Mnohouholníkové výplňové manipulácie v príprave učiteľov pre preprimárne a primárne matematické vzdelávanie

Katarína Žilková
Katedra preprimárnej a primárnej edukácie
Pedagogická fakulta, Univerzita Komenského v Bratislave
Račianska 59, 813 34 Bratislava, SR
e-mail: katarina@zilka.sk

Abstract: *Tessellations with polygons in teacher's math education for pre-primary and primary school.* Tessellation or tiling of the plane is a configuration of plane geometric shapes that fills the plane without gaps and without overlaps. We describe elementary theoretical principles in the creation of simple tessellations from polygons in our paper. We accent applications from regular polygons and their using in the teacher's math education for pre-primary and primary schools. The main goal of the creation of practice tiling exercises is to recognize math (geometrical) basis of tessellations, extend math skills of our students and to teach to use their competence in math education in pre-primary and primary school.

Keywords: education, math, pattern, polygon, regular polygon, tessellations, tiling

1 Úvod

Mozaiky alebo rovinné výplne sa vyskytujú okolo nás nielen v súčasnosti v rôznych podobách a ornamentálnych spracovaniach, ale sú tisícky rokov staré a vyskytovali sa v rozličných kultúrach, formách a materiálových spracovaniach. Tvorbu a využitie výplní možno datovať až do obdobia Sumerskej civilizácie (cca 4000 rokov pred Kr.), kedy boli príbytky a chrámy Sumerov zdobené mozaikovými dlaždicami využívajúc rôzne geometrické vzory. Odvtedy boli výplne používané v umeleckých prvkoch rôznych kultúr, vrátane egyptskej, románskej, perzijskej, gréckej, byzantskej, arabskej, japonskej a čínskej. Okrem ornamentálneho a estetického významu sa postupne výplne začali skúmať aj z hľadiska ich matematickej podstaty. Jednou z prvých matematických štúdií o výplniach bolo pojednanie **Johanna Keplera** v roku 1619. Skúmal pravidelné a polopravidelné výplne tvorené z pravidelných mnohouholníkov. Matematické poznávanie výplní sa neskôr rozšírilo aj do oblasti skúmania vyplňovania priestoru a tiež do oblasti vyplňovania modelov neeuklidovskej geometrie. K významným matematikom, ktorí sa venovali výskumu výplní patrili napríklad E. S. **Fjodorov**, A. V. **Šubnikov** a N. V. **Belov**, Heinrich **Heesch** a Otto **Kienzle**, ale aj mnohí ďalší. Napriek tomu, že výskum v oblasti vyplňovania roviny aplikuje poznatky presahujúce odborný rámec prípravy učiteľov pre primárne matematické vzdelávanie (napr. algebraické štruktúry, teória symetrií), môže byť úvod do štúdia uvedenej oblasti s elementárnymi aplikáciami pre budúcich učiteľov preprimárneho a primárneho vzdelávania užitočným, nielen z hľadiska praktického, ale aj z hľadiska rozvoja vnímania významu matematiky pre život. Za najvýznamnejší aplikačný aspekt môžeme považovať manipulačné aktivity súvisiace s objavovaním a tvorbou vlastných výplní v kontexte uvedomovania si vlastností použitých geometrických prvkov a aplikovaných elementárnych geometrických transformácií.

2 Teoretický a terminologický predhovor

Pod terminologickým spojením „vyplniť rovinu“, z geometrického hľadiska, budeme rozumieť „umiestniť na ňu geometrické útvary tak, aby sa žiadne dva neprekrývali a neboli medzi nimi medzery“ (Marcinek, 2001, str. 15). V zahraničnej odbornej literatúre sa používa termín *tessellation* (mozaikovanie, mozaika) alebo *tiling* (obkladanie, obloženie). Z uvedených názvov je zrejmé, že vyplňovanie roviny nie je výhradne matematický problém, ale opisuje niektoré prírodné úkazy (napr. popraskaná pôda, včelí plast), či praktické činnosti človeka vypĺňania niektorých častí roviny (napr. obkladanie stien, dláždenie podláh).

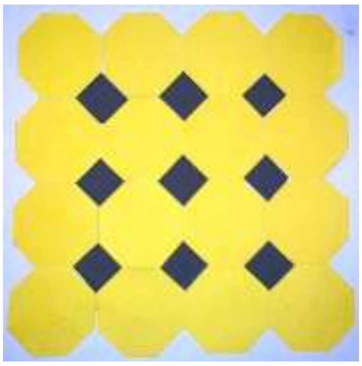
Vyplňovanie roviny sa realizuje výplňami nielen rôznych tvarov, ale aj podľa rôznych pravidiel. Pod pojmom *výplň* budeme rozumieť jej konečný vzhľad. Problematika klasifikácie, či variability výplní je veľmi široká a podrobne ju opisuje T. Marcinek (2001). V súvislosti s didaktickými cieľmi príspevku sa obmedzíme na triedenie niektorých (v edukačnej praxi častejšie využívaných) výplní, a preto z klasifikácie výplní pre didaktické účely podľa T. Marcineka (2001, str. 22) voľne parafrázujeme:

a) Podľa tvaru výplne rozlišujeme nasledujúce typy výplní:
   - *mnohouholníková výplň* – pri vyplňovaní roviny alebo jej časti sú použité výhradne mnohouholníky,
   - *krivočiara výplň* – použité sú rovinné útvary rôzne od mnohouholníkov.

Obr. 1. Mnohouholníková výplň

Obr. 2. Krivočiara výplň

b) Podľa pravidelnosti rozlišujeme mnohouholníkové výplne do nasledujúcich tried:
   - *p-mnohouholníková výplň* – tvorená výhradne pravidelnými mnohouholníkmi,
   - *n-mnohouholníková výplň* – nie je tvorená iba pravidelnými mnohouholníkmi.

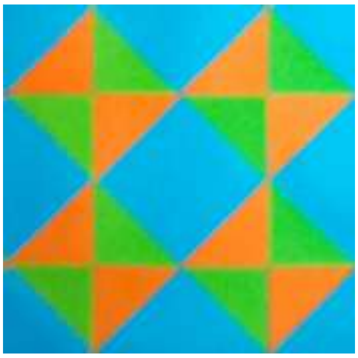


Obr. 3. P-mnohouholníková výplň

Obr. 4. N-mnohouholníková výplň

c) Podľa spôsobu usporiadania útvarov vo výplni možno klasifikovať:
   - *parket* – vo výplni majú napr. dva mnohouholníky spoločné buď iba vrchol, alebo stranu, alebo nemajú žiaden spoločný bod,

- *dlažba* – mnohouholníková výplň, ktorá nespĺňa požiadavky parketu.



Obr. 5. Parket

Obr. 6. Dlažba

Keďže súčasťou matematickej prípravy učiteľov preprimárneho a primárneho vzdelávania je téma o pravidelných mnohouholníkoch a ich vlastnostiach, budeme sa ďalej venovať len mnohouholníkovým výplniam generovanými iba pravidelnými mnohouholníkmi, teda p-mnohouholníkovým výplniam.

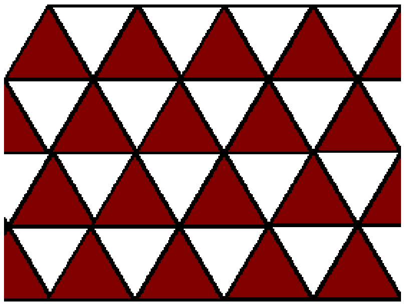
Poznámka: Všetky vyššie uvedené ilustračné obrázky sú výsledkom študentských prác, ktoré vznikli ako súčasť tematického celku Mnohouholníky a ich vlastnosti v rámci kurzu Manipulačná geometria.

3 Využitie pravidelných mnohouholníkov pri tvorbe výplní

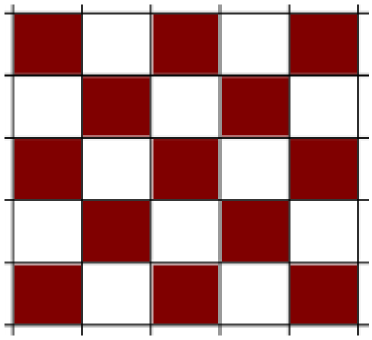
Uvažujme o vyplňovaní roviny pravidelnými mnohouholníkmi. Je zrejmé, že súčet veľkostí vnútorných uhlov mnohouholníkov zoskupených pri každom vrchole pravidelného mnohouholníka musí byť 360°. Ktoré pravidelné mnohouholníky môžu byť použité pri tvorbe výplní?

a) **Rovnostranný trojuholník** – veľkosť vnútorného uhla v rovnostrannom trojuholníku je 60°. To znamená, že na vyplnenie časti roviny je potrebné zoskupiť vždy práve 6 zhodných rovnostranných trojuholníkov pri každom vrchole (360°/60°, obr. 7).
b) **Štvorec** – určiť počet štvorcov zoskupených pri každom vrchole znamená opäť aplikovať úvahu o veľkosti vnútorných uhlov v štvorci. (obr. 8).
c) **Pravidelný šesťuholník** – veľkosť vnútorného uhla pravidelného šesťuholníka je 120°, preto musí byť každý vrchol vo výplni incidentný s tromi pravidelnými šesťuholníkmi (obr. 9).

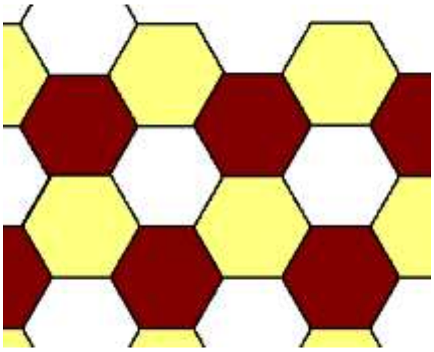
Aplikovaním predchádzajúceho postupu sa dá ukázať, že pomocou pravidelných päťuholníkov nie je možné vytvoriť výplň roviny (obr. 10) a tiež, že neexistuje ďalší pravidelný mnohouholník, pomocou ktorého je možné vytvoriť pravidelný parket. Vhodnými didaktickými aktivitami sa v edukačnom procese budúcich učiteľov preprimárneho a primárneho vzdelávania pri objavovaní uvedených skutočností skĺbi a využije viacero matematických poznatkov (napr. pri výpočte veľkostí vnútorných uhlov pravidelných mnohouholníkov sa môžu aplikovať poznatky o stredových a obvodových uhloch a ich vzájomnom vzťahu). Na základe skúseností viacerých domácich aj zahraničných odborníkov (napr. Židek, O. 1996, Marcinek T. 2001 a 1999, Vaníček, J. 2009) možno konštatovať, že v procese skúmania a tvorby pravidelných parketov sa môžu s úspechom využiť manipulačné aktivity uskutočňované prostredníctvom didaktických pomôcok (napr. Polydron, resp. softvérové produkty, akým je napr. Tess alebo prostredia dynamickej geometrie).



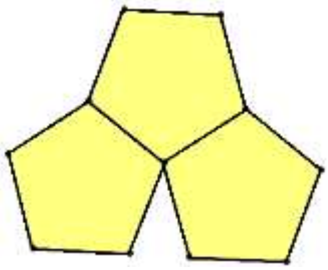
Obr. 7. Pravidelný parket generovaný rovnostrannými trojuholníkmi



Obr. 8. Pravidelný parket tvorený štvorcami



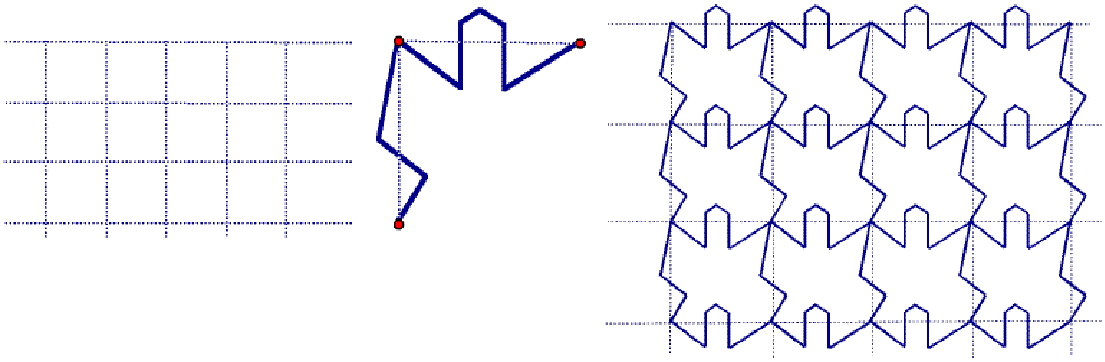
Obr. 9. Pravidelný parket generovaný pravidelnými šesťuholníkmi



Obr. 10. Pravidelný päťuholník nemôže generovať pravidelný parket

4 Geometrické a umelecké využitie pravidelného parketu na tvorbu nových výplní

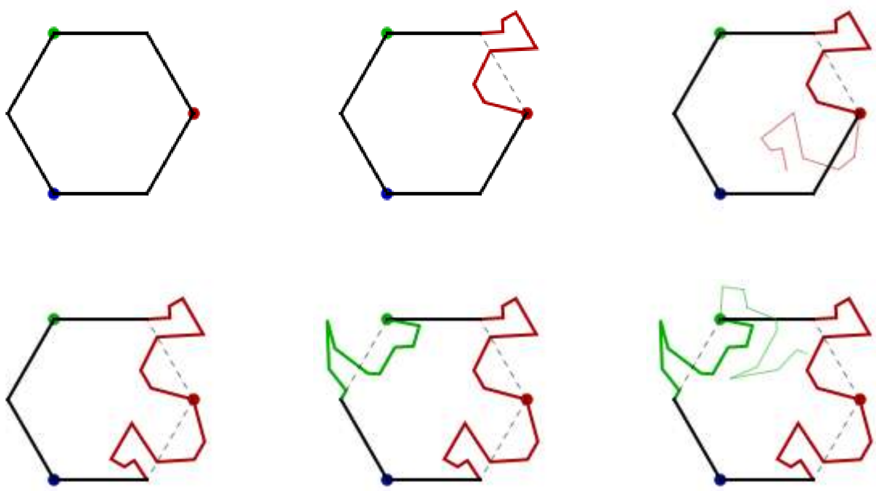
Najznámejším, a azda aj najvýznamnejším umelcom, ktorý využíval vlastnosti pravidelného parketu v tvorbe svojich diel je holandský grafik **Maurits Cornelis Escher** (M. C. Escher), ktorý vo svojej tvorbe uplatňoval a využíval princípy vyplňovania roviny obohatené o rôzne grafické prvky a efekty. Jeho dielo je jedinečné, i keď v holandskom svete umenia nebolo veľmi uznávané.



Obr. 11. Využitie štvorcovej siete na tvorbu výplne [2]

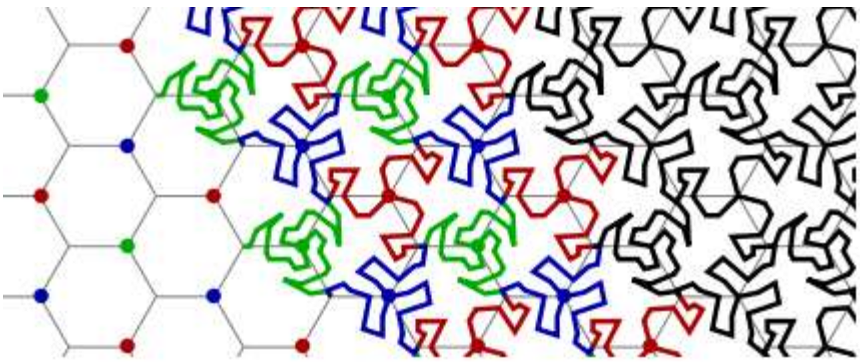
„Bolo považované za príliš staromódne vo svojej estetike, skôr za remeslo ako za umenie a za príliš matematické." (M. C. Escher; J. L. Locher; W. F. Veldhuysen, 2009, str. 18). Z rukopisov M. C. Eschera je zrejmé, že pri tvorbe a grafickej úprave základných prvkov, ktorými generuje výplň roviny využíva najmä štvorcovú, trojuholníkovú a šesťuholníkovú sieť (obr. 11, 13). Pod pojmom *sieť* rozumieme práve zoskupenie navzájom zhodných útvarov, podľa vyššie opísaných kritérií pre pravidelný parket.

Na obr. 11 je naznačený najjednoduchší spôsob tvorby Escherovských tesalácií. Každá horizontálna strana štvorca bola nahradená navzájom zhodnými lomenými čiarami a podobne aj každá vertikálna strana štvorca bola nahradená lomenými čiarami (v tvare „blesku“). Podobne možno postupovať pri tvorbe ďalších výplní, pričom sa zvláštna pozornosť, najmä v edukačnom procese, venuje významu využitia rovinných izometrických transformácií (najmä osovej a stredovej súmernosti, otočeniu a posunutiu) pri príprave generátora danej výplne tak, ako je naznačené na obrazovom algoritme tvorby známej Escherovej jašterice (obr. 12).



Obr. 12. Postup tvorby generátora výplne pomocou rovinných geometrických transformácií na báze pravidelného šesťuholníka [2]

Z uvedeného postupu je zrejmý aj algoritmus pri tvorbe virtuálneho modelu vypĺňovania časti roviny prostredníctvom dynamických geometrických systémov, v ktorých sa jednoduchým spôsobom realizujú rovinné transformácie. Stačí si zvoliť rovnostranný trojuholník alebo štvorec, resp. pravidelný šesťuholník, na báze ktorého sa vytvorí generátor výplne.



Obr. 13. Využitie šesťuholníkovej siete pri kompletizovaní výplne [2]

Potom treba využiť vhodné rovinné transformácie na rozširovanie zvolenej siete (obr. 13), zvyčajne sa ide o kombináciu otočenia a posunutia ako zhodnostných rovinných transformácií. Interaktivita vo virtuálnom spracovaní výplne v dynamickej geometrii umožňuje skúmanie väčšieho množstva rôznych výplní, avšak založeného na rovnakom princípe.

Obr. 14. Analýza Escherovej kresby a puzzle [2]

5 Didaktické aplikácie problému vyplňovania roviny

S problémom vyplňovania roviny, resp. jej časti, sa intuitívne stretávajú už deti v predškolskom a v mladšom školskom veku prostredníctvom rôznych didaktických hier, skladačiek a hlavolamov. Zväčša ide o rôzne druhy puzzle vyhotovené z rôznych materiálov. Integrovanou súčasťou niektorých iných skladačiek sú priamo farebné modely mnohouholníkov a ďalších geometrických útvarov. Často sa v didaktickej praxi využívajú skladačky založené na platforme tangramu, alebo pentominových, či hexaminových dielcov. V začiatkoch éry počítačových hier bola veľmi populárna hra s názvom Tetris, ktorá sa, v rôznych spracovaniach, dosiaľ teší pomerne veľkej popularite. Vo všetkých uvedených aplikáciách je podstatou a cieľom hry rozvíjať schopnosť poukladať jednotlivé dielce skladačiek tak, aby sa neprekrývali, a aby medzi nimi nevznikali medzery.

Obr. 15. Ukážky hier pre deti predškolského veku využívajúce princípy vyplňovania roviny [1], [8]

6 Záver

Napriek skutočnosti, že problematika vyplňovania roviny nie je z historického hľadiska nová, ukazuje sa ako dobrý motivačný činiteľ z viacerých dôvodov. Vyrobené hračky, v ktorých sa vyplňovanie roviny využíva, poskytujú dobrý priestor pre intuitívne poznávanie vlastností geometrických útvarov už v rannom detstve. Výsledné produkty často podporujú rozvoj estetického cítenia detí, ale aj starších riešiteľov príslušných úloh o výplniach. Z praktického hľadiska poskytuje problematika príležitosť pre technickú tvorbu a jej optimalizáciu, napríklad aj v oblasti obalovej techniky. Z pedagogického a psychologického hľadiska podporujú odporúčané a ďalšie činnosti podobného zamerania rozvoj tvorivosti, fantázie, vytrvalosti, presnosti a iné pozitívne črty osobnosti. Preto ich zaradenie, nielen do vyučovacích a výchovných aktivít detí príslušného veku, ale aj do teoretickej a praktickej prípravy učiteľov pre preprimárne a primárne vzdelávanie, považujeme za praktické a prospešné.

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu s názvom „Manipulačné a virtuálne geometrické modelovanie v príprave učiteľov pre primárne matematické vzdelávanie" a registračným číslom MŠ KEGA 028UK-4/2011.

Literatúra

[1] ALEXTOYS. *Stavebnica drevená Mozaika.* Dostupné na: http://www.mall.sk/drevene-hry-hlavolamy/alextoys-stavebnice-drevena-mozaika-80ks-.

[2] Anneke BART, Bryan CLAIR (2006-11). *Math & the Art of MC Escher.* Dostupné na: http://euler.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Other_Figures.

[3] COOLMATH4KIDS.COM. *Tessellations.* 1997 – 2011. Dostupné na: http://www.coolmath4kids.com/tesspag1.html#.

[4] Craig S. KAPLAN. *Escherization.* 2007. Dostupné na: http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/escherization/.

[5] DEHLINGER, R. *Tesselations.* 1996. Dostupné na: http://www.geom.uiuc.edu/~demo5337/Group4/Tsslatns.html.

[6] DEVLIN, K. *Jazyk matematiky.* Praha : Argo a Dokořán, 2002. 343 s. ISBN 80-86569-09-8, 80-7203-470-7.

[7] ESCHER, M. C., LOCHER, J. L., VELDHUYSEN, W. F. *M. C. Escher a jeho magie.* Praha : Slovart. Köln : Taschen. 196 s. ISBN 9788073913144 8073913143 9783836520751 3836520753.

[8] GIGAMIC. *Katamino Pocket.* Dostupné na: http://www.gigamic.com/katamino-pocket-board games-gigamic-c-31-p-707.html.

[9] MARCINEK, T. *Vyplňovanie roviny v kontexte moderných trendov vyučovania matematiky.* Dizertačná práca. Bratislava : PdF Univerzita Komenského. 2001. 121 s.

[10] MARCINEK, T. Vyplňovanie roviny: anatómia tvorivosti. In *Matematika v přípravě učitelů 1. stupně základních škol.* Olomouc : Univerzita Palackého. 1999. ISBN 80-7067-997-2. S. 43-46.

[11] MATHISFUN.COM. *Tessellation.* 2010. Dostupné na: http://www.mathsisfun.com/geometry/tessellation.html.

[12] ORACLE*THINKQUEST. *Totally Tessellated.* 1998. Dostupné na: http://library.thinkquest.org/16661/.

[13] TRŽILOVÁ, D. *LOGO a matematika.* České Budějovice : PdF Jihočeská univerzita. 1993. 63 s. Dostupné na: http://www.pf.jcu.cz/p-mat/texty/LOGO_skripta.pdf.

[14] *The Oldest Escher Collection on the Web.* Dostupné na: http://www.mcescher.net/.

[15] VANÍČEK, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.* Praha : Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta. 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

[16] VANÍČEK, J. Počítač jako nositel změn ve školském geometrickém kurikulu. In *25 konference o geometrii a počítačové grafice.* Dostupné na http://mat.fsv.cvut.cz/gcg/sbornik/vanicek.pdf.

[17] ŽIDEK, O. Vyplňovanie priestoru. In *Matematika IV.* Bratislava : PdF UK. 1996. S. 93-98.