky rovnobežné s nákresňou nezachovávajú svoju dĺžku tak, ako tomu bolo pri voľnom rovnobežnom premietaní, ale sa postupne skracujú podľa toho, ako sa približujú k horizontu.



Obrázok 133. Lineárna perspektíva – chodba

## Úlohy

1) Zostrojte všetky rôzne siete kocky a vytvorte z nich modely kocky.
2) Vytvorte tabuľku platónskych telies, kde popíšete počet vrcholov, hrán a stien.
3) Zostrojte modely vybraných troch archimedovských telies.
4) Nakreslite vo VRP vlastnú stavbu z dvanástich kociek.
5) Nakreslite túto istú stavbu v kolmom premietaní do troch priemetní.
6) Nakreslite túto istú stavbu v lineárnej perspektíve.
7) Nakreslite vo VRP chýbajúcu stavbu k obrázku 127.
8) Aký tvar bude mať pôdorys, nárys a bokorys valca?
9) Hra vo dvojici: vytvorte stavbu z kociek a nakreslite k nej pôdorys, nárys a bokorys. Tieto tri obrázky dajte spoluhráčovi. Ten má uhádnuť, o akú stavbu ide (nakreslí jej kódovanie). Ak uhádne, má bod on, ak nie, tak máte bod vy.
10) Nakreslite v lineárnej perspektíve šachovnicu a umiestnite na ňu niekoľko kociek, ktorých jedna stena pokrýva presne jedno políčko šachovnice.

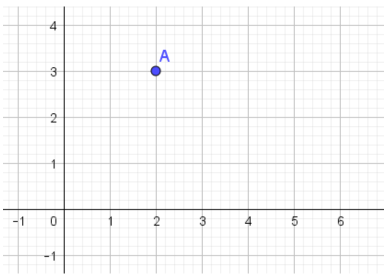
# VII. Analytická geometria

*„Čtvercová síť je geometrickým vyjádřením starého hesla: Divide et impera. Rozdeľ a panuj!" F. Kadeřávek*

História analytickej geometrie je úzko spätá s jedným významným matematikom 17-teho storočia. Až do tohto obdobia vládol svetu matematiky Euklidovský pohľad. S číslami sa veľmi ťažkopádne počítalo (grécke čísla, rímske čísla), až kým sa do Európy nedostali indo-arabské číslice a jednoduché algoritmy počítania. Ľudia si preto často počítanie znázorňovali pomocou geometrie – číslo bola dĺžka úsečky, súčin čísel plocha a pod. Preto sa nula a záporné čísla vôbec nepoužívali.

Zmenu priniesol *René Descartes* (1596-1650), ktorý je považovaný za "zakladateľa modernej filozofie" a "otca modernej matematiky". Často citovaná veta "Cogito, ergo sum." (Myslím, teda som.) je práve jeho. Do dejín filozofie sa zapísal predstavou o dualizme myslenia a hmotnej existencie človeka (telo a duša). V matematike máme vďaka nemu viacero označení, napr.: $x \cdot x \cdot x = x^3$. Ale najväčší význam má vznik analytickej geometrie, teda geometrie, v ktorej sú geometrické objekty nahradené rovnicami a namiesto rysovania sa riešia sústavy rovníc. To umožňuje zistiť napríklad prienik dvoch objektov s takou presnosťou, s akou sme ochotní počítať, a výsledok nie je závislý na kvalite rysovacích pomôcok. (Mareš, 2008, s.107-109)

Pre analytickú geometriu je typické zavedenie sústavy súradníc – *karteziánskeho súradnicového systému*. (Descartes používal latinskú podobu svojho mena *Cartesius.)* V rovine ide o dve obyčajne navzájom kolmé priamky, v priestore tri navzájom kolmé priamky. Týmito priamkami preložíme číselné osi s nulou v ich prieniku. Obyčajne označujeme vodorovnú priamku *os* $x$ a zvislú priamku *os* $y$. Poloha bodu v rovine je potom daná dvojicou čísel $A[x; y]$.

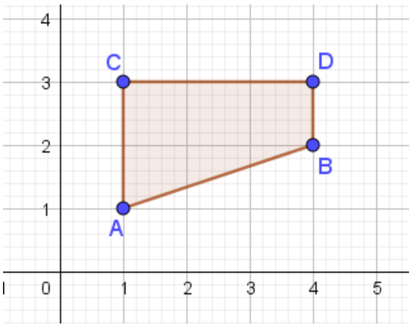



Obrázok 134. Bod $A[2; 3]$

- Vhodnou propedeutikou k analytickej geometrii je práca v štvorcovej sieti. *Štvorcová sieť* je množina dvoch typov priamok – horizontálnych a vertikálnych. Všetky horizontálne (resp. vertikálne) priamky sú navzájom rovnobežné a vzdialenosť ľubovoľnej z nich k najbližším horizontálnym (resp. vertikálnym) priamkam z oboch strán je vždy rovnaká. Túto vzdialenosť považujeme za jednotku dĺžky. Zo štvorcovej siete je iba krok k systému súradníc – stačí určiť začiatok (nulu).

So štvorcovou sieťou súvisí pojem *mrežový mnohouholník.* To je taký mnohouholník, ktorého všetky vrcholy ležia na priesečníkoch štvorcovej siete. V reči karteziánskej sústavy súradníc by sme povedali, že mrežový bod je taký, ktorého obe súradnice sú celé čísla. Mrežový mnohouholník je teda taký mnohouholník, ktorého všetky vrcholy sú mrežové body.

1. *Zakreslite štvoruholník s vrcholmi A[1; 1], B[4; 2], C[1; 3], D[4; 3]. O aký štvoruholník sa jedná? Aká je vzdialenosť bodov A a B?*




Obrázok 135. Štvoruholník v štvorcovej sieti

Tieto body určujú štvoruholník *ABDC,* ktorý je lichobežníkom. Vzdialenosť bodov vypočítame z Pytagorovej vety: rozdiel $x$-ových súradníc bodov $A$ a $B$ je 3, rozdiel $y$-ových je 1. To sú odvesny pravouhlého trojuholníka s hľadanou preponou. Preto je vzdialenosť $|AB| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$

Vzorec pre výpočet vzdialenosti dvoch bodov vyplýva práve z tohto postupu.

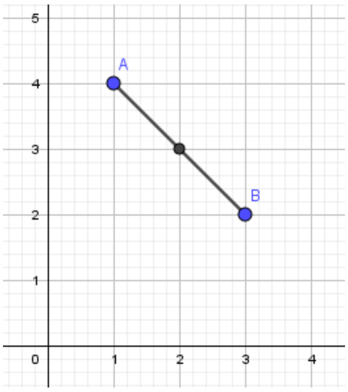
2. *Určte obsah štvoruholníka z predchádzajúcej úlohy*

Obsah mrežových mnohouholníkov určujeme ich rozdelením na obdĺžniky a trojuholníky, ktorých obsah je možné ľahko vypočítať (sú pravouhlé alebo je známa veľkosť výšky a dĺžka jednej strany)

V tomto prípade sa štvoruholník skladá z obdĺžnika veľkosti 3 štvorčeky a trojuholníka veľkosti polovica z troch štvorčekov, čiže spolu je obsah štvoruholníka 4,5 jednotkových štvorčekov.

3. *Sú dané dva body A[1; 4] a B[3; 2]. Určte súradnice stredu úsečky AB.*

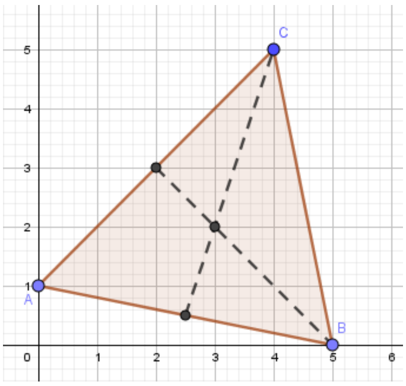
Skúsime úlohu vyriešiť najprv z obrázka 136.




Obrázok 136. Stred úsečky

Vyzerá to tak, že stred bude mať súradnice $S[2; 3]$. Všimnime si, že $x$-ová súradnica je presne aritmetickým priemerom $x$-ových súradníc bodov $A$ a $B$. To isté platí aj pre $y$-ovú súradnicu. Tento poznatok je všeobecne platný – súradnice stredu úsečky získame vždy ako aritmetický priemer súradníc krajných bodov úsečky.

4. *Nájdite ťažisko trojuholníka, ktorého vrcholy sú body $A[0; 1]$, $B[5; 0]$ a $C[4; 5]$.*




Obrázok 137. Ťažisko trojuholníka

V tomto prípade z konštrukcie vidíme, že ťažisko by malo mať súradnice $T[3; 2]$. Všimnime si, že aj v tomto prípade sú súradnice ťažiska aritmetickým priemerom súradníc všetkých troch vrcholov trojuholníka. Toto tvrdenie platí pre všetky trojuholníky v rovine.

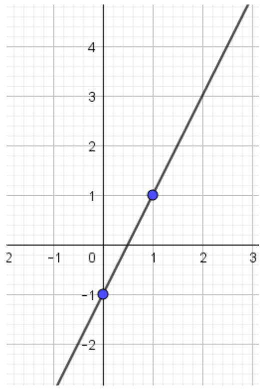
## Priamka v rovine

V analytickej geometrii je priamka určená lineárnou rovnicou. Najčastejšie má tvar: $p$: $y = ax + b$, kde $a$, $b$ sú konkrétne reálne čísla. Priamka rovnobežná s osou $x$ má rovnicu tvaru: $y = b$, kde $b$ je reálne číslo. Priamka rovnobežná s osou $y$ má rovnicu tvaru $x = c$, kde $c$ je reálne číslo. Všetky body priamky majú také súradnice, ktoré po dosadení do rovnice priamky dávajú platnú rovnosť.

5. *Zakreslite priamku p: $y = 2x - 1$*

Pre zakreslenie priamky potrebujeme určiť aspoň dva body, ktoré na nej ležia. Priamka je daná rovnicou o dvoch neznámych, teda za jednu neznámu môžeme dosadiť ľubovoľné číslo a druhú dopočítať.

Nech je $x = 1$, potom $y = 1$ a máme prvý bod. Druhý určíme takisto, napr. nech $x = 0$, potom $y = -1$.



Obrázok 138. Priamka v súradnicovej sústave

6. *Určte rovnicu osí x a y.*

Keďže všetky body na osi $x$ majú súradnice typu [0; 0], [1; 0], [2; 0], [-1,24; 0], a pod., tak os $x$ má rovnicu $y = 0$. Z rovnakého dôvodu má os $y$ rovnicu $x = 0$.

7. *Určte priesečník priamok p: $y = 3x + 2$ a q: $y = -x + 1$.*

Na riešenie tejto úlohy nie je nutné priamky zobrazovať. Riešením úlohy je riešenie sústavy rovníc. Bod, v ktorom sa priamky pretnú, leží na oboch z nich, takže jeho súradnice musia spĺňať súčasne obe rovnice.

I. $y = 3x + 2$

$\underline{II: \quad y = -x + 1 \quad /.3}$

$4y = 5$, t.j. $y = 1,25$

$1,25 = -x + 1$, t.j. $x = -0,25$

Priamky sa pretínajú v bode $X[-0,25; 1,25]$.

8. *Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodmi A[0; 1] a B[-1; 2].*

Rovnica priamky má mať tvar: $y = ax + b$, pričom máme určiť presné hodnoty premenných $a$ a $b$. Vieme, že túto rovnicu musia spĺňať súradnice daných bodov $A$ a $B$. Preto stačí ich súradnice dosadiť do hľadanej rovnice a doriešiť sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych.

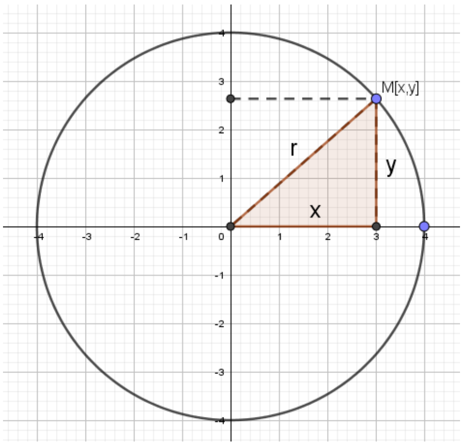
$A$: $1 = 0 \cdot a + b$

$B$: $2 = -1 \cdot a + b$

Riešením je dvojica $b = 1$; $a = -1$, takže hľadaná rovnica priamky je $y = -x + 1$.

## Kružnica so stredom v začiatku súradnicovej sústavy

Takáto kružnica je množinou bodov, ktoré spĺňajú rovnicu $x^2 + y^2 = r^2$, kde $r$ je práve polomer kružnice. Skutočne sa môžeme presvedčiť, že každý bod kružnice túto vlastnosť spĺňa, pretože to vyplýva z Pytagorovej vety.

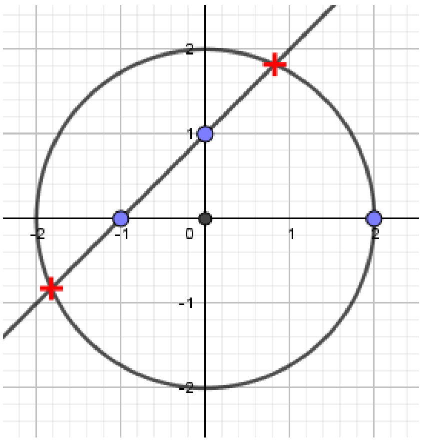



Obrázok 139. Kružnica

Kružnica na predchádzajúcom obrázku je daná rovnicou $x^2 + y^2 = 16$.

9. *Je daná kružnica $k: x^2 + y^2 = 4$ a priamka $p$: $y = x + 1$. Zistite, či je priamka sečnicou kružnice a ak áno, aké súradnice majú spoločné body.*

Riešenie úlohy skúsime najprv odhadnúť graficky.



Obrázok 140. Priesečníky priamky a kružnice

Vidíme, že priamka bude naozaj sečnicou kružnice. Body, v ktorých sa pretínajú, však nebudú mať celočíselné súradnice. Presnosť ich polohy by bola v prípade konštrukčného riešenia výrazne ovplyvnená presnosťou konštrukcie. V analytickej geometrii môžeme ich polohu vypočítať úplne presne. Spoločné body totiž musia spĺňať obe rovnice (rovnicu kružnice aj rovnicu priamky), takže stačí opäť riešiť sústavu dvoch rovníc, avšak tentokrát je jedna z nich kvadratická, preto použijeme dosadzovaciu metódu.

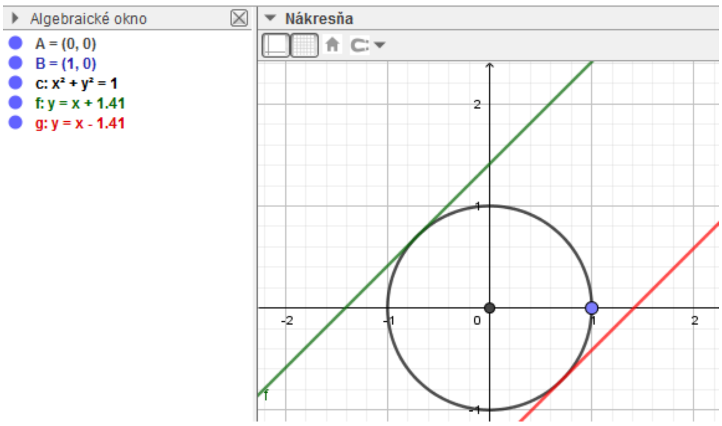
Po vyjadrení $y$ z rovnice priamky a dosadení do rovnice kružnice dostávame $x^2 + (x+1)^2 = 4$, t.j. $2x^2 + 2x - 3 = 0$

Riešenia tejto rovnice sú dve: $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ alebo $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$. Takže presná poloha priesečníkov je $P_1\left[\frac{-1+\sqrt{7}}{2}; \frac{-1+\sqrt{7}}{2}+1\right]$ a $P_2\left[\frac{-1-\sqrt{7}}{2}; \frac{-1-\sqrt{7}}{2}+1\right]$. Tento výsledok môžeme zaokrúhliť na toľko desatinných miest, na koľko sme ochotní počítať. Pre kontrolu zosúladenia s obrázkom 140 použijeme zaokrúhlenie na jedno desatinné miesto: $P_1[0{,}8; 1{,}8]$ a $P_2[-1{,}8; -0{,}8]$.

10. *Priamka p: $y = x + m$ sa dotýka kružnice k: $x^2 + y^2 = 1$. Nájdite presnú hodnotu premennej $m$.*

Riešenie tejto úlohy je podobné riešeniu predchádzajúcej úlohy s tým rozdielom, že teraz nepotrebujeme presne určiť body, v ktorých priamka pretne kružnicu. Naopak, podmienku, že priesečníkom má byť jediný bod, musíme využiť na to, aby sme určili hodnotu neznámej $m$.

Tvárme sa teraz tak, že ideme určiť priesečníky priamky a kružnice. Riešime teda sústavu dvoch rovníc. Z lineárnej dosadíme do kvadratickej, čím dostaneme rovnicu: $x^2 + (x+m)^2 = 1$, t.j. $2x^2 + 2mx + (m^2 - 1) = 0$. Keďže riešením tejto rovnice má byť iba jedno číslo, diskriminant musí byť rovný nule: $4m^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 1) = 0$, z čoho hneď dostávame konkrétne hodnoty premennej $m$ a dokonca vidíme, že sú dve správne riešenia: $m = \pm\sqrt{2}$.




Obrázok 141. Dotyčnice kružnice

# Úlohy

1) Nakreslite v štvorcovej sieti ľubovoľný mrežový päťuholník. Zvoľte jeden jeho bod za začiatok súradnicovej sústavy a napíšte súradnice všetkých jeho vrcholov.
2) Určte obsah päťuholníka z predchádzajúcej úlohy.
3) Vypočítajte súradnice stredu úsečky $AB$, kde $A[1; 1]$ a $B[0; 5]$.
4) Je daná úsečka $AB$, pričom poznáme súradnice bodu $A[0; 3]$ a stredu úsečky $S[1; 2]$. Aké súradnice má bod $B$?
5) Zakreslite priamky z riešenej úlohy č.7 a graficky overte správnosť výpočtu ich prieniku.
6) Určte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodmi $A[-1; 4]$ a $B[2; 1]$.
7) Určte, v akom bode pretne priamka z predchádzajúcej úlohy os $x$.
8) Určte, v akom bode pretne priamka z úlohy 6 os $y$.
9) Zakreslite do jedného obrázka priamky $p: y = 2x – 1$, $q: y = 2x +1$, $r: y = 2x – 3$, $s: y = 2x$. Sformulujte, čo zaujímavé ste si všimli.
10) Zakreslite do jedného obrázka priamky $p: y = -x + 1$, $q: y = -x + 5$, $r: y = -x$. Sformulujte, čo zaujímavé ste si všimli.
11) Viete z riešenia úloh 9 a 10 vyvodiť nejaký záver o parametri $b$ v rovniciach priamok tvaru: $y = ax + b$?
12) Zakreslite do jedného obrázka priamky: $y = ax$, pričom $a$ = -2, -1, 0, 1, 2, 3. Čo určuje parameter $a$?

# VIII. Topológia

Topológia sa nazýva aj "gumenou geometriou" alebo "kvalitatívnou geometriou". Na rozdiel od kvantitatívnej geometrie, v ktorej sú dôležité rozmery objektov, topológia je to, čo zostane z geometrie, keď z nej vylúčime všetko, čo súvisí s meraním a veľkosťou.

Kľúčovými slovami v nej sú: *množina, podmnožina, nadmnožina, hranice, vnútrajšok, vonkajšok* a náročnejší pojem *spojitá transformácia* - to je spôsob, ako z jednej množiny urobíme inú len tým, že ju ohneme, miestami natiahneme, miestami stlačíme, pokrčíme, ale nikde nepretrhneme ani nezlepíme rôzne časti či konce k sebe. (Mareš, 2008, s.238)

Zaujímavé je, že pre geometrickú topológiu existujú iba dva typy trojrozmerných telies: gule s prípadnými otvormi a podobné gule, ktoré však majú niektorý otvor "zašitý" Möbiovou páskou. (Pozri s. 112.)

1. *Predstavte si, ako by ste pretransformovali guľu na akýkoľvek hranol, valec, ihlan, či kužeľ.*

   - Spojitú transformáciu si môžeme predstaviť ako prácu s plastelínou, ktorú však nesmieme nikde pretrhnúť ani zlepovať. Navyše táto abstraktná plastelína sa dá ľubovoľne naťahovať aj zmršťovať.

2. *Predstavte si, ako by ste pomocou spojitej transformácie urobili z donutu hrnček (s uškom).*

Podstatnou myšlienkou je začať dierou - diera v donute bude dierou na ušku hrnčeka.

Ak je možné jeden objekt transformovať na iný pomocou spojitej transformácie, tak takéto objekty nazývame *topologicky ekvivalentnými*.

3. *Rozdeľte tlačené malé písmená slovenskej abecedy do skupín topologicky ekvivalentných tvarov.*

Nebudeme uvažovať dvojhlásky, hlásky s dĺžňami ani mäkčeňmi. Klasifikácia záleží aj od typu písma. Písmo použité v tomto texte má názov Book Antiqua a jeho písmená môžeme rozdeliť nasledovne:

Všetky písmená bez diery a súvislé: c,f,h,k,l,m,n,r,s,t,u,v,x,y,z

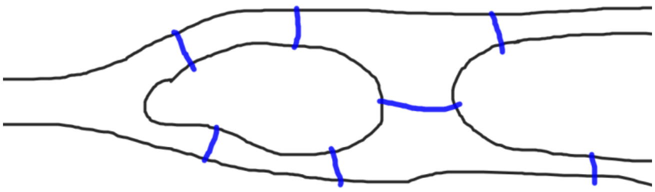
Písmená súvislé a s jednou dierou: a,b,d,e,o,p,q

Písmená súvislé s dvoma dierami: g

Skladajúce sa z dvoch kusov bez diery: i,j.

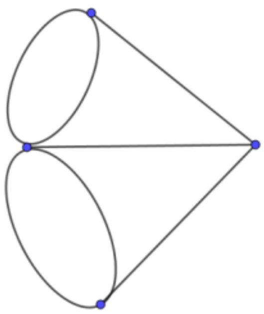
## Problém siedmich mostov Kaliningradu

Prvý, kto narazil na niečo, čo by sme mohli nazvať topológiou, bol *Leonhard Euler* (1707-1783). V roku 1736 publikoval svoje riešenie slávnej úlohy o siedmich mostoch mesta Kaliningrad. Cez toto mesto tiekla rieka Pregel a boli na nej dva ostrovy. Tie boli medzi sebou a brehmi prepojené siedmimi mostami. Miestni obyvatelia sa dlho snažili vyriešiť problém, ako prejsť po každom moste práve raz.



Obrázok 142. Sedem mostov Kaliningradu

Euler si uvedomil, že je úplne jedno, aký je pôdorys ostrovov a brehov. Má vlastne štyri objekty - pevniny (pravý a ľavý breh a dva ostrovy) a medzi nimi sú spojnice - mosty. Pokiaľ chce niekto prejsť po každom moste práve raz a skončiť na tom istom mieste, kde začal, musí na každú pevninu viesť párny počet mostov - jedným príde, druhým odíde, tretím zasa príde, štvrtým odíde... Pokiaľ nepotrebuje skončiť na tom istom mieste, kde začal, môže si dovoliť dve miesta s nepárnym počtom mostov - v jednom začne, v druhom skončí.

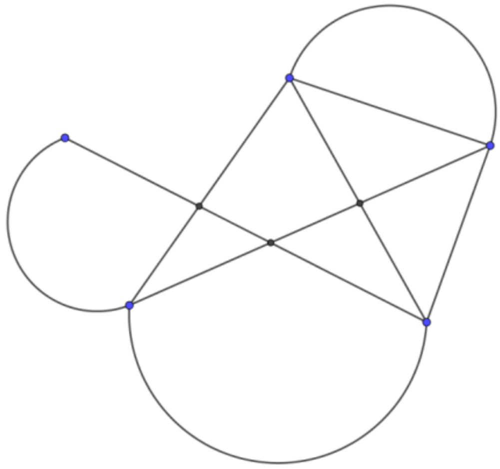


Obrázok 143. Graf siedmych mostov

Pri riešení tohto problému Euler pravdepodobne ako prvý rezignoval na rozmery a veľkosti geometrických objektov a obmedzil sa len na ich vzťahy - ich prepojenia a vzájomú dosiahnuteľnosť. To už je nepochybne topologická myšlienka, ktorá predbehla vznik topológie o storočie a vznik teórie grafov o dve storočia. (Mareš, 2008, s.240)

Problém siedmich mostov Kaliningradu je analogický problému, s akým sa stretávajú deti už v predškolskom veku: Dá sa daný obrázok nakresliť jedným ťahom?

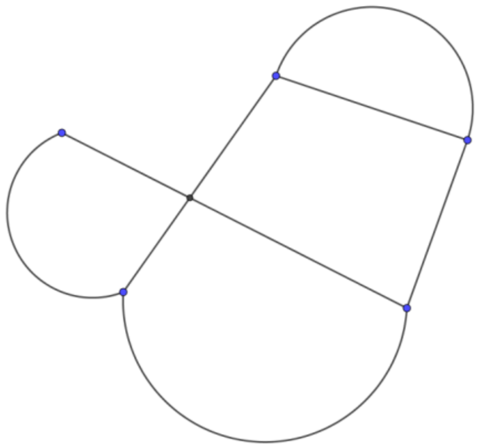
4. *Dá sa nakresliť jedným ťahom nasledujúci obrázok?*



Obrázok 144. Problém nakreslenia obrázka jedným ťahom

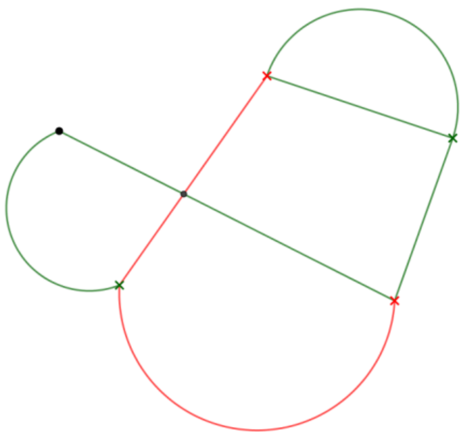
Do každého vrchola vedie párny počet čiar, takže tento obrázok sa dá nakresliť jedným ťahom. Navyše môžeme začať v ľubovoľnom bode, skončíme v tom istom.

5. *Koľko minimálne ťahov potrebujeme na nakreslenie tohto obrázka?*



Obrázok 145. Problém nakreslenia obrázku jedným ťahom 2

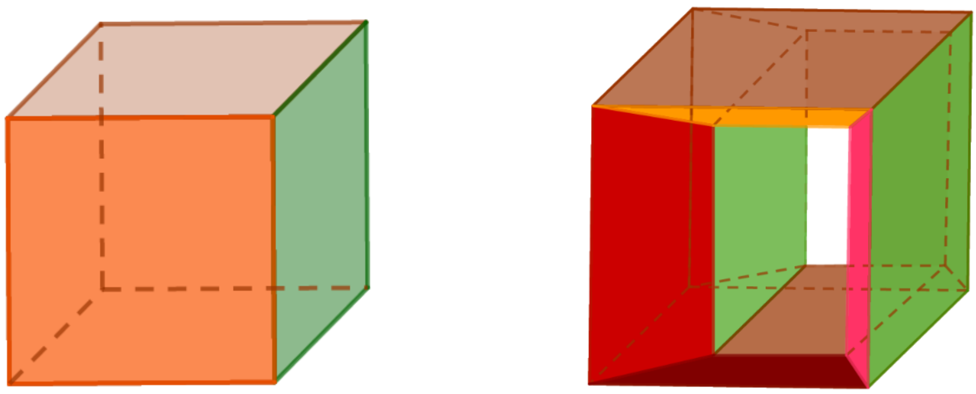
V tomto obrázku máme štyri vrcholy, do ktorých vedie nepárny počet čiar. Budú to dve dvojice začiatok-koniec. (Je jedno, ako ich spárujeme.) Takže potrebujeme minimálne dva ťahy. Konkrétnych spôsobov je viacero, na obrázku 146 vidíme jedno z možných riešení.



Obrázok 146. Dva ťahy

Ďalším zaujímavým Eulerovým výsledkom je aj *vzťah medzi počtom vrcholov, hrán a stien mnohostena*, ktorý platí pre ľubovoľný mnohosten, ktorý je topologicky ekvivalentný guli (nemá žiadne diery). Mnohosten je teleso, ktoré je ohraničené rovinnými mnohouholníkmi. Napríklad každý hranol a ihlan je mnohostenom, ale valec, kužeľ a guľa nie.

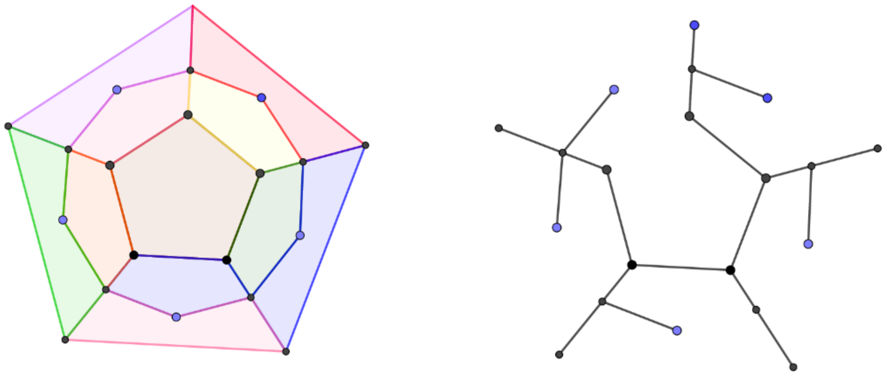
Tento vzťah je vyjadrený vzorcom $v - h + p = 2$, kde $v$ je počet vrcholov, $h$ počet hrán a $p$ počet stien (plôch).



Obrázok 147. Kocka: $v - h + p = 8 - 12 + 6 = 2$, kocka s dierou $v - h + p = 16 - 32 + 16 \neq 2$

Na obrázku 147 vľavo vidíme kocku, pre ktorú Eulerov vzťah platí, a kocku vpravo, v ktorej je diera. Pre druhú kocku Eulerov vzťah neplatí, pretože táto sa nedá spojite transformovať na guľu. Pre takéto mnohosteny platí všeobecnejšia verzia Eulerovho vzťahu: $v - h + p = 2 - 2g$, kde $g$ je počet dier.

Dôkaz platnosti Eulerovho vzťahu je pomerne jednoduchý. Budeme uvažovať len o hranici mnohostena. Túto hranicu pretransformujeme na rovinný graf tak, že vymažeme jednu stenu. Zvyšok roztiahneme a „rozpleštíme" na rovinu tak, aby sa žiadne hrany „nekrížili". Na obrázku 148 vidíme graf pravidelného dvanásťstena. (Pripomíname, že pri riešení topologických problémov vôbec nezáleží na dĺžkach hrán ani na uhloch, ktoré zvierajú.) Pre vzniknutý graf by mal platiť vzťah $v - h + p = 1$, pretože sme zrušili jednu stenu.



Obrázok 148. Dôkaz Eulerovho vzťahu pre pravidelný dvanásťsten

Teraz ideme vymazať jednu z vonkajších hrán, čím sa zbavíme jednej hrany a zároveň aj jednej plochy. (Vrcholy zostanú všetky zachované.) Rovnosť $v - h + p = 1$ sa teda nezmení. Toto robíme dovtedy, kým sa nezbavíme všetkých plôch (obrázok 148 vpravo).

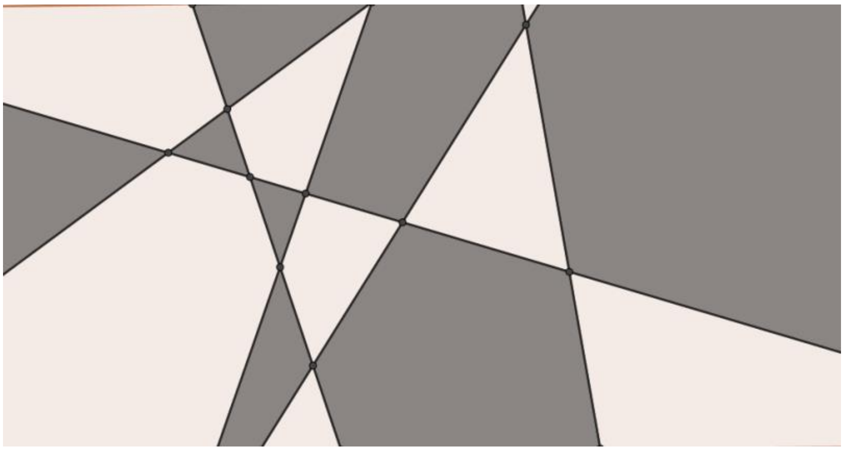
Ďalej budeme mazať jeden koncový vrchol spolu s hranou. Počet vrcholov sa zníži o jeden, počet hrán tiež, čiže rovnosť je stále zachovaná. Pokračujme ďalej, až kým nezostane iba jediný bod, pre ktorý rovnosť zjavne platí. Eulerov vzťah je dokázaný.

## Problém štyroch farieb

Ďalší zaujímavý topologický problém začal krátením chvíle jedného Angličana menom Francis Guthrie v roku 1852. Tento si vyfarboval mapu Anglicka a napadlo ho, koľko minimálne farieb by mu na to malo stačiť, ak žiadne dve susediace grófstva nesmú mať tú istú farbu. Zdalo sa mu, že na niektoré obrázky stačia tri farby, ale štyri by mali stačiť na každý. Nevedel, ako to dokázať, preto sa o tomto probléme rozprával s viacerými matematikmi. Ukázalo sa, že tento na pohľad jednoduchý problém bol v tom čase neriešiteľný. Až roku 1976 sa dvojici Američanov podarilo ukázať, že existuje “len” 1482 vzorov, ktoré stačí vyskúšať - všetky možné mapy sú totiž topologickou transformáciou niektorého z nich. Dôkaz dokončil až počítač, ktorý vyfarbil všetky vzorové štruktúry pomocou štyroch farieb. (Mareš, 2008, s.241)

6. *Koľko minimálne farieb potrebujeme na zafarbenie roviny, ktorá je rozdelená iba priamkami?*

Na zafarbenie všetkých častí roviny, ktorá je rozdelená priamkami, postačia dve farby.



Obrázok 149. Rovina rozdelená priamkami

## Möbiova páska

Na záver spomenieme ešte jednu topologickú zaujímavosť. Je ňou *Möbiova páska* pomenovaná podľa Augusta Ferdinanda Möbiusa (1790-1868). Ide o dlhší prúžok papiera, ktorý zvinieme do prstenca. Potom však jeden koniec otočíme o 180° a takto ho prilepíme k druhému.

Obrázok 150. Möbiova páska

7. *Vytvorte si z papiera Möbiovu pásku. Koľko má strán? Koľko má hrán?*

Zistíme, že má iba jednu stranu - ktorékoľvek dva body vieme spojiť súvislou čiarou bez toho, že by sme prechádzali cez hranu. Hranu má tiež iba jednu.

To, že má iba jednu hranu, má zaujímavý dôsledok - ak by sme totiž zobrali kus látky s vystrihnutou dierou, môžeme látku úplne zaplátať len tým, že budeme hranu pásky postupne prišívať k okraju otvoru. Látka sa tým zacelí, ale bude pokrčená a aj ona bude mať potom iba jednu stranu. (Mareš, 2008, s.246)

8. *Vytvorte Möbiovu pásku a potom ju pozdĺžne prestrihnite (strihajte rovnobežne s hranou). Výsledok opäť pozdĺžne prestrihnite.*

Dostaneme jednu pásku, ale inú - táto by vznikla, ak by sme pri výrobe nepretočili jeden koniec o 180° ale až o 360°. Keď ju prestrihneme opäť, tak sa rozpadne na dve časti toho istého typu, avšak tie budú na seba navlečené.

# Úlohy

1) Je možné spojitou transformáciou pretransformovať ľubovoľný štvorec na päťcípu hviezdu? Nájdite taký plošný útvar, ktorý transformáciou štvorca nedostaneme.
2) Vyskúšajte pomocou plastelíny modelovať postup, ako spojitou transformáciou pretvoríte písmeno „m“ na písmeno „f“.
3) Overte si platnosť vzťahu $v - h + p = 2$ pre niektoré známe mnohosteny.
4) Nakreslite obrázok, ktorý je možné nakresliť jedným ťahom tak, že môžeme začať v ktoromkoľvek bode.
5) Nakreslite ľubovoľný obrázok, ktorý je možné nakresliť jedným ťahom, ale existujú len dva body, v ktorých možno začať.
6) Vyberte ľubovoľný obrázok určený na vymaľovávanie. Určte, koľko ťahov minimálne potrebujeme na jeho nakreslenie. Potom ho vyfarbite s minimálnym počtom farieb tak, že žiadne dve susedné políčka nebudú rovnakej farby.
7) Vyskúšajte túto zaujímavú úlohu: Potrebovať budeme dva kusy látky, ihlu a niť. Jeden kus látky by mal byť štvorec s kruhovou dierou uprostred. Druhý kus látky bude pásik, ktorého dĺžka je polovicou obvodu diery. Z pásika vyrobme Möbiovu pásku (jeden koniec otočíme o 180° a prišijeme k druhému.) Túto Möbiovu pásku začnime prišívať k okraju diery - prišívame a prišívame. Látka sa krčí, ale pokračujeme ďalej, až kým neprišijeme celú pásku. Keďže Möbiova páska má iba jednu hranu a tá je rovnako dlhá ako hrana diery, zašijeme tým celú dieru. Čo sme vyrobili? Koľko to má strán?
8) Pozrite sa na známy symbol pre recykláciu. Predstavte si, že šípky sú spojené do jedného útvaru. Prejdite sa po ňom v predstave. Z akého topologického objektu je tento symbol odvodený?

9) Zafarbite mapu grófstiev Anglicka na nasledujúcom obrázku minimálnym počtom farieb.

Obrázok 151. https://sk.m.wikipedia.org/wiki/Ve%C4%BEk%C3%BD_Manchester

# IX. Fraktálna geometria

Fraktálna geometria je pomerne mladá oblasť matematiky, ktorej korene siahajú do konca 19-teho storočia. Vtedy boli popísané podivné útvary ako Cantorovo diskontinuum (úsečka, z ktorej odstránime strednú tretinu, potom zo zvyšných úsečiek zasa odstránime stredné tretiny atď.), Peanova krivka (čiara, ktorá vyplní celý štvorec), neskôr Kochova krivka a ďalšie. Na tieto útvary reagovali mnohí vtedajší matematici veľmi negatívne. Až v 70-tych rokoch 20-teho storočia Benoit B. Mandelbrot (1924-2010) ukázal, že tieto „monštrá" sú len špičkou ľadovca v teórii, ktorá dokáže veľmi dobre popisovať geometrický vzhľad nášho sveta a správanie dynamických systémov.

Pred vznikom fraktálnej geometrie vládla svetu klasická euklidovská geometria. Jej veľkou slabinou, ktorú si nikdo neuvedomoval, bolo to, že nedokázala jednoduchým spôsobom popísať komplikované štruktúry ako mraky, pobrežia kontinentov, stromy, papradie ... Fraktálna geometria tento problém vyriešila.

Druhou vlastnosťou, ktorou sa líši fraktálna geometria od euklidovskej, je *dimenzia* objektov. V klasickej geometrii sa stretávame s dimenziami 0 (body), 1 (čiary), 2 (plochy), či 3 (priestorové útvary). Všetky tieto dimenzie sú celočíselné. Vo fraktálnej geometrii to tak nie je. Tu sa môžeme stretnúť s útvarmi, ktorých dimenzia nie je celočíselná, napr. 1,58 (Sierpińského trojuholník), 2,76 (odhad pre povrch mozgu človeka: Zelinka, 2006, s. 86) alebo 0,63 (Cantorovo diskontinuum). *Fraktál* je definovaný ako útvar s neceločíselnou dimenziou.

Pri nefraktálnych objektoch platí, že so zmenšovaním meradla sa dĺžka alebo obvod objektu blíži k nejakej limitnej hodnote. Pri fraktáloch to neplatí. Ich dĺžka sa neustále zväčšuje. Táto vlastnosť sa nazýva Richardsonov efekt. Lewis F. Richardson (1881-1953) ako prvý poukázal na to, že medzi dĺžkou hranice, ktorú udávajú Portugalsko a Španielsko existuje až 20% rozdiel. Tento rozdiel vznikol práve použitím inej veľkosti meradla.

- Skúste odmerať nejakú prírodnú hranicu najprv priamou čiarou, potom ju odmerajte pomocou metrového meradla, potom decimetrového, potom skúste s centimetrom...

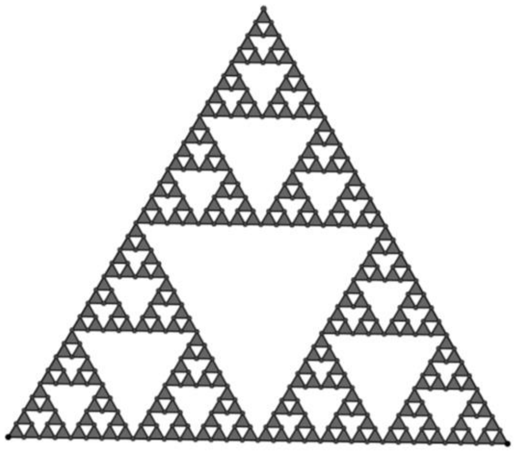
Ďalšou kľúčovou vlastnosťou je tzv. *sebepodobnosť a sebepríbuznosť* objektov. Tieto pojmy vyjadrujú fakt, že pokiaľ zväčšíme ľubovoľnú časť sebepodobného objektu, potom bude tento výrez vyzerať ako pôvodný objekt. Matematicky môžeme pokračovať donekonečna, reálne však narazíme na obmedzujúce podmienky. Napr. korene stromu – ľubovoľný výsek sa podobá pôvodnému celku, môžeme vziať ešte menší výsek a znovu sa bude podobať na pôvodný až po najmenšie korienky, ktoré sa už deliť nemôžu. To je fyzikálna hranica, ktorá v matematickom svete neexistuje. (Zelinka et al., 2006)

*Sebepodobnosť* znamená, že výsek je úplne zhodný s pôvodným. *Sebepríbuznosť* – výsek nie je úplne rovnaký, do tvorby takéhoto útvaru vstupujú isté náhodné premenné. Reálne objekty, ako mraky, stromy, hranice štátov sú zväčša sebepríbuzné.

Na nasledujúcich príkladoch priblížime niektoré z najznámejších fraktálov.

## Sierpińského trojuholník

Otcom tohto fraktálu bol poľský matematik Waclaw Franciszek Sierpiński (1882-1969), ktorý ho publikoval v roku 1916. Jeho konštrukcia je veľmi jednoduchá. Začneme s rovnostranným trojuholníkom, rozdelíme ho strednými priečkami na štyri trojuholníky. Prostredný z nich vymažeme. V ďalšom kroku urobíme to isté s každým trojuholníkom, ktorý zostal. Pokračujeme donekonečna. Na obrázku vidíme Sierpińského trojuholník po piatich krokoch.



Obrázok 152. Sierpińského trojuholník po piatom kroku

Zaujímavosťou je, že tento vzor sa objavil v architektúre už v 12-tom storočí v katedrále v Ravelle, či v Dűrerovej „Maliarovej príručke" z roku 1525. (Zelinka et al., 2006)

1. *Aký je obsah Sierpińského trojuholníka?*

Ak prvý trojuholník mal obsah $S$, po prvom kroku bude mať obsah ¾$S$. Zostali totiž tri trojuholníky so štvrtinovým obsahom oproti pôvodnému.

Po druhom kroku bude mať každý z tých troch trojuholníkov s obsahom ¼$S$ obsah len ¾ z tej ¼$S$. Čiže celý Sierpińského medzi-trojuholník bude mať obsah $(3/4)^2S$.

V treťom kroku $(3/4)^3S$ atď.

Toto číslo sa so zvyšujúcim počtom krokov nevyhnutne blíži k nule. Takže Sierpińského trojuholník má nulový obsah.

2. *Aká je dimenzia Sierpińského trojuholníka?*

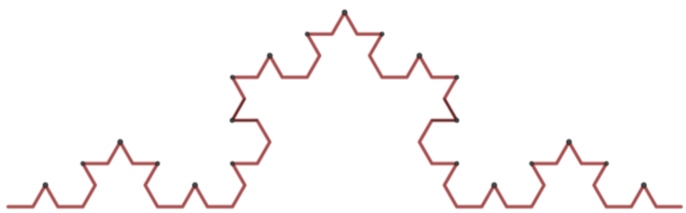
Fraktálnu dimenziu vypočítame zo vzorca: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$, kde $N(\varepsilon)$ je minimálny počet elementárnych útvarov (napríklad štvorcov) so stranou dĺžky $\varepsilon$ potrebných k pokrytiu uvažovaného objektu. (Zelinka et al., 2006)

Na tento účel použijeme elementárne útvary – trojuholníky. Výpočet fraktálnej dimenzie bude podobný ako výpočet obsahu. V tomto prípade stanovíme, že dĺžka strany celého Sierpińského trojuholníka je 1.

Na pokrytie Sierpińského trojuholníka potrebujeme 3 trojuholníky s dĺžkou strany ½, alebo 9 trojuholníkov so stranou dĺžky ¼, ... Všeobecne $3^n$ trojuholníkov so stranou dĺžky $\frac{1}{2^n}$. Dimenzia bude rovná $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong$ 1,58.

# Kochova krivka

Kochova krivka „vznikla" v roku 1904, kedy ju predstavil švédsky matematik Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924). Pri jej konštrukcii začíname úsečkou, z ktorej vymažeme strednú tretinu a nahradíme ju dvoma úsečkami, ktoré by s vymazanou časťou vytvorili rovnostranný trojuholník. V ďalšom kroku pokračujeme tou istou procedúrou na všetkých úsečkách, ktoré tvoria novovzniknutú krivku.



Obrázok 153. Kochova krivka po treťom kroku

Zaujímavá je Kochova krivka, ktorá začína rovnostranným trojuholníkom. Tá sa potom nazýva *Kochovou vločkou* kvôli jej podobnosti so snehovou vločkou.

Dĺžka Kochovej krivky je nekonečná. Jej dimenzia je rovná $\frac{\log 4}{\log 3} \cong 1{,}26$. Dimenzia Kochovej krivky je teda menšia ako dimezia Sierpińského trojuholníka, čo je zrejmé aj z toho, že Kochova krivka je menej členitá ako Sierpińského trojuholník. (Je podobnejšia čiare než ploche.)

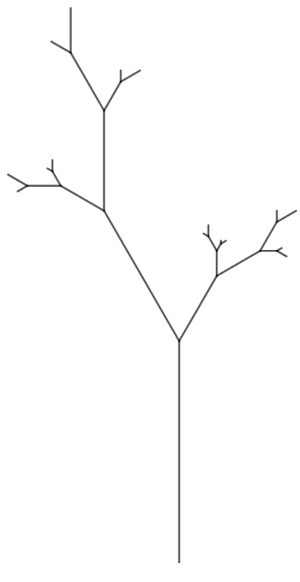
# Vetvenie

V tejto časti si skúsime vytvoriť vlastný fraktál.

Fraktály je možné konštruovať napríklad pomocou tzv. afinných transformácií, ktoré so základným objektom robia niekoľko operácií: otočenie, zmenšovanie a posunutie. (Zelinka et al., 2006).

Vyskúšame vytvoriť vetvenie stromu. Použijeme nasledujúci postup. Začneme úsečkou. Na jej hornom konci pridáme dve úsečky: jedna má dĺžku 1/3 pôvodnej a zviera s ňou uhol 150°, druhá má dĺžku 2/3 pôvodnej a zviera s ňou uhol -150°.

V druhom kroku použijeme na tieto dve úsečky tie isté transformácie, ale s výmenou strán (úsečka otočená o 150° bude tá dlhšia). V treťom kroku použijeme ten istý postup ako v prvom atď.

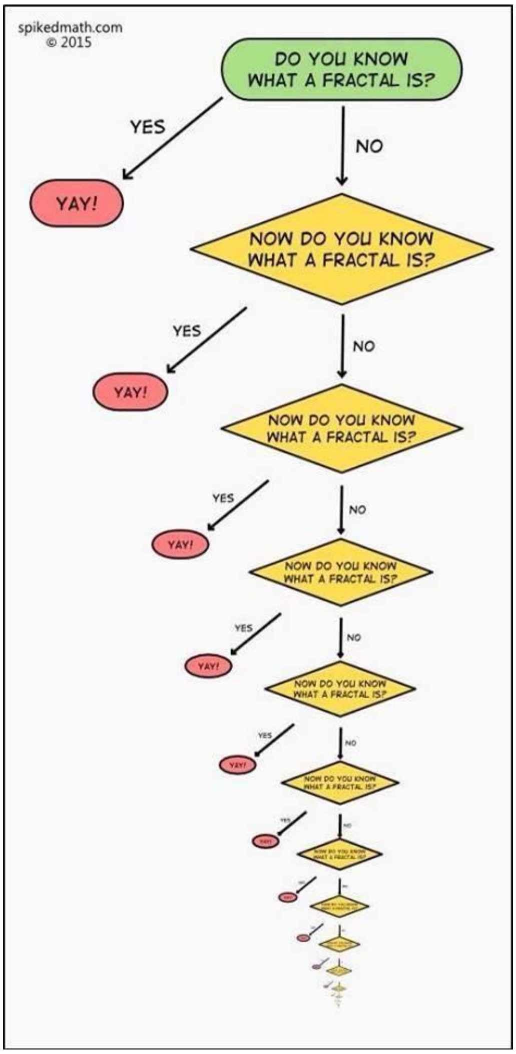


Obrázok 154. Strom po štvrtom kroku

- Tento postup si je možné predstaviť aj tak, že k pôvodnej úsečke pridávame nové dve – jednu odkloníme od pôvodného smeru o 30° proti smeru hodinových ručičiek a druhú v smere hodinových ručičiek.

# Úlohy

1) Nájdite nejaký ďalší príklad, kde sa v prírode môžeme stretnúť s fraktálnym objektom.
2) Nakreslite Kochovu vločku – prvé štyri kroky.
3) Vyskúšajte vytvoriť sebepríbuzný fraktál tak, že začnete štvorcom, ktorý rozdelíte na štyri rovnaké štvorce. Očíslujte ich číslami 1, 2, 3 a 4. Hoďte kockou a podľa čísla, ktoré padne, vymažte jeden štvorček. (Ak padne 5 alebo 6 hádžte znovu, kým nepadne číslo 1 – 4.) Pokračujte so všetkými štvorcami, ktoré ostali. Vždy hádžte kockou, aby boli vymazané štvorce vyberané náhodne.
4) Nakreslite strom, ktorý sa vždy rozdvojí na dve rovnako dlhé vetvy s polovičnou dĺžkou s odklonom $\pm 40°$.
5) Navrhnite strom, pri ktorom použijete náhodný prvok – strom sa vždy rozdelí na dve časti s polovičnou dĺžkou, ale sklon vyberiete tak, že vždy hodíte kockou a podľa čísla, ktoré padne, odkloníte danú vetvu o príslušný násobok 10°. (Ak padne 3, odkloníte o 30°, ak 6, tak o 60°.) Hádžte kockou pre každú jednu vetvu – raz pre vetvu odklonenú proti smeru hodinových ručičiek a raz pre tú druhú.



# Literatúra


ČIŽMÁR, J.: Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť. PERFEKT, Bratislava, 2017. 885 s. ISBN 978-80-8046-829-3

JAKSON, T.: Matematika, 100 objavov, ktoré zmenili históriu. SLOVART, s.r.o., Bratislava, 2013. 144 s. ISBN 978-80-556-0834-1

KUŘINA, F.: Deset pohledů na geometrii. Matematický ústav Akademie věd České republiky, Praha, 1996. 249 s. ISBN 80-85823-21-7

MAREŠ, M.: Příběhy matematiky. Pistorius & Olšanská, s.r.o., Příbram, 2008. 334 s. ISBN 978-8087053-16-4

PERELMAN, J.I.: Geometrie v přírode. Naše vojsko, Praha, 1952. 128 s.

SUTTON, A.: Pravítko a kružítko. Praktické geometrické konstrukce. Dokořán, s.r.o., Praha, 2017. 58 s. ISBN 978-80-7363-724-8

ZELINKA, I. – VČELAŘ, F. – ČANDLÍK, M.: Fraktální geometrie, principy a aplikace. BEN – technická literatura, Praha, 2006. 160 s. ISBN 80-7300-191-8