TEÓRIA RELATIVITY 1

(Časť: Kinematika špeciálnej teórie relativity)

Peter Čerňanský

Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
2012

Recenzenti:
Doc. RNDr. Mária Rakovská, CSc.
Doc. RNDr. Miroslava Ožvoldová, CSc.

Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity 2012

ISBN 978-80-8082-571-3
EAN 9788080825713

Obsah

PREDSLOV

Teória relativity spolu s kvantovou teóriou predstavujú dve fundamentálne fyzikálne teórie, ktoré vznikli v dvadsiatom storočí. Spočiatku priťahovala na seba pozornosť hlavne svojimi filozofickými dôsledkami, týkajúcimi sa vlastností priestoru a času a tiež novým pohľadom na kozmológiu. Dnes, napriek tomu, že predstavuje základnú fyzikálnu teóriu priestoru a času, má aj praktické aplikácie. Za všetky stačí spomenúť GPS (Global Position System), ktorý by bez použitia teórie relativity nemohol fungovať s takou presnosťou určenia polohy, akú bežne dosahuje.

Je len prirodzené, že teória relativity je súčasťou každého fyzikálneho vzdelávania, z toho nevynímajúc prípravu učiteľov fyziky. Predkladaný text predstavuje prvú časť pripravovaného textu teórie relativity pre študentov učiteľstva fyziky na Trnavskej univerzite. Zahŕňa úvod do problematiky kinematiky špeciálnej teórie relativity, neobsahuje diskusiu známych paradoxov teórie relativity, ktoré sme z technických dôvodov presunuli do druhej pripravovanej časti.

Príprava učiteľov má svoje špecifiká. Študent učiteľstva, na rozdiel od študenta odboru, nemusí zvládnuť úplné detaily riešenia náročných problémov. Musí mať však jasno v základných princípoch, vidieť fyzikálnu podstatu skrývajúcu sa za nimi a vedieť jednoducho vysvetliť ich dôsledky. Mal by byť schopný vysvetliť jednoduchou argumentáciou aj diskusnému partnerovi, ktorý má len laické poznatky z fyziky, základné javy, s ktorými sa v teórii relativity stretáme. Veď prvotnou úlohou učiteľa je robiť dobrého sprievodcu žiakovi na ceste od nevedomosti k poznatkom.

Nie vždy musí byť štandardne zaužívaný postup úvodnej výučby základov teórie relativity rovnako vhodný pre každého študenta. Z toho dôvodu okrem štandardného prístupu ku kinematike špeciálnej teórie relativity, ako ho možno nájsť v bežne používaných učebniciach na univerzitách po celom svete, sú do textu zaradené aj tri stručné kapitoly, v ktorých je podávaná relativistická kinematika elementárnym spôsobom. Konkrétne ide o prístupy pomocou:

1. Einsteinových myšlienkových experimentov,
2. Loedelových diagramov,
3. Bondiho k-faktora.

Všetky tieto tri prístupy umožňujú výklad základov relativistickej kinematiky a jej najdôležitejších efektov na úrovni gymnaziálnych znalostí z matematiky a fyziky. Keďže využívajú nenáročný matematický aparát zvlášť výrazne v nich vyniká fyzikálna podstata problémov.

Rád by som na tomto mieste poďakoval doc. RNDr. Márii Rakovskej, CSc. a doc. RNDr. Miroslave Ožvoldovej, CSc. za starostlivé prečítanie rukopisu, ich komentáre a návrhy na zlepšenie.

Uvedomujem si, že žiaden text nemôže byť dokonalý, a preto sa dá vždy vylepšovať. Budem vďačný za akékoľvek návrhy na vylepšenie, upozornenia na chyby a nedostatky.

Trnava, december 2012 Peter Čerňanský

1 ÚVOD

Do začiatku dvadsiateho storočia bola fyzika ovplyvnená experimentálnou skúsenosťou z mechaniky pohybov s relatívne malými rýchlosťami. Ucelenú teóriu mechanických dejov podávala Newtonova mechanika sformulovaná ešte v sedemnástom storočí. Paralelne, od druhej polovice devätnásteho storočia, silne ovplyvňovala myslenie fyzikov ďalšia vynikajúca teória – Maxwellova elektrodynamika. Avšak už koncom devätnásteho storočia sa ukázalo, že dôsledky oboch teórií súvisiace s opisom pohybu, vlastnosťami priestoru a času, navzájom celkom neladia. Zatiaľ čo Newtonova mechanika ponechávala úplnú demokraciu medzi inerciálnymi vzťažnými sústavami, zdalo sa, že Maxwellova elektrodynamika takúto vlastnosť nemá. Vyriešenie problémov s tým súvisiacich poskytla Einsteinova teória relativity, za ktorej zrod je všeobecne pokladaný rok 1905. Táto teória zaviedla rovnakú demokraciu medzi inerciálnymi sústavami aj v elektrodynamike a súčasne korigovala Newtonovu mechaniku tak, aby bola použiteľná aj pri rýchlostiach blízkych rýchlosti svetla vo vákuu. Pôvodná Newtonovu mechanika pri tak veľkých rýchlostiach sa dostáva do sporu s experimentom a je len priblížením relativistickej teórie pre malé rýchlosti v porovnaní s rýchlosťou svetla.

2 PRINCÍP RELATIVITY V PREDRELATIVISTICKEJ FYZIKE

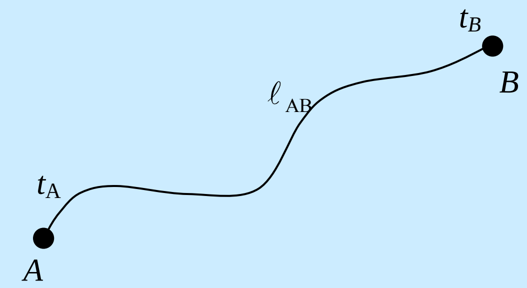
V tejto kapitole si stručne pripomenieme niektoré základné zákony klasickej nerelativistickej mechaniky sformulované v druhej polovici 17. storočia I. Newtonom. Použitie týchto základných zákonov - princípov - umožňuje úspešne opísať pohyb telesa, vysvetliť príčiny zmeny pohybového stavu a na základe znalosti stavu telesa v nejakom časovom okamihu predpovedať jeho stav v nasledujúcich okamihoch.

2.1 ČAS A POHYB

Zamyslime sa nad tým, čo to vlastne čas je, ako tento pojem asi vznikol a čo odráža. Čas, ako fyzikálna a súčasne filozofická kategória, nie je vôbec jednoduchou kategóriou. Trochu si ozrejmime fyzikálny pohľad na ňu. V pozadí pojmu čas leží zrejme pojem zmeny. Ak sa nič nemení, všetko je „statické“, nemá zmysel o čase hovoriť. Na druhej strane sotva by sme mohli hovoriť o čase v zmysle takých predstáv, aké o ňom vo fyzike máme, ak by pri zmenách nenastávalo pravidelné opakovanie sa nejakého predchádzajúceho stavu, javu, a pod. Sotva by sme mohli „ubehnutému času“ priradiť nejakú reprodukovateľnú mieru, ak by nenastávalo opakovanie. Nebolo by etalónu, realizácie jednotky časomiery, s ktorým by sa „ubehnutý čas“ medzi dvoma udalosťami dal porovnávať. Ak však dochádza k pravidelnému opakovaniu nejakej postupnosti stavov, potom možno časti postupnosti medzi dvoma rovnakými stavmi priradiť mieru, ktorú možno stotožniť s jednotkou časového intervalu.

Pojem času sa teda vytvára prostredníctvom nejakého periodického deja, ktorého perióda môže slúžiť za jednotku časového intervalu. Zariadenie, ktoré realizuje periodický dej nazývame hodinami. Je prirodzene mysliteľné, že koľko hodín by sme skonštruovali, toľko „časov“ môžeme dostať. V skutočnosti to však tak nie je. Je pozoruhodné, že všetky hodiny, nech realizujú periodický dej akejkoľvek povahy (či už kyvadlové hodiny založené na mechanickom pohybe v gravitačnom poli, či elektrický oscilátor pracujúci na základe zákonov z inej oblasti fyzikálnych javov, atómové hodiny, etc.), „vytvárajú“ tú istú časomieru. Ich periódy sú stále, pomer týchto periód sa nemení. Tento fakt možno interpretovať tak, že za pojmom času takto vytvoreným je niečo reálne objektívne, nezávislé od toho, prostredníctvom akého fyzikálneho deja je realizované jeho meranie. Ak chceme teda opisovať priebeh nejakého fyzikálneho procesu v čase, potrebujeme mať k dispozícii akýkoľvek periodický dej (hodiny) s ktorým priebeh procesu porovnávame.

Podľa základných predstáv pod mechanickým pohybom telesa rozumieme zmenu jeho polohy v čase. Hovoríme, že teleso sa pohybuje, ak jeho poloha je v rôznych časových okamihoch rôzna. Pretože poloha sa vždy vzťahuje na určité konkrétne vzťažné teleso a s ním spojenú vzťažnú sústavu, je pojem pohybu relatívnym pojmom, vzťahujúcim sa na túto konkrétnu sústavu. Keď chceme opísať pohyb telesa v danej vzťažnej sústave, musíme nájsť závislosť hodnôt jeho súradníc od času. Na to, aby sme vedeli pri súčasnej polohe predpovedať polohu telesa v okamihu trošičku neskoršom, potrebujeme poznať rýchlosť tohto telesa.



Obr. 2.1 Určenie rýchlosti

Rýchlosť telesa pri jeho prechode z bodu A do bodu B je definovaná podielom dráhy ℓ_{AB}, ktorú teleso medzi bodmi A,B prešlo a časového intervalu ($t_B - t_A$), za ktorý ju prešlo

$$u = \frac{\ell_{AB}}{t_B - t_A}.$$

Zmeranie dráhy medzi bodmi A, B možno realizovať pomocou ideálnej tuhej tyče slúžiacej za pravítko. Tu sa nestretávame so žiadnym principiálnym problémom. Na rozdiel od toho, zmeranie časového intervalu medzi odchodom z bodu A a príchodom do bodu B, t. j. veľkosti ($t_B - t_A$), už takou jednoduchou úlohou nie je. Ak totiž časový okamih t_A, keď sa teleso nachádzalo v bode A, je odčítaný na hodinách v bode A a časový okamih t_B príchodu telesa do bodu B je odčítaný na hodinách v bode B, tak rozdiel $t_B - t_A$ bude dobou pohybu telesa z bodu A do bodu B len v tom prípade, keď obe hodiny idú rovnako, keď sú synchronizované. Ak teda chceme opísať pohyb telesa, potrebujeme na to referenčnú sústavu, v každom bode ktorej sú hodiny všetky navzájom synchronizované.

2.2 SYNCHRONIZÁCIA HODÍN

Teraz zostáva otázkou ako možno vo vzťažnej sústave zabezpečiť synchronizáciu všetkých hodín. Ináč povedané, ako definovať pojem súčasnosti dvoch udalostí, ktoré nenastali na tom istom mieste. V predrelativistickej mechanike so synchronizáciou nevzniká principiálny problém. Nerelativistická mechanika totiž v princípe pripúšťa nekonečne veľké rýchlosti, resp. presnejšie, veľkosť rýchlosti telesa v inerciálnej sústave nie je ničím obmedzená. Nech sa teleso pohybuje akokoľvek rýchlo, pôsobením sily sa dá vždy urýchliť ešte na väčšiu rýchlosť. Signál šíriaci sa nekonečne veľkou rýchlosťou môže slúžiť na synchronizáciu hodín. Ak si vezmeme hodiny napr. v začiatku vzťažnej sústavy a v okamihu, keď ukazujú nulu vyšleme od nich signál nekonečne veľkou rýchlosťou, môžeme nastaviť nulový okamih na ktorýchkoľvek hodinách súčasne s nulovým okamihom na hodinách v začiatku. Navyše, ak budeme takýto signál vysielať v sekundových intervaloch, môžeme nastaviť rovnaký chod hodín na ľubovoľnom mieste, ba dokonca aj hodín, ktoré sa voči danej sústave pohybujú.

Poznámka:

V skutočnosti ani nepotrebujeme nekonečne rýchle sa šíriaci signál. Experimentálna fyzika nenarába s presnými číslami, každé meranie je zaťažené nejakou chybou. Ak v danej fyzikálnej úlohe vezmeme vzdialenosť $\Delta\ell$ dvoch najvzdialenejších miest, ktoré v úlohe uvažujeme a požadovaná presnosť synchronizácie hodín (napr. presnosť s akou sme schopní v súčasnosti merať čas) je Δt, potom na synchronizáciu postačuje signál rýchlosti

$$c = \frac{\Delta\ell}{\Delta t}.$$

Z predchádzajúceho si už vieme vysvetliť, prečo bolo možné v predrelativistickej fyzike absolutizovať pojem času. Všade, v každom mieste v danej sústave, dokonca aj v sústave voči nej sa pohybujúcej, možno principiálne zabezpečiť rovnaký chod hodín, rovnako plynúci čas $t = t'$, nezávisle od akéhokoľvek predmetu či udalosti. Vidíme, že v nerelativistickej mechanike, ktorá v sebe zahŕňa principiálnu možnosť pohybu telesa voči inému telesu nekonečnou rýchlosťou, nevznikajú žiadne principiálne ťažkosti so synchronizáciou hodín, a teda aj s opisom pohybu. Čas v nerelativistickej fyzike plynie tak, ako sme na to z bežného života zvyknutí.

Záverom si ešte predstavme situáciu, že veľkosť rýchlosti signálu pomocou ktorého by sme synchronizovali hodiny je principiálne zhora ohraničená nejakou hodnotou. V takom prípade sme odkázaní na synchronizáciu pomocou signálu konečnej rýchlosti, povedzme c. Ak by signál vyslaný z miesta A v časovom okamihu t_A dorazil do miesta B po ubehnutí dráhy $\Delta\ell$, potom v mieste B zosynchronizované hodiny pri príchode signálu musia byť nastavené na hodnotu $t_B = t_A + \Delta\ell/c$. Teda ak by sme poznali rýchlosť c daného signálu, mohli by sme zosynchronizovať hodiny aj pomocou signálu konečnej rýchlosti. Takýmto signálom by mohol byť napr. svetelný signál. Na to, aby sme zmerali rýchlosť svetla c, však potrebujeme zmerať dráhu, ktorú prebehne medzi nejakou dvojicou bodov a časový interval od vyslania svetla z jedného bodu po jeho prijatie v druhom bode. Znova sme sa takto vrátili k primárnemu problému – potrebe mať v oboch bodoch zosynchronizované hodiny. Na prvý pohľad sa zdá, že problém môžeme obísť tak, že do druhého bodu umiestnime zrkadlo od ktorého sa svetlo odrazí a vráti naspäť. Takto môžeme časový interval $2\Delta t$ zmerať na jedných hodinách. Rýchlosť svetla by potom mala byť

$$c = \frac{2\Delta\ell}{2\Delta t} = \frac{\Delta\ell}{\Delta t}.$$

Aj táto úvaha má svoje úskalie. Automaticky v nej predpokladáme, že svetlo sa šíri rovnakou rýchlosťou smerom k zrkadlu ako aj naspäť. Overiť tento predpoklad možno len experimentom, zmeraním rýchlosti nezávisle v jednom smere a v smere druhom. Aby sme to mohli urobiť potrebujeme mať zosynchronizované hodiny v dvoch rôznych miestach. Znova sme sa dostali do kruhu. Na to, aby sme mohli zosynchronizovať dvoje hodiny potrebujeme mať dvoje hodiny už predtým zosynchronizované. Východiskom je prirodzený a plauzibilný predpoklad, že prázdny priestor je izotropný, vo všetkých smeroch má rovnaké vlastnosti. V prázdnom priestore niet fyzikálneho dôvodu prečo by mal mať niektorý smer iné vlastnosti ako druhý. V tomto prípade môžeme predpokladať, že rýchlosť svetla (*šíri sa aj v prázdnom priestore*) je rovnaká jedným smerom aj opačným. Ak chceme byť korektnejší, treba dodať, že predpokladáme aj homogénnosť prázdneho priestoru, pretože ináč by sme museli uvažovať možnosť meniacej sa rýchlosti od miesta k miestu. Toto je spôsob, akým sa v relativistickej fyzike zabezpečuje synchronizácia hodín vzťažnej sústavy.

Príklad 1

Pokusy prevádzame v laboratóriu, ktorého rozmery sú a = 10 m, b = 5 m. Akú najmenšiu rýchlosť musí mať signál pomocou ktorého synchronizujeme hodiny, bez toho, že by sme poznali jeho presnú rýchlosť, ak pre meranie času postačuje presnosť $\Delta t = 10^{-9}$ s ? (Merania realizujeme v jednej výškovej úrovni.)

Riešenie:

Najviac vzdialené hodiny v laboratóriu môžu byť tie, ktoré by sa nachádzali v rohoch miestnosti spojených jej uhlopriečkou. Ich vzdialenosť je daná dĺžkou uhlopriečky $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$. Toto je teda najväčšia vzdialenosť, s ktorou sa v danej experimentálnej úlohe môžeme stretnúť. Rýchlosť signálu potrebného na synchronizáciu s predpísanou presnosťou musí byť najmenej

$$c = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\Delta t} \approx 11.10^9 \text{ m.s}^{-1}$$

Poznámka:

Z tohto príkladu vidíme, že i pri meraniach vnútri relatívne malého laboratória, ak požadovaná presnosť časových meraní je v oblasti nanosekúnd, by sme na synchronizáciu hodín potrebovali signál s väčšou rýchlosťou než je rýchlosť svetla vo vákuu.

2.3 ZÁKON ZOTRVAČNOSTI

Najčastejšie používanou formuláciou zákona zotrvačnosti, s ktorou sme sa mohli v starších učebniciach stretnúť, je nasledujúca formulácia:

Teleso, na ktoré nepôsobia vonkajšie sily, zotrváva v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe dovtedy, kým ho vonkajšie sily neprinútia tento stav zmeniť.

Takáto formulácia má však prinajmenšom jednu slabinu. Hovorí sa v nej o pokoji resp. pohybe rovnomernom priamočiarom. Čo je to pokoj z hľadiska mechaniky? Teleso je v pokoji vtedy, keď v čase nemení svoju polohu. Z časti 1.1 vieme, že o polohe má zmysel hovoriť len v súvislosti s nejakou referenčnou súradnicovou sústavou. Podobne pohyb znamená z hľadiska mechaniky zmenu polohy v čase. Ak sa v príslušnej formulácii nespomenie žiadna súradnicová sústava, tak túto formuláciu možno interpretovať len tak, že platí v každej súradnicovej sústave. Zo skúsenosti však vieme, že je to nezmysel. Napr. pri prudkom zabrzdení auta nezostaneme vzhľadom na auto v pokoji, ale nás hodí na volant, hoci nemôžeme nájsť žiadnu vonkajšiu príčinu (pôsobiacu silu) tohto javu, žiadne teleso, ktoré by nás k volantu pritiahlo. Teda zákon zotrvačnosti neplatí v každej súradnicovej sústave. Z toho dôvodu by bolo lepšie formulovať zákon zotrvačnosti ako existenčné tvrdenie:

Existuje taká súradnicová sústava, v ktorej, keď na teleso nepôsobí vonkajšia sila, teleso zotrváva v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe.

Takéto tvrdenie už má zmysel a o jeho pravdivosti môže rozhodnúť experiment. Každá súradnicová sústava, v ktorej platí zákon zotrvačnosti sa nazýva **inerciálna vzťažná sústava**.

Ďalším problémom vystupujúcim v súvislosti s princípom zotrvačnosti je problém, ako zistiť, či na teleso pôsobí vonkajšia sila. Klasická nerelativistická mechanika považuje silu za bezprostrednú príčinu zmeny pohybového stavu telesa. Teda to, či na teleso pôsobí nejaká sila máme možnosť zistiť len zo zmeny rýchlosti telesa. Týmto sa však logický kruh uzatvára a princíp zotrvačnosti sa stáva nič nehovoriacou tautológiou. Aby sme sa z tohto kruhu dostali, musíme mať k dispozícii nejakú vlastnosť síl, pomocou ktorej by sme vedeli zistiť ich pôsobenie na teleso bez toho, aby sme zisťovali zmenu pohybového stavu telesa. Ako takáto vlastnosť nám slúži predstava o tzv. **pravých silách**, ktoré majú svoj pôvod vo vzájomnom pôsobení telies a so zväčšovaním vzájomnej vzdialenosti telies ich veľkosť klesá. Preto za teleso, na ktoré nepôsobia vonkajšie (pravé) sily môžeme považovať ľubovoľné teleso veľmi vzdialené (v limite nekonečne vzdialené) od všetkých ostatných telies.

Prirodzene, že fyzika sa nemôže uspokojiť len s tvrdením o existencii nejakej inerciálnej vzťažnej sústavy. Z toho dôvodu k existenčnému tvrdeniu treba pridať konštruktívny dodatok, ako (aspoň približne) takúto vzťažnú sústavu fyzikálne realizovať. Experimenty ukazujú, že veľmi dobrou realizáciou inerciálnej sústavy je sústava, so začiatkom v Slnku a tromi osami nasmerovanými k trom hviezdam tzv. stáliciam. Lepšou realizáciou inerciálnej sústavy je sústava, ktorej osi sú nehybné voči kvazarom. (V niektorých úvahách možno dokonca aj sústavu pevne spojenú so Zemou v hrubom priblížení považovať za inerciálnu).

2.4 POHYBOVÝ ZÁKON

Druhý Newtonov zákon dynamiky, tzv. zákon sily alebo pohybový zákon, hovorí o tom, čo sa deje s telesom (hmotným bodom) v inerciálnej sústave v prípade, že naň pôsobí nejaká sila. Pohybový zákon konkrétne tvrdí, že ak na teleso pôsobí v inerciálnej sústave pravá sila $\boldsymbol{F}$, potom spôsobuje zmenu jeho pohybového stavu, pričom táto zmena za jednotku času je úmerná pôsobiacej sile. Pohybový stav hmotného bodu je charakterizovaný jeho hybnosťou $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{u}$, kde m je tzv. zotrvačná hmotnosť hmotného bodu a $\boldsymbol{u}$ je jeho okamžitá rýchlosť. Pri vhodnej voľbe sústavy jednotiek fyzikálnych veličín (napr. SI) dostaneme rovnosť:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

V prípade, že hmotnosť telesa sa nemení, môžeme písať aj

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\text{ , resp. }\quad m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}\text{ ,}\tag{1}$$

teda teleso sa bude pohybovať so zrýchlením

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

priamoúmerným pôsobiacej sile. Ak na teleso nepôsobí sila ($\boldsymbol{F}$ = 0), potom sa teleso pohybuje s nulovým zrýchlením, resp. konštantným vektorom rýchlosti $\boldsymbol{u}$. To je konzistentné so zákonom zotrvačnosti, pretože konštantný vektor rýchlosti znamená, že teleso sa pohybuje pohybom rovnomerným priamočiarym, v prípade $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ je teleso v pokoji.

2.5 GALILEIHO PRINCÍP RELATIVITY

V predchádzajúcom sme si pripomenuli, čo je inerciálna vzťažná sústava. Priestor opisovaný súradnicami polohy v takejto sústave sa stotožňuje v predrelativistickej fyzike s tzv. Newtonovým absolútnym priestorom, ktorý je svojou povahou bez vzťahu k akémukoľvek vonkajšiemu predmetu, stále rovnaký a nepohyblivý. V takomto priestore potom podľa Newtona plynie absolútny čas, znova existujúci a plynúci rovnomerne a nezávisle od akéhokoľvek vonkajšieho predmetu.

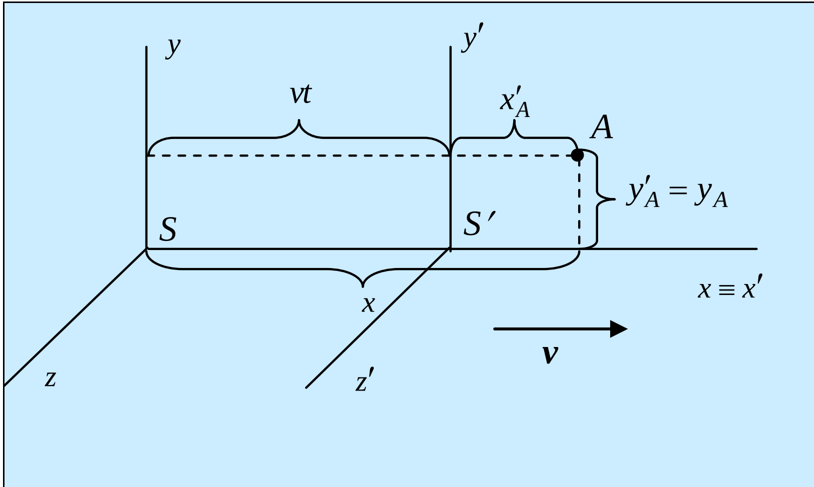
Prirodzenou je otázka, či inerciálna sústava, ktorú označíme S, je jedinou, alebo existuje viac takýchto sústav. Uvažujme zatiaľ hypoteticky, že existuje aj iná inerciálna sústava, ktorú označíme S'. V takejto sústave musí platiť zákon zotrvačnosti rovnako, ako aj v S. Teda teleso, na ktoré nepôsobia pravé sily, musí v nej zotrvávať v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe. Fakt, že teleso je v sústave S' v pokoji alebo pohybe rovnomernom priamočiarom, môžeme matematicky vyjadriť vzťahom $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$. Preto ak obe sústavy sú inerciálne, musí platiť:

$$\boldsymbol{a}'=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=0\,.\tag{2}$$

Nie je ťažkým ukázať, že ak si vyjadríme polohu telesa v sústave S' pomocou čiarkovaných súradníc (x', y', z'), tak predchádzajúca požiadavka nám dá, že (x', y', z'), musia byť lineárnymi funkciami nečiarkovaných súradníc (x, y, z) a času t. Pre jednoduchosť uvažujme také dve sústavy S a S', ktoré sa navzájom pohybujú konštantnou rýchlosťou v pozdĺž spoločnej osi $x \equiv x'$ a ostatné zodpovedajúce si osi sú rovnobežné, rovnako orientované. Nulový okamih času zvolíme v oboch sústavách (t' = t = 0 s) v momente, keď obe sústavy splývajú. V takomto prípade vzťah medzi súradnicami telesa v S' a v S bude daný transformačnými vzťahmi (obr. 2.2)

$$x'=x-vt\,,\quad y'=y\,,\quad z'=z\,,$$

(sústava S' sa voči S pohybuje v kladnom smere osi x rýchlosťou v).



Obr. 2.2 K špeciálnej Galileiho transformácii

Evidentne takáto sústava S', ak v nej plynie čas rovnako, $t' = t$, je tiež inerciálnou sústavou. Možno sa o tom presvedčiť jednoducho:

$$a'_x = \frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x - vt) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = a_x ,$$

a podobne pre zvyšné dve súradnice. Teda vzťah (2) je splnený.

Z predchádzajúceho vidíme, že ak existuje jedna inerciálna sústava, potom ich existuje nekonečne veľa:

Každá vzťažná sústava, ktorá sa pohybuje voči nejakej inerciálnej sústave rovnomerným priamočiarym pohybom, t. j. s konštantným vektorom rýchlosti *v*, je tiež inerciálnou.

Vzťah medzi dvoma inerciálnymi sústavami, v našom špeciálnom prípade, je daný transformáciou

$$x' = x - vt , \quad y' = y , \quad z' = z , \quad t' = t . \tag{3}$$

Táto transformácia sa nazýva *špeciálnou Galileiho transformáciou*. Všeobecnú Galileiho transformáciu dostaneme v prípade ľubovoľného smeru rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a ľubovoľnej orientácie osí sústavy S', voči osiam sústavy S. Vo vektorovom tvare, ak v čase $t' = t = 0$ s začiatky oboch sústav splývali, ju môžeme zapísať v tvare

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t , \quad t' = t . \tag{4}$$

Newtonov zákon sily (1), ak poznáme zákony pravých síl, predstavuje aj pohybovú rovnicu. Táto rovnica opisuje dynamiku hmotného bodu, vývin jeho pohybového stavu v čase. Nerelativistická mechanika predpokladá, že zotrvačná hmotnosť nezávisí od pohybového stavu, špeciálne nezávisí od rýchlosti pohybujúceho sa telesa. Preto môžeme písať $m' = m$. Podobne pre vzájomné silové pôsobenie (pravé sily) platí, že $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$, ako sa môžeme napr. v prípade Newtonovho zákona všeobecnej gravitácie presvedčiť, ak v ňom aplikujeme Galileiho transformáciu (3). Preto pohybová rovnica v sústave S', bude mať rovnaký tvar ako mala v S:

$$m'\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}' .$$

Newtonova pohybová rovnica teda pri aplikácii Galileiho transformácie nemení svoj tvar, hovoríme, že jej tvar je voči Galileiho transformácii *invariantný*. To, že pohybová rovnica má rovnaký tvar vo všetkých inerciálnych sústavách znamená, že v nich všetky mechanické deje prebiehajú rovnako. Napr. v rovnomerne a priamočiaro sa pohybujúcom vlaku bude pustené teleso padať voľným pádom, zvisle smerom k podlahe, a s rovnakým zrýchlením ako na stanici. Fyzikálne kyvadlo bude mať rovnakú periódu na peróne ako v pohybujúcom sa vlaku, ap. Ak by sme sa nachádzali vo vagóne, ktorý sa pohybuje rovnomerne priamočiaro, a bol by bez okien, pomocou mechanických pokusov konaných vnútri vagóna by sme nijako nemohli zistiť, či sa vagón pohybuje, alebo je v pokoji. Zistiť, či sa vagón pohybuje by sme mohli len tak, že by sme sa cez nejakú dierku pozreli von a zaregistrovali pohyb vagóna voči okoliu. (V predchádzajúcom sme predpokladali, že sústava pevne spojená so stanicou je inerciálna.)

Teda z hľadiska newtonovskej mechaniky **všetky inerciálne sústavy sú navzájom rovnocenné, ekvivalentné a žiadnym mechanickým pokusom vnútri sústavy nemožno zistiť pohyb jednej vzhľadom na inú inerciálnu sústavu.** Predchádzajúce tvrdenie je známe ako **Galileiho princíp relativity**. Ekvivalentné vyjadrenie tohto zákona v nerelativistickej fyzike je, že tvar zákonov mechaniky je invariantný voči Galileiho transformácii.

Kontrolné otázky

1. Čo je vzťažná sústava?
2. Ako možno vo fyzike merať čas?
3. V princípe akú možnosť poskytuje nerelativistická fyzika na synchronizáciu hodín?
4. Definujte inerciálnu vzťažnú sústavu!
5. Čo sú pravé sily a akú úlohu hrajú v newtonovskej dynamike?
6. Definujte veličinu charakterizujúcu pohybový stav hmotného bodu!
7. Čo sa deje s telesom v inerciálnej sústave ak naň nepôsobí pravá sila?

3 POSTULÁTY ŠPECIÁLNEJ TEÓRIE RELATIVITY

V druhej polovici 19. storočia bola rozpracovaná teória elektromagnetických javov. Z Maxwellových rovníc, ktoré opisujú elektromagnetické javy, môžeme odvodiť vlnovú rovnicu. Existencia elektromagnetického vlnenia bola aj experimentálne dokázaná a zistilo sa, že svetlo je tiež určitou časťou frekvenčného spektra elektromagnetických vĺn. V súvislosti s princípmi klasickej mechaniky sa po rozpracovaní elektromagnetickej teórie vynorila otázka, či vo formulácii (Galileiho) princípu relativity nemožno postúpiť ďalej za rámec mechaniky. Teda vystúpila otázka, či inerciálne sústavy sú ekvivalentné len z hľadiska mechaniky, alebo aj z hľadiska zákonov iných oblastí fyziky, z hľadiska elektrodynamiky (zúžene optiky). Inými slovami sformulovaný problém: či elektromagnetické javy nevydeľujú zo všetkých inerciálnych sústav nejakú privilegovanú inerciálnu sústavu, resp. či zákony elektrodynamiky nenarúšajú fyzikálnu rovnocennosť všetkých inerciálnych sústav.

3.1 INERCIÁLNE SÚSTAVY V ELEKTRODYNAMIKE

Pozrime sa na vtedajšiu situáciu, t.j. situáciu na konci 19. storočia, očami fyzika, ktorý je vychovaný v mechanistickom duchu. Vlnenie známe z mechaniky je vždy vlnením nejakého prostredia (tekutiny, či tuhej látky). Je preto celkom prirodzené, že aj pri elektromagnetickom vlnení sa natisla podobná predstava. Takáto predstava pre svetlo vznikla dokonca ešte pred poznaním jeho elektromagnetickej povahy. Podľa Huygensa je svetlo vlnením hypotetickej substancie (prostredia), ktorá preniká všetky telesá a ktorá bola nazvaná *svetelným éterom*. Ak by tento svetelný éter nebol ovplyvňovaný telesami v ňom sa nachádzajúcimi, tak vzťažná sústava pevne s ním spojená by bola vážnym kandidátom na privilegovanú vzťažnú sústavu. Vzhľadom na ňu by sa dal elektromagnetickými (alebo zúžene optickými) pokusmi určovať absolútny pohyb. Bola by fyzikálnou realizáciou newtonovského absolútneho priestoru. Takéto úvahy boli ešte aktuálnejšie po zistení, že Maxwellove rovnice nie sú kovariantné pri Galileiho transformácii. Po aplikácii Galileiho transformácie na Maxwellove rovnice dostaneme rovnice, v ktorých vystupujú členy explicitne závisiace od rýchlosti v pohybu novej sústavy voči pôvodnej. Znamenalo by to, že v sústave pohybujúcej sa rýchlosťou v voči éteru už elektromagnetické javy nebudú opísané Maxwellovými rovnicami v tom tvare ako ich poznáme, ale rovnicami, závisiacimi od v. Tento fakt sa prirodzeným spôsobom prejaví aj v experimentálnych dôsledkoch teórie. Na ich základe by bolo možné zistiť rýchlosť v, a teda aj pohyb voči éteru. Po zistení, že Maxwellove rovnice nie sú kovariantné voči Galileiho transformácii, našiel Lorentz transformáciu, ktorá zachováva tvar Maxwellových rovníc. Nazýva sa Lorentzovou transformáciou. Vo fyzike takým spôsobom vznikla paradoxná situácia. Boli známe dve oblasti fyzikálnych javov - mechanika a elektromagnetizmus - s ucelenými teóriami, ktorých experimentálne dôsledky veľmi dobre súhlasili so skúsenosťou. Obe tieto teórie boli založené na určitej koncepcii *priestorového a časového* opisu fyzikálnych veličín. Mechanika bola založená na Newtonových pohybových zákonoch, ktorých tvar je invariantný voči Galileiho transformácii, naproti tomu elektromagnetická teória je založená na Maxwellových rovniciach, ktorých tvar voči Galileiho transformácii invariantný nie je. Vyzerá to tak, akoby priestor a čas pri elektromagnetických javoch mali iné vlastnosti než priestor a čas pri javoch mechanických. Ako riešenia tejto rozpornej situácie sa ponúkajú nasledujúce alternatívy:

1. **Fyzikálna ekvivalentnosť všetkých inerciálnych vzťažných sústav nie je všeobecnou vlastnosťou, ale je vlastnosťou platnou len pre mechanické deje**.
   Z toho prirodzene plynie, že tvar Maxwellových rovníc nebude invariantný voči Galileiho transformácii. Z hľadiska elektromagnetických procesov by teda mala existovať nejaká privilegovaná inerciálna vzťažná sústava, ktorú by sa malo dať experimentálne elektromagnetickými pokusmi identifikovať. Touto alternatívou by sa zachovali obe teórie - aj newtonovská mechanika, aj maxwellovská elektrodynamika v pôvodnom tvare, len by sa bližšie špecifikovali oblasti použiteľnosti oboch teórií. Newtonove rovnice by platili vo všetkých inerciálnych sústavách, Maxwellove rovnice len v jednej, privilegovanej.

2. **Fyzikálna ekvivalentnosť všetkých inerciálnych sústav je všeobecnou vlastnosťou platnou tak pre mechanické, ako aj elektromagnetické procesy a javy**.
   V tomto prípade sú však dve možnosti:

a) Buď ***Newtonove rovnice sú správne*** v každej inerciálnej vzťažnej sústave a transformáciou medzi dvoma inerciálnymi sústavami je Galileiho transformácia ***a Maxwellove rovnice,*** na rozdiel od toho, ***sú len*** akýmsi ***priblížením správnych*** (galileovsky kovariantných) ***rovníc***, ktoré treba nájsť.

b) Alebo naopak, ***Maxwellove rovnice sú správne*** a platné v každej inerciálnej vzťažnej sústave a transformácia medzi dvoma inerciálnymi sústavami je Lorentzova transformácia. ***Newtonove rovnice sú*** potom ***len*** akýmsi ***priblížením správnych*** (lorentzovsky kovariantných) ***rovníc***.

Vzhľadom na to, že obe teórie, tak Newtonova mechanika, ako aj Maxwellova elektrodynamika, sa v praxi vynikajúco osvedčili, bolo prirodzené, že spočiatku sa považovala za správnu prvá alternatíva, podľa ktorej nie všetky inerciálne vzťažné sústavy sú z hľadiska elektrodynamiky rovnocenné, a teda pomocou elektromagnetických pokusov možno nájsť privilegovanú vzťažnú sústavu. V ďalšej časti sa teda budeme venovať pokusom nájsť takúto privilegovanú vzťažnú sústavu.

3.2 POKUSY NÁJSŤ PRIVILEGOVANÚ VZŤAŽNÚ SÚSTAVU

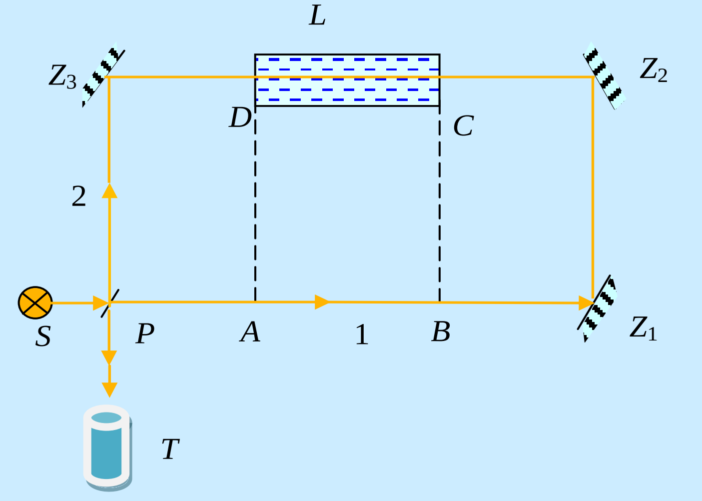
Prvými pokusmi nájsť privilegovanú vzťažnú sústavu boli optické pokusy. Ako už bolo spomenuté, podľa Huygensa je svetlo vlnením hypotetickej substancie, ktorá preniká všetky telesá a ktorá bola nazvaná svetelným éterom. O vlastnostiach svetelného éteru boli vyslovené tri hypotézy:

1. **Stokesova - Hertzova hypotéza**
   Telesom pohybujúcim sa v éteri je éter úplne strhávaný, t.j. relatívna rýchlosť telesa vzhľadom na éter tesne pri povrchu telesa sa rovná nule.
2. **Fresnelova - Fizeauova hypotéza**
   Éter je pohybujúcim sa telesom strhávaný len čiastočne, t.j. relatívna rýchlosť telesa vzhľadom na éter tesne pri jeho povrchu je nenulová, avšak menšia než voči éteru ďaleko od telesa.
3. **Lorentzova hypotéza**
   Éter je absolútne pokojný, vypĺňa celý priestor a prestupuje cez všetky telesá bez toho, že by bol ich pohybom nejako ovplyvňovaný. S týmto éterom možno prirodzene spojiť privilegovanú vzťažnú sústavu (Newtonova inerciálna vzťažná sústava v absolútnom pokoji), takže pohyb vzhľadom na takýto éter by bol absolútnym pohybom.

V súvislosti s predchádzajúcimi hypotézami bolo uskutočnených množstvo pokusov. Spomenieme len niektoré. Ako prvý z nich opíšeme Hoekov experiment.

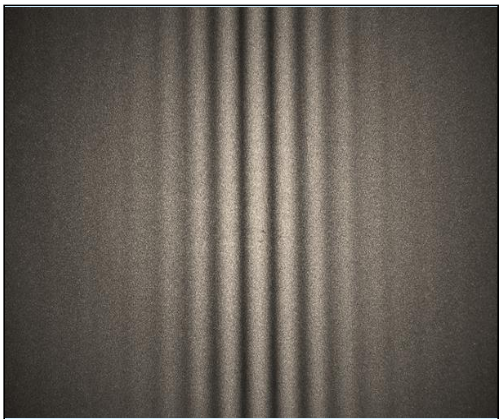
1. Hoekov pokus

Experimentálna zostava jedného z variantov tohto experimentu je schematicky naznačená na obr. 3.1:



Obr. 3.1 Hoekova aparatúra

Monochromatický lúč svetla od zdroja *S* je rozdelený polopriepustnou doštičkou *P* na dva navzájom kolmé lúče. Jeden, označíme ho *1*, prejde cez doštičku a bude pokračovať smerom k zrkadlu Z_1, od ktorého sa odrazí smerom k zrkadlu Z_2, od Z_2 k Z_3 a dopadne znova na doštičku *P*, cez ktorú časť prejde do objektívu teleskopu *T*. Druhý lúč, označíme ho *2*, sa od polopriepustnej doštičky *P* odrazí smerom k zrkadlu Z_3, od Z_3 k Z_2, od Z_2 k Z_1, od Z_1 k *P* a nakoniec časť sa odrazí od *P* do objektívu teleskopu *T*. Medzi zrkadlami Z_2 a Z_3 je umiestnená kyveta dĺžky *L* naplnená priezračnou kvapalinou o indexe lomu *n*. Oba lúče spĺňajú podmienky koherencie, a preto môže dôjsť k interferencii. Z toho dôvodu by sme mali v teleskope pozorovať interferenčný obrazec. V skutočnosti sa aj pozoruje, tmavé prúžky sa striedajú so svetlými (obr. 3.2).



Obr. 3.2 Interferenčné prúžky

Ak by sa zariadenie pohybovalo voči éteru rýchlosťou *v*, tak by sme pozorovali dodatočný fázový posun $\Delta\Phi$ medzi lúčmi *1* a *2*, a teda aj posun interferenčných prúžkov v teleskope oproti prípadu, že by sa prístroj voči éteru nepohyboval. Pre jednoduchosť predpokladajme, že aparatúra sa pohybuje voči éteru rýchlosťou *v* v smere lúča od zdroja *S* k polopriepustnej doštičke *P*. Dodatočný fázový posun pri pohybe aparatúry voči éteru je spôsobený neekvivalentnosťou úsekov *AB* a *DC*, pretože úsek *DC* je vyplnený kvapalinou a úsek *AB* nie. Zvyšné úseky dráh sú pre oba lúče rovnocenné. Dodatočný fázový posun bude teda spôsobený rozdielnymi dobami t_1 a t_2 potrebnými na prelet svetla lúčov *1* a *2* týmito dvoma úsekmi. Pre rýchlosť *v* dostatočne malú oproti *c* dostaneme pre fázový posun približný vzťah (pozri **Dodatok A**)

$$\Delta\Phi \approx \frac{2L\omega}{c}\frac{v}{c}. \qquad (1)$$

Ak uvažujeme, že *v* je rýchlosť Zeme voči éteru, tak vypočítaný fázový posun máme už hneď na začiatku merania. Počas celého merania sa nemení, pretože Zem sa pohybuje počas merania stále tou istou rýchlosťou *v*. Takže z tohto interferenčného obrazca nevieme rozhodnúť či sa Zem voči éteru pohybuje a či nie. Ak však aparatúru počas merania otočíme o uhol π rad, tak lúče *1* a *2* si vymenia úlohy. Dodatočný fázový rozdiel sa bude v tomto druhom prípade rovnať (- ΔΦ) a interferenčné prúžky by sa mali posunúť. Takže po otočení aparatúry o π rad už by sme mali pozorovať posunutie interferenčných prúžkov, zodpovedajúce fázovému rozdielu

$$2\Delta\Phi = \frac{4L\omega}{c}\frac{v}{c}.$$

Výsledok experimentu bol negatívny. Žiadne posunutie prúžkov nebolo pozorované. Dôvodom toho môže byť, že Zem sa voči éteru počas merania nepohybuje alebo Stokesova - Hertzova hypotéza úplne strhávaného éteru je chybná. Vieme, že Zem v priebehu roka mení svoju obežnú rýchlosť. Ak je meranie dostatočne presné a počas rôznych ročných období nenameriame posun interferenčného obrazca, poukazuje to na fakt, že Stokesova - Hertzova hypotéza je nesprávna.

Vyjdime teraz z predpokladu, že svetelný éter je čiastočne strhávaný prostredím. Koeficient strhávania nech je *k*. Ak sa teleso pohybuje voči éteru ďaleko od neho rýchlosťou ***v***, tak éter v oblasti telesa, a tesne pri jeho povrchu, sa bude voči éteru ďaleko od telesa pohybovať rýchlosťou (*k**v***). Relatívna rýchlosť aparatúry voči strhávanému éteru v kvapaline v kyvete je teda $(1 - k)\boldsymbol{v}$. Keď vypočítame rozdiel časov pre oba lúče za predpokladu strhávania éteru kvapalinou v kyvete, jeho vynásobením uhlovou frekvenciou dostaneme fázový rozdiel týchto lúčov.

Dodatočný fázový rozdiel týchto lúčov spôsobený pohybom aparatúry voči éteru za predpokladu, že éter je strhávaný s koeficientom strhávania *k*, bude (s presnosťou do 1. mocniny podielu *v/c*) (Pozri **Dodatok B**)

$$\Delta\Phi = \omega(t_1 - t_2) \approx \frac{2vL\omega}{c^2}\left[1 - n^2(1-k)\right] \qquad (2)$$

Negatívny výsledok experimentu môžeme teda vysvetliť tak, že éter je čiastočne strhávaný, pričom koeficient strhávania (tzv. Fresnelov koeficient strhávania)

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}. \qquad (3)$$

V tom prípade sa bude totiž $\Delta\Phi$ rovnať nule (s presnosťou do 1. rádu, t.j. prvej mocniny *v/c*). Vyzerá to teda, akoby negatívny výsledok Hoekovho experimentu do istej miery podporil Fresnelovu - Fizeaovu hypotézu. Vieme však, že index lomu *n* závisí od frekvencie prechádzajúceho svetla. Pre každú frekvenciu by sme potom dostali iný koeficient strhávania. Je evidentné, že na to, aby sme vysvetlili negatívny výsledok experimentu, nevystačili by sme s jednoduchým éterom, ale potrebovali by sme éter, ktorý má pre každú frekvenciu iný koeficient strhávania. Tento fakt vnáša ďalšie požiadavky na vlastnosti éteru, čo robí Fresnelovu - Fizeaovu hypotézu nepríťažlivou a ďalšie presnejšie experimenty ju vylúčili.

Prejdime teraz k tretej hypotéze. Lorentz ukázal, že pomocou experimentov, ktorých presnosť dovoľuje preveriť len fázové rozdiely úmerné prvej mocnine *v/c*, nemožno absolútny pohyb určiť. Čiastočne to naznačujú predchádzajúce úvahy. Fázový rozdiel (2) sa pre

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}$$

rovná nule, ak zanedbáme vo výraze pre $\Delta\Phi$ členy vyššieho než prvého rádu podielu *v/c*. Presnosť pokusov, ktoré boli stavané na priblížení použitom v (2) nedovoľuje experimentálne odhaliť tú časť fázového posuvu, ktorá závisí od

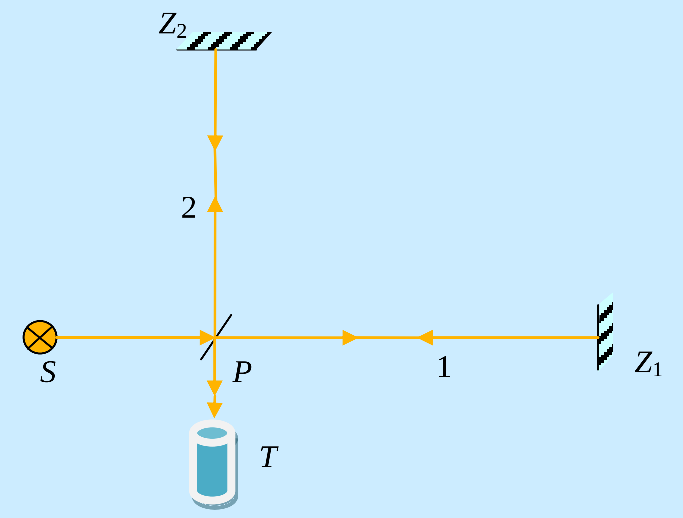
$$\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

a vyšších mocnín. Pokusy, ktorých presnosť je na úrovni zistenia fázových rozdielov závisiacich od prvej mocniny *v/c* nazývame *pokusmi prvého rádu*. Keďže pokusy prvého rádu dávali negatívny výsledok, bolo treba prejsť k citlivejším pokusom, k tzv. *pokusom druhého rádu*. Potrebné bolo skonštruovať citlivejšiu aparatúru, interferometer, ktorý by dovoľoval detegovať fázový rozdiel úmerný maličkej hodnote $(v/c)^2$. Prvým takým pokusom bol Michelsonov pokus uskutočnený v roku 1881, neskôr zopakovaný Michelsonom a Morleym a mnohými ďalšími, za pomoci tzv. Michelsonovho inteferometra.

2. Michelsonov pokus

Experimentálna zostava Michelsonovho pokusu je schematicky nakreslená na obrázku 3.3:

Táto aparatúra predstavuje dvojramenný interferometer. Zo zdroja svetla *S* postupuje svetlo na polopriepustnú doštičku *P*, na ktorej sa rozdelí na dva lúče. Jeden, ktorý prejde doštičkou, postupuje k zrkadlu Z_1. Na ňom sa odrazí a postupuje naspäť na doštičku *P*, kde sa časť odrazí a prichádza do teleskopu *T*. Druhý, ktorý sa na doštičke odrazí kolmo na pôvodný smer a postupuje k zrkadlu Z_2. Od neho sa odrazí a vracia sa opačným smerom, kde časť prejde cez doštičku *P* do objektívu teleskopu. Lúče prichádzajúce do teleskopu pochádzajú z toho istého zdroja a môžu interferovať. Nastavením zrkadiel možno dosiahnuť vznik interferenčných prúžkov. Ich poloha závisí od fázového rozdielu oboch lúčov.



Obr. 3.3 Michelsonov interferometer

Ak sa interferometer pohybuje voči éteru v rovnobežnom smere s jedným jeho ramenom (interferometer orientujeme tak, aby jedno rameno bolo rovnobežné so smerom okamžitej obežnej rýchlosti Zeme okolo Slnka), potom týmto pohybom vzniká dodatočný posun interferenčných prúžkov na jednu stranu. Prirodzene, že tento posun je prítomný už na začiatku merania, takže ho nemôžeme identifikovať. Avšak, ak interferometer otočíme o $\pi/2$ rad, obe ramená si navzájom vymenia smer. Potom toto dodatočné posunutie prúžkov bude na druhú stranu. Ak posunutie prúžkov interferometra v dôsledku jeho pohybu voči éteru bolo pred otočením aparatúry o n prúžkov doľava, po otočení interferometra bude o n prúžkov doprava oproti polohe pri nulovej rýchlosti. Takže po otočení interferometra by sme mali zaregistrovať celkové posunutie o $2n$ prúžkov doprava. Fázový rozdiel zodpovedajúci tomuto posunutiu sa v priblížení do druhej mocniny podielu v/c rovná (Pozri **Dodatok C**):

$$\Delta\Phi = \omega(\Delta t - \Delta t') \approx \frac{2\omega L}{c}\frac{v^2}{c^2}\,. \tag{4}$$

Tomuto fázovému rozdielu zodpovedá posunutie o 2n prúžkov

$$2n = \frac{\Delta\Phi}{2\pi} \approx \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}\,, \tag{5}$$

kde λ je vlnová dĺžka použitého svetla. Pri prvých meraniach bola dĺžka ramien $L \approx 10$ m. Dosiahne sa to niekoľkonásobným odrazom na zrkadlách umiestnených vedľa zrkadiel Z_1, Z_2 a doštičky. Ak uvážime, že pre obežnú rýchlosť Zeme okolo Slnka $(v/c)^2 \approx 10^{-8}$, pri vlnovej dĺžke $\lambda \approx 500$ nm možno očakávať posun o $2n \approx 0{,}4$ prúžku. Žiaden posun nebol nameraný ani v neskorších citlivejších meraniach pri niekoľkonásobnom predĺžení ramien L.

Negatívny výsledok Michelsonovho experimentu sa pokúsil vysvetliť Lorentz (a nezávisle FitzGerald) ad hoc hypotézou, tzv. kontrakčnou, o tom, že rameno pohybujúce sa v éteri rýchlosťou v pozdĺž svojej dĺžky je v dôsledku „tlaku“ éteru skracované γ-krát oproti ramenu, ktoré je voči éteru v pokoji alebo sa pohybuje kolmo na svoju dĺžku. Pritom podľa Lorentza γ sa rovná:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{6}$$

Neskôr bolo navrhnutých viacero experimentov (Kennedy – Thorndike, Trouton – Noble, Trouton – Rankin, ...) u ktorých si vysvetlenie ich výsledkov vyžadovalo ďalšie ad hoc hypotézy o dilatácii časového intervalu pri pohybe hodín, špecifickej zmene silového zákona pri pohybe, závislosti elektrického odporu pri pohybe vodiča, a pod. Prirodzene, že potreba zavedenia ďalších ad hoc hypotéz do teórie túto teóriu diskvalifikuje spomedzi serióznych teórií. Seriózna fyzikálna teória má byť založená na malom počte a priori jasných, všeobecných a experimentálne zdôvodnených predpokladoch – postulátoch – navzájom konzistentných, bez nesystémového dodávania hypotéz slúžiacich len na vysvetlenie toho, ktorého jednotlivého experimentu. Všetky spomenuté experimenty teda vytvárajú naliehavú potrebu sformulovania novej, vnútorne konzistentnej fyzikálnej teórie, ktorá ich prirodzeným spôsobom vysvetlí.

Príklad 2

Uvažujme v súlade s Lorentzovou kontrakčnou hypotézou, že rameno interferometra rovnobežné so smerom rýchlosti v sa v dôsledku tlaku svetelného éteru skráti γ-krát. Druhé, na rýchlosť kolmé, rameno zostane nezmenené. Ukážte, že v takomto prípade nevzniká žiaden dodatočný fázový posun súvisiaci s pohybom interferometra.

Riešenie:

V hypertextovom odkaze „fázový rozdiel“ pri Michelsonovom pokuse nájdeme pre časový rozdiel Δt v prípade, že rameno je rovnobežné so smerom rýchlosti v výraz:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(L_1\gamma^2 - L_2\gamma\right).$$

Ak uvažujeme, že rameno rovnobežné so smerom rýchlosti sa γ-krát skrátilo, musíme v predchádzajúcom výraze nahradiť dĺžku L_1 skrátenou dĺžkou ramena:

$$L_1 \to \frac{L_1}{\gamma}.$$

Časový rozdiel v tomto prípade teda bude:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(L_1\gamma - L_2\gamma\right) = \frac{2}{c}\left(L_1 - L_2\right)\gamma\,.$$

Ak ramená interferometra sú rovnako dlhé $L_1 = L_2$, potom príslušný časový rozdiel medzi lúčmi oboch ramien $\Delta t = 0$. Úplne rovnako môžeme postupovať po otočení interferometra o π/2 rad. V tom prípade treba nahradiť dĺžku ramena L_2 skrátenou dĺžkou:

$$L_2 \to \frac{L_2}{\gamma}$$

a pre časový rozdiel znova dostaneme $\Delta t' = 0$. Žiaden fázový posun, a teda ani dodatočné posunutie interferenčných prúžkov nemôžeme pozorovať ak je splnená kontrakčná hypotéza.

Poznámka:

Pri nerovnakej dĺžke ramien interferometra sa ani za splnenia Lorentzovej kontrakčnej hypotézy nebude fázový rozdiel rovnať nule. Prúžky by sa teda mali aj v takomto prípade posunúť. Experiment s interferometrom o nerovnakej dĺžke ramien

uskutočnili Kennedy a Thorndike, avšak ako sme už spomenuli s negatívnym výsledkom.

3.3 ZÁKLADNÉ PRINCÍPY ŠPECIÁLNEJ TEÓRIE RELATIVITY

Negatívne výsledky hľadania svetelného éteru vysvetlil elegantným spôsobom A. Einstein v roku 1905. Jeho vysvetlenie spočívalo jednoducho v tvrdení, že svetelný éter neexistuje. Ďalšiu skutočnosť, že rýchlosť svetla bola nameraná vždy v každej vzťažnej sústave rovnako veľká, berie ako experimentálny fakt, ktorý treba pojať do teórie. Na základe týchto poznatkov Einstein sformuloval dva základné postuláty, pomocou ktorých vybudoval konzistentnú teóriu elektromagnetických a mechanických javov.

Prvým postulátom je rozšírenie Galileiho princípu relativity. Keďže ani pomocou elektrodynamických pokusov sa nenašla vzťažná sústava, ktorá by bola zákonmi elektrodynamiky nejako privilegovaná, je prirodzené rozšíriť platnosť princípu relativity aj na elektrodynamiku.

Einsteinov princíp relativity

Všetky fyzikálne procesy prebiehajú vo všetkých inerciálnych sústavách rovnako, resp. všetky inerciálne sústavy z hľadiska všetkých fyzikálnych zákonov sú ekvivalentné.

Odtiaľto plynie, že všetky rovnice, ktoré správne opisujú fyzikálne procesy, musia mať invariantný tvar voči transformácii, spájajúcej dve inerciálne sústavy. Ľahko sa však možno presvedčiť, že Maxwellove rovnice nie sú galileovsky invariantné.

Teda sú dve možnosti:

1. Správne sú Newtonove rovnice s Galileiho transformáciou prechodu jednej inerciálnej sústavy k druhej a Maxwellove rovnice sú len priblížením nejakých presnejších, galileovsky invariantných, rovníc,

alebo:

2. Maxwellove rovnice sú presné, potom Newtonove rovnice sú len priblížením nejakých presnejších rovníc. Podobne aj Galileiho transformácia bude potom len priblížením nejakej presnejšej transformácie medzi inerciálnymi sústavami, voči ktorej budú Maxwellove rovnice invariantné (*Takouto transformáciou je Lorentzova transformácia).*

Einstein sa priklonil k druhej alternatíve. Z tejto alternatívy ako dôsledok plynie, že rýchlosť svetla vo vákuu je rovnaká vo všetkých inerciálnych sústavách nezávisle od rýchlosti zdroja svetla. Tvrdenie je evidentné zo známeho Maxwellovho vzorca pre rýchlosť elektromagnetického vlnenia vo vákuu, ktorý vyplýva priamo z Maxwellových rovníc vo vákuu:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

kde ε_0, resp. μ_0 je elektrická, resp. magnetická konštanta. Z Einsteinovho princípu relativity totiž plynie, že obe tieto konštanty musia byť vo všetkých inerciálnych sústavách rovnaké. Ak navyše predpokladáme, že aj Maxwellove rovnice majú vo všetkých inerciálnych sústavách rovnaký tvar, potom aj Maxwellov vzorec pre rýchlosť svetla vo vákuu je pre všetky inerciálne sústavy rovnaký. Ak však a priori nepredpokladáme platnosť Maxwellových rovníc vo všetkých inerciálnych sústavách, potom tvrdenie o nezávislosti rýchlosti svetla vo vákuu nie je dôsledkom princípu relativity, ale je nezávislým tvrdením. Tvrdenie o stálosti rýchlosti svetla, nezávisle od rýchlosti zdroja, si vybral Einstein za druhý postulát svojej špeciálnej teórie relativity. O tom, že jeho výber bol správny, svedčia priame merania rýchlosti svetla od zdrojov pohybujúcich sa rôznymi rýchlosťami voči Zemi, ako i fakt, že experimentálne predpovede vyplývajúce z Maxwellových rovníc sú v súlade s reálnymi výsledkami experimentov v ľubovoľnej inerciálnej sústave.

Princíp stálosti rýchlosti svetla

Svetlo sa vo vákuu šíri vo všetkých inerciálnych sústavách konštantnou rýchlosťou c, ktorá nezávisí od pohybového stavu zdroja svetla.

Poznámka:

Predchádzajúce dva princípy sa zvyknú nazývať postulátmi špeciálnej teórie relativity. Prirodzene, že tieto dva postuláty nepostačujú na vybudovanie celej teórie. Pristupujú k nim princíp zotrvačnosti definujúci inerciálne sústavy, princíp superpozície, pohybový zákon, etc. Názov postuláty špeciálnej teórie relativity sa však v historickom kontexte zaužíval pre spomenuté dva princípy.

Kontrolné otázky

8. Čo je svetelný éter?
9. Aké hypotézy boli vyslovené o vlastnostiach svetelného éteru?
10. Stručne vysvetlite podstatu konštruktívnej interferencie svetla.
11. Opíšte fyzikálnu podstatu Hoekovho experimentu a vysvetlite fyzikálne dôsledky jeho negatívneho výsledku.
12. Opíšte Michelsonov interferometer a objasnite Michelsonov pokus.
13. Aké zmeny oproti Newtonovej mechanike prináša Einsteinova špeciálna teória relativity?

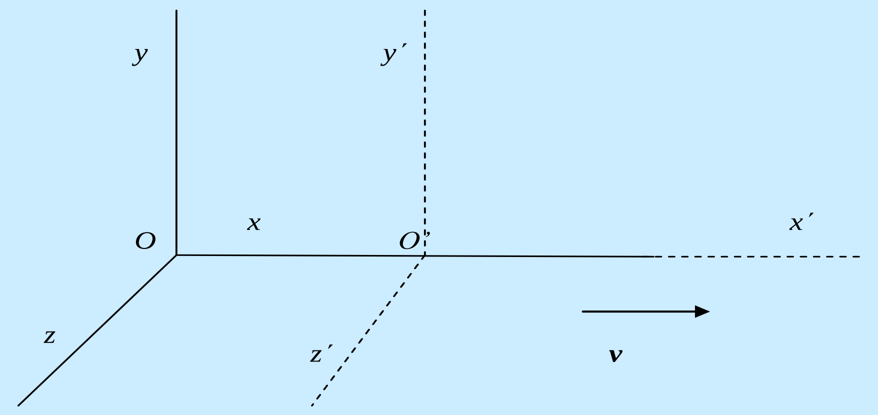
4 KINEMATIKA ŠPECIÁLNEJ TEÓRIE RELATIVITY

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať kinematikou špeciálnej teórie relativity. Oboznámime sa s postupom, pri ktorom najprv odvodíme Lorentzovu transformáciu a relatívnosť súčasnosti s dilatáciou času a kontrakciou dĺžok sa diskutujú ako jej dôsledky. Takýto postup je štandardným postupom väčšiny učebníc špeciálnej teórie relativity.

4.1 ŠPECIÁLNA LOTENTZOVA TRANSFORMÁCIA

V nasledujúcom uvidíme, že oba princípy - špeciálny princíp relativity a princíp konštantnej rýchlosti svetla - vedú k základným zmenám v predstavách o priestore a čase.

Uvažujme dve inerciálne sústavy S a S'. Nech sú ich zodpovedajúce osi rovnobežné. Ďalej nech v čase $t = t' = 0$ s začiatky oboch sústav splývajú a sústava S' nech sa pohybuje voči sústave S pozdĺž spoločnej osi $x \equiv x'$ v kladnom smere konštantnou rýchlosťou $\boldsymbol{v}$.



Obr.4.1 Špeciálna Lorentzova transformácia

V okamžiku, keď obe sústavy splývajú, nech je zo spoločného začiatku $0 \equiv 0'$ vyslaný svetelný signál. Množina bodov do ktorých svetelný signál súčasne dorazí v sústave S bude guľová plocha s polomerom ct opísaná rovnicou:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (1)$$

Podľa špeciálneho princípu relativity musí byť aj v inerciálnej sústave S' táto množina guľovou plochou. Podľa druhého postulátu - konštantnej rýchlosti svetla - bude mať táto v S' polomer ct', kde t' je čas meraný v sústave S' od okamihu vyslania svetelného signálu. Rovnica tejto guľovej plochy v inerciálnej súradnicovej sústave S' je

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad (2)$$

Z postulátov špeciálnej teórie relativity vyplýva, že plynutie času t' v sústave S' sa líši od plynutia času t v sústave S. Ľahko sa o tom možno presvedčiť jednoduchým myšlienkovým experimentom (pozri paragraf 5.1).

Z rovnosti (1) na základe princípov relativity vyplýva rovnosť (2). To môže byť splnené, len keď pre ľubovoľnú štvoricu (x,y,z,t) súradníc a časového okamihu nejakej bodovej udalosti v S a príslušnú štvoricu tej istej udalosti opísanej v S' platí:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = q\left(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2\right)$$

kde q je reálne číslo. Keďže obe sústavy sú ekvivalentné, musí platiť aj opačná implikácia: Z (2) vyplýva (1). Teda aj

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = q\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2\right),$$

s tým istým q. Z toho pre q dostaneme

$$q^2 = 1.$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že v našom prípade musí byť $q = 1$. Môžeme preto napísať vzťah medzi opisom polohy a časového okamihu jednej a tej istej bodovej udalosti v oboch inerciálnych vzťažných sústavách

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2, \qquad (3)$$

teda aj v prípade, keď $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \neq 0$.

Pokúsme sa nájsť transformačné vzťahy medzi S a S' tak, aby rovnosť (3) bola splnená. Pretože, ako sme už videli, transformovať sa musí aj čas, budeme hľadať transformáciu

$$t, x, y, z \mapsto t', x', y', z'.$$

Ak budeme predpokladať, že táto transformácia je lineárnou:

$$\begin{aligned}
t' &= a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\
x' &= a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\
y' &= a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\
z' &= a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,
\end{aligned}$$

dostaneme v špeciálnom prípade ktorý opisuje obr. 4.1 (pozri **Dodatok D**):

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (4)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad (5)$$

$$y' = y \qquad (6)$$

$$z' = z\,, \qquad (7)$$

kde

$$\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$

Predchádzajúce vzťahy sú známe pod názvom špeciálna Lorentzova transformácia.

Lorentzova transformácia teda predstavuje transformačné rovnice prechodu od inerciálnej súradnicovej sústavy *S* k inerciálnej súradnicovej sústave *S'*. Spätný prechod od čiarkovanej sústavy k nečiarkovanej dostaneme veľmi ľahko, keď si uvedomíme, že nečiarkovaná sústava sa pohybuje voči čiarkovanej v smere osi *x*', ale v opačnej orientácii, t.j. rýchlosťou (- *v*). Preto inverznú transformáciu dostaneme z (4) - (7) zámenou *v* →(-*v*) a vzájomnou zámenou čiarkovaných súradníc a času s nečiarkovanými:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad (4a)$$

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad (5a)$$

$$y = y' \qquad (6a)$$

$$z = z' \qquad (7a)$$

4.2 HRANIČNÉ PRÍPADY LORENTZOVEJ TRANSFORMÁCIE

V tejto časti si všimnime dva hraničné prípady špeciálnej Lorentzovej transformácie.

Pomalá Lorentzova transformácia

Ako prvý prípad uvažujme prípad, keď sústava *S´* sa voči *S* pohybuje veľmi malou rýchlosťou v porovnaní s rýchlosťou svetla.

$$\frac{v^2}{c^2} << 1$$

V tom prípade môžeme v Lorentzovej transformácii položiť

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1.$$

Dostaneme

$$t' = t - \frac{v}{c^2}x$$

$$x' = x - vt \qquad (8)$$

$$y' = y$$
$$z' = z$$

Je prirodzené, že v transformačnom vzťahu pre čas musíme ponechať člen vx/c^2. Dôvodom je, že napriek tomu, že v/c^2 je malé, pre veľké x môže byť súčin vx/c^2 porovnateľný s t, resp. pri procesoch prebiehajúcich v čase sa často zaujímame o časový interval Δt, v ktorom tieto procesy pozorujeme a vx/c^2 môže byť porovnateľné s časovým intervalom Δt, najmä ak je tento krátky. Znamená to, že v danom prípade člen vx/c^2 nie je zanedbateľný voči t. Transformačný vzťah určený rovnicami (8) sa nazýva *pomalou Lorentzovou transformáciou*.

Galileiho transformácia

Ako druhý limitný prípad uvažujme prípad, keď $c \to \infty$. Po prevedení tejto limity v Lorentzovej transformácii (4) – (7) dostávame pre všetky konečné t a x:

$$t' = t$$
$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z,$$

čo je z nerelativistickej mechaniky známa *Galileiho transformácia*.

Poznámka.:

Teraz ľahko nahliadneme, prečo sa v nerelativistickej mechanike dospelo k výsledku, že dve inerciálne sústavy sú navzájom viazané Galileiho transformáciou. Bolo to z toho dôvodu, že naša experimentálna skúsenosť, na základe ktorej bola nerelativistická mechanika budovaná, postihovala len pohyby s malými rýchlosťami $v^2/c^2 \ll 1$ a malú oblasť priestoru, takže aj vx/c^2 bolo zanedbateľné voči bežne meraným časom, resp. časovým intervalom. V takom prípade pomalá Lorentzova transformácia prejde na Galileiho.

4.3 LORENTZOVA TRANSFORMÁCIA V ĽUBOVOĽNOM SMERE

V tejto časti zovšeobecníme špeciálnu Lorentzovu transformáciu na prípad pohybu sústavy S' vo všeobecnom smere voči sústave S.

Prepíšme špeciálnu Lorentzovu transformáciu (4) - (7) do vektorového tvaru. Pretože v danom špeciálnom prípade mal vektor rýchlosti súradnicovej sústavy S' voči S smer kladnej polosi x, môžeme písať

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i},$$

kde $\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor v smere osi x. Ak označíme ako $\boldsymbol{r}$ polohový vektor bodu so súradnicami (x,y,z), tak môžeme písať

$$vx = v\boldsymbol{r}.\boldsymbol{i} = v\boldsymbol{i}.\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{r}\,.$$

Potom

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}.\mathbf{r}}{c^2}\right).$$

Pre zložky v smere spoločnej osi $x \equiv x'$ polohového vektora v oboch sústavách dostaneme

$$x'\mathbf{i}' = \gamma(x\mathbf{i} - \mathbf{v}t),$$

Podobne dostaneme pre zložky v rovinách (y,z) resp. (y',z')

$$y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Rozložíme polohový vektor $\mathbf{r}$ a jeho vyjadrenie $\mathbf{r}'$ v súradnicovej sústave S' do smeru rovnobežného s $\mathbf{v}$ a kolmého naň, t.j.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}, \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}.$$

V našom špeciálnom prípade sme mali

$$\mathbf{r}_{\parallel} = x\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = x'\mathbf{i}', \quad \mathbf{r}_{\perp} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

Príslušnú špeciálnu Lorentzovu transformáciu (4) - (7) môžeme teda písať aj v tvare

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}.\mathbf{r}}{c^2}\right)$$

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t)$$

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$$

Tento tvar transformácie už explicitne nevyjadruje špecifikum, že rýchlosť $\mathbf{v}$ mala smer osi x. Možno ho teda považovať za zovšeobecnenie Lorentzovej transformácie pre ľubovoľný smer rýchlosti $\mathbf{v}$ súradnicovej sústavy S' voči S.

Nakoniec možno uviesť aj iné vyjadrenie, v ktorom nebudú vystupovať zložky rozkladu polohových vektorov, ale priamo polohové vektory. Stačí si pritom len uvedomiť, že $\mathbf{r}_{\parallel}$ je priemet vektora $\mathbf{r}$ do smeru rýchlosti $\mathbf{v}$ vynásobený jednotkovým vektorom v smere $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}\right)\frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Ďalej

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}. \tag{9}$$

Takže pre

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_{\|} + \boldsymbol{r}'_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{r}_{\|} - \boldsymbol{r}_{\perp}\right) \qquad (10)$$

po dosadení z (9) a (10)

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right] \qquad (11)$$

Lorentzovu transformáciu v prípade pohybu súradnicovej sústavy S' voči S v ľubovoľnom smere rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, za predpokladu rovnobežnosti zodpovedajúcich osí oboch sústav, možno teda písať v tvare

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{r}}{c^2}\right) \qquad (12)$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \left[\frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \gamma t\right]\boldsymbol{v} \qquad (13)$$

4.4 DÔSLEDKY LORENTZOVEJ TRANSFORMÁCIE

V tejto časti si ukážeme, že špeciálna teória relativity prináša nové chápanie súčasnosti dvoch udalostí, plynutia času, ako aj vzdialenosti dvoch bodov v priestore. Všetky tieto pojmy sa stávajú relatívnymi a závisia od vzťažnej sústavy, v ktorej ich opisujeme. Hovoríme o relatívnosti súčasnosti, dilatácii času a kontrakcii dĺžok. Ukážeme, ako tieto javy vyplývajú z Lorentzovej transformácie.

Relatívnosť súčasnosti

Predstavme si situáciu, keď pozorovateľ v súradnicovej sústave S' pozoroval, že v mieste x'_A nastala v čase t'_A nejaká udalosť. V tom istom čase $t'_B = t'_A$ nastala nejaká udalosť v mieste x'_B. Pozorovateľ, ktorý je pevne spojený so sústavou S, t.j. v sústave S sa nepohybuje, nameria v súlade s rovnicou (4a) medzi týmito dvoma udalosťami časový interval:

$$\Delta t = t_B - t_A = \gamma\left(t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B\right) - \gamma\left(t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A\right)$$

Ak aj prebehli obe udalosti v sústave S' súčasne (t.j. $t'_B = t'_A$), ale v miestach s rôznou súradnicou x ($x'_B \neq x'_A$), pozorovateľ v sústave S ich nepozoruje súčasne. Medzi oboma udalosťami nameria časový interval

$$\Delta t = \gamma\frac{v}{c^2}\left(x'_B - x'_A\right) = \gamma\frac{v\Delta x'}{c^2} \qquad (14)$$

Tento dôsledok potvrdzuje fakt, že súčasnosť je pojem relatívny. Pretože podľa špeciálneho princípu relativity sú obe inerciálne sústavy ekvivalentné, tvrdenia o časovej následnosti udalostí *A* a *B* oboch pozorovateľov, či pozorovateľa v sústave *S*, alebo pozorovateľa pevne spojeného so sústavou *S'*, je rovnako oprávnené. Rovnako oprávnené je tvrdenie pozorovateľa *P'*, že udalosti *A*, *B* nastali súčasne, ako tvrdenie pozorovateľa *P*, že udalosti *A, B* nenastali súčasne. Teda súčasnosť ako absolútny pojem stráca v špeciálnej teórii relativity zmysel, ako sme už nakoniec v odvolávke na myšlienkový experiment v paragrafe 5.1 videli. Výnimkou je len prípad, keď obe udalosti nastali v tom istom bode (resp. v bodoch s tou istou súradnicou $x'_B = x'_A$). Len pre takéto udalosti má pojem súčasnosti absolútny zmysel. Len pre ne platí, že ak nastali súčasne v jednej inerciálnej sústave, tak nastali súčasne vo všetkých inerciálnych sústavách. Relatívnosť súčasnosti je v rozpore s náhľadom nerelativistickej fyziky na čas a nám nezostáva nič iné, len si na tento fakt zvyknúť a zžiť sa s ním.

Kontrakcia dĺžok

Priamou metódou môžeme merať dĺžku tak, že meradlo (pravítko) prikladáme k meranému predmetu a priamo odčítame hodnoty pri značkách na pravítku kryjúcich sa so začiatkom a koncom predmetu. Takto zvykne merať dĺžku pozorovateľ, voči ktorému je meraný predmet v pokoji. V zásade však môže dĺžku meraného predmetu zmerať priamo aj pozorovateľ z inej inerciálnej sústavy, voči ktorej sa predmet pohybuje nejakou rýchlosťou rôznou od nuly. Ako postupuje pozorovateľ v takomto prípade? V takej situácii pozorovateľ môže zmerať dĺžku pohybujúceho sa predmetu tak, že si v svojej súradnicovej sústave poznačí (trebárs za pomoci asistentov, ktorí majú zosynchronizované hodinky), povedzme na pevnej tyči, *súčasne* polohu začiatku aj konca meranej dĺžky a potom ich vzdialenosť zmeria už štandardným postupom prikladania dĺžkového meradla. Z hľadiska Newtonovej mechaniky výsledok oboch meraní, či pozorovateľom voči ktorému je meraný predmet v pokoji, alebo pozorovateľom, voči ktorému sa meraný predmet pohybuje, musí byť ten istý. Keď však prijmeme za správne princípy špeciálnej teórie relativity, vidíme, že vzniknú určité ťažkosti. Ťažkosti vzniknú v súvislosti s tým, že pojem súčasnosti stratil v teórii relativity absolútny zmysel. Skutočne, uvažujme teleso pohybujúce sa v súradnicovej sústave *S* v smere osi *x* konštantnou rýchlosťou *v*. S týmto telesom môžeme pevne spojiť súradnicovú sústavu *S'*. Nech začiatok *A* a koniec *B* telesa majú v súradnicovej sústave *S'* v určitom časovom okamihu súradnice x'_A, x'_B. Potom ich rozdiel sa bude rovnať dĺžke telesa *L'*, ako ju nameria pozorovateľ pevne spojený so sústavou *S'*. Dĺžka meraná v sústave, v ktorej je predmet v pokoji sa nazýva *pokojovou*.

$$L' = x'_B - x'_A$$

Poloha začiatku a konca telesa v súradnicovej sústave *S*, t.j. ich súradnice x_A, x_B v časoch t_A, t_B súvisia so súradnicami x'_A, x'_B prostredníctvom Lorentzovej transformácie (5):

$$x'_B - x'_A = \gamma\left[x_B - x_A - v(t_B - t_A)\right]$$

Rozdiel súradníc $x_B - x_A$ v tom istom časovom okamžiku $t_B = t_A$ je dĺžkou *L* telesa, ako ju zmeria pozorovateľ v súradnicovej sústave *S*. Vidíme, že pre $t_B = t_A$ dostaneme

$$x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A),$$

a teda

$$L' = \gamma L$$

resp.

$$L = L'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (15)$$

Dostali sme známy vzorec pre kontrakciu dĺžok, podľa ktorého dĺžka L predmetu pohybujúceho sa voči pozorovateľovi je vždy kratšia než jeho pokojová dĺžka L'.

Dilatácia času

Už vieme, že pojem súčasnosti v jednej inerciálnej sústave sa nekryje s pojmom súčasnosti v inej inerciálnej sústave. Teda čas v rôznych inerciálnych sústavách vo všeobecnosti plynie rôzne. Pokúsme sa teda porovnať plynutie času v dvoch inerciálnych vzťažných sústavách vychádzajúc z Lorentzovej transformácie. Predstavme si situáciu, keď v sústave S' v mieste x'_A nastala nejaká udalosť A v čase t'_A. Ďalej nech v tom istom mieste, ale v neskoršom čase t'_B nastala udalosť B. To, že udalosť B nastala v tom istom mieste ako udalosť A o. i. znamená, že $x'_A = x'_B$. Ako bude pozorovať tieto dve udalosti pozorovateľ zo sústavy S? Vieme, že súradnice a čas merané v čiarkovanej súradnicovej sústavy sú viazané so súradnicami a časom nečiarkovanej súradnicovej sústavy prostredníctvom Lorentzovej transformácie (4a) - (7a)

$$t_A = \gamma\left(t'_A - \frac{v}{c^2}x'_A\right)$$

$$t_B = \gamma\left(t'_B - \frac{v}{c^2}x'_B\right)$$

Potom pre časový interval Δt medzi udalosťami A a B, pozorovaný pozorovateľom zo sústavy S dostaneme

$$\Delta t \equiv t_B - t_A = \gamma\left(t'_B - t'_A\right) = \gamma\Delta t',$$

keďže $x'_A = x'_B$ (udalosti A, B boli v sústave S' súmiestne). Pretože pre rýchlosť $v \neq 0$ (teda máme $\gamma > 1$), bude

$$\Delta t = \gamma\Delta t' > \Delta t'.$$

Vidíme, že v nečiarkovanej sústave bude mať pozorovateľ na svojich hodinách väčší časový údaj než pozorovateľ pevne spojený s pohybujúcimi sa hodinami.

Čas meraný v súradnicovej sústave, v ktorej je teleso v pokoji sa nazýva *vlastným časom* tohto telesa a obyčajne sa značí symbolom τ. Z predchádzajúceho vyjadrenia vidíme, že

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (16)$$

časový interval medzi dvoma udalosťami ktoré nastali na tom istom mieste v *S′* je v tejto sústave najkratší (menovateľ zlomku je menší než 1). Vo všetkých ostatných sústavách je dlhší. Teda v *S´* akoby plynul čas pomalšie, z čoho pramení aj názov tohto javu *dilatácia času.*

4.5 TRANSFORMÁCIA ZLOŽIEK RÝCHLOSTI

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali transformáciou súradníc udávajúcich polohu a čas bodovej udalosti pri prechode z jednej inerciálnej súradnicovej sústavy do druhej. V tejto časti si ukážeme ako sa budú transformovať zložky rýchlosti pri takomto prechode. Ak budeme poznať rýchlosť nejakej častice v jednej inerciálnej súradnicovej sústave, tak pomocou príslušných transformačných vzťahov budeme vedieť určiť jej rýchlosť aj v iných inerciálnych súradnicových sústavách. Pretože rýchlosť je určená limitou podielu dráhy a doby, za ktorú dráhu častica preletí, a vzhľadom na to, že v každej inerciálnej súradnicovej sústave plynie čas inakšie, neprekvapí nás, že príslušné transformačné vzťahy sa budú líšiť od nerelativistických.

Vychádzať budeme z Lorentzovej transformácie a definície rýchlosti. Uvažujme dve inerciálne súradnicové sústavy, ktoré označíme *S* a *S′*. Nech súradnicové osi *y, z* oboch sústav sú rovnobežné a nech *S′* sa voči *S* pohybuje konštantnou rýchlosťou *v* v smere spoločnej osi $x'\equiv x$. Ďalej nech v okamžiku, keď v oboch sústavách začneme merať čas (nastavíme na hodinách nulu), začiatky súradnicových osí splývajú. Potom obe súradnicové sústavy sú navzájom viazané špeciálnou Lorentzovou transformáciou (4) - (7). Označme zložky rýchlosti pohybujúcej sa častice tak, ako ich nameria pozorovateľ v súradnicovej sústave S postupne u_x, u_y, u_z. Podľa definície okamžitej rýchlosti platí

$$u_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad u_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad u_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Analogicky sú definované zložky rýchlosti v inerciálnej vzťažnej sústave *S′*. Vyjadrime prvú zložku rýchlosti u'_x, ako ju nameria pozorovateľ v sústave *S′*

$$u'_x = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Z Lorentzovej transformácie možno odvodiť (pozri **Dodatok E**):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \qquad (17)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \qquad (18)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}. \qquad (19)$$

Tieto vzťahy sa zvyknú nazývať Einsteinove vzorce pre skladanie rýchlosti.

Podobne ako v prípade Lorentzovej transformácie môžeme inverznú transformáciu pre vyjadrenie rýchlosti častice v S za pomoci jej zložiek v S dostať z predchádzajúcej vzájomnou zámenou čiarkovaných a nečiarkovaných zložiek a súčasne zámenou rýchlosti v za ($-v$).

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \qquad (17a)$$

$$u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \qquad (18a)$$

$$u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \qquad (19a)$$

Všimnime si teraz limitný prípad $c \to \infty$. V danom prípade $\gamma = 1$ a $vu_x/c^2 = 0$. Teda v tomto limitnom prípade sa transformácia redukuje na prípad

$$u_y = u'_y + v$$

$$u_y = u'_y$$

$$u_z = u'_z,$$

známy ako špeciálny prípad nerelativistického zákona skladania rýchlostí

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}$$

Evidentne rovnaký výsledok dostaneme, ak $u_x v << c^2$.

Vidíme že v teórii relativity neplatí newtonovský zákon skladania rýchlostí, podľa ktorého ak sa *teleso* S' pohybuje voči *telesu* S rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ a teleso T sa pohybuje voči telesu S' rýchlosťou $\boldsymbol{u}'$, tak sa teleso R pohybuje voči S rýchlosťou $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}$. Tento zákon platí len v limite $c \to \infty$.

Aké sú teda špecifické črty relativistického skladanie rýchlostí? Ukážeme si ich na niekoľkých príkladoch:

Príklad 3

Uvažujme najprv, že teleso sa voči súradnicovej sústave S' pohybuje rýchlosťou $u'_x = (2/3)c$ v smere osi x'. Súradnicová sústava S' nech sa voči S pohybuje rýchlosťou $v = (2/3)c$ v smere osi x. Akou rýchlosťou u_x sa pohybuje teleso voči sústave S?

Riešenie:

Podľa nerelativistickej mechaniky by sa malo teleso voči súradnicovej sústave S pohybovať rýchlosťou $u_x = (2/3)c + (2/3)c = (4/3)c > c$. Relativistický vzorec (17a) však dáva rýchlosť

$$u_x = \frac{\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c}{1 + \frac{2c}{3}\frac{1}{c^2}\frac{2c}{3}} = \frac{12}{13}c,$$

ktorá je menšia než c.

Príklad 4

Uvažujme, že nejaký objekt sa pohybuje voči súradnicovej sústave S' rýchlosťou svetla c (napr. kvantum elektromagnetického poľa = fotón). Akou rýchlosťou u_x sa pohybuje objekt voči sústave S?

Riešenie:

Podľa nerelativistickej mechaniky by malo byť $u_x = c + v$. Relativistický vzorec však dáva

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c \quad .$$

Teda ak sa nejaký objekt pohybuje voči inerciálnej súradnicovej sústave S' rýchlosťou svetla c, tak sa takou istou rýchlosťou pohybuje aj voči inerciálnej sústave S.

Príklad 5

V tomto príklade uvažujme, že sa objekt pohybuje voči inerciálnej súradnicovej sústave S' rýchlosťou $u'_x = 2c$. Súradnicová sústava S' nech sa pohybuje voči S v smere osi x rýchlosťou $0{,}5c$.

Riešenie:

Relativistický vzorec pre rýchlosť tohto objektu v súradnicovej sústave S nám dá

$$u_x = \frac{2c + 0{,}5c}{1 + \dfrac{0{,}5c.2c}{c^2}} = 1{,}25c$$

Teda dostávame rýchlosť u_x, i keď menšiu než nerelativistická hodnota 2,5c, ale stále väčšiu než rýchlosť svetla c.

Predchádzajúce príklady dokumentujú všeobecnú črtu relativistickej transformácie zložiek rýchlosti, ktorú možno odvodiť úplne všeobecne:

Ak sa častica v nejakej inerciálnej súradnicovej sústave pohybuje rýchlosťou menšou než je rýchlosť svetla, tak sa bude pohybovať podsvetelnou rýchlosťou v každej inerciálnej súradnicovej sústave (príklad 3).

Ak sa častica pohybuje v nejakej inerciálnej súradnicovej sústave rýchlosťou svetla, tak sa bude pohybovať svetelnou rýchlosťou v každej inej inerciálnej súradnicovej sústave (príklad 4).

Nakoniec, ak by sa nejaká hypotetická častica pohybovala v nejakej inerciálnej súradnicovej sústave rýchlosťou väčšou než je rýchlosť svetla, tak by sa pohybovala nadsvetelnou rýchlosťou v každej inej inerciálnej súradnicovej sústave (príklad 5).

Vidíme teda, že pojmy podsvetelná rýchlosť, svetelná rýchlosť a nadsvetelná rýchlosť sú z hľadiska teórie relativity absolútne. Znamená to, že tvrdenie, že častica sa pohybuje podsvetelnou rýchlosťou je súčasne platné vo všetkých inerciálnych súradnicových sústavách a nemôže sa stať, že v jednej sústave by pozorovateľ nameral rýchlosť častice menšiu než rýchlosť svetla a v inej by nameral rovnajúcu sa, alebo väčšiu než je rýchlosť svetla.

Poznámka:

Hypotetické častice, ktoré by sa pohybovali nadsvetelnou rýchlosťou boli nazvané tachyónmi. Ich existencia, napriek intenzívnym snahám v sedemdesiatych rokoch, nebola experimentálne potvrdená.

4.6 TRANSFORMÁCIA ZLOŽIEK ZRÝCHLENIA

Vieme ako sa transformujú súradnice s časom a zložky rýchlosti pri prechode od jednej inerciálnej súradnicovej sústavy k druhej. Zostáva nám ešte zistiť ako sa transformujú zložky zrýchlenia.

Zrýchlenie, ako ho nameria pozorovateľ v súradnicovej sústave S' je definované:

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'}{\mathrm{d}t'} = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}'}{\Delta t'}$$

Určme prvú zložku zrýchlenia. Táto bude limitou podielu zmeny x-ovej zložky rýchlosti a časového intervalu za ktorý sa táto zmena udeje v sústave S'.

$$\frac{\Delta u'_x}{\Delta t'} = \frac{\Delta u'_x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t'}$$

Využitím transformačného vzťahu pre *x*-ovú zložku rýchlosti a Lorentzovej transformácie dostaneme (pozri **Dodatok F**):

$$a'_x = \gamma^{-3}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-3} a_x .$$

Podobne pre druhú zložku zrýchlenia máme:

$$a'_y = \frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma^{-2}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}\left[a_y + \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}\frac{vu_y}{c^2}a_x\right],$$

a úplne analogickým spôsobom dostaneme transformačný vzťah pre tretiu zložku zrýchlenia.

Takže pre všetky tri zložky zrýchlenie môžeme písať:

$$a'_x = \gamma^{-3}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-3} a_x \qquad (20)$$

$$a'_y = \gamma^{-2}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}\left[a_y + \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}\frac{vu_y}{c^2}a_x\right] \qquad (21)$$

$$a'_z = \gamma^{-2}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}\left[a_z + \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}\frac{vu_z}{c^2}a_x\right] \qquad (22)$$

Inverzné transformačné vzťahy môžeme dostať z predchádzajúcich zámenou *v* za (-*v*) a súčasne zámenou čiarkovaných zložiek zrýchlenia a rýchlosti za nečiarkované a naopak.

Upozorníme tu na tri fakty:

1. Transformačné vzťahy (20) - (22) sú homogénne v zrýchlení. To znamená, že z rovnosti $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ vyplýva rovnosť $\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}$. Túto skutočnosť sme nakoniec aj mali očakávať, pretože obe sústavy S aj S' sú inerciálne a ekvivalentné. Ak v jednej nepôsobí na teleso pravá sila, tak aj v druhej naň nebude pôsobiť pravá sila a podľa princípu zotrvačnosti musí aj v tej sústave zotrvávať v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe.

2. Z transformačných vzťahov (20) - (22) môžeme vidieť, že na rozdiel od nerelativistickej mechaniky, z konštantnosti zrýchlenia v jednej inerciálnej súradnicovej sústave nevyplýva konštantnosť zrýchlenia v iných inerciálnych súradnicových sústavách. Z konštantnosti zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ = const. v sústave *S* nevyplýva jeho konštantnosť $\boldsymbol{a}'$ = const. v sústave *S´*. Vidno to z toho, že v transformačných vzťahoch pre $\boldsymbol{a}'$ (20 – 22) sa vyskytujú aj zložky rýchlosti $\boldsymbol{u}$.

Vidíme teda, že keď chceme hovoriť o rovnomerne zrýchlenom pohybe v špeciálnej teórii relativity, nemôžeme ho definovať ako pohyb s konštantným zrýchlením v jednej inerciálnej sústave, pretože sa okamžite dostaneme do ťažkostí.

Pozorovateľ v jednej súradnicovej sústave ho bude pozorovať ako rovnomerne zrýchlený pohyb (t.j. s konštantným zrýchlením), ale pozorovatelia v iných súradnicových sústavách ho budú pozorovať ako pohyb s premenlivým zrýchlením. Keď chceme zaviesť relativistické zovšeobecnenie pojmu rovnomerne zrýchlený pohyb, musíme ho definovať spôsobom nezávislým od súradnicovej sústavy pozorovateľa. Inými slovami: V newtonovskej mechanike je vektor zrýchlenia absolútnou veličinou, rovnakou vo všetkých inerciálnych sústavách. Rovnako je absolútnym pojmom aj rovnomerne zrýchlený pohyb. V relativistickej mechanike je len nulové zrýchlenie absolútnym, t. j. majúcim rovnakú hodnotu vo všetkých inerciálnych sústavách. Ak chceme relativisticky zovšeobecniť pojem rovnomerne zrýchleného pohybu, v zmysle absolútnom, tak ho musíme definovať tak, aby jeho definícia nezávisela od konkrétnej sústavy a aby v nerelativistickej limite $v \to 0$ predstavoval starý známy newtonovský rovnomerne zrýchlený pohyb. Preto sa v teórii relativity nazýva pohybom rovnomerne zrýchleným taký pohyb telesa, ktorého zrýchlenie v sústave, v ktorej je teleso momentálne v pokoji, je konštantné. Hovoríme o sústave pohybujúcej sa spolu s telesom. V skutočnosti takáto sústava je v každom okamihu ekvivalentná inej inerciálnej sústave. Zrýchlenie v momentálnej pokojovej sústave určia všetci pozorovatelia ako rovnaké, a teda nezávisí od pozorovateľa. Bližšie sa tomuto pohybu budeme venovať v dynamike.

3. Tretí fakt hodný povšimnutia je zmena smeru zrýchlenia pri transformácii z jednej súradnicovej sústavy do druhej. Ak napr. v sústave S bolo zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ v smere osi x, t.j. $a_y = a_z = 0$, tak v S' už $\boldsymbol{a'}$ nie je v smere x' aj keď $x' \equiv x$.

Skutočne, z transformačných vzťahov (20) - (22) dostaneme:

$$a'_y = \gamma^{-2}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-3}\frac{vu_y}{c^2}a_x \neq 0$$

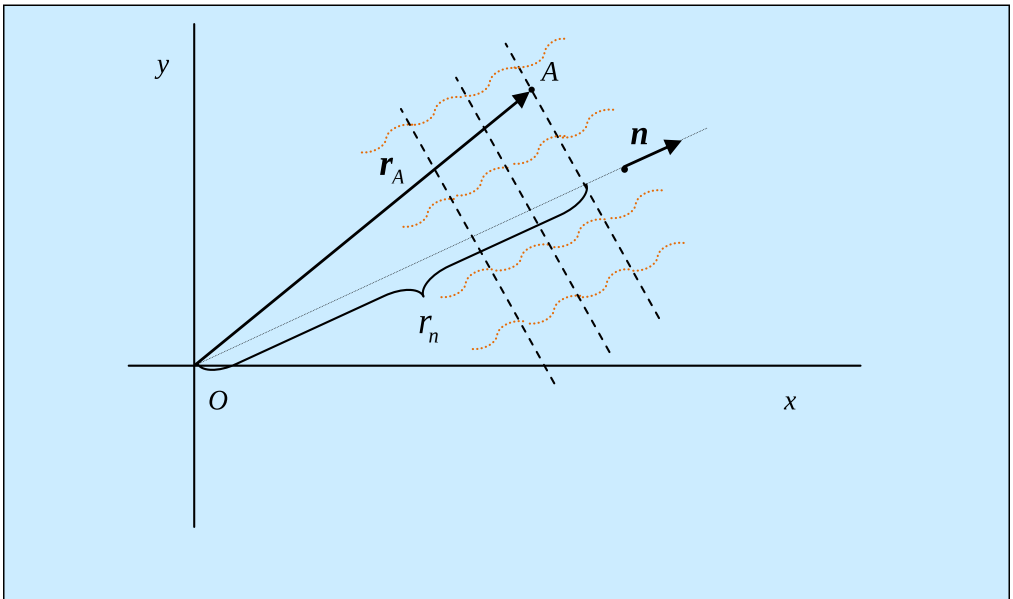
pre $u_y \neq 0$ a podobne pre a'_z.

4.7 DOPPLEROV EFEKT

Dopplerov efekt, ktorý v bežnom živote často pozorujeme v akustike, súvisí so zmenou pozorovanej frekvencie vlnenia v závislosti od pohybu zdroja vlnenia resp. pozorovateľa. V akustike závisí od relatívnych rýchlostí zdroja a pozorovateľa voči prostrediu v ktorom sa akustický signál šíri. V optike Dopplerov jav závisí len od vzájomnej rýchlosti zdroja a pozorovateľa. Tu sa budeme zaoberať optickým Dopplerovým efektom.

Uvažujme rovinnú monochromatickú vlnu šíriacu sa v inerciálnej vzťažnej sústave S v smere jednotkového vektora $\boldsymbol{n}$ a ktorá má v tejto sústave frekvenciu f. Označme ako α_x, α_y, α_z uhly, ktoré zviera vektor $\boldsymbol{n}$ s osami súradnicovej sústavy. Potom $\boldsymbol{n} = \cos\alpha_x \boldsymbol{i} + \cos\alpha_y \boldsymbol{j} + \cos\alpha_z \boldsymbol{k}$. Rovnaké označenia, len s čiarkami, použijeme pre príslušné charakteristiky tejto vlny v súradnicovej sústave S', ktorá je s S viazaná špeciálnou Lorentzovou transformáciou (4) – (7).

Nech čelo vlny v čase $t = t' = 0$ s prechádza spoločným začiatkom oboch sústav $O \equiv O'$. Na obrázku 4.2 je zobrazený prípad rovinnej vlny, ktorej smerový vektor $\boldsymbol{n}$ leží v rovine (x,y). Do bodu A sa čelo vlny dostane v čase $t_1 = r_n / c$, kde r_n je vzdialenosť vlnoplochy prechádzajúcej bodom A od začiatku súradnicovej sústavy a c je rýchlosť šírenia sa vĺn.



Obr. 4.2 K odvodeniu Dopplerovho

Pre príslušný čas, vo všeobecnosti, môžeme písať

$$t_1 = \frac{r_n}{c} = \frac{\vec{r}.\vec{n}}{c} = \frac{x_A \cos\alpha_x + y_A \cos\alpha_y + z_A \cos\alpha_z}{c},$$

kde (x_A, y_A, z_A) sú súradnice bodu A v S. Podobne pre čas t_1' v ktorom dorazí do bodu A čelo vlny podľa merania pozorovateľa v sústave S', dostaneme

$$t_1' = \frac{x_A' \cos\alpha_x' + y_A' \cos\alpha_y' + z_A' \cos\alpha_z'}{c}.$$

Pozorovateľ v sústave S napočíta počet „vĺn“ N, ktoré prešli bodom A za časový interval (t_1,t_2):

$$N = f(t_2 - t_1) = f\left[t_2 - \frac{x_A \cos\alpha_x + y_A \cos\alpha_y + z_A \cos\alpha_z}{c}\right]$$

Pre pozorovateľa v sústave S' sa počet vĺn N', ktoré prešli za korešpondujúci časový interval dĺžky $(t_2' - t_1')$, bude rovnať

$$N' = f'(t_2' - t_1') = f'\left[t_2' - \frac{x_A' \cos\alpha_x' + y_A' \cos\alpha_y' + z_A' \cos\alpha_z'}{c}\right]$$

Tento počet, keďže ide o korešpondujúce intervaly času, nemôže závisieť od vzťažnej sústavy, od pozorovateľa, ktorý ho pozoruje. Preto platí $N = N'$:

$$f(t_2 - t_1) = f'(t_2' - t_1') \qquad (23)$$

resp.

$$f\left[t_2 - \frac{x_A \cos\alpha_x + y_A \cos\alpha_y + z_A \cos\alpha_z}{c}\right] = f'\left[t_2' - \frac{x_A' \cos\alpha_x' + y_A' \cos\alpha_y' + z_A' \cos\alpha_z'}{c}\right].$$

Vyjadrime si príslušný čas a súradnice bodu A v jednej vzťažnej sústave, napr. S'. Použijeme pritom inverznú špeciálnu Lorentzovu transformáciu (4a) – (7a). Dostaneme

$$\gamma\left(1 - \frac{v\cos\alpha_x}{c}\right) f\, t_2' - \frac{\gamma}{c}\left(\cos\alpha_x - \frac{v}{c}\right) f\, x_A' - \frac{f\cos\alpha_y}{c}\, y_A' - \frac{f\cos\alpha_z}{c}\, z_A' =$$
$$f'\, t_2' - \frac{f'\cos\alpha_x'}{c}\, x_A' - \frac{f'\cos\alpha_y'}{c}\, y_A' - \frac{f'\cos\alpha_z'}{c}\, z_A'$$

Pretože vzťah (23), a teda aj predchádzajúca rovnosť platí pre ľubovoľný bod A a ľubovoľný časový okamih t'_2, musia sa koeficienty pri t'_2 a súradniciach x'_A, y'_A, z'_A na oboch stranách rovnosti rovnať. Špeciálne musí platiť:

$$\gamma\left(1 - \frac{v\cos\alpha_x}{c}\right) f = f'. \qquad (24)$$

Uvažujme teraz, že zdroj elektromagnetického vlnenia je v sústave S' v pokoji. Frekvencia f' bude teda jeho pokojovou frekvenciou f_0. Pozorovateľ nech je v pokoji vzhľadom na vzťažnú sústavu S. Sústava S', a teda s ňou aj zdroj vlnenia, sa pohybuje voči pozorovateľovi rýchlosťou v v smere osi x. Potom z (24) dostávame

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha_x}$$

Všimnime si tri špeciálne prípady:

(i) Nech $\alpha_x = 0$. Potom $\cos\alpha_x = 1$ a smer šírenia sa svetla je totožný so smerom pohybu zdroja. Zodpovedá to vzájomnému približovaniu sa zdroja a pozorovateľa. V tomto prípade dostaneme

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

Vidíme, že v prípade vzájomného približovania sa je $f > f_0$.

(ii) Nech $\alpha_x = \pi$. Potom $\cos\alpha_x = -1$ a smer šírenia sa svetla je opačný než smer pohybu zdroja. Zodpovedá to vzájomnému vzďaľovaniu sa zdroja a pozorovateľa. V tomto prípade dostaneme

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}} = f_0 \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

V prípade vzájomného vzďaľovania sa je $f < f_0$.

(iii) Nakoniec nech $\alpha_x = \pi/2$. Potom $\cos\alpha_x = 0$ a smer šírenia sa svetla je kolmý na smer pohybu zdroja. V tomto prípade dostávame

$$f = f_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

a hovoríme o tzv. priečnom Dopplerovom jave, ktorý v nerelativistickej fyzike neexistuje. V skutočnosti ide len dôsledok relativistickej dilatácie času.

Kontrolné otázky

14. Aký je vzťah medzi Lorentzovou a Galileiho transformáciou?
15. Objasnite podstatu relatívnosti súčasnosti.
16. Tyč vlastnej dĺžky l_0 sa pohybuje voči pozorovateľovi rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Akú dĺžku l tyče nameria pozorovateľ, keď rýchlosť tyče má smer:
    - rovnobežný s dĺžkou tyče,
    - kolmý na tyč?
17. Pri zrážkach vysokoenergetických častíc kozmického žiarenia s atómami vrchnej časti atmosféry (vo výškach 15 – 20 km) vznikajú častice nazývané mióny. Ich stredná doba života, keď sú v pokoji, je $\tau = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s. Ak by sa pohybovali smerom k povrchu Zeme rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla, tak za dobu τ preletia len okolo 650 m. Ako je možné, že na povrchu Zeme sú detegované v relatívne hojnom množstve?
18. Pozorovateľ P'' sa voči pozorovateľovi O' pohybuje rýchlosťou c/2, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu. Pozorovateľ P sa voči pozorovateľovi P' pohybuje rovnako veľkou rýchlosťou, ale v opačnom smere. Bude sa pozorovateľ P'' pohybovať voči pozorovateľovi P rýchlosťou c?
19. Čím sa líši relativistický Dopplerov jav v optike od nerelativistického?

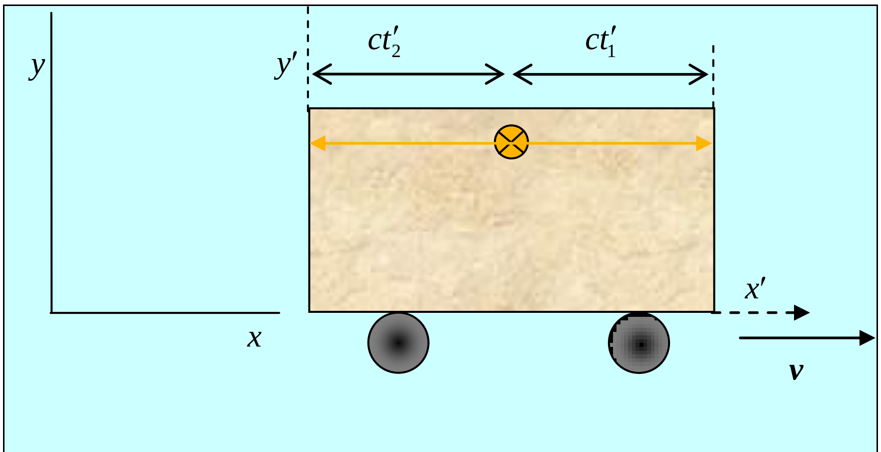
5 KINEMATIKA CEZ EINSTEINOVE MYŠLIENKOVÉ EXPERIMENTY

Najmä zásluhou Einsteina sa vo fyzike rozšírila jedna z metód skúmania, tzv. *myšlienkový experiment*. Jeho podstatou je myšlienková analýza nejakej fyzikálnej situácie. Pritom sa vychádza striktne z predpokladov uvažovanej teórie a stanovujú sa logické závery (výsledky), ktoré by mali byť pozorované. Výsledok myšlienkového experimentu, za predpokladu správnosti predpokladov, by sa mal zhodovať s výsledkom reálneho (materiálneho) experimentu. V tejto kapitole elementárnym spôsobom, za pomoci myšlienkových experimentov, objasníme základné kinematické efekty špeciálnej teórie relativity. Pri tejto metóde, ktorá ako sme už spomenuli pochádza od Einsteina, vynikne fyzikálna podstata, ktorá sa za skúmanými efektmi skrýva.

5.1 RELATÍVNOSŤ SÚČASNOSTI

Metódou myšlienkového experimentu ukážeme, že ak platia Einsteinove postuláty, čas musí v rôznych inerciálnych sústavách plynúť rôznym spôsobom.

Rovnako zásluhou Einstena vznikla tradícia, že v špeciálnej teórii relativity sa používajú dve inerciálne sústavy, z ktorých jedna sa zvykne nazývať vagónom (vlakom) a druhá traťou (stanicou). Predstavme si teda, že máme realizovanú inerciálnu súradnicovú sústavu, s ktorou je pevne spojená priama železničná trať. Túto sústavu budeme značiť symbolom S. Po trati nech sa pohybuje vagón konštantnou rýchlosťou v. Inerciálnu sústavu pevne spojenú s vagónom označíme S'. Osi oboch sústav nech sú rovnobežné, pričom os x je osou rovnej trate.



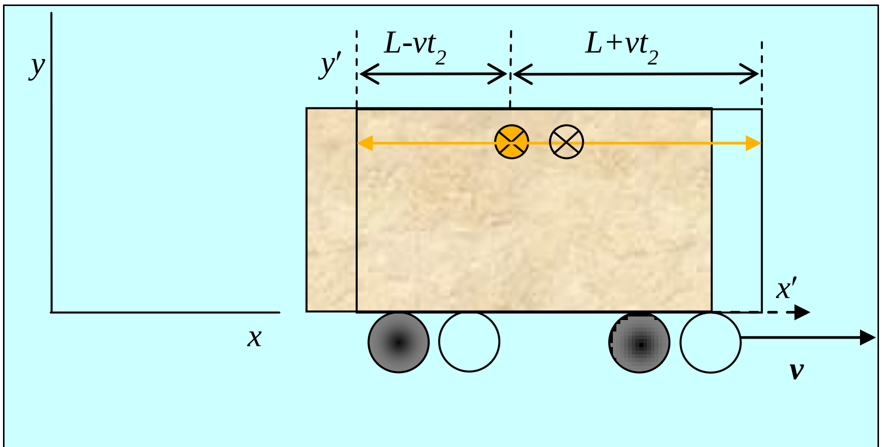
Obr. 5.1 Relatívnosť súčasnosti

Nech v strede vagóna, ktorého dĺžku nameral pozorovateľ vo vagóne rovnajúcu sa $2L'$, je umiestnená žiarovka. V istom okamihu sprievodca zapálil žiarovku. Svetlo od nej sa začne šíriť všetkými smermi, a teda aj k prednej a zadnej stene vagóna. Otázkou je, či čelo svetelnej vlny dorazí súčasne k prednej i zadnej stene vagóna.

Opíšme si ako sa tento dej bude javiť sprievodcovi vo vagóne (Obr. 5.1). Vieme, že rýchlosť svetla je vo všetkých smeroch rovnaká a rovnajúca sa c. Čelo svetelnej vlny teda dorazí k prednej stene vagóna za dobu $t'_1 = L'/c$. Rovnako k zadnej stene dorazí čelo svetelnej vlny za dobu $t'_2 = L'/c$. Sprievodca teda bude pozorovať, že čelo svetelnej vlny dopadlo na prednú aj zadnú stenu vagóna súčasne

$$t'_1 = t'_2$$

Ako bude pozorovať ten istý proces pozorovateľ stojaci na trati? Nech t_1 značí časový interval od zapálenia žiarovky po dopad svetelnej vlny na prednú stenu. Z hľadiska pozorovateľa na trati čelo svetelnej vlny za dobu t_1 musí preletieť dráhu ct_1, rovnajúcu sa dĺžke polovice vagóna L plus vzdialenosť vt_1, o ktorú za ten čas stena vagóna postúpila. Posunutý vagón je na obr. 5.2 vyznačený len obrysom. Svetelnými lúčmi sú vyznačené dráhy signálov v sústave pozorovateľa na trati.



Obr. 5.2 Relatívnosť súčasnosti

Teda

$$ct_1 = L + vt_1, \tag{1}$$

Z čoho

$$t_1 = \frac{L}{c-v}.$$

Doba t_2, za ktorú dorazí čelo svetelnej vlny k zadnej stene vagóna dostaneme z podobnej úvahy: Dráha svetelného lúča v inerciálnej súradnicovej sústave spojenej s traťou ct_2 sa rovná polovici dĺžky vagóna L, mínus vzdialenosť vt_2, ktorú za ten čas prejde zadná stena naproti čelu svetelnej vlny

$$ct_2 = L - vt_2 \tag{2}$$

Z toho

$$t_2 = \frac{L}{c+v}$$

Vidíme, že

$$t'_1 \neq t'_2,$$

a teda dve udalosti (dopad čela svetelnej vlny na prednú a na zadnú stenu vagóna), ktoré boli v sústave *S'* súčasné, v inej inerciálnej sústave *S* súčasné nie sú. Z toho je jasné, že čas v oboch inerciálnych sústavách neplynie rovnako, pretože v opačnom prípade by dve súčasné udalosti v jednej inerciálnej sústave museli byť súčasnými aj v druhej.

Poznámka:

Je dobré si uvedomiť, že za relatívnosť súčasnosti je zodpovedný princíp stálosti rýchlosti svetla. Skutočne, ak by neplatil tento princíp, ale klasické skladanie rýchlostí, tak v prípade pozorovateľa na trati by tento pozorovateľ nameral, že čelo svetelnej vlny idúce k prednej stene vagóna sa šíri rýchlosťou (c+v) a čelo svetelnej vlny idúce k zadnej stene vagóna sa šíri rýchlosťou (c-v). Je evidentné, že rovnice (1) a (2) by v tomto prípade vyzerali nasledovne

$$(c+v)t_1 = L + vt_1$$

$$(c-v)t_2 = L - vt_2$$

Vidíme, že t_1 by sa rovnalo t_2 a dostali by sme aj v tomto prípade súčasnosť oboch udalostí.

Nakoniec si všimnime čomu sa rovná časový interval medzi uvažovanými dvoma udalosťami:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c-v} - \frac{L}{c+v} = \frac{2Lv}{c^2 - v^2}$$

Dĺžka $2L$ je dĺžkou vagóna, ktorú nameria pozorovateľ na trati. Je to teda vzdialenosť Δx oboch udalostí v inerciálnej sústave pevne spojenej s traťou. Dostali sme takto výsledok:

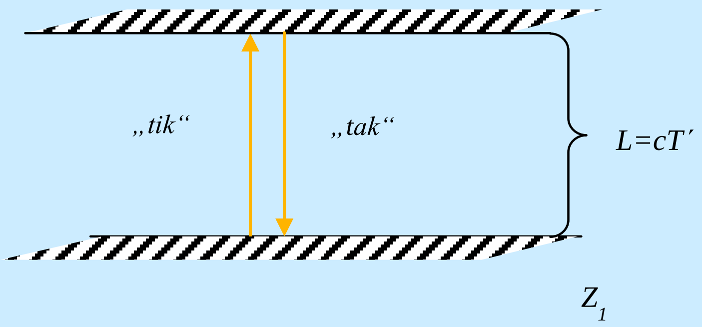
Ak dve udalosti nastali v nejakej inerciálnej súradnicovej sústave S' súčasne, tak v každej inej súradnicovej sústave S, voči ktorej sa S' pohybuje rýchlosťou v, pozorujeme medzi tými istými udalosťami časový rozdiel

$$\Delta t = \frac{v\Delta x}{c^2 - v^2}, \qquad (3)$$

kde Δx je priemet vzdialenosti oboch udalostí do smeru rýchlosti sústavy S' vzhľadom na S.

5.2 DILATÁCIA ČASU

Pomocou analýzy iného zidealizovaného experimentu si objasníme už nám známy jav dilatácie času. Predstavme si, že máme, rovnako ako v predchádzajúcom odseku, realizované dve inerciálne súradnicové sústavy. Trať S a vagón S'. Pomocou postulátov relativity skúmajme chod rovnakých hodín v oboch sústavách. Kvôli jednoduchosti si predstavme, že hodiny v oboch sústavách sú tzv. Einsteinove svetelné hodiny. Z druhej kapitoly vieme, že pojem času je vytváraný periodickým dejom a každé zariadenie v ktorom prebieha nejaký periodický dej, môže slúžiť ako hodiny na meranie času. Svetelné hodiny pozostávajú z dvoch ideálne rovinných zrkadlových plôch navzájom rovnobežných a vzdialených od seba o vzdialenosť L.



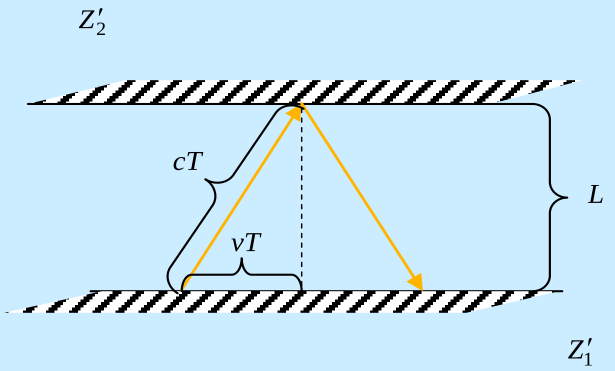
Obr. 5.3 Einsteinove svetelné hodiny H'

Kolmo na rovinu týchto zrkadiel, medzi nimi, vyšleme krátky svetelný signál. Čelo svetelného signálu dorazí k zrkadlu, odrazí sa a letí naspäť. Takto sa realizuje periodický dej, ktorého polperiódou je doba medzi odrazom od zrkadla Z_1 po nasledujúci odraz od zrkadla Z_2. Ako deti sme boli zvyknutí hovoriť, že hodiny robia „*tik-tak*“. Môžeme teda nazvať dobu letu čela svetelného impulzu od Z_1 ku Z_2 „*tikom*“ a dobu letu od Z_2 ku Z_1 „*takom*“.

Uvažujme, že máme dve úplne rovnaké svetelné hodiny (t.j. o rovnakej vzdialenosti zrkadiel L). Jedny, H', umiestnené v pohybujúcom sa vagóne a druhé, H, umiestnené na trati. Vyšetríme chod takýchto hodín z hľadiska dvoch pozorovateľov v oboch sústavách. Pre pozorovateľa vo vagóne (v sústave S') bude sa jeden „*tik*“, ktorý nameria na svojich hodinách H', rovnať dobe, potrebnej na prelet svetla od zrkadla Z_1 po zrkadlo Z_2:

$$T' = \frac{L}{c} \qquad (4)$$

Rovnaký „*tik*“ nameria pozorovateľ na trati na svojich hodinách H. Ako však bude pozorovať jeden „*tik*“ hodín H' vo vagóne pozorovateľ, ktorý stojí na trati? Voči nemu sa hodiny H' vo vagóne pohybujú rýchlosťou v.



Obr.5. 4 Einsteinove svetelné hodiny v *H´*

Svetelný impulz na hodinách *H'* sa pre neho už nešíri po tej istej úsečke tam a späť, ale po cik-cakovitej čiare. Jeden „*tik*“ na hodinách *H'* vo vagóne bude sa preňho rovnať dobe, potrebnej na prelet svetla po dráhe rovnajúcej sa prepone pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesny sú *L* a *vt* (pozri obr. 5.4) pretože zrkadlá hodín sa spolu s vagónom pohybujú.

Z toho pomocou Pytagorovej vety dostaneme

$$(cT)^2 = L^2 + (vT)^2 .$$

Po úprave

$$T = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \qquad (5)$$

Vidíme, že na hodinách *H'* nameral pozorovateľ vo vagóne jeden „*tik*“ rovnajúci sa (4) a pozorovateľ na trati na tých istých hodinách *H'* nameral jeden „*tik*“ rovnajúci sa (5).

Teda pozorovateľ na trati musí usudzovať, že hodiny *H'* sa oproti jeho hodinám *H*, na ktorých nameral tiež jeden „*tik*“ rovnajúci sa (4), oneskorujú. Vidíme, že

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ,$$

teda

$$T' \neq T .$$

Na základe toho, že obe hodiny boli rovnaké, musíme usudzovať, že v pohybujúcej sa inerciálnej súradnicovej sústave plynie čas pomalšie voči plynutiu času v sústave, ktorá sa voči pozorovateľovi nepohybuje. Čas sa v pohybujúcej sústave „ predlžuje " - *dilatuje*.

K rovnakému záveru o hodinách *H* na trati príde pozorovateľ vo vagóne. Pri stretnutí oboch pozorovateľov by mohla vzniknúť škriepka. Pozorovateľ na trati by tvrdil, že hodiny *H'* sa oneskorujú a naopak, to isté by mohol tvrdiť pozorovateľ z vagóna o hodinách *H* pozorovateľa na trati. Prirodzene vzniká otázka: Ktorý z nich má pravdu? Nájdenie správnej odpovede na túto otázku bude veľmi jednoduché. Stačí si na pomoc vziať princíp relativity. Podľa tohto princípu sú všetky inerciálne súradnicové sústavy navzájom rovnocenné, a teda výsledok precízne prevedeného merania v ktorejkoľvek z nich je rovnako oprávnený, rovnako platný. Teda obaja pozorovatelia majú pravdu a treba si uvedomiť, že rovanko ako pojem súčasnosti je relatívnym pojmom, aj plynutie času je relatívne, a treba ho vzťahovať vždy na príslušnú inerciálnu súradnicovú sústavu.

5.3 KONTRAKCIA DĹŽOK

Dostávame sa k ďalšiemu kinematickému javu špeciálnej teórie relativity, javu kontrakcie dĺžok. Skúsme analyzovať meranie dĺžky nejakého predmetu z hľadiska pozorovateľov v dvoch rôznych inerciálnych súradnicových sústavách. Najprv si však uveďme pár poznámok o dvoch bežných metódach merania dĺžok.

Jednou je základná metóda, ktorú bežne denne používame. Vezmeme pravítko, na ktorom je pomocou mernej jednotky dĺžky, resp. jej násobkov realizovaná stupnica. Pri meraní identifikujeme značky na pravítku s ktorými sa kryje začiatok a koniec predmetu a odčítame príslušnú hodnotu.

Druhú metódu, ktorú tu chceme uviesť, často používame počas búrky na odhad vzdialenosti, v ktorej udrel blesk. Spočíva v tom, že od okamihu, keď zazrieme záblesk, počítame sekundy (dobu) až do okamihu, keď počujeme hrom. Pretože svetlo sa šíri veľmi veľkou rýchlosťou voči rýchlosti zvuku, môžeme zmeranú dobu považovať za časový interval potrebný na dorazenie zvukového signálu od miesta udretia blesku až k nám. Ak poznáme rýchlosť šírenia sa zvuku vo vzduchu, ľahko, vynásobením tejto rýchlosti nameranou dobou, získame vzdialenosť, v ktorej udrel blesk. V tejto metóde môžeme použiť akýkoľvek signál známej rýchlosti a na zmeranie dĺžky predmetu stačí zmerať dobu, ktorú signál potrebuje, aby preletel od začiatku predmetu po jeho koniec. Na tomto princípe sú založené merania vzdialeností predmetov pomocou rádiolokátorov. Meria sa doba potrebná na prelet signálu dvojnásobnou vzdialenosťou predmetu od rádiolokátora (signál vyslaný rádiolokátorom sa odrazí od predmetu a vráti späť k rádiolokátoru). Preto takýmto spôsobom meraná dĺžka sa zvykne nazývať rádiolokačnou dĺžkou (tiež rádiolokačnou alebo radarovou metódou merania dĺžky). Čo je dôležité, a chceme to tu zdôrazniť, je fakt, že obe spomenuté metódy merania dĺžok (pomocou pravítka alebo rádiolokačne) sú ekvivalentné a vedú k rovnakým výsledkom.

Použime druhú z metód na meranie dĺžky vagóna. Signál, pomocou ktorého budeme merať, bude svetelný signál. Pozorovateľ vo vagóne, sprievodca, bude na zadnom konci vagóna. Dĺžku vagóna bude merať radarovou metódou. Vyšle svetelný signál, ktorý sa odrazí od zrkadla na prednom konci a vráti sa späť. Sprievodca teda zmeria dobu potrebnú na prelet svetelného signálu dvojnásobnou dĺžkou vagóna $2L'$. Nameria preto dobu rovnajúcu sa

$$\Delta t' = \frac{2L'}{c}$$

Takže dĺžku vagóna určí ako

$$L' = \frac{c\Delta t'}{2}. \qquad (6)$$

Spolu so sprievodcom bude merať dĺžku vagóna aj pozorovateľ na trati, výpravca. Situácia je analogická ako v prípade na obrázkoch 5.1 a 5.2. Pre výpravcu bude časový interval Δt od vyslania signálu k prednej stene po jeho návrat, pozostávať z dvoch nerovnakých intervalov. Doby Δt_1, kým dorazí signál k zrkadlu na prednej stene a doby Δt_2, kým dôjde signál od zrkadla späť:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \qquad (7)$$

Za dobu Δt_1 musí svetelný signál z hľadiska výpravcu, t.j. pozorovateľa na trati, preletieť dĺžku vagóna L plus kúsok $v\Delta t_1$, o ktorý sa zatiaľ predná stena vagóna posunula. Teda

$$c\Delta t_1 = L + v\Delta t_1.$$

Z toho

$$\Delta t_1 = \frac{L}{c-v}.$$

Podobne, po odraze od zrkadla na prednej stene vagóna, svetelný signál preletí za dobu Δt_2 dĺžku $c\Delta t_2$, ktorá sa z hľadiska výpravcu rovná dĺžke vagóna L mínus vzdialenosť $v\Delta t_2$, ktorú zatiaľ zadná stena svetelnému signálu nadbehla. Teda

$$\Delta t_2 = \frac{L}{c+v}$$

Celkove, časový interval, ktorý zmeria výpravca od vyslania svetelného signálu po jeho prijatie, bude podľa (7)

$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2+v^2}$$

Pomocou tohto časového intervalu určí pozorovateľ na trati dĺžku vagóna L rovnajúcu sa

$$L = \frac{c^2-v^2}{2c}\Delta t. \qquad (8)$$

Ak chceme porovnať dĺžku vagóna L, ktorú nameral pozorovateľ na trati a dĺžku toho istého vagóna L', ktorú nameral pozorovateľ vo vagóne, musíme porovnať časové intervaly Δt a $\Delta t'$, ktoré namerali, t. j. časové intervaly v (7) a (8). Z predchádzajúcej časti vieme, že medzi časovými intervalmi oboch pozorovateľov je vzťah

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pre vzťah dĺžok teda dostaneme

$$L = \frac{c^2 - v^2}{2c}\Delta t = \frac{c^2 - v^2}{2c}\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{c\Delta t'}{2}.$$

Keďže dĺžka vagóna, ktorú nameral sprievodca je

$$\frac{c\Delta t'}{2} = L',$$

môžeme pre dĺžky toho istého vagóna zmerané dvoma pozorovateľmi písať

$$L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L'. \tag{9}$$

Pretože pre $v \neq 0$ je

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leq 1,$$

bude

$$L \leq L'.$$

Pozorovateľ na trati nameria dĺžku vagóna L menšiu, než je dĺžka L', ktorú nameria pozorovateľ vo vagóne. Hovoríme preto o <u>kontrakcii dĺžok</u>.

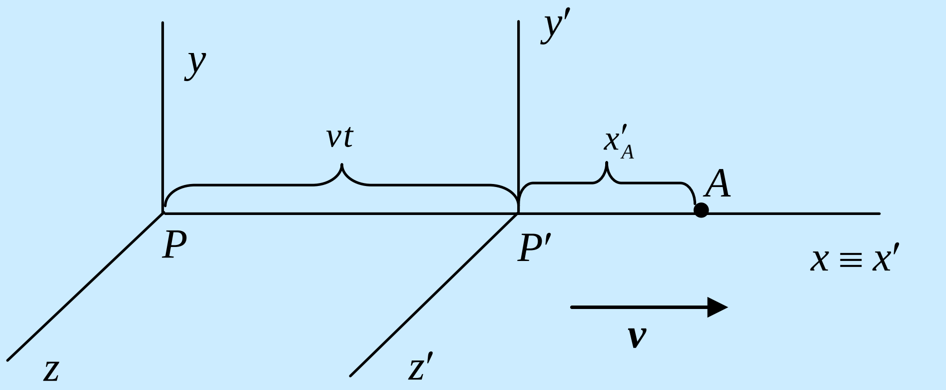
Pri stretnutí oboch pozorovateľov by podobne, ako pri meraní časových intervalov, mohla vzniknúť škriepka o tom, výsledok ktorého merania je správny. My však, na základe princípu relativity už vieme, že oba výsledky merania sú rovnako oprávnené. Nezostáva nám teda nič iné, len vziať na vedomie, že pojem dĺžky objektu je pojmom relatívnym a vzťahuje sa vždy na príslušnú inerciálnu súradnicovú sústavu v ktorej sme meranie realizovali.

5.4 LORENTZOVA TRANSFORMÁCIA

V predchádzajúcom sme zistili, že tak pri meraní času, ako aj pri meraní dĺžok dvoma pozorovateľmi, ktorí sa nachádzajú v rôznych inerciálnych súradnicových sústavách, dospeje sa k rôznym výsledkom. V tomto odseku bude našou úlohou nájsť *prekladový slovníček* medzi dvoma inerciálnymi súradnicovými sústavami. Pomocou tohto slovníčka možno určiť výsledok merania polohy a časového okamihu bodovej udalosti v jednej inerciálnej súradnicovej sústave, ak je známa poloha a časový okamih tejto udalosti v inej inerciálnej súradnicovej sústave. Takýto *prekladový slovník* nám poskytne Lorentzova transformácia.

Predstavme si dvoch pozorovateľov P a P'. Pozorovateľ P je pevne spojený s traťou a pozorovateľ P' je pevne spojený s vagónom pohybujúcim sa voči P rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v. Spojme s týmito pozorovateľmi súradnicové sústavy S a S' tak, že príslušní pozorovatelia sídlia v začiatkoch sústav a čas na hodinách oboch pozorovateľov sa začína počítať od okamihu ich stretnutia. Položme osi x a x' do smeru rýchlosti $\boldsymbol{v}$ tak, aby splývali. Zvyšné, navzájom korešpondujúce, osi oboch sústav nech sú navzájom rovnobežné. Uvažujme udalosť A, ktorá nastala na trati. Polohu tejto udalosti určí pozorovateľ P' ako x'_A a na svojich hodinách zistí, že nastala v čase t'_A.

Polohu tej istej udalosti A určí pozorovateľ P ako x_A a na svojich hodinách zistí, že nastala v čase t_A. Otázkou je, ako tieto namerané údaje pozorovateľov P a P' spolu súvisia.



Obr. 5.5 K špeciálnej Lorentzovej transformácii

Všimnime si najprv polohu udalosti A tak, ako ju určí pozorovateľ P. Podľa obr.5.5 vidíme, že vzdialenosť x bude pozostávať z dvoch úsekov. Zo vzdialenosti pozorovateľa P' od P v danom časovom okamihu t_A, ktorá sa pre pozorovateľa P rovná vt_A, a zo vzdialenosti udalosti A od pozorovateľa P tak, ako ju určí pozorovateľ P. Ak pre pozorovateľa P' nastala udalosť A vo vzdialenosti x'_A od neho, tak vzhľadom na kontrakciu dĺžok bude sa táto vzdialenosť pre pozorovateľa P rovnať

$$x'_A \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Teda

$$x_A = vt_A + x'_A \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,,$$

z čoho máme

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{10}$$

Vidíme, že pomocou predchádzajúceho vzťahu môžeme určiť polohu udalosti *A* v súradnicovej sústave *S'* (t.j. vzhľadom na pozorovateľa *P'*), ak poznáme jej polohu x_A a časový okamih t_A tejto udalosti v sústave *S* (t.j. vzhľadom na pozorovateľa *P*).

Teraz pre zmenu analyzujme časové okamihy t_A a t'_A, v ktorých budú pozorovatelia *P* a *P'* pozorovať príslušnú udalosť. Uvažujme, že z hľadiska pozorovateľa *P'* nastala udalosť *A* a odčítanie času t'_A na jeho vlastných hodinách súčasne. Pre pozorovateľa *P'* teda nastala udalosť *A* v časovom okamihu t'_A. Z prvej časti tejto kapitoly vieme, že pre pozorovateľa *P* udalosť *A* a odčítanie času t'_A na hodinách pozorovateľom *P'* nenastali súčasne, pretože tieto dve udalosti nie sú súmiestné. Časový rozdiel medzi nimi sa podľa (3) a (9) rovná

$$\frac{vx'_A \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2}\,, \tag{11}$$

kde

$$x'_A \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

je vzdialenosť udalosti *A* a pozorovateľa *P'* tak, ako ju nameria pozorovateľ *P*. Vzhľadom na dilatáciu času, ak pozorovateľ *P'* nameral časový interval t'_A na svojich hodinách, tak pozorovateľ *P* nameral časový interval

$$\frac{t'_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \tag{12}$$

Koniec tohto intervalu bude zároveň časovým okamihom t'_A, v ktorom podľa hodín pozorovateľa P odčítal na svojich hodinách pozorovateľ P'. Pretože odčítanie času pozorovateľom P' a udalosť A nie sú v sústave S' súmiestne, priradí im pozorovateľ P rôzne časy. Nameria medzi nimi určitý časový interval. Aby sme dostali časový okamih t_A udalosti A, ako ho určí pozorovateľ P, musíme sčítať oba časové intervaly. Časový interval od začiatku počítania času po okamih, keď pozorovateľ P' odčíta čas na svojich hodinách (12) a podľa (11) časový rozdiel, ktorý pozoruje pozorovateľ P medzi odčítaním času pozorovateľom P' a udalosťou A:

$$t_A = \frac{t'_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{vx'_A}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Teda dostali sme vyjadrenie

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{vx'_A}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Pomocou tohto vzťahu vieme určiť čas t, v ktorom nastala udalosť v inerciálnej súradnicovej sústave S, ak poznáme jej polohu x' a časový okamih t' v sústave S'.

Časový okamih t'_A nastania udalosti A v S', za predpokladu, že poznáme jej polohu x_A a časový okamih t_A v súradnicovej sústave S, môžeme určiť jednoduchou úvahou. Keď sa sústava S' pohybuje voči S rýchlosťou v v smere osi x, tak sústava S sa voči S' pohybuje rýchlosťou ($-v$) v smere osi x'. Takže hľadaný vzťah dostaneme jednoducho vzájomnou zámenou sústav S a S' (t.j. vzájomnou zámenou čiarkovaných a nečiarkovaných súradníc a časov) a zámenou rýchlosti v za ($-v$):

$$t'_A = \frac{t_A - \frac{vx_A}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Tento vzťah, spolu so vzťahom (10), nám dáva predpis, ako určiť polohu a čas (x',t') nejakej udalosti v súradnicovej sústave S', ak poznáme polohu a čas tejto udalosti (x,t) v sústave S.

Kontrolné otázky

20. Ako by ste charakterizovali podstatu myšlienkových experimentov?
21. Analýzou myšlienkového experimentu s idúcim vagónom vysvetlite fyzikálnu podstatu relatívnosti súčasnosti.
22. Sú dilatácia času a kontrakcia dĺžok subjektívne tvrdenia pozorovateľov, ktorí sú vo vzájomnom pohybe, alebo ide o objektívny fakt. Odpoveď si zdôvodnite.
23. Akou rýchlosťou sa pohybuje raketa voči pozorovateľovi, keď nameral jej dĺžku rovnajúcu sa 3/5 dĺžky, ktorú nameral kozmonaut v rakete?
24. V inerciálnej sústave *S* nastali dve udalosti súčasne na tom istom mieste. Akú dobu medzi nastaním týchto udalostí nameria pozorovateľ, ktorý sa voči S pohybuje rýchlosťou *v*?

6 KINEMATIKA V LOEDELOVÝCH DIAGRAMOCH

V štandardnom Minkowského grafickom zobrazovaní v časopriestorovom diagrame, kde na jednu os v pravouhlej súradnicovej sústave nanášame súradnicu času a na druhú *x*-ovú súradnicu bodovej udalosti v jednej inerciálnej sústave. V tomto diagrame keď zobrazujeme údaje z inej inerciálnej sústavy, už časová a x-ová os tej inej sústavy nebudú navzájom kolmé, ale budú zvierať uhol rôzny od pravého. Lorentzova transformácia prechodu od jednej inerciálnej sústavy k druhej je sprostredkovaná „otočením o imaginárny uhol“. V roku 1948 publikoval Loedel jednoduchú grafickú metódu vhodnú na elementárny výklad základov teórie relativity. V Loedelových diagramoch, na rozdiel od Minkowského, sa na jednu os pravouhlej sústavy nanáša časová súradnica udalosti z jednej inerciálnej sústavy a na druhú os x-ová súradnica danej udalosti z druhej inerciálnej sústavy: (ct,x'). Ak sú obe sústavy inerciálne, potom aj druhá dvojica osí, (ct',x) je navzájom kolmá a je len pootočená o reálny uhol oproti predchádzajúcej. Takáto situácia zodpovedá tzv. symetrizovanej Minkowského reprezentácii. Vhodné použitie nachádzajú Loedelove diagramy pri úvahách o vzťahoch dvoch inerciálnych sústav, v prípade troch a viacerých je ich použitie už komplikovanejšie než štandardné Minkowského časopriestorové diagramy.

6.1 TEORETICKÁ BÁZA LOEDELOVÝCH DIAGRAMOV

Na základe Einsteinových postulátov špeciálnej teórie relativity sme ukázali (pozri kapitolu 4.1), že ak opisujeme istú bodovú udalosť so súradnicami x,y,z a časovým okamihom jej nastania t v jednej inerciálnej súradnicovej sústave a tú istú udalosť v druhej inerciálnej sústave, v ktorej má súradnice x',y',z' a nastala v okamihu t', potom platí

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2,$$

resp. ak uvažujeme len jednorozmerný prípad pohybu po priamke (osi x)

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2, \qquad (1)$$

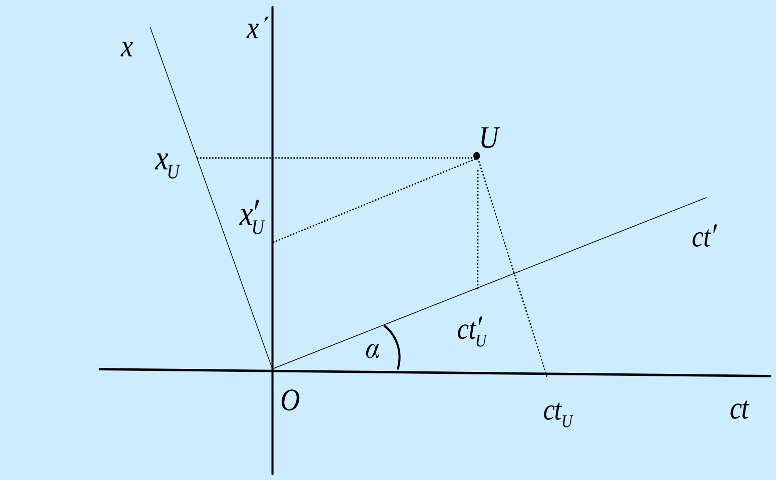
kde c je rýchlosť svetla vo vákuu.

Ak zobrazujeme bodové udalosti v kartézskej súradnicovej sústave tak, že na jednu os nanášame súčin ct a na druhú os nanášame súradnicu udalosti x, vidíme, že prechod k inej inerciálnej sústave je sprostredkovaný transformáciou, ktorá nezachováva euklidovskú dĺžku, t. j. transformáciou, ktorá nie je ortogonálna. Z rovnice (1) však dostaneme

$$c^2t'^2 + x^2 = c^2t^2 + x'^2.$$

To znamená, že ak pomiešame súradnicu x udalosti v inerciálnej sústave S s časovým okamihom nastania tej istej udalosti , ale nameraným v inej inerciálnej sústave S', teda na grafickom zobrazení v kartézskej súradnicovej sústave budeme na jednu os vynášať ct' a na druhú x, dostaneme zachovávajúcu sa euklidovskú dĺžku $(ct')^2 + (x)^2$. Prechod k inej dvojici „súradníc“ (ct,x') bude teda daný ortogonálnou transformáciou, graficky otočením osí o určitý uhol α.

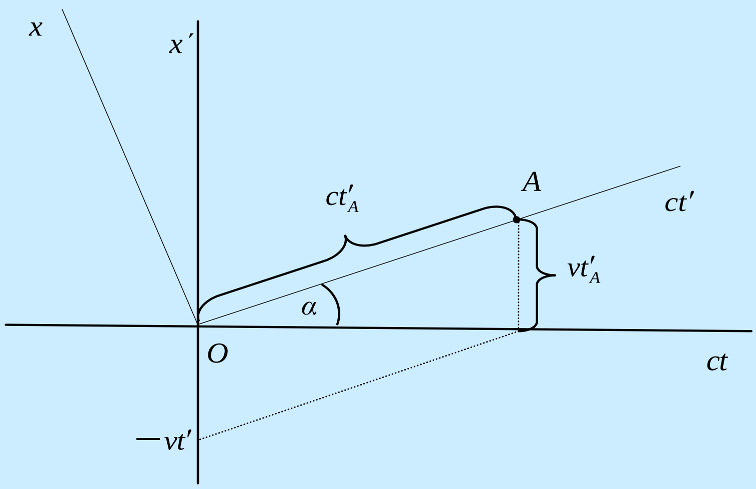
Súradnice bodovej udalosti U v inerciálnych sústavách S a S' možno nájsť podľa obr. 6.1



Obr. 6.1 Súradnice udalosti v Loedelovom

6.2 VÝZNAM UHLA α

Uvažujme, že v časovom okamihu $t=t'=0$ s oba začiatky sústav S a S' splývali. Ďalej nech sa sústava S' pohybuje voči S v smere kladnej polosi x rýchlosťou v. Ak vyjadrujeme polohy začiatku sústava S v rôznych okamihoch t, budú to na grafe body na osi ct. Súradnice začiatku O v časovom okamihu t budú v sústave S' dané: $x'= -vt'$ (začiatok O sa voči S pohybuje rýchlosťou $-v$) a ct'. Fyzikálny význam uhla α teda možno jednoducho nájsť pomocou obr. 6.2.



Obr. 6.2 Fyzikálny význam uhla α

Z obrázku možno zistiť, že

$$\sin\alpha = \frac{vt'}{ct'},$$

teda

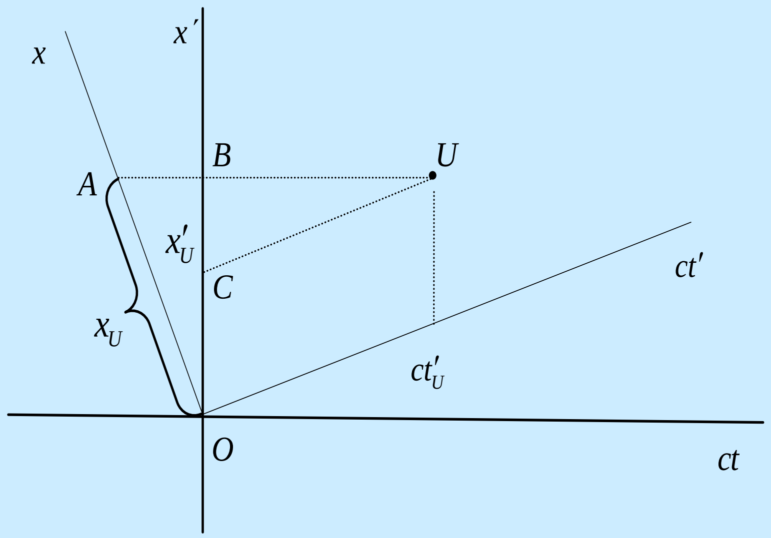
$$\sin\alpha = \frac{v}{c}. \tag{2}$$

Použitím vzťahov medzi goniometrickými funkciami sínus a kosínus dostaneme

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3}$$

6.3 LORENTZOVA TRANSFORMÁCIA

Lorentzovu transformáciu môžeme pomerne rýchlo, bez zdĺhavého odvodzovania, dostať z obr. 6.3.



Obr. 6.3 K vyjadreniu transformácie priestorovej

Pre trojuholník *ABO* máme:

$$x_U \cos\alpha = |OB| = |OC| + |BC|,$$

kde $|OC| = x'_U$.
Z trojuholníka *BUC* máme:

$$|BC| = ct'_U \sin\alpha,$$

teda

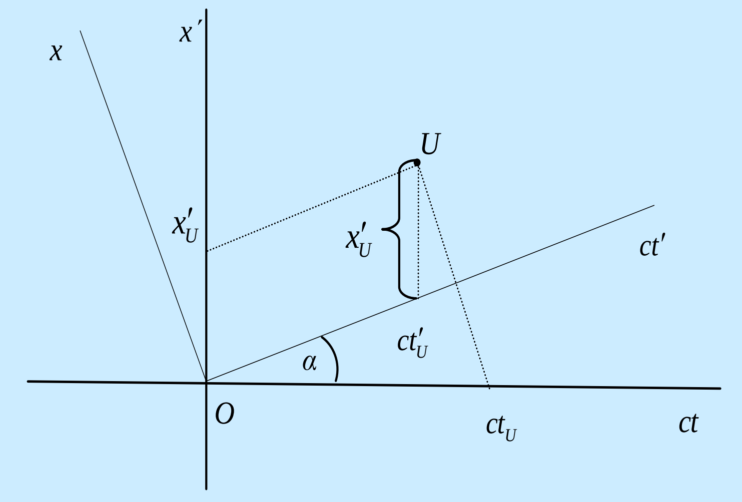
$$x_U \cos\alpha = x'_U + ct'_U \sin\alpha.$$

Po úprave dostaneme

$$x_U = \frac{x'_U + ct'_U \sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

Keď do (4) dosadíme za $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ z (2) a (3), dostaneme

$$x_U = \frac{x'_U + vt'_U}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5}$$



Obr. 6.4 K vyjadreniu transformácie časovej

Podobne z obr. 6.4 dostaneme

$$ct_U \cos\alpha = ct'_U + x'_U \sin\alpha,$$

čo po dosadení z (2) a (3) vedie k vzťahu

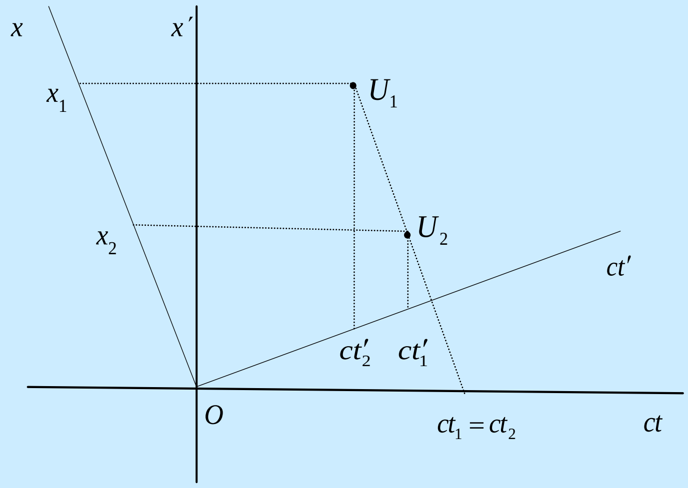
$$t_U = \frac{t'_U + \frac{v}{c^2}x'_U}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6}$$

Vzťahy (5) a (6) už predstavujú známu špeciálnu Lorentzovu transformáciu.

6.4 RELATÍVNOSŤ SÚČASNOSTI

Pre objasnenie relatívnosti súčasnosti si vyznačme (obr. 6.5)v Loedelovom diagrame dve udalosti U_1 a U_2, ktoré nastali súčasne v inerciálnej sústave S.
Ich priemety (paralelne s osou x) do osi ct musia byť totožné (premietajú sa do toho istého okamihu v sústave S):

$$t_1 = t_2.$$



Obr. 6.5 Relatívnosť súčasnosti

Ak si však premietneme tieto udalosti na os ct' (paralelne s x') dostaneme dva rôzne priemety, teda pre časové okamihy nastania týchto udalostí v sústave S':

$$t'_1 \neq t'_2.$$

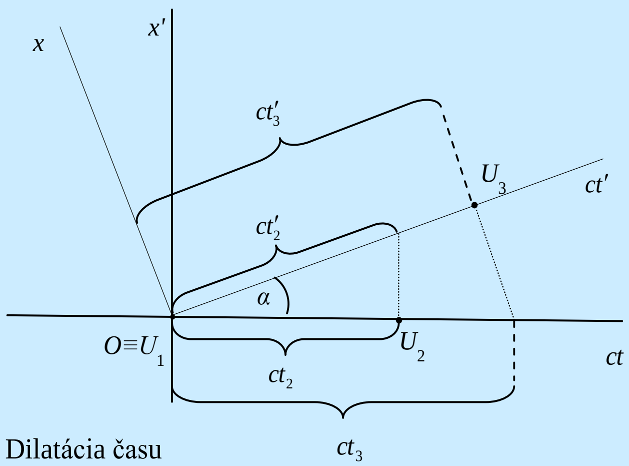
Priemety nie sú totožné, udalosti U_1 a U_2 nenastali v inerciálnej sústave S' súčasne. Z obrázku 6.5 je tiež evidentné, že

$$(t'_1 - t')_2 \propto (x_1 - x_2).$$

Preto dve súmiestne udalosti v sústave S, ktoré v nej nastali súčasne, budú súčasné v každej inej inerciálnej sústave.

6.5 DILATÁCIA ČASU

Dilatácia času je jav často diskutovaný aj v laickej verejnosti najmä v súvislosti s paradoxom dvojčiat. V paragrafe 3.4 sme tento jav diskutovali ako dôsledok Lorentzovej transformácie. Pomerne jednoduchá (obr. 6.6) je demonštrácia tohto javu



Obr. 6.6 Dilatácia času

pomocou Loedelovho diagramu a jeho kvantitatívne vyjadrenie dostaneme z fyzikálneho významu uhla α.

Na obrázku máme vyznačené bodové udalosti U_1, U_2 a U_3. Z diagramu vidíme, že udalosti U_1 a U_2 sú súmiestne v sústave S, kým udalosti U_1 a U_3 sú súmiestne v S'. Môžeme si predstaviť situáciu, že máme dvoch pozorovateľov P, resp. P', ktorí sú v pokoji vzhľadom na sústavu S, resp. S'. Udalosť U_1 je napríklad udalosť, keď sa obaja pozorovatelia stretnú a nastavia si na svojich hodinkách rovnaký čas 0 s. Udalosť U_2 môže predstavovať fakt, že pozorovateľ P pozrel na svoje hodinky a zistil, že ukazujú čas t_2. Ak chceme zistiť aký časový okamih korešponduje tejto udalosti v sústave S', musíme nájsť súradnicu ct_2 tejto udalosti na príslušnej osi (t. j. rovnobežný priemet U_2 s osou x' do osi ct'). Z obrázku 6.6 vidíme, že

$$\frac{ct_2}{ct_2'} = \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

Teda

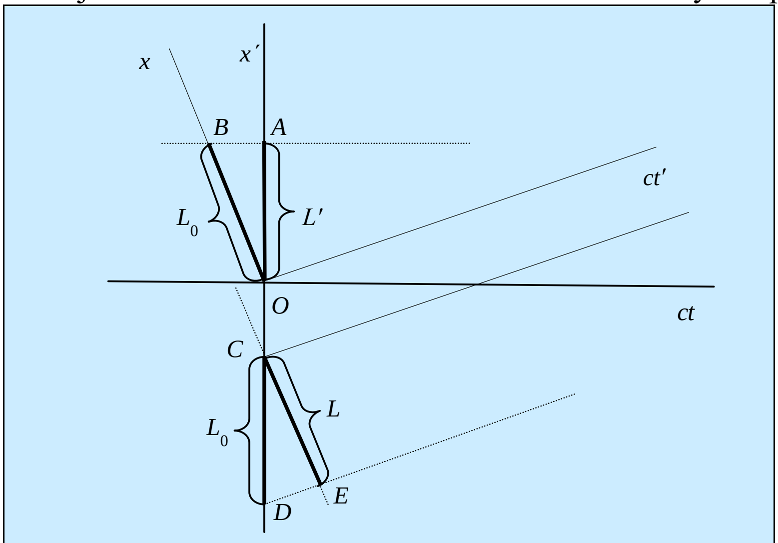
$$t_2' = \frac{t_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (7)$$

Čo opisuje efekt dilatácie času. Ďalej možno vidieť, že príslušný efekt je vzájomný čo sa týka pozorovateľov P a P'. Možno to demonštrovať pomocou udalosti U_3 vyznačenej v obrázku 6.6. Udalosť U_3 a U_1 sú v sústave S' súmiestne (obe ležia na osi P). Z obrázku vidno, že

$$t_3 = \frac{t_3'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

6.6 KONTRAKCIA DĹŽOK

Podobne objasnenie efektu kontrakcie dĺžok možno veľmi rýchle pochopiť z obr. 6.7.



Obr. 6.7 Kontrakcia dĺžok

Predstavme si tuhú tyč, ktorá je v pokoji v sústave S' rovnobežná s osou x' a pozorovateľ P' nameria jej dĺžku L_0. Na obrázku je to vzdialenosť bodov CD. Dĺžku L tejto tyče nameranú v sústave S dostaneme tak, že v S musíme súčasne zaznačiť polohu jej koncov a zmerať vzdialenosť týchto bodov v S. Tomu zodpovedá priemet úsečky CE do smeru osi x, a veľkosť tohto priemetu je dĺžka spomenutej tyče, ako ju nameria pozorovateľ P. Z obrázku možno vidieť, že

$$L = L_0 \cos\alpha = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{8}$$

čo predstavuje známu formulku vyjadrujúcu kontrakciu dĺžok.

O vzájomnosti tohto efektu pre oboch pozorovateľov P a P' sa možno presvedčiť znova z obrázku 6.7 (napr. z trojuholníka ABO). Úsečka OB predstavuje tyč dĺžky L_0 v pokoji v sústave S. Vzdialenosť bodov OA (priemet do osi x') predstavuje vzdialenosť začiatku a konca tyče zmeranú z hľadiska sústavy S' súčasne, teda predstavuje dĺžku tyče nameranú pozorovateľom v S'.

Kontrolné otázky

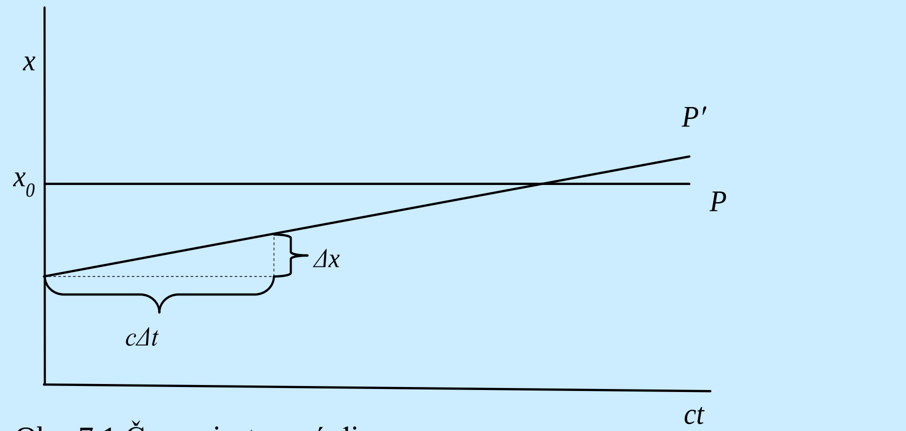
25. Ako by ste charakterizovali Loedelov diagram?
26. Aký je význam uhla otočenia medzi dvoma sústavami osí v Loedelovom diagrame?
27. Ako sa zobrazia body následných polôh pozorovateľa P', ktorý je nehybný v inerciálnej sústave S'? Ako pre pozorovateľa P nehybného v S?
28. Aké sú v Loedelovom diagrame polohy dvoch bodov zobrazujúcich dve súčasné udalosti v sústave S'?
29. Akým spôsobom môžeme zmerať dĺžku pohybujúcej sa tyče? Procedúru opíšte v Loedelovom diagrame.

7 METÓDA BONDIHO *k*-FAKTORA

Jednoduchú, matematicky nenáročnú, metódu výkladu špeciálnej teórie relativity podal Sir Hermann Bondi začiatkom šesťdesiatych rokov minulého storočia v knihe *Relativity and Common Sence (a new approach to Einstein).* Založená je na tzv. *k*-faktore, ktorý vystupuje ako faktor pri relativistickom Dopplerovom jave. Zvlášť vhodná je ako elementárna metóda vyžadujúca využitie matematického aparátu v minimálnej miere.

7.1 *k*-FAKTOR A DOPPLEROV EFEKT

Pre jednoduchosť budeme uvažovať pohyb len po osi *x*. Potom dvojice časových okamihov a polôh udalostí (t, x) tvoria dvojrozmerný časopriestor a môžeme ich jednoducho zobrazovať v grafe, kde na jednu os nanášame čas *t* vynásobený rýchlosťou svetla vo vákuu *ct*, a na druhú, na ňu kolmú, os *x*-ovú súradnicu udalosti. Takéto grafické znázornenie sa nazýva časopriestorový diagram. V časopriestorovom diagrame každý bod (*ct*,*x*) zodpovedá nejakej bodovej udalosti, ktorá nastala v okamihu *t* v mieste *x*. Predstavme si, že máme pozorovateľa *P*, ktorý je v pokoji a nachádza sa v mieste x_0. Udalosti, ktoré tento pozorovateľ postupne prežíva, budú v časopriestorovom diagrame na obr. 7.1 znázornené časťou priamky rovnobežnej s osou *ct*. Grafu udalostí, ktorými počas plynutia času prechádza pozorovateľ, hovoríme svetočiara pozorovateľa. Uvažujme iného pozorovateľa *P'*, ktorý sa pohybuje v kladnom smere

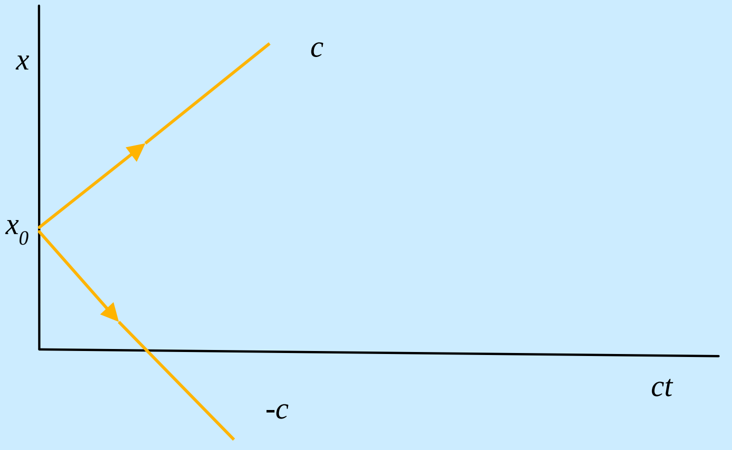


Obr. 7.1 Časopriestorový diagram a

osi *x* konštantnou rýchlosťou *v*. Jeho svetočiara bude časť priamky zvierajúca s osou *ct* kladný uhol *α*. Rýchlosť pozorovateľa *P'* voči *P* je úmerná sklonu tejto svetočiary, $v = \Delta x/\Delta t$ (pozri obr. 7.1). Čím väčšou rýchlosťou sa *P'* pohybuje, tým väčší sklon bude mať jeho svetočiara. Presnejšie, sklon svetočiary, t. j. tg α, sa bude rovnať *v*/*c*.

$$tg\,\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{c\Delta t} = \frac{v}{c} \qquad (1)$$

Ak na osi *x* priradíme jednému dieliku vzdialenosť 1 m a rovnako aj na osi *ct* (tejto hodnote zodpovedá približne časový okamih 1/3 $.10^{-8}$ s), potom rýchlosti svetla vo vákuu v takomto diagrame zodpovedá priamka so sklonom π/4 rad, resp. 45^o (podľa toho, či sa šíri v kladnom alebo zápornom smere osi x)



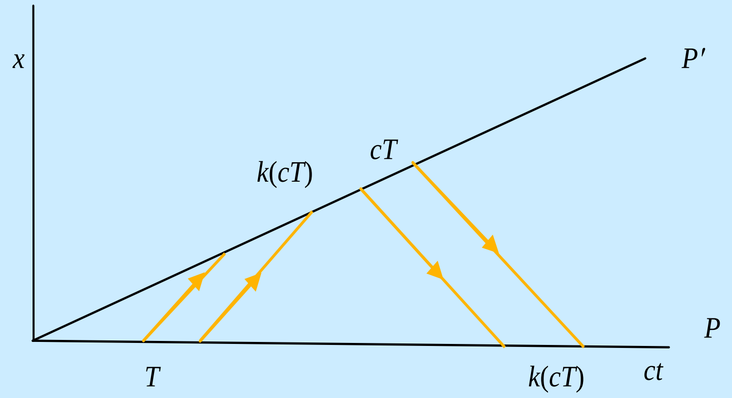
Obr. 7.2 Svetočiary svetla

Svetelnému signálu šíriacemu sa v kladnom smere osi x bude zodpovedať priamka so sklonom π/4 rad (jej smernica tg $\alpha = 1$). Svetelnému signálu šíriacemu sa v zápornom smere osi x bude zodpovedať priamka zvierajúca s osou ct uhol $-\pi/4$ rad (jej smernica tg $\alpha = -1$).

Predpokladajme, že pozorovateľ P vyšle dvojicu svetelných pulzov smerom k pozorovateľovi P', pričom časový interval medzi týmito pulzmi, ktorý P na svojich hodinkách nameria, je T. Pozorovateľ P' na svojich hodinkách nameria časový interval T' medzi prijatím prvého a druhého pulzu. Je len prirodzené, že $T' \neq T$ (aj v nerelativistickej fyzike) pretože druhý pulz musí preletieť inú dráhu než prvý, zmenenú o vzdialenosť, o ktorú sa pozorovateľ P' za dobu T posunul. Rovnako prirodzeným je však predpokladať, že tieto intervaly sú si úmerné

$$T' = kT. \tag{2}$$

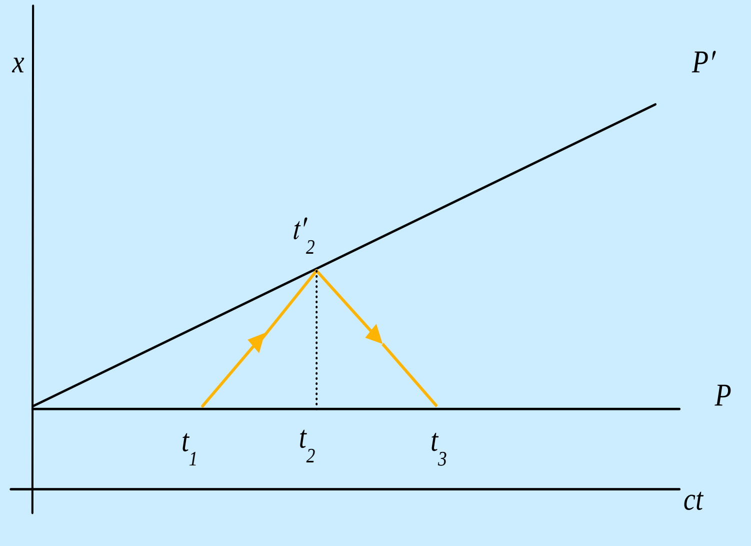
Faktor k vystupujúci v tejto priamej úmere sa nazýva k-faktorom a je charakteristikou relatívneho pohybu pozorovateľa P' vzhľadom na P. Ak sústava pevne spojená s pozorovateľom P je inerciálna, a teda aj sústava spojená s P', potom k musí byť konštantné.



Obr. 7.3 Zavedenie k-faktora

Princíp relativity, spolu s princípom konštantnosti rýchlosti svetla, hovorí, že vzťah medzi P a P' musí byť symetrický. Znamená to, že ak P' vyšle dva svetelné pulzy s časovým rozdielom T' smerom k pozorovateľovi P, potom P prijme tieto pulzy s časovým rozdielom kT' nameraným na svojich hodinách.

Teraz pristúpme k určeniu k-faktora. Pomôže nám k tomu nasledujúca úvaha. Znova uvažujme dvoch pozorovateľov P a P' nachádzajúcich sa v inerciálnych vzťažných sústavách. Veličiny vzťahujúce sa k vzťažnej sústave pozorovateľa P' budeme značiť s čiarkou a tie, ktoré sa vzťahujú k pozorovateľovi P bez čiarky. V časopriestorovom diagrame v sústave pozorovateľa P bude jeho svetočiara rovnobežná s osou ct a bude prechádzať bodom $(0,x_1)$, kde x_1 je súradnica polohy pozorovateľa P. Pozorovateľ P' nech sa pohybuje voči P rovnomerným pohybom rýchlosťou v. Jeho svetočiara bude zvierať s osou ct uhol $\alpha = \mathrm{arctg}(v/c)$. V okamihu, keď bude pozorovateľ P' míňať pozorovateľa P (okamih ich stretnutia v mieste x_1), si obaja pozorovatelia nastavia na svojich hodinách čas $t' = t = 0$ s. Potom ich svetočiary vyzerajú tak, ako sú zobrazené na obr. 7.4. Nech pozorovateľ P v istom čase t_1 (čas, ktorý ukazujú jeho hodiny) vyšle svetelný signál k pozorovateľovi P'. Svetelný signál dorazí k pozorovateľovi P' v okamihu, keď jeho hodiny budú ukazovať čas t'_2. Pozorovateľ P' má u seba nastavené zrkadlo od ktorého sa svetelný signál odrazí naspäť k pozorovateľovi P a dorazí k nemu v čase t_3.



Obr. 7.4 Súvis k–faktora s rýchlosťou v

Pre čas t'_2 podľa predchádzajúceho musí platiť $t'_2 = k\ t_1$. Udalosť odrazu svetelného signálu od zrkadla pozorovateľa P' nastala v mieste, ktoré má vo vzťažnej sústave pozorovateľa P súradnicu

$$x_2 = x_1 + vt_2,$$

pretože od okamihu stretnutia sa pozorovateľ P' pohyboval rýchlosťou v po dobu t_2, a teda sa od pozorovateľa P vzdialil o vt_2. Súčasne však musí platiť aj

$$x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1),$$

pretože vzdialenosť $(x_2 - x_1)$ pozorovateľov P a P' v okamihu, keď svetelný signál dorazil k pozorovateľovi P' sa rovná dráhe svetelného signálu $c(t_2 - t_1)$, ktorú preletel od pozorovateľa P k P'. Porovnaním dostaneme

$$x_1 + vt_2 = x_1 + c(t_2 - t_1),$$

teda

$$vt_2 = c(t_2 - t_1).$$

Časový okamih t_2 je práve v strede medzi t_1, okamihom odoslania svetelného signálu, a t_3, okamihom jeho spätného prijatia pozorovateľom P po odraze od pozorovateľa P' pretože naspäť prešiel svetelný signál rovnakú dráhu rovnakou rýchlosťou. Avšak z významu k-faktora, ako vidno z obrázku 7.4,

$$t_3 = kt_2' = k(kt_1) = k^2 t_1.$$

Teda

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2} = \frac{(1 + k^2)t_1}{2},$$

a preto

$$v\frac{(1+k^2)t_1}{2} = c\left(\frac{(1+k^2)t_1}{2} - t_1\right).$$

Úpravou dostaneme

$$v(k^2 + 1) = c(k^2 - 1)$$

z čoho už jednoducho možno vyjadriť k-faktor

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \tag{3}$$

Predstavme si, že pozorovateľ P nasmeruje smerom k pozorovateľovi P' zdroj svetla, ktorého frekvencia je f. Pozorovateľ P' bude registrovať prichádzajúce svetlo frekvencie f'. Keďže frekvencia je prevrátenou hodnotou periódy, vzťah medzi periódami T a T' nám dovoľuje určiť pomocou k-faktora vzťah medzi frekvenciou vysielaného a prijímaného signálu.

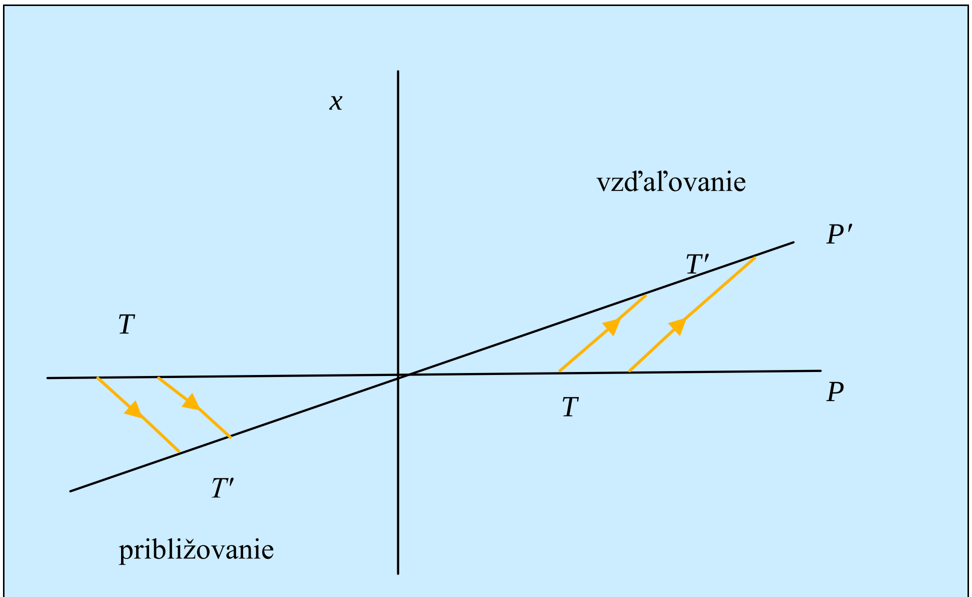
Podľa vzťahu (2): $T' = kT$, z čoho pre frekvencie dostaneme

$$f' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f. \tag{4}$$

Vidíme, že pozorovateľ P' bude registrovať nižšiu frekvenciu signálu než pozorovateľ P. Ide o prípad, keď sa pozorovateľ P' vzďaľuje od pozorovateľa P. V prípade približovania, t. j. pred ich stretnutím, by musel pozorovateľ P nasmerovať zdroj opačným smerom, teda c by sa zmenilo na ($-c$). V takom prípade by pozorovateľ P' registroval vyššiu frekvenciu:

$$f' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\, f \,. \tag{5}$$

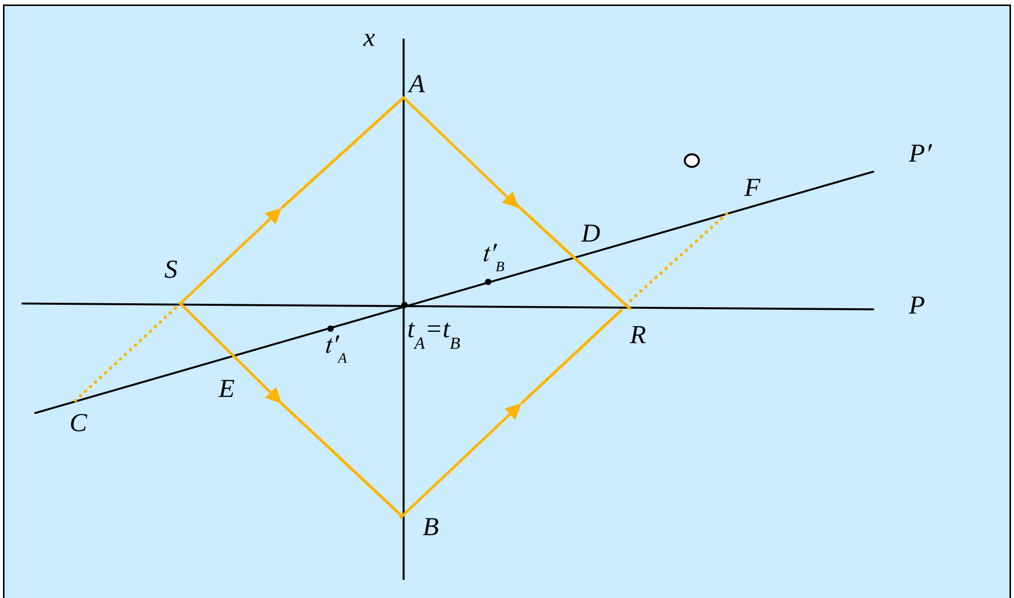
Opísané prípady predstavujú relativistický Dopplerov efekt v prípade, že vektor rýchlosti pozorovateľa P′ leží v spojnici oboch pozorovateľov.



Obr.7. 5 Dopplerov efekt

7.2 RELATÍVNOSŤ SÚČASNOSTI

Uvažujme dve udalosti A a B, ktoré nastali pre pozorovateľa P súčasne: $t_A = t_B$. Pozorovateľ P nech je v začiatku vzťažnej sústavy a udalosti nastali v rovnakých vzdialenostiach na osi x, ale v opačných smeroch od pozorovateľa P. Tieto udalosti môžeme stotožniť s odrazom svetelného signálu vyslaného radarom pozorovateľom z bodu S od zrkadiel umiestnených v miestach udalostí A a B (pozri obr. 7.6).



Obr. 7.6 Relatívnosť súčasnosti

Radarový signál sa vráti k pozorovateľovi *P* od oboch zrkadiel v *A* aj *B* súčasne (v bode *R* na obr. 7.6), čo potvrdzuje súčasnosť oboch udalostí *A*, *B* pre pozorovateľa *P*. Okamih ich nastania t_A=t_B zodpovedá časovému okamihu v polovici úsečky *SR*. Tie isté dve udalosti pozoruje aj pozorovateľ *P′*, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $v \neq 0$. Nech sa obaja pozorovatelia stretajú práve v okamihu, keď pre pozorovateľa *P* nastali udalosti *A* a *B*. Svetočiara pozorovateľa *P′* je v takomto prípade znázornená v obrázku 7.6 priamkou označenou *P′*. Aj pozorovateľ *P′* si na udalosti *A* a *B* „posvieti" radarom. K udalosti *A*, aby na jej miesto signál dorazil súčasne s udalosťou *A*, musí vyslať signál z bodu *C* svojej svetočiary (v čase t'_C). K udalosti *B* musí vyslať signál z bodu *E* (pozri obr. 7.6). Od udalosti *A* sa k pozorovateľovi *P′* vráti signál v bode *D* jeho svetočiary, od udalosti *B* sa signál vráti v bode *F*. Z obrázku vidíme (zo symetrie), že dĺžka *CD* = *EF*. Teda aj pre pozorovateľa *P′* boli obe udalosti od neho rovnako vzdialené. Keďže k udalosti *A* musel vyslať signál skôr než k udalosti *B*, udalosť *A* nastala pre pozorovateľa *P′* skôr než udalosť *B*. Časový okamih t'_A nastania udalosti *A* pre pozorovateľa *P′* zodpovedá stredu úsečky *CD*, zatiaľ čo časový okamih t'_B udalosti *B* pre pozorovateľa *P′* zodpovedá stredu úsečky *EF*.
Vidíme, že hoci pre pozorovateľa *P* bolo:

$$t_A = t_B,$$

Pre pozorovateľa *P′* už

$$t'_A \neq t'_B, \quad (t'_B > t'_A).$$

Z geometrie obrázku jednoducho nahliadneme, že zmenšením vzdialenosti udalostí sa zmenší štvorec ASBR a úmerne tomu vlastne celý obrázok. Teda aj rozdiel $(t'_B > t'_A)$.

Preto je časový interval medzi týmito udalosťami pre pozorovateľa P′ úmerný priemetu ich vzdialenosti do smeru rýchlosti

$$t'_B - t'_A \propto \Delta x_{AB} \quad \left(= \overline{AB}\right).$$

Ak dve súmiestne udalosti pre niektorého pozorovateľa nastali súčasne, potom budú súčasné pre každého pozorovateľa.

7.3 SKLADANIE RÝCHLOSTÍ

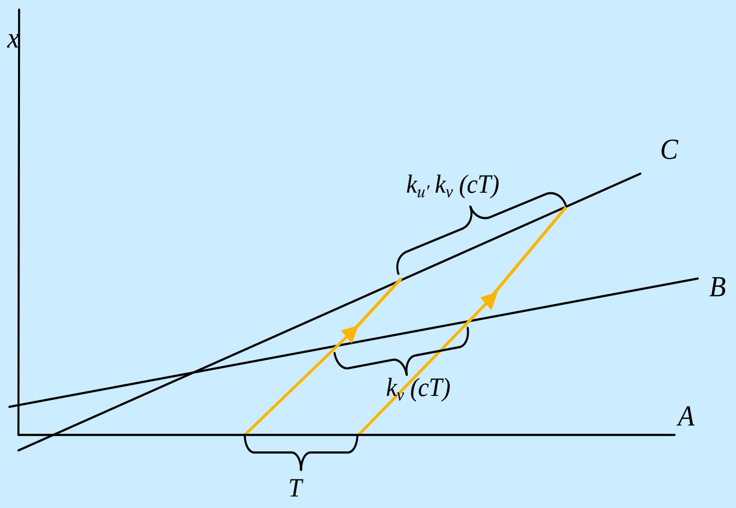
Pomocou *k*-faktora možno veľmi jednoducho dospieť k Einsteinovmu vzorcu pre skladanie rýchlostí. Uvažujme pozorovateľa *A* nachádzajúceho sa v inerciálnej sústave. Voči nemu nech sa pohybuje pozorovateľ *B* konštantnou rýchlosťou *v*. Tretí pozorovateľ *C* sa pohybuje voči *B* konštantnou rýchlosťou u' v rovnakom smere ako *B* voči *A*. Situáciu si môžeme jednoducho ilustrovať na príklade: *A* je výpravca na železničnej stanici, *B* je sediaci cestujúci vo vlaku idúcom rýchlosťou *v* a *C* je sprievodca kráčajúci v smere jazdy vlaku rýchlosťou u'. Keď sa zaujímame o rýchlosť *u*, ktorou sa pohybuje sprievodca vzhľadom na výpravcu, tak nerelativistická fyzika má jednoduchú odpoveď:

$$u = v + u'.$$

Pri odvodení relativistického vzorca budeme vychádzať zo vzťahu, ktorý vyplýva zo samotného významu *k*-faktora:

$$k_u = k_v k_{u'}. \qquad (6)$$

Jasne to vidno z obrázku 7.7.



Obr. 7.7 Skladanie rýchlostí

Dosadením do (6) z (3) dostaneme

$$\sqrt{\frac{c+u}{c-u}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\sqrt{\frac{c+u'}{c-u'}}.$$

Po umocnení, vynásobení $(c-v)(c-u')$ a úpravách postupne dostaneme

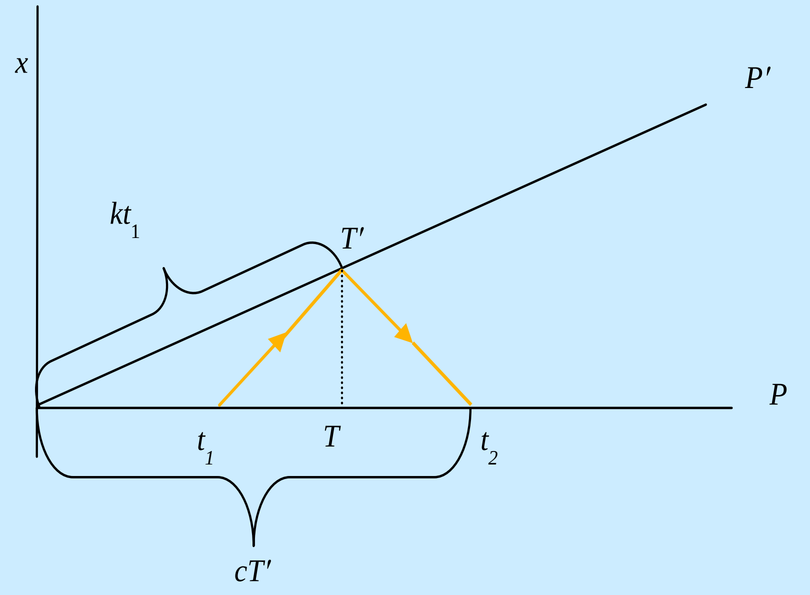
$$u\left(c^2 + vu'\right) = c^2\left(v + u'\right),$$

a osamostatnením u známy Einsteinov vzorec pre skladanie rýchlostí

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \qquad (7)$$

7.4 DILATÁCIA ČASU

Uvažujme dve inerciálne sústavy S a S' a v nich pozorovateľov P a P'. V prvom priblížení S možno stotožniť so Zemou a P je pozorovateľ na Zemi. Sústava S' nech sa pohybuje voči Zemi konštantnou rýchlosťou v a je spojená s kozmickou loďou, pozorovateľ P' je kozmonaut na kozmickej lodi. V okamihu štartu kozmickej lode (udalosť O) si P aj P' na svojich rovnakých hodinách nastavia čas 0 s. Os x položme do spojnice oboch pozorovateľov po štarte. Časopriestorový diagram tejto situácie je na obr. 7.8.



Obr. 7.8 Dilatácia času

V časovom okamihu t_1 nech pozorovateľ P na Zemi vyšle svetelný signál smerom k družici, na ktorej je umiestnené zrkadlo tak, že signál sa od neho odrazí naspäť smerom k Zemi a doletí k pozorovateľovi P v čase t_2. Keď signál dorazil ku kozmonautovi, jeho hodiny ukazovali čas T. V zmysle definície k-faktora platí: $T' = kt_1$. Podľa hodín pozorovateľa P na Zemi signál dorazil ku kozmonautovi P' v časovom okamihu $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, t. j. v polovici doby medzi vyslaním signálu a jeho prijatím naspäť, pretože svetelný signál za dobu medzi jeho vyslaní a prijatím prešiel rovnakou rýchlosťou dvakrát tú istú vzdialenosť medzi zemou a kozmickou loďou. Vzťah medzi dobami T a T' od okamihu štartu po okamih dorazenia signálu ku kozmickej lodi nameranými oboma pozorovateľmi je:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)}{kt_1}.$$

Ale ako vidno z obr. 7.8 a podľa definície *k*-faktora $t_2 = kT' = k(kt_1) = k^2 t_1$. Teda

$$\frac{1}{2}(t_1 + t) = \frac{1}{2}(k^2 + 1)t_1.$$

Pre pomer oboch dôb po úpravách dostaneme

$$\frac{T}{T'} = \frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

resp.

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (8)$$

Keďže menovateľ v poslednom výraze je menší než 1, vidíme, že $T' < T$. Obaja pozorovatelia namerajú rôzne časové intervaly medzi dvoma tými istými udalosťami. Z predchádzajúcej nerovnosti môže pozorovateľ na Zemi skonštatovať, že medzi oboma udalosťami ubehla pre pozorovateľa P' kratšia doba než preňho na Zemi. Teda čas v kozmickej lodi plynie relatívne voči času na Zemi pomalšie. Prirodzene, že tento vzťah je pre oboch pozorovateľov vzájomný, symetrický vzhľadom na výmenu pozorovateľov.

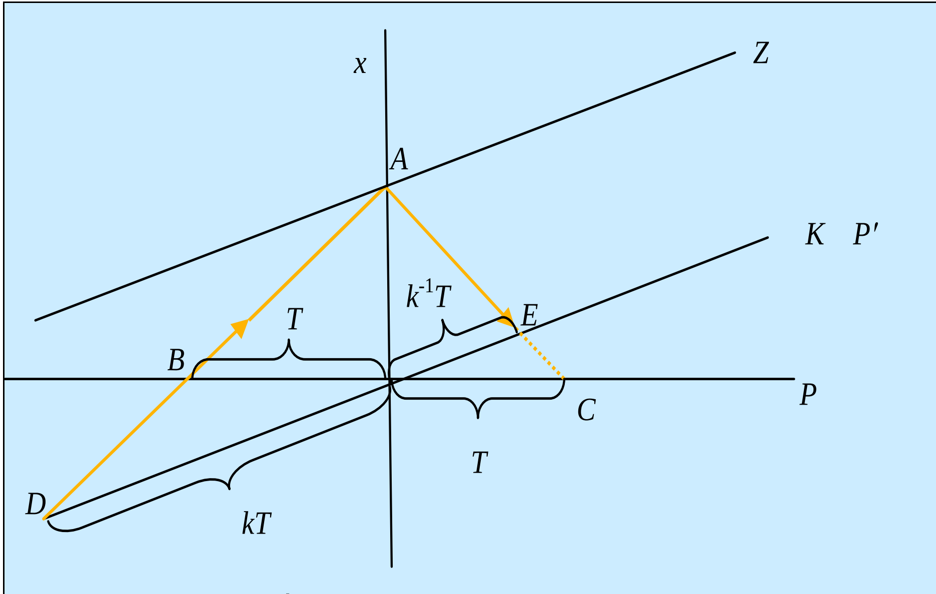
7.5 KONTRAKCIA DĹŽOK

Predstavme si kozmickú loď, ktorá sa voči pozorovateľovi *P* na Zemi pohybuje rýchlosťou *v*. V kozmickej lodi je kozmonaut *P'*. Označme dĺžku lode tak ako ju nameria kozmonaut ako $d' \equiv d_0$ a dĺžku, ktorú nameria pozorovateľ *P* na Zemi ako *d*. Na obr. 7.9 priamky *Z* a *K* predstavujú v časopriestorovom diagrame v sústave spojenej so Zemou svetočiary začiatku a konca lode.

Radarové meranie dĺžky lode pozorovateľom *P* predstavuje v obr. 7.9 svetočiara signálu *BAC*, kde bod *B* reprezentuje udalosť vyslania radarového signálu pozorovateľom P tak, aby signál dorazil k začiatku lode práve v okamihu, keď sa koniec lode bude nachádzať v mieste pozorovateľa *P*. Odrazený signál, keď dorazí naspäť k pozorovateľovi *P*, preletel dvojnásobnú dĺžku lode. Ak označíme dobu od vyslania signálu po jeho prijatie ako 2*T*, potom

$$2d = 2cT, \qquad (9)$$

pričom *d* predstavuje dĺžku pohybujúcej sa lode nameranú pozorovateľom *P*.



Obr. 7.9 Kontrakcia dĺžok

Kozmonaut P', ktorý sa nachádza na konci lode, zmeria dĺžku lode tiež radarovou metódou. Vyšle signál z konca lode (udalosť *D*) na jej začiatok, odkiaľ sa signál odrazí a dorazí naspäť ku kozmonautovi (udalosť *E*). Na obrázku 7.9 bolo meranie zrealizované tak, že radarový signál dorazil k začiatku lode (v diagrame udalosť *A*) súčasne s radarovým signálom pozorovateľa *P* na Zemi. Pohyb signálu z radaru kozmonauta predstavuje na obr.7. 9 svetočiara *DAE*. Celková doba od vyslania až po spätné prijatie signálu reprezentuje úsečka *DE*, ktorá pozostáva z dvoch úsekov:

$$kT + k^{-1}T = \frac{k^2+1}{k}T\ .$$

Jej vynásobením rýchlosťou svetla dostaneme dvojnásobok dĺžky lode d_0 nameranej kozmonautom

$$2d_0 = \frac{k^2+1}{k}cT\ . \qquad (10)$$

Vydelením (9) a (10) dostaneme

$$\frac{d}{d_0} = \frac{2k}{k^2+1} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ ,$$

resp.

$$d = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}d_0\ , \qquad (11)$$

čo je známy vzťah pre kontrakciu dĺžky.

Kontrolné otázky

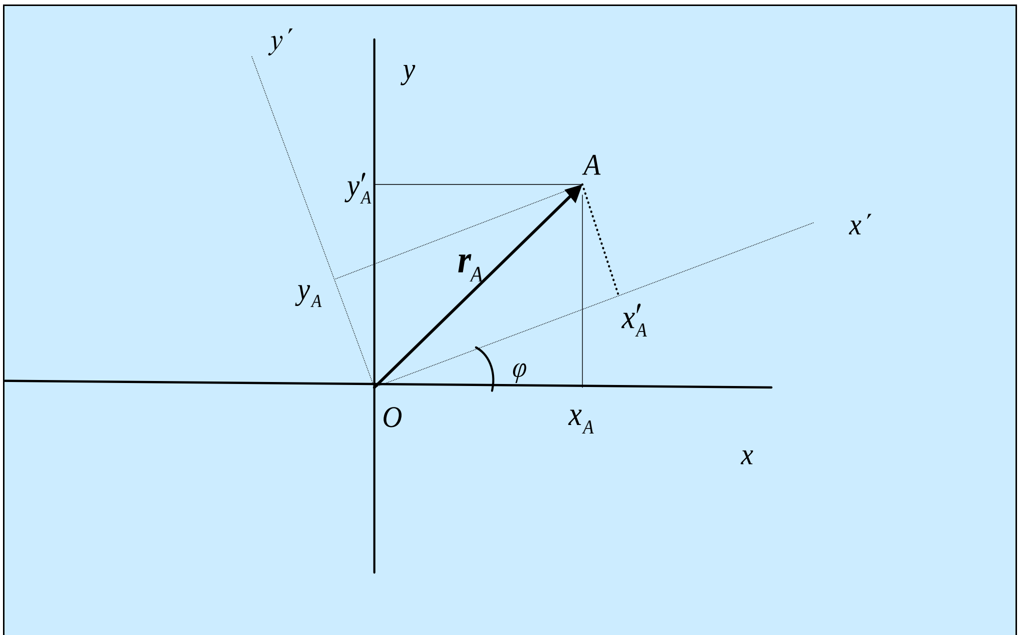
30. Ako je definovaný *k*-faktor v Bondiho grafickej metóde?
31. Udalosť *U* nastala v počiatku súradnicovej sústavy S' v časovom okamihu t'. Ako môžeme určiť časové a priestorové súradnice tejto udalosti v sústave S? (pozri obr. 7.2)
32. Ako súvisí Bondiho *k*-faktor s relativistickým Dopplerovým javom?
33. Pomocou Bondiho *k*-faktora prediskutujte dilatáciu času.
34. Aký jav súvis Einsteinovho relativistického vzorca pre skladanie rýchlostí s vyjadrením Bondiho *k*-faktora pri troch navzájom sa pohybujúcich sústavách?
35. Pomocou Bondiho *k*-faktora prediskutujte kontrakciu dĺžok.

8 ČASOPRIESTOR

Lorentzova transformácia navzájom „prepletá“ časové a priestorové súradnice udalosti. Nie je preto možné čas a priestor od seba oddeliť a prirodzenou arénou, v ktorej sa odohrávajú udalosti nášho sveta je časopriestor ako štvorrozmerné kontinuum.

8.1 UDALOSŤ A JEJ SÚRADNICE. 4-VEKTORY

V úvode k tejto časti si najprv pripomenieme vlastnosti vektorov v 3-rozmernom priestore. Kvôli názornosti si vyberme polohový vektor $\boldsymbol{r}_A$ bodu A, ktorý leží v rovine (x,y).



Obr. 8.1 Otočenie súradnicovej

Súradnice polohového vektora $\boldsymbol{r}_A$ v katézskej súradnicovej sústave S sú (x_A, y_A, z_A). Ak si vezmeme novú súradnicovú sústavu S', ktorá sa voči S líši otočením okolo osi z o uhol φ, pre nové súradnice vektora $\boldsymbol{r}_A$ dostaneme

$$x'_A = x_A \cos\varphi + y_A \sin\varphi \qquad (1)$$

$$y'_A = -x_A \sin\varphi + y_A \cos\varphi \qquad (2)$$

$$z'_A = z_A \qquad (3)$$

Ľahko sa na základe predchádzajúcich vzťahov presvedčíme o tom, že

$$(x'_A)^2 + (y'_A)^2 + (z'_A)^2 = (x_A)^2 + (y_A)^2 + (z_A)^2$$

Transformácia (1 - 3) je špeciálnym prípadom všeobecnej transformácie zachovávajúcej veľkosť vektora, resp. jeho kvadrátu. Transformácia, ktorá zachováva kvadratickú formu

$$x^2 + y^2 + z^2$$

(teda veľkosť vektora) sa nazýva ortogonálnou transformáciou. Charakteristickou vlastnosťou vektora v 3-rozmernom priestore je zachovanie jeho veľkosti pri ortogonálnych transformáciách. Veľkosť vektora, resp. jej kvadrát je invariantom pri ortogonálnych transformáciách. Preto často možno nájsť v učebniciach vektorového počtu definíciu vektora pomocou jeho zložiek:

Trojica (a_1,a_2,a_3) *tvorí zložky vektora, ak pri prechode k novej súradnicovej sústave sa transformuje pomocou ortogonálnej transformácie.*

Predchádzajúca definícia je motiváciou pre definíciu 4-vektora v teórii relativity. Analógiou súradnicovej sústavy v 3-rozmernom priestore je v teórii relativity inerciálna súradnicová sústava spolu aj s plynutím času v nej. Bodová udalosť v inerciálnej súradnicovej sústave je opísaná 4-icou súradníc (x_0, x_1, x_2, x_3) bodu v časopriestore, kde $x_0 \equiv ct,\ x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,$ a $x_3 \equiv z$. Prechod od jednej inerciálnej súradnicovej sústavy k druhej je sprostredkovaný Lorentzovou transformáciou, ktorá zachováva formu

$$x_0^{\ 2} - x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} - x_3^{\ 2} \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 .$$

Je len celkom prirodzené definovať 4-vektor nasledovne:

Štvorica (A_0, A_1, A_2, A_3) *predstavuje zložky 4-vektora, ak sa pri prechode k inej inerciálnej súradnicovej sústave tieto zložky transformujú prostredníctvom Lorentzovej transformácie.*

Z predchádzajúcej definície vidíme, že pri definícii 4-vektora slúžil za vzor, resp. prototyp, polohový 4-vektor (x_0, x_1, x_2, x_3). V prípade špeciálnej Lorentzovej transformácie sa preto zložky 4-vektora (A_0, A_1, A_2, A_3) budú transformovať nasledovne:

$$A_0' = \gamma(A_0 - \beta A_1) \tag{4}$$

$$A_1' = \gamma(A_1 - \beta A_0) \tag{5}$$

$$A_2' = A_2 \tag{6}$$

$$A_3' = A_3 , \tag{7}$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{v}{c} .$$

Rovnako ako v prípade polohového 4-vektora je forma

$$A^2 \equiv A_0^{\ 2} - A_1^{\ 2} - A_2^{\ 2} - A_3^{\ 2}$$

lorentzovským (relativistickým) invariantom, t. j. jeho hodnota sa pri prechode k inej inerciálnej súradnicovej sústave nemení. Túto hodnotu v analógii s 3-rozmerným vektorom nazývame kvadrátom veľkosti 4-vektora, napriek tomu, že môže byť aj záporná. Analogicky s vyjadrením skalárneho súčinu dvoch vektorov pomocou ich zložiek definujeme "skalárny súčin" dvoch 4-vektorov *a* a *b* (lepšie pseudoskalárny súčin):

$$(A,B) \equiv A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 \qquad (8)$$

Takto definovaný pseudoskalárny súčin sa môže rovnať nule dokonca aj keď sú oba 4-vektory nenulové (preto je lepšie hovoriť o pseudoskalárnom súčine). Výhodnosť takto zavedeného pseudoskalárneho súčinu je v tom, že podobne ako obyčajný skalárny súčin je invariantom ortogonálnej transformácie aj pseudoskalárny súčin je invariantom Lorentzovej transformácie. Kvadrát veľkosti 4-vektora sa dá potom vyjadriť ako pseudoskalárny súčin 4-vektora so sebou samým:

$$A^2 = (A,A) \qquad (9)$$

8.2 ČASOPRIESTOROVÝ INTERVAL A KAUZALITA

V zmysle predchádzajúceho možno definovať kvadrát 4-rozmernej „vzdialenosti“ dvoch bodov v časopriestore (udalostí) *A*, *B*

$$d^2(A,B) \equiv (x_{0A} - x_{0B})^2 - (x_{1A} - x_{1B})^2 - (x_{2A} - x_{2B})^2 - (x_{3A} - x_{3B})^2 \qquad (10)$$

Takto definovaná „vzdialenosť“ dvoch udalostí v časopriestore sa nazýva intervalom. Prirodzene, že $d^2(A,B)$ môže byť ako kladné, záporné, tak aj nulové.

V prípade, že

$$d^2(A,B) > 0, \qquad (11)$$

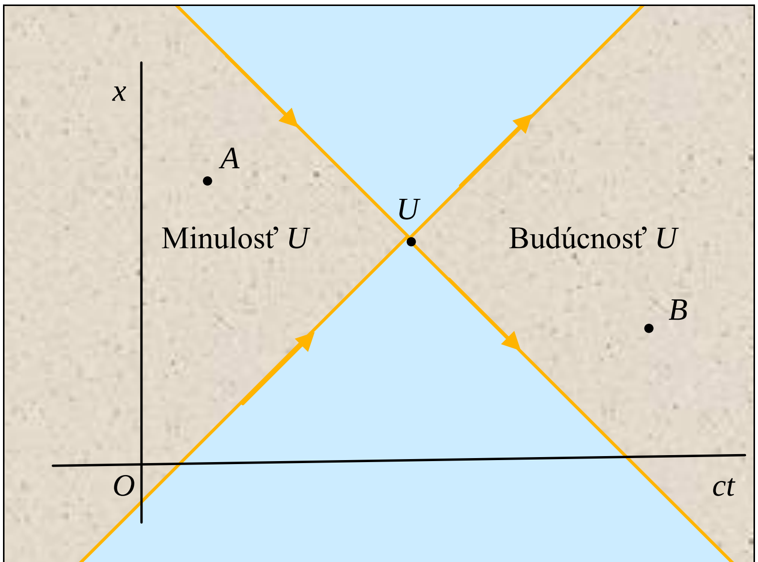
prevažuje v (10) nultý člen $(x_{0A} - x_{0B})^2$, ktorý zodpovedá časovej súradnici nad ostatnými, ktoré predstavujú priestorové súradnice. Preto hovoríme o takomto intervale oddeľujúcom udalosti *A* a *B*, ako o intervale časového typu, skrátene *časupodobnom* intervale.

Ak pozorovateľ v nejakej inerciálnej sústave pozoruje pre udalosti *A*, *B* oddelené *časupodobným intervalom*, že nastali v poradí: najprv *A*, potom *B*, tak v takomto poradí ich bude pozorovať aj každý iný pozorovateľ. Na základe tohto môžeme tvrdiť, *udalosť A leží v minulosti udalosti B* (a naopak udalosť *B* leží v budúcnosti udalosti *A*) v absolútnom zmysle, nezávisle od pozorovateľa (pozri obr. 8.2).

V prípade, že

$$d^2(A,B) < 0, \qquad (12)$$

prevažujú v (10) členy zodpovedajúce priestorovým súradniciam nad nultým členom. Preto sa takýto interval nazýva priestorového typu, skrátene *priestorupodobný interval*. Ak pozorovateľ v nejakej inerciálnej sústave pozoruje pre udalosti *A*, *B* oddelené *priestorupodobným* intervalom, že nastali v poradí: najprv *A*, potom *B*, tak možno nájsť inerciálnu sústavu, v ktorej ich bude pozorovateľ pozorovať v opačnom poradí. Najprv *B*, potom *A*. Je len evidentné, že *takéto dve udalosti nemôžu byť kauzálne* *viazané, nemôže byť jedna príčinou druhej*. V opačnom prípade by sme mali situáciu, v ktorej by v niektorých inerciálnych sústavách najprv nastal dôsledok a až potom jeho príčina.



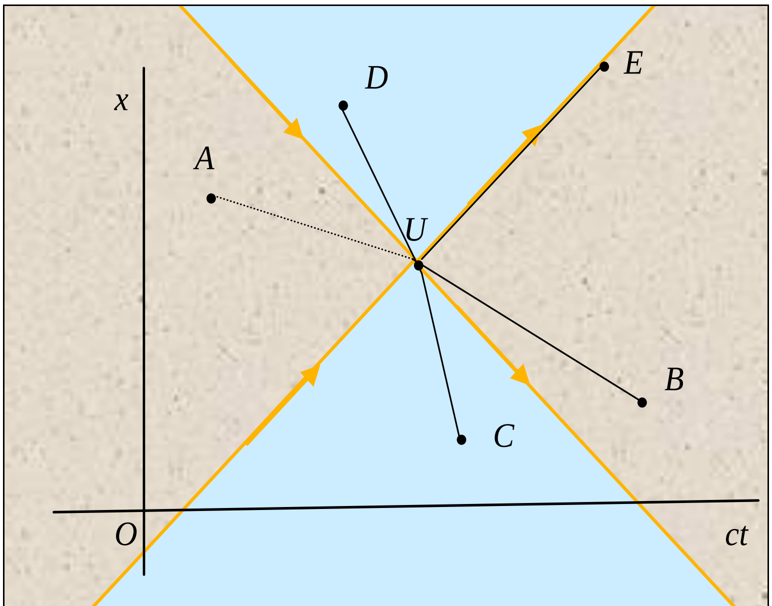
Obr. 8.2 Minulosť a budúcnosť udalosti *U*

Prípad

$$d^2(A,B)=0 \qquad (13)$$

opisuje šírenie sa svetla a nazýva sa *nulovým* alebo *svetlupodobným intervalom*. Všetky body, oddelené od udalosti *U* nulovým intervalom predstavujú v 4-rozmernom časopriestore 4-rozmerný kužeľ, ktorý sa nazýva svetelným kužeľom.

Vnútri svetelného kužeľa ležiaceho na obrázku 8.2 vľavo od udalosti *U* sa nachádzajú udalosti, ktoré nastali v minulosti udalosti *U* (absolútne), preto táto časť svetelného kužeľa sa nazýva svetelným kužeľom minulosti, analogicky pravá časť je svetelným kužeľom budúcnosti udalosti *U*.



Obr. 8.3 Intervaly

Na obrázku 8.3 sú dvojice udalostí *AU*, *UB* oddelené časupodobným intervalom. Spojnice úsečky *AU*, resp. *UB* musia zvierať s vodorovnou priamkou prechádzajúcou bodom *U* uhol menší než π/4, aby sa za dobu ($t_U - t_A$) dalo z miesta udalosti *A* dostať do miesta udalosti *U* rýchlosťou menšou než rýchlosť svetla.

Podobne dvojice udalostí *DU* a *DC* na obrázku 8.3 sú oddelené priestorupodoným intervalom, príslušné úsečky zvierajú s vodorovnou priamkou prechádzajúcou bodom *U* uhol väčší než π/4. Za dobu ($t_U - t_D$) sa z miesta udalosti *D* nedá dostať do miesta udalosti *U* rýchlosťou menšou než je rýchlosť svetla.

8.3 4-VEKTOR RÝCHLOSTI (4-RÝCHLOSŤ)

V predchádzajúcej časti sme už spomenuli polohový 4-vektor daný jeho štyrmi zložkami (x_0,x_1,x_2,x_3), skrátene ($x_0,\boldsymbol{r}$). Nultá zložka polohového 4-vektora je súčin rýchlosti svetla vo vákuu a času v danej inerciálnej súradnicovej sústave. Ďalšie 3 zložky predstavujú zložky polohového vektora $\boldsymbol{r}$.

Mohli by sme sa prirodzeným spôsobom pokúsiť definovať 4-rýchlosť ako 4-icu, ktorej priestorové zložky sú zložkami rýchlosti $\boldsymbol{u}$ a doplniť ich nultou zložkou. Priamo sa núka možnosť v analógii s rýchlosťou, ktorá je deriváciou polohového vektora $\boldsymbol{r}$ podľa času, zaviesť 4-rýchlosť ako deriváciu polohového 4-vektora podľa času:

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t}, \quad \alpha = 0,1,2,3$$

Pri prechode k novej inerciálnej súradnicovej sústave sa diferenciál dx_α polohového 4-vektora transformuje lorentzovsky, avšak časový diferenciál dt' bude iný ako dt, čo pokazí lorentzovskú vlastnosť pri transformácii derivácie dx_α /dt. Znamená to, že štvorica dx_α /dt sa netransformuje lorentzovsky, a teda netvorí zložky 4-vektora. Vidíme, že tri zložky rýchlosti $\boldsymbol{u}$ nemožno doplniť na 4-vektor. Ak chceme dostať 4-vektor, treba previesť deriváciu polohového 4-vektora podľa niečoho, čo nepokazí lorentzovský charakter transformácie dx_α. Aby to však bolo zovšeobecnením rýchlosti a mohlo sa nazývať 4-rýchlosťou, to "niečo" musí mať rozmer času alebo s časom nejako súvisieť. Veličina vyhovujúca predchádzajúcim podmienkam je vlastný čas τ. Ten sa pri prechode k novej inerciálnej súradnicovej sústave nemení, každý pozorovateľ pri jeho vyjadrení zo svojho času dostane tú istú hodnotu. Vlastný čas je lorentzovským invariantom a teda nepokazí transformačné vlastnosti diferenciálu polohového 4-vektora. Definujeme teda 4-rýchlosť ako štvoricu:

$$U_\alpha = \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}, \quad \alpha = 0,1,2,3 \tag{14}$$

Táto štvorica už tvorí zložky 4-vektora a transformuje sa lorentzovsky.

V prípade špeciálnej Lorentzovej transformácie:

$$U_0' = \gamma(U_0 - \beta U_1)$$
$$U_1' = \gamma(U_1 - \beta U_0)$$
$$U_2' = U_2$$

$$U'_3 = U_3$$

Na vyjadrenie zložiek 4-rýchlosti treba vyjadriť diferenciál vlastného času τ pomocou diferenciálu času t plynúceho v danej inerciálnej súradnicovej sústave. Takýto vzťah je nám známy z časti o dilatácii času:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{c}^2}}} \equiv \gamma_u \mathrm{d}\tau\,,$$

kde sme označili

$$\gamma_u \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{c}^2}}}\,.$$

Potom:

$$\mathrm{U}_0 = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c\mathrm{d}t}{\gamma_u^{-1}\mathrm{d}t} = \gamma_u c$$

a pre ďalšie, priestorové, zložky:

$$\mathrm{U}_i = \frac{\mathrm{d}x_\mathrm{i}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x_\mathrm{i}}{\gamma_u^{-1}\mathrm{d}t} = \gamma_u \frac{\mathrm{d}x_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} = \gamma_u u_i\,, \quad i = 1, 2, 3$$

Teda

$$U \equiv (\gamma_u c, \gamma_u \boldsymbol{u})$$

Veľkosť 4-vektora rýchlosti:

$$U^2 = \gamma_u{}^2 c^2 - \gamma_u{}^2 \boldsymbol{u}^2 = \gamma_u{}^2 \left(c^2 - u^2\right) = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = c^2 \qquad (15)$$

je lorentzovským invariantom, tak ako aj má byť.

8.4 4-VEKTOR ZRÝCHLENIA (4-ZRÝCHLENIE)

Vzhľadom na to, že už sme poučení z definície 4-rýchlosti, definícia 4-zrýchlenia je už celkom prirodzená: Ak chceme zo 4-rýchlosti derivovaním podľa času dostať (lorentzovsky kovariantný) 4-vektor, musíme 4-rýchlosť častice v danej inerciálnej súradnicovej sústave derivovať podľa vlastného času dτ

$$A_\alpha = \frac{\mathrm{d}U_\alpha}{\mathrm{d}\tau}, \quad \alpha = 0,1,2,3$$

Pre jednotlivé zložky, ak ich chceme vyjadriť pomocou obyčajnej rýchlosti $\boldsymbol{u}$ zrýchlenia $\boldsymbol{a}$, dostaneme:

$$A_0 = \frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}(\gamma_\mathrm{u} c)}{\gamma_\mathrm{u}^{-1}\mathrm{d}t} = \gamma_\mathrm{u} c \frac{\mathrm{d}\gamma_\mathrm{u}}{\mathrm{d}t},$$

Pričom

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_\mathrm{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{u.a}}{c^2} = \gamma_\mathrm{u}{}^3 \frac{\boldsymbol{u.a}}{c^2}$$

Teda

$$A_0 = \gamma_\mathrm{u}{}^4 \frac{\boldsymbol{u.a}}{c} = \frac{\boldsymbol{u.a}}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2},$$

Podobne pre priestorové zložky (i =1,2,3):

$$A_i = \frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}(\gamma_\mathrm{u} u_i)}{\gamma_\mathrm{u}^{-1}\mathrm{d}t} = \gamma_\mathrm{u} c \frac{\mathrm{d}\gamma_\mathrm{u}}{\mathrm{d}t} u_i + \gamma_\mathrm{u}{}^2 a_i = \gamma_\mathrm{u}{}^4 \frac{\boldsymbol{u.a}}{c} u_i + \gamma_\mathrm{u}{}^2 a_i = \gamma_\mathrm{u}{}^2\left(\gamma_\mathrm{u}{}^2 \frac{\boldsymbol{u.a}}{c} u_i + a_i\right),$$

Ako sme už spomenuli v časti (8.1) skalárny súčin dvoch nenulových 4-vektorov sa môže rovnať nule. To je napr. aj v prípade 4-rýchlosti a 4-zrýchlenia. Vyjdime zo vzťahu pre kvadrát veľkosti 4-rýchlosti (15):

$$U^2 = (U,U) = c^2$$

Pravá strana je konštantou, teda pri deriváciu podľa vlastného času dá nulu.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(U,U) = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau},U\right) + \left(U,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}\right) = 2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau},U\right) = 2(A,U) = 0\,.$$

Dostali sme výsledok pre pseudoskalárny súčin 4-rýchlosti a 4-zrýchlenia:

$$(A,U) = 0\,.$$

Vidíme, že 4-rýchlosť U je v zmysle pseudoskalárneho súčinu (8) vždy kolmá na 4-zrýchlenie A.

Kontrolné otázky

1. Ako je definovaný 4-vektor v prípade špeciálnej Lorentzovej transformácie?
2. Ako je definovaný pseudoskalárny súčin?
3. Čo je časopriestorový interval?
4. Definujte časupodobný, priestorupodobný a nulový interval.
5. Formulujte podmienku možnej kauzálnej súvislosti dvoch udalostí pomocou intervalu.
6. Ako je definovaná 4-rýchlosť?
7. Čomu sa rovná kvadrát 4-rýchlosti?
8. Ako je definované 4-zrýchlenie?

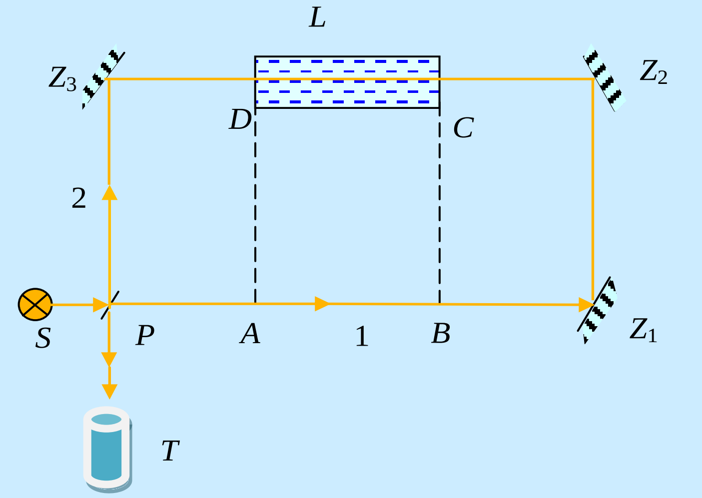
9 DODATKY- ODVODENIA

Kvôli prehľadnosti a zamedzeniu rozvláčnosti základného textu sme do dodatkov presunuli podrobnejšie výpočty, resp. odvodenia niektorých vzťahov.

9.1 DODATOK A

Odvodenie fázového rozdielu $\Delta\Phi$:

Vyjdime z predpokladu, že svetelný éter je úplne strhávaný prostredím. Vypočítajme, čomu sa v takom prípade rovná doba, potrebná na prechod svetla lúča *1* oboma úsekmi. V úseku *AB* (obr. 9.1), vzhľadom na to, že aparatúra sa pohybuje voči éteru rýchlosťou *v* v smere lúča, bude sa svetlo voči aparatúre šíriť rýchlosťou (*c* -*v*).



Obr. 9.1 Hoekova aparatúra

Preto:

$$t_{AB} = \frac{L}{c-v}.$$

Pretože predpokladáme úplné strhávanie éteru pohybujúcim sa telesom, tak v úseku *CD* bude éter voči aparatúre v pokoji. Pretože v úseku *CD* sa nenachádza vákuum, ale prostredie s indexom lomu *n*, bude:

$$t_{CD} = \frac{L}{\frac{c}{n}}.$$

Takže

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{Ln}{c}.$$

Podobne pre dobu t_2 preletu svetla druhého lúča dostaneme

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{Ln}{c}.$$

Fázový rozdiel oboch lúčov bude

$$\Delta\Phi = \omega(t_1 - t_2) = \frac{2Lv\omega}{c^2} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

kde ω je uhlová frekvencia použitého monochromatického svetla. Ak sa obmedzíme na presnosť do prvej mocniny podielu v/c, tak môžeme písať

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1,$$

a teda

$$\Delta\Phi \approx \frac{2L\omega}{c}\frac{v}{c}.$$

9.2 DODATOK B

Uvažujme podobne ako v Dodatku A, len s tým rozdielom, že éter je kvapalinou strhávaný s faktorom strhávania *k*. Rýchlosť takto strhávaného éteru vzhľadom na nepohyblivú sústavu (éter ďaleko od kyvety) bude *kv*. Rýchlosť svetla idúceho prvým lúčom cez strhávaný éter vzhľadom na pozorovateľa pohybujúceho sa spolu s interferometrom bude $(1-k)v$.

Doba potrebná na prelet svetla lúča *1* úsekmi *AB* a *CD* preto bude

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{\frac{c}{n}+(1-k)v}.$$

Podobne doba potrebná na prelet svetla lúča *2* týmito úsekmi bude

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{\frac{c}{n}-(1-k)v}.$$

Rozdiel oboch časových intervalov je

$$t_1 - t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{\frac{c}{n}+(1-k)v} - \left[\frac{L}{c+v} + \frac{L}{\frac{c}{n}-(1-k)v}\right] = \frac{\frac{2Lv}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{2Ln^2(1-k)v}{c^2}}{1-\frac{n^2(1-k)^2v^2}{c^2}}.$$

S presnosťou do prvej mocniny podielu *v/c* dajú oba menovatele jednotku:

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1, \qquad \frac{1}{1-\frac{n^2(1-k)^2 v^2}{c^2}} \approx 1.$$

Presvedčiť sa o tom možno rozvinutím oboch výrazov do Taylorovho radu. Zistíme, že najnižšia mocnina podielu *v/c* vystupujúca v takto upravenom výraze pre $(t_1 - t_2)$ bude druhá mocnina $(v/c)^2$. Preto s presnosťou do prvej mocniny *v/c* bude:

$$t_1 - t_2 \approx \frac{2vL}{c^2}\left[1-n^2(1-k)\right].$$

Pre fázový rozdiel to bude predstavovať

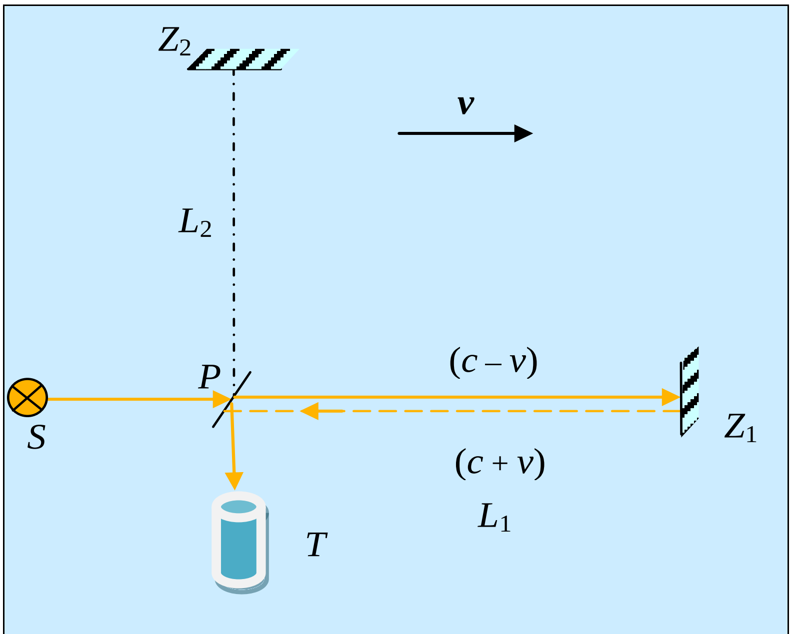
$$\Delta\Phi = \omega(t_1 - t_2) \approx \frac{2vL\omega}{c^2}\left[1-n^2(1-k)\right]$$

9.3 DODATOK C

Fázový rozdiel v prípade Michelsonovho pokusu:

Uvažujme dva prípady:

1. Prístroj sa pohybuje rýchlosťou v v smere ramena L_1 voči éteru.

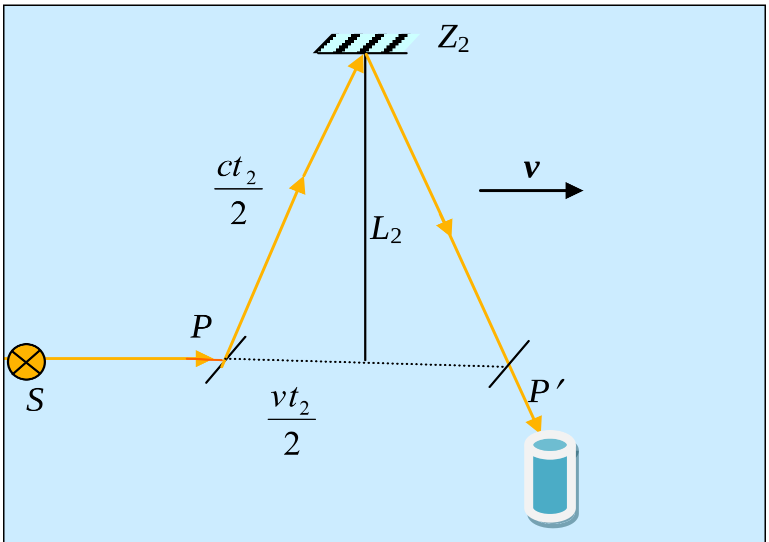


Obr.9.2 Chod svetla cez rameno L_1

Za predpokladu, že svetlo sa šíri vždy rýchlosťou c vzhľadom na éter, doba potrebná na prebehnutie svetla od doštičky P po zrkadlo Z_1 a späť sa rovná:

$$t_1 = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} = 2\frac{L_1}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

V jednom prípade, keď sa svetlo šíri smerom pohybu prístroja, je celková rýchlosť svetla voči prístroju (c-v) a v opačnom prípade ($c+v$).
Dobu potrebnú na prelet svetla od doštičky P po zrkadlo Z_2 a späť nám pomôže určiť nasledujúci obrázok:



Obr. 9.3 Chod svetla cez rameno L_2

Poloha polopriepustnej doštičky vzhľadom na éter v okamihu, keď na ňu dopadá svetlo lúča *2* od zdroja je označená ako P, poloha tej istej doštičky v okamihu, keď na ňu dopadá svetlo odrazené od zrkadla Z_2, je označená ako P'. Za dobu $\frac{t_2}{2}$, za ktorú sa dostane svetlo od doštičky k zrkadlu Z_2, toto zrkadlo postúpilo voči éteru o dĺžku $\frac{vt_2}{2}$, t. j. polovicu vzdialenosti P a P'. Z Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník (pozri predchádzajúci obrázok) máme:

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2 + L_2^{\,2}.$$

Z toho vyjadríme dobu t_2:

$$t_2 = 2\frac{L_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2\frac{L_2}{c}\gamma.$$

Rozdiel medzi týmito dobami je

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(L_1\gamma^2 - L_2\gamma\right),$$

kde sme zaviedli označenie:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ak obe ramená sú rovnako dlhé, t. j. $L_1 = L_2 = L$, dostaneme

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c}\left(\gamma^2 - \gamma\right).$$

Pre $v << c$ potom platia približné vzťahy

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}, \qquad \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2},$$

a teda pre časový rozdiel

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{L}{c}\frac{v^2}{c^2}.$$

2. Druhým prípadom bude, keď sa prístroj bude pohybovať tou istou rýchlosťou v, ale v smere ramena L_2. Dostaneme ho z predchádzajúceho prípadu otočením aparatúry o $\pi/2$ rad. Pre časový rozdiel oboch lúčov dostaneme (rovnako ako v predchádzajúcom prípade, len navzájom vymeníme 1. a 2. rameno):

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{2}{c}\left(L_1\gamma - L_2\gamma^2\right),$$

alebo v priblížení $v << c$

$$\Delta t' = t_1' - t_2' \approx -\frac{L}{c}\frac{v^2}{c^2}.$$

Fázový rozdiel medzi oboma prípadmi sa bude rovnať

$$\Delta\Phi = \omega\left(\Delta t - \Delta t'\right) \approx \frac{2\omega L}{c}\frac{v^2}{c^2}$$

9.4 DODATOK D

Odvodenie Lorentzovej transformácie:

Vychádzame z predpokladu lineárnosti príslušnej transformácie

$$t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z$$
$$x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$
$$y' = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$
$$z' = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

V špeciálnom prípade, ktorý uvažujeme, je y' || y a z' || z. Z toho pre 2. a 3. súradnice daného bodu čela vlny vyplýva, že budú rovnaké:

$$y' = y, \quad z' = z$$

Teda koeficienty $a_{20} = a_{30} = 0,\ a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0,\ a_{22} = a_{33} = 1$.
Takým spôsobom z rovníc pre čelo vlny dostávame

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \qquad (1)$$

V tejto rovnosti nevystupujú súradnice *y* a *z*. Preto môžeme položiť $a_{02} = a_{03} = 0$ a tiež $a_{12} = a_{13} = 0$. Takže hľadaná transformácia bude mať tvar

$$t' = a_{00}t + a_{01}x$$
$$x' = a_{10}t + a_{11}x$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Dosaďme teraz za *x'* a *t'* do rovnosti (1). Dostaneme

$$x^2 - c^2t^2 = \left(a_{10}{}^2 - c^2a_{00}{}^2\right)t^2 + \left(a_{11}{}^2 - c^2a_{01}{}^2\right)x^2 + 2\left(a_{10}a_{11} - c^2a_{00}a_{01}\right)tx$$

Porovnaním koeficientov pri x^2, t^2 a *xt*, (*x* a *t* <u>sú nezávislé</u>!), dostaneme

$$a_{11}{}^2 - c^2a_{01}{}^2 = 1 \qquad (2)$$
$$a_{10}{}^2 - c^2a_{00}{}^2 = -c^2 \qquad (3)$$
$$a_{10}a_{11} - c^2a_{00}a_{01} = 0 \qquad (4)$$

To sú tri rovnice pre štyri neznáme koeficienty. Ďalšiu potrebnú rovnicu dostaneme nasledujúcou úvahou. Položme $x = 0$. Potom

$$x' = a_{10}t$$
$$t' = a_{00}t$$

Z toho

$$\frac{x'}{t'} = \frac{a_{10}}{a_{00}} = -v \tag{5}$$

je rýchlosť začiatku O súradnicovej sústavy *S* v súradnicovej sústave *S′* (čo sa rovná –*v*, pretože ak *S′* sa pohybuje voči *S* rýchlosťou *v* v smere osi *x*, tak *S* sa bude voči *S′* pohybovať rýchlosťou (−*v*) v smere osi *x*').

Dosadením (5) do (3) dostaneme

$$\left(v^2 - c^2\right)a_{00}{}^2 = -c^2$$

Z toho

$$a_{00} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Keď požadujeme, aby v oboch sústavách plynul čas *rovnakým smerom* od minulosti k budúcnosti, musíme vziať kladné riešenie. Označíme toto kladné riešenie γ:

$$a_{00} = \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Dosaďme teraz za a_{10} z (5) do (4). Dostaneme

$$\left(-a_{11}v - c^2 a_{01}\right)a_{00} = 0$$

teda

$$a_{01} = -\frac{v}{c^2}a_{11} \tag{6}$$

Ak posledný výraz dosadíme do (2), dostaneme

$$a_{11}{}^2 - c^2\frac{v^2}{c^4}a_{11}{}^2 = 1$$

Teda

$$a_{11}{}^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

a znova, podobne ako pri časoch, z požiadavky, že osi *x* a *x′* sú súhlasne orientované, berieme kladné riešenie

$$a_{11} = a_{00} = \gamma$$

Teraz už ľahko určíme ostatné koeficienty. Podľa (5) je

$$a_{10} = -va_{00} = -v\gamma$$

a podľa (6)

$$a_{01} = -\frac{v}{c^2}a_{11} = -\frac{v}{c^2}\gamma$$

Teda výsledná transformácia, ktorá sa nazýva špeciálnou Lorentzovou transformáciou, má tvar

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

9.5 DODATOK E

Podľa definície okamžitej rýchlosti platí

$$u_x = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad u_y = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad u_z = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Označme indexami A, B polohy častice v dvoch blízkych časových okamihoch t_A a t_B. Pre každú polohu zvlášť platí Lorentzova transformácia. Odčítaním príslušných rovníc, vzhľadom na linearitu Lorentzovej transformácie dostaneme rovnaký tvar transformácie aj pre intervaly $\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta t' = t'_B - t'_A$:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \end{aligned}$$

To, že rovnaký transformačný vzťah platí pre rozdiely ako pre samotné súradnice a čas, plynie nakoniec priamo z toho, že Lorentzova transformácia je lineárna v súradniciach a čase.

Počítajme prvú zložku rýchlosti u'_x, ako ju nameria pozorovateľ v inerciálnej súradnicovej sústave S'

$$u'_x = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Z Lorentzovej transformácie pre intervaly (23) a (24) máme

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Ak robíme limitu $\Delta t = (t_B - t_A) \to 0$ pre dve polohy častice v časoch t_A a t_B, tak v limitnom prípade $t_B = t_A$ bola častica ešte na pôvodnom mieste: $\Delta x = 0$. To znamená, že v limitnom prípade súčasné udalosti A, B sú aj súmiestne. Z toho, čo vieme o relatívnosti súčasnosti, vzhľadom na súmiestnosť udalostí A a B budú súčasné v každej inerciálnej súradnicovej sústave. Teda ak $\Delta t \to 0$, tak aj $\Delta t' \to 0$ a naopak. Preto limitu $\Delta t' \to 0$ môžeme nahradiť limitou $\Delta t \to 0$ a písať

$$u'_x = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

Analogickým spôsobom môžeme postupovať aj u zvyšných zložiek.

9.6 DODATOK F

Odvodenie transformácie zložiek zrýchlenia

Počítajme prvú zložku zrýchlenia, ktorá je definovaná ako časová derivácia prvej zložky rýchlosti. Teda zložka zrýchlenia a'_x bude limitou ľavej strany výrazu:

$$\frac{\Delta u'_x}{\Delta t'} = \frac{\Delta u'_x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t'}$$

Ak existujú limity oboch činiteľov na pravej strane, tak a'_x bude ich súčinom.

Prvý činiteľ v limite je deriváciou u'_x podľa t

$$\frac{du'_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}\right) = \frac{\frac{du_x}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} + \frac{(u_x - v)}{\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^2}\frac{v}{c^2}\frac{du_x}{dt} =$$

$$\left[\frac{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}+\frac{\left(u_x-v\right)\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}\right]\frac{du_x}{dt}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}a_x=\gamma^{-2}\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}a_x$$

Druhý činiteľ si môžeme určiť pomocou Lorentzovej transformácie

$$\Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\frac{v}{c^2}x\right).$$

Teda

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'}=\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}.$$

V limite dostaneme

$$\frac{dt}{dt'}=\gamma^{-1}\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}.$$

Takže po vynásobení môžeme pre prvú zložku zrýchlenia písať

$$a'_x=\gamma^{-3}\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^{-3}a_x$$

Podobne pre druhú zložku zrýchlenia máme

$$\frac{\Delta u'_y}{\Delta t'}=\frac{\Delta u'_y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta t'}$$

Prvý činiteľ povedie na:

$$\frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}+\frac{u_y}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}+\frac{u_y\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}\right]$$

$$=\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}\left[\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)a_y+\frac{vu_y}{c^2}a_x\right].$$

Druhý sme vyjadrili už v predchádzajúcom:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma^{-1}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}$$

Po ich spojení dostaneme

$$a'_y = \frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma^{-2}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}\left[a_y + \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}\frac{vu_y}{c^2}a_x\right]$$

Analogicky dostaneme transformačný vzťah pre tretiu zložku zrýchlenia.
Takže pre všetky tri zložky zrýchlenia môžeme písať:

$$a'_x = \gamma^{-3}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-3}a_x$$

$$a'_y = \gamma^{-2}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}\left[a_y + \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}\frac{vu_y}{c^2}a_x\right]$$

$$a'_z = \gamma^{-2}\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-2}\left[a_z + \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^{-1}\frac{vu_z}{c^2}a_x\right]$$

10 Literatúra

1. EINSTEIN, A.: *Relativity - The Special and General Theory*. New York: Henry Holt and Company, 1920.

2. HORSKÝ, J.: *Úvod do teorie relativity*. Praha: SNTL, 1975.

3. VOTRUBA, V.: *Základy speciální teorie relativity*. Praha: ACADEMIA, 1970.

4. TOLMAN, R. C.: Relativity, *Thermodynamics and Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 1934.

5. MÖLLER, C.: *The Theory of Relativity*. Oxford: Clarendon Press, 1972.

6. SMITH, J. H.: *Introduction to Special Relativity*. New York: Dover Publications, 1993. ISBN 0-486-68895-X

7. SARTORI, L.: *Understanding Relativity. A Siplified Approach to Einstein's Theories*. Berkeley: University of California Press, 1996. ISBN 0-520-20029-2

8. LOEDEL, E.: *Aberración y Relatividad*. Anales de la Sociedad Scientífica Argentina 145 (1948), 3 – 13

9. ČERŇANSKÝ, P.: *Grafické metódy v teórii relativity*. In: Zborník z odborného seminára“ Náplň a poslanie fyziky na 1. stupni VŠ a nové vzdelávacie technológie na VŠ technických. Bratislava: STU 2001, s. 79 – 85. ISBN 80-227-1609-X

10. TELEKI, A. – LACSNÝ, B. – ZELENICKÝ, Ľ.: *Špeciálna teória relativity pomocou časopriestorového intervalu* (*Inovatívny učebný text*). Nitra: UKF, 2008. ISBN 978-80-8094-397-4

11. d´INVERNO, R. A.: *Introducing Einstein´s Relativity.* New York: Oxford University Press Inc. 1995. ISBN 0 198596863

12. BONDI, H.: *Relativity and Common Sence* (*a new approach to Einstein*). London: Heinemann Educational Books Ltd., 1965.

13. LANDAU, L. D. - LIFŠIC, M. J.: *Úvod do teoretickej fyziky1*. Bratislava: Alfa, 1980.