

Dipyramídy a deltoédry zobrazované pomocou softvéru Poly

Oliver Židek

Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave
P.O. Box 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: oliver.zidek@gmail.com

Abstract: *Dipyramids and deltohedra designed in the software Poly.* The teaching of knowledge about solid geometry is considered a difficult topic of school geometry. This is due to several factors. The didactical approach of the teacher, that provides the subject matter to the students, can be considered as one of the significant factors. The presented didactical elaboration of the subject matter about dipyramids and deltohedra is using the educational software Poly.

Keywords: Dypiramids, Deltohedra, didactical software

1 Úvod

Prezentované didaktické spracovanie elementárnych poznatkov o dvoch skupinách hranatých telies s názvom „dipyramídy a deltoédry“ nadväzuje na podobné spracovania množín špeciálnych hranatých mnohostenov, ktoré zaraďujeme podľa ich charakteristických vlastností. Z dávnejšej tvorby, ktorú odporúčame čitateľovi do pozornosti, to boli pravidelné mnohosteny, poloprávidelné mnohosteny, deltoédry, hranoly a antihranoly. Všetky telesá z uvedených skupín sa môžu spoľahlivo zaradiť do školskej matematiky nielen pre svoju geometrickú krásu, ale najmä pre možnosť skúmať ich jednak tradičným spôsobom (model a narysovaný obrázok), ale môžu sa skúmať pomocou prostriedkov informačných a komunikačných technológií, ktoré si pre svoje prednosti (najmä dynamickosť) nachádzajú v súčasnej škole svoje nezastupiteľné miesto.

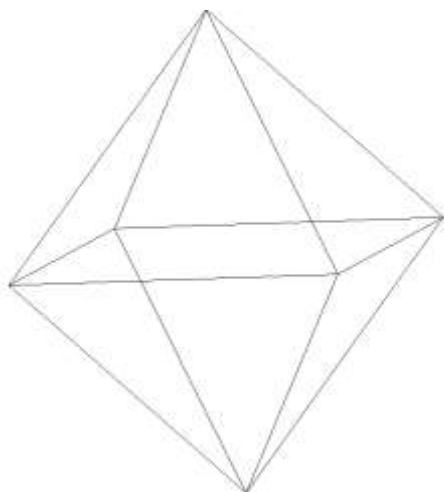
Z pedagogickej praxe, ale aj z rôznych výskumov vyplýva, že zatiaľ čo aritmetické, prípadne algebraické, učivo si žiaci na základných i stredných školách osvoja v predpísanom rozsahu takmer spoľahlivo, s nástupom geometrického učiva nastáva u niektorých žiakov „kríza“. Táto skutočnosť by sa mohla javiť ako nepochopiteľná, vzhľadom k tomu, že práve geometria bola, už od antických čias, v školách rôznych úrovní, silne zastúpená a zdalo by sa, že aj didaktické postupy výučby geometrie sú už históriou spoľahlivo preverené. O príčinách tohto javu sa čitateľ môže dozvedieť v odporúčaných štádiách a pravdepodobne ani tam nenájde spoľahlivú a úplnú odpoveď, preto za cieľ v tomto príspevku si zvolíme zámer ukázať možnosti didaktického postupu, v ktorom sa žiak s vybraným geometrickým učivom zoznámi prostredníctvom viacerých prístupov začínajúc modelovaním geometrických telies, pokračujúc ich zobrazovaním, vrátane zobrazovania zvolených telies prostriedkami IKT použitím vhodného didaktického softvéru. Za vhodný výber učiva na prezentovanie načrtnutého postupu zvolíme pomerne elementárne učivo o dipyramídach a deltoédroch, ktoré sa načrtnutým spôsobom v školskej matematike nevyskytuje, ale ako obohatenie poznatkov o špeciálnych typoch mnohostenov sa javí ako vhodné učivo a kombinovaná metóda využitia tradičných zobrazovacích metód s využitím vhodného pedagogického softvéru robí vyučovanie zaujímavým a efektívnym.

2 Dipyramídy a deltoédry v školskej praxi

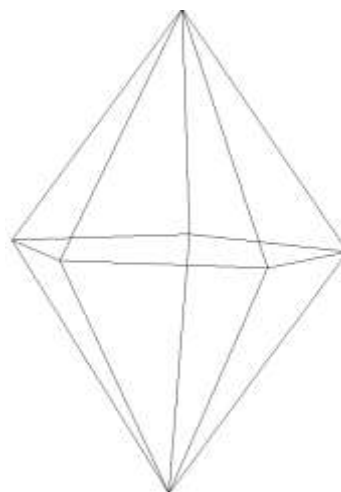
Slovné označenie prezentovaných dvoch skupín telies sme prevzali z anglickej terminológie, tá však využíva slovné základy latinskej prípadne gréckej reči pre svoju originalitu, ale hlavne pre opisnú názornosť, ktorá v podstate umožňuje aj čitateľovi textu v slovenskej reči intuitívne porozumieť obsahu názvu vrátane vytvorenia si predstavy aspoň o niektorých typoch uvedených telies.

S modelom špeciálnej dipyramídy sa pravdepodobne stretne pri spoznaní telesa typu pravidelný osemsten, pretože tento sa dá skutočne vnímať ako podstavami „spojené“ dva zhodné pravidelné štvorboké ihlany. Použitie pojmu dipyramída sa neviaže vždy na požiadavku rovnosti všetkých vzdialeností vrcholov telesa od jeho stredu. To sa vyskytne iba pri vnímaní pravidelného osemstena ako dipyramídy. Vo všeobecnosti však stačí, aby výšky jednotlivých štvorbokých ihlanov, z ktorých sa osemsten skladá boli zhodné. Inými slovami vzniknutá „dvojitá“ pyramída môže byť rôzne „štíhla“.

Iný príklad výskytu špeciálnej dipyramídy sa vyskytuje v riadenom objaviteľskom didaktickom postupe pri učive o pravidelných mnohostenoch. Ak motivujeme ich objav prostredníctvom požiadaviek, že hľadané telesá majú byť konvexné, steny majú byť zhodné pravidelné n – uholníky a neakcentujeme ďalšiu významnú požiadavku o rovnosti počtu zoskupených stien, alebo hrán pri všetkých vrcholoch, zistíme veľmi často, že žiaci považujú mylne pentagonálnu dipyramídu za pravidelný mnohosten. Je to elegantná ukážka potreby precizovať definíciu telies typu pravidelný mnohosten. Ako odmena nech je skutočnosť, v podobe objavenia pravidelného dvadsaťstena.



Obr. 1. Pravidelný osemsten ako dipyramída

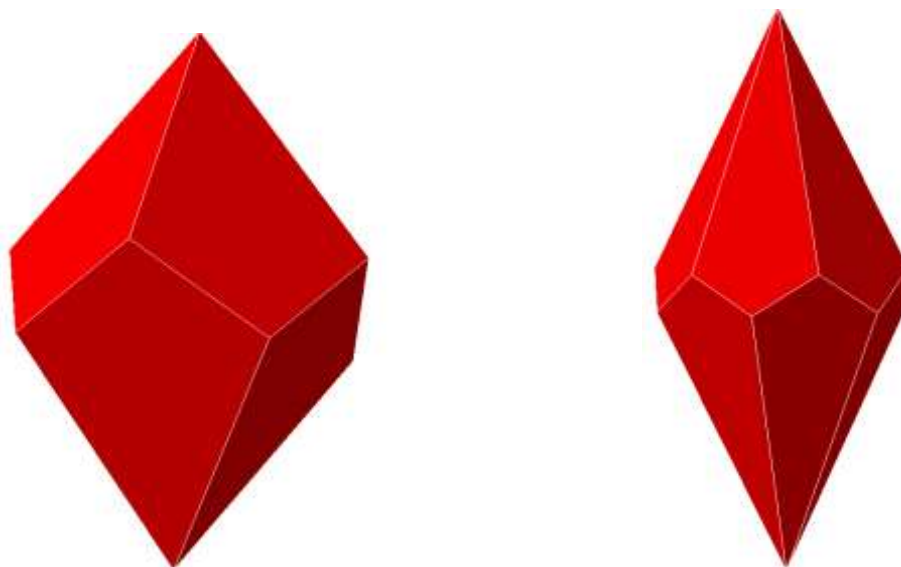


Obr. 2. Pentagonálna dipyramída

Výskyt niektorých typov dipyramíd môžeme nájsť napríklad aj v prírode ako kryštalické mriežky niektorých látok (pravidelný osemsten – kryštalická mriežka zlata), iný výskyt je v použití tvorby telies pre rôzne spoločenské hry, kedy chceme v nich nahradiť často frekventovanú kocku. Časté využitie uvedených typov telies nájdeme vo výtvarnom umení, ale tiež v architektúre. Zobrazenie fantastických typov lietajúcich telies je ďalší možný výskyt modelov dipyramíd a ich geometrická znalosť umožňuje autorovi obrázkov uľahčenie pri tvorbe načrtnutých aplikácií ako ilustračných obrázkov pre deťmi obľúbené fantastické literárne žánre.

Modely deltoédrov nenájdeme pravdepodobne v súčasnej školskej matematike, ale určitú matnú predstavu o nich môžeme žiakovi priblížiť, napríklad pri špeciálnom zastrúhaní ceruzky v tvare modelu pravidelného šesťbokého hranola. Výskyt v kryštalografii, možno aj v umení, by mohol byť dobrou aplikačnou ukážkou – je vhodné upriamovať pozornosť žiakov a študentov na pozorovanie objektov, ktoré nás obklopujú „očami geometricky vzdelaného človeka“.

Názov deltoéder je pravdepodobne odvodený zo slova „eder-stena“ (polyéder – mnohosten) a počiatočná časť „delto-“ je časť z názvu špeciálneho rovinného štvoruholníka s názvom **deltoid** (pre žiakov známy model jedného z rôznych tvarov šarkanov). Triedenie štvoruholníkov nájde čitateľ v rôznych matematických publikáciách, avšak mnohé z nich triedením čitateľa nielen nepoučia, ale zdezorientujú – tie zo zrejmých dôvodov uvádzať nebudeme, avšak za vydarené a použiteľné triedenie môžeme považovať triedenie podľa K. Žilkovej v práci [10]. Samotnú definíciu pojmu *deltoid* môžeme čitateľovi priblížiť nasledovne: **deltoid** – konvexný štvoruholník, ktorého uhlopriečky sú na seba kolmé a práve jedna z nich je druhou delená na dve polovice.

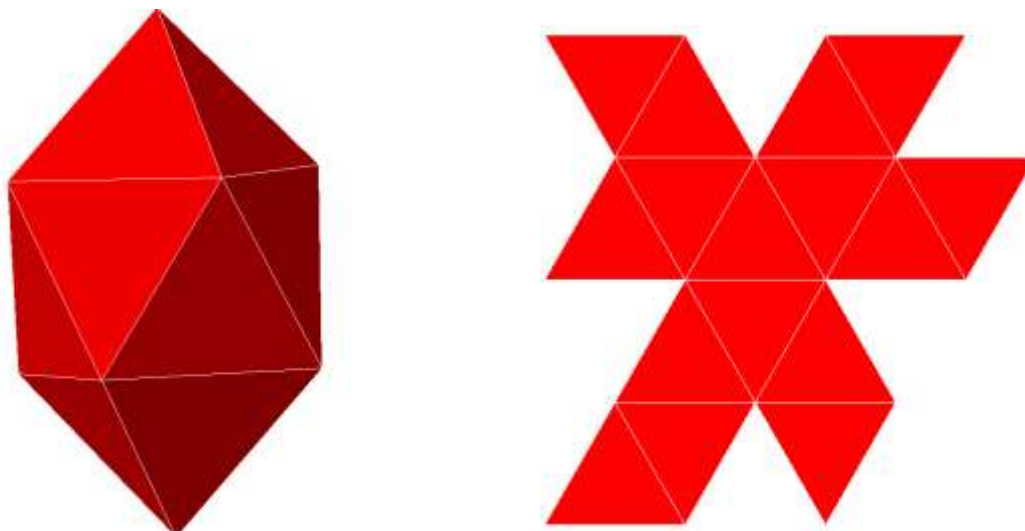


Obr. 3. Ukážka zobrazenia dvoch typov deltoédrov

3 Deltoédry a deltaédry v geometrii mnohostenov

Zdanlivo malá odlišnosť v názvoch dvoch množín telies je pri povrchnom čítaní takmer nepostrehnuteľná, avšak v praxi je významná. Ak sme v predchádzajúcom odseku intuitívne čitateľovi predstavili modely deltoédrov, tak je vhodné priblížiť aj pojem deltaéder, ak sa nechceme spoľahnúť iba na informovanosť čitateľa, ktorý sa prostredníctvom niektorých publikovaných prác o tejto málopočetnej množine telies už zo štúdia dozvedel.

Deltaéder je každý konvexný mnohosten, ktorého všetky steny sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Je potrebné si uvedomiť, že na rozdiel od pravidelných mnohostenov sa v definícii deltaédra nevyžaduje rovnosť počtu hrán, alebo stien incidentných s každým vrcholom. V tejto súvislosti je vhodné pripomenúť, že tri typy pravidelných mnohostenov (štvorsten, osemsten a dvadsaťsten) predstavujú zároveň aj tri typy deltaédrov. Ich celkový počet typov je osem a z hľadiska počtu stien môžeme zaznamenať časť postupnosti: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20. Čitateľ iste postrehol v uvedenej časti postupnosti absenciu čísla 18, čo nie je tlačová chyba, ale skutočnosť, že 18-stenný deltaéder neexistuje. Stručnú teóriu didaktického spracovania poznatkov o deltaédroch nájde čitateľ v odporúčaných literárnych prameňoch, treba poznamenať, že je to učivo nielen obohacujúce z geometrie ako vedy, ale je prínosom z hľadiska možnosti aplikovať objaviteľský didaktický postup, čo je niekedy významnejšie, než poznať skutočnosť o počte a tvaroch jednotlivých telies s uvedenými vlastnosťami.

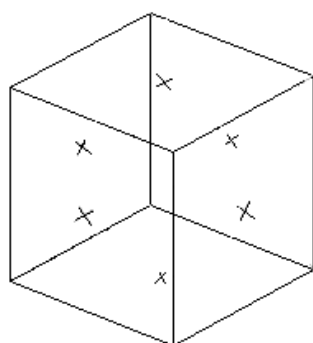


Obr. 4. Ukážka zobrazenia 16-stenného deltaédra a jeho siete

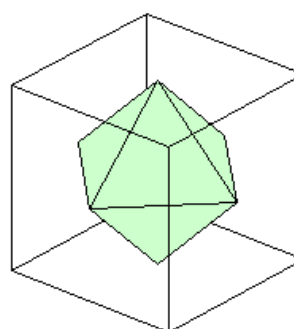
4 Dipyramídy a deltoédry ako produkty duality telies

S pojmom dualita mnohostenov sa môže žiak základnej, alebo strednej školy zoznámiť v zjednodušenej a redukovanej podobe diskretným spôsobom napríklad pri riešení nasledujúceho cvičenia: *Zobrazte hranaté teleso, ktorého vrcholy sú stredy stien danej kocky.*

Ak budeme predpokladať, že zobrazenie kocky nie je pre riešiteľa úlohy náročný problém (napríklad v jednoduchom voľnom rovnobežnom zobrazení), tak nájsť obrazy stredov stien je taktiež nenáročná úloha, pretože sa zobrazujú do priesečníkov priemetov stenových uhlopriečok. Výber vhodných úsečiek, ktorých krajnými bodmi sú nájdené obrazy stredov stien, dourčí zobrazenie telesa duálneho k danej kocke. Je zrejmé že ním je pravidelný osemsten zobrazený veľmi názorným spôsobom a výsledok nielen poteší riešiteľa, ale aj mimoriadne preverí jeho schopnosť nazývanú priestorová predstavivosť.



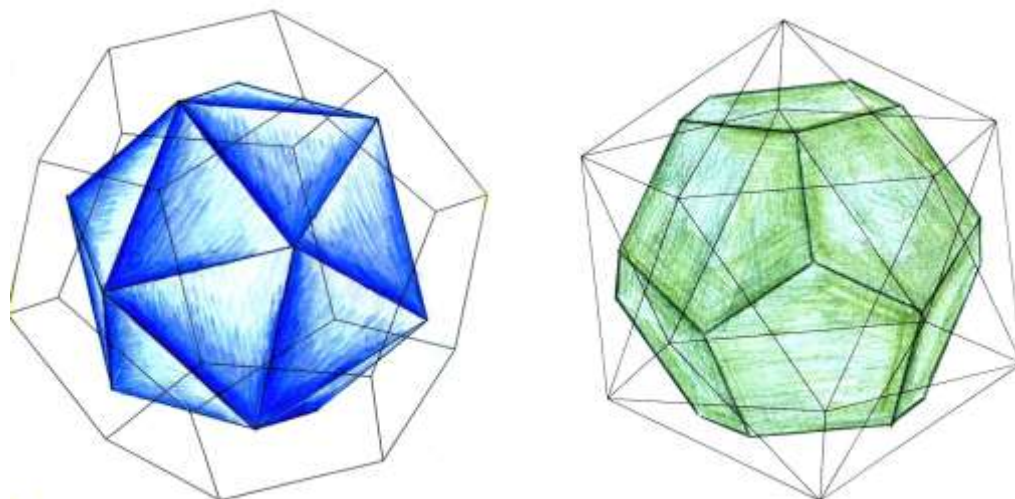
Obr. 5. Hľadanie duálneho telesa



Obr. 6. Pravidelný osemsten

Načrtnutý postup môžeme využiť v podmienkach tradičného rysovania aj pre pravidelný štvorsten, ktorý je duálny sám so sebou, alebo pre pravidelný osemsten, ktorý v dualite produkuje kocku. V kontexte terminológie je vhodné poznamenať, že v prípade napríklad pravidelného osemstena, ktorý má stenu rovnostranný trojuholník nie je možné použiť termín „stred steny“. Žiaden bod trojuholníka nie je jeho stredom, pretože v žiadnej stredovej súmernosti sa daný trojuholník nereprodukuje. Načrtnuté postupy skúmania duality niektorých špeciálnych mnohostenov sú prezentované v prácach (Židek, Žilková).

Problém duality ďalších telies nie je spravidla možné skúmať tradičnými zobrazovacími technikami, pretože už napríklad zobraziť pravidelný dvanásťsten, alebo dvadsaťsten nevieme poznatkami základnej alebo strednej školy. Tu je na mieste použiť takzvanú kombinovanú metódu zobrazenia telies a to tak, že niektoré vhodné telesá si zobrazíme pomocou didaktického softvéru a v týchto zobrazeniach riešime napríklad úlohu o dualite telies už tradičnou technikou rysovania.



Obr. 7. Ukážka kombinovanej metódy zobrazenia niektorých mnohostenov

5 Zobrazenie dipyramíd a deltoédrov prostriedkami IKT

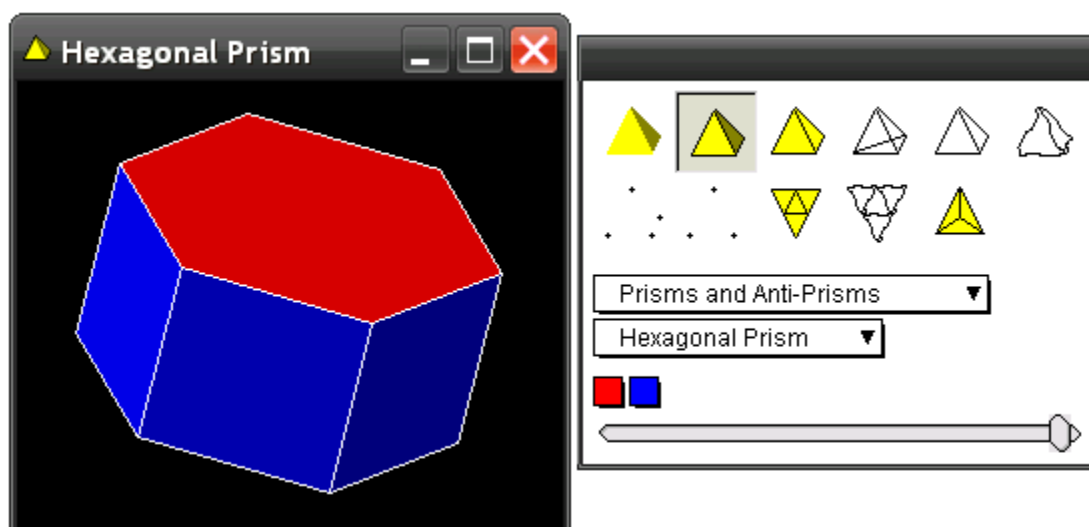
Aj prostredníctvom zobrazenia geometrických útvarov smeruje naša didaktická cesta k posilneniu abstraktných predstáv o geometrických objektoch. Na tejto vzdelávacej ceste môžeme s úspechom využiť virtuálnu poznávaciu aktivitu, využívajúc pritom vhodný didaktický softvér, ktorého „interpretačné možnosti môžu zdokonaľiť proces učenia a prispieť k rozvoju myšlienkových a tvorivých aktivít žiakov“ (Žilková, 2005).

V nasledujúcej časti uvedieme príklad *virtuálneho* pozorovania a *štúdia* niektorých vlastností špeciálnych typov hranatých telies tak, ako bol tento postup viacnásobne používaný v matematickej a didaktickej príprave učiteľov matematiky vrátane učiteľov pre 1. stupeň základných škôl. V uvedenej súvislosti môžeme za vydarený produkt považovať softvér s označením Poly 1.05, 1.08, 1.10, 1.11, 1.32 – postupne modifikovaný a dostupný aspoň v demoverzii na internete (www.peda.com). Čitateľ má možnosť získať informácie o prevádzkových podmienkach využívania programu, ako aj o možnosti zakúpenia uvedeného softvéru. Program umožňuje používateľovi získať prehľad o nasledujúcich typoch telies:

1. *Platónove telesá* (konvexné mnohosteny, všetky steny sú zhodné pravidelné n -uholníky, pri každom vrchole je zoskupený rovnaký počet stien; spolu 5 typov telies, ktorými sú: pravidelný štvorsten, šesťsten, osemsten, dvanásťsten a dvadsaťsten).
2. *Archimedove telesá* (konvexné mnohosteny, všetky steny sú pravidelné n -uholníky, pričom môžu byť aj rôzneho typu, zoskupenia mnohouholníkov pri všetkých vrcholoch sú zhodné; spolu 13 typov telies).
3. *Hranoly a antihranoly* (pravidelné hranoly – podstava je pravidelný n -uholník, bočné steny sú štvorce; antihranoly – podstava je pravidelný n -uholník, bočné steny sú zhodné, rovnostranné trojuholníky; z nekonečného počtu týchto telies spolu program poskytuje 10 typov, aj takto definovanú skupinu telies často zaraďujeme medzi polopravidelné mnohosteny vymedzené v bode 2).

4. *Johnsonove telesá* (konečný počet konvexných mnohostenov so stenami tvaru pravidelných n -uholníkov; ďalšie podmienky sú zložitejšie, dajú sa pri ich zobrazení aspoň intuitívne postrehnúť – spolu 92 typov telies).
5. *Deltaédry* (konvexné mnohosteny, ktorých všetky steny sú zhodné rovnostranné trojuholníky; spolu 8 typov, pomerne neskoro vymedzená konečná množina telies – 1947).
6. *Katalánske telesá* (duálne telesá k Archimedovským telesám; konštrukcia je založená na princípe: stred steny pôvodného telesa je vrchol nového telesa; spolu 13 typov telies).
7. *Dipyramídy a deltoédry* (dipyramídy sú duálne telesá k hranolom, deltoédry sú duálne telesá k antihranolom; ukážka obsahuje 10 typov telies).
8. *Geodetické guľovité kupoly* (obohatenie o tento typ telies sa vyskytuje až v produkte Poly 1.11).

Z uvedených 8 ponúk programu Poly vo vzťahu k prezentovanej problematike vyplýva, že zobrazenie dipyramíd a deltoédrov sa, v obmedzenom rozsahu, dá získať pomerne jednoducho, čo umožňuje získať kvalitné „obrázky“ týchto (i ďalších) typov telies pomocou voľne dostupného didaktického softvéru aj tým žiakom, ktorí zatiaľ nemajú požadované geometrické poznatky pre úspešné zvládnutie tohto problému. Program racionalizuje výučbu v tej fáze, kedy nie je cieľom iba zobraziť teleso, ale na zobrazenom telese riešiť niektoré polohové a alebo metrické úlohy s obvyklým didaktickým, prípadne technickým námetom.



Obr. 8. Nástroje pedagogického softvéru s názvom Poly Pro, zobrazený hranol s vyznačením hrán a farebným zvýraznením stien s aplikáciou tieňovania

Z uvedených typov telies si môže používateľ programu zvoliť:

- a) Zobrazenie telesa s vyznačením hrán bielej farby na čiernom pozadí (obr. 8).
- b) Zobrazenie telesa v jednofarebnom prevedení jeho stien.
- c) Zobrazenie telesa vo farebnom prevedení za použitia tieňovania niektorých stien s cieľom získať názornejší obraz.
- d) Zobrazenie telesa vo farebnom prevedení so zvýraznením jeho hrán úsečkami bielej farby.
- e) Zobrazenie iba vrcholov telesa (všetkých).
- f) Zobrazenie vrcholov telesa viditeľných v príslušnej projekcii.
- g) Schlegelov diagram zostrojený z príslušného telesa.
- h) Sieť jednotlivých telies v statickej podobe.
- i) Sieť jednotlivých telies v dynamickej podobe, t.j. plynulé rozvinutie stien telesa do roviny (obr. 2a, 2b, 3a, 3b).

- j) Plynulú animáciu zobrazeného mnohostena do ľubovoľnej polohy k priemetni.
- k) Zvoliť jednu alebo niekoľko farieb z bohatej ponuky.
- l) Vytlačiť pomocou tlačiarne zobrazené teleso v požadovanej polohe vrátane siete a názvu (často veľmi komplikovaného).

6 Dipyramídy a deltoédry v netradičných úlohách

Opis možností využitia programu Poly je už v tejto modifikácii natoľko inšpiratívny, že sa dá vnímať jednak ako náučný vo svojom obsahu a zároveň aplikačný v poskytovaných možnostiach kombinovaného využitia pri zobrazovaní netradičných typov telies a ich častí.

V kontexte vyššie uvedených poznatkov o niektorých hranatých telesách si používateľ si má možnosť všimnúť významnú vlastnosť telies typu dipyramídy a deltoédry, ktoré sa dajú pri ich zobrazovaní vhodne využiť.

Dipyramídy sú duálne telesá k hranolom, deltoédry sú duálne telesá k antihranolom.

Ak sme uviedli, že so znalosťou určitej hladiny poznatkov z voľného rovnobežného zobrazenia vieme ľahko zobraziť pravidelný trojboký, štvorboký, päťboký, šesťboký hranol, tak vyššie načrtnutou metódou vieme do týchto hranolov vpísať príslušné typy dipyramíd. V prípade, že chceme využiť kombinovanú metódu, teda metódu v ktorej využijeme predtlač zobrazenia hranolov v programe Poly, tak máme 10 ponúk telies k dispozícii, navyše využitie dynamickosti produktu vieme zvoliť taký pohľad, aby efekt zobrazenia bol výrazný, prípadne vieme touto metódou meniť náročnosť danej úlohy.

Pri úlohách o zobrazení deltoédrov, ako duálnych telies k antihranolom zistíme, že ich zobrazenie nie je nenáročné, a to je asi aj dôvod, prečo sa antihranoly, a teda ani deltoédry v tradičnej školskej geometrii takmer nevyskytovali. Je pravdou, že siete antihranolov sa zostroja ľahko, teda aj modely týchto telies konštruované napríklad s pomocou geometrického konštrukčného systému Polydrón i Geomag sa ľahko získajú, tým si však asi málo pomôžeme v úlohe o vyhotovení modelov deltoédrov, prípadne v ich zobrazeniach. V tejto problematike sa javí využitie softvéru Poly ako veľmi funkčné a v rámci diferencovaného vyučovania sa úlohy načrtnutého typu iste osvedčia. Stavebnica Polydrón neumožňuje zostrojiť modely deltoédrov, Geomag vybavený vhodnými modelmi špeciálnych deltoídrov by mohol byť v tejto veci prospešný.

7 Záver

Prezentované upriamenie pozornosti na telesá, ktoré sa v školskej geometrii takmer nevyskytujú, má za cieľ poukázať na ich geometrickú krásu, ale aj na ich výskyt v rôznych objektoch technickej, vedeckej a umeleckej praxe. V pedagogickej činnosti sa v súčinnosti s učivom o špeciálnych typoch mnohostenov sa vyskytuje rad didaktických situácií podporujúcich tvorivosť žiakov, ale aj poznatkové obohacovanie realizované diskretným spôsobom, pretože riešiteľ je postavený pred problém ako využiť elementárne, avšak známe, poznatky zo zobrazovacích metód, využívajúc názornosť a geometrickú predstavivosť. Cieľavedomé využitie didaktického softvéru obohacuje riešiteľa a poskytuje priestor pre jeho racionálne využitie smerujúce k uľahčeniu a k efektívite práce v podobe vytvorených estetických obrázkov. Ak sme sa v spracovaní témy zaoberali podrobnejšie jej prípravnou časťou, nebol to únik od problematiky, ale mal to byť akcent na porozumenie poznatkových súvislostí a ich využití pri samostatnom riešení načrtnutých úloh, s ktorými si šikovný žiak, vedený učiteľom už poradí v takmer samostatnej činnosti.

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu s názvom „Manipulačné a virtuálne geometrické modelovanie v príprave učiteľov pre primárne matematické vzdelávanie“ a registračným číslom MŠ KEGA 028UK-4/2011.

Literatúra

- [1] ŽIDEK, O.: Manipulačné a virtuálne štúdium niektorých vlastností špeciálnych mnohostenov. In *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání*. Plzeň : Západočeská univerzita, 2007. s. 204-209. ISBN 978-80-7043-548-9.
- [2] ŽIDEK, O.: Kombinované poučívanie elektronických a manuálnych pomôcok pri výučbe geometrie. In *História, súčasnosť a perspektívy učiteľského vzdelávania*. Banská Bystrica : UMB, 2004, str. 180-182. ISBN 80-8083-107-6.
- [3] ŽIDEK, O.: Konvexné polopravidelné mnohosteny. In *Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis*. Trnava : str. 175-183, 1998.
- [4] ŽIDEK, O.: O pravidelných mnohostenoch na ZŠ. In *Matematika a fyzika ve škole*. roč. 11, č. 2 a pokr. v č. 3, 1980.
- [5] ŽIDEK, O.: Štúdium duality niektorých mnohostenov. In *Zborník ACTA MATHEMATICA 8*. Nitra : UKF, Prírodovedec č. 188, 2005, ISBN 80-8050-896-8.
- [6] ŽIDEK, O.: Siete niektorých hranatých telies, In *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2011, s.238 – 242, ISBN 978-80-7043-992-0.
- [7] ŽILKOVÁ, K.: *Školská matematika v prostředí IKT*. Bratislava : Univerzita Komenského, 2009. s. 90-91. ISBN 978-80-223-2555-4.
- [8] ŽILKOVÁ, K.: Komunikačné rozhranie v procese tvorby počítačového modelu matematického problému. In *Didactic Conference in Žilina with international participation Didza*. Žilina : Fakulta prírodných vied ŽU, 2005. ISBN 80-8070-429-5.
- [9] ŽILKOVÁ, K.: Dualita pravidelných telies v dynamickom geometrickom systéme. In *Education and Technology [ed. Bednarczyk, H. – Salata, E.]*. Radom : Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji, 2010, s. 286-290, ISBN 978-83-7204-915-5.
- [10] ŽILKOVÁ, K.: Poznatkové defekty v učive o mnohouholníkoch a možnosti ich korekcií prostredníctvom digitálnych technológií, In *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2011, s.243 – 247, ISBN 978-80-7043-992-0.
- [11] *Pedagoguery Software*. [online] Dostupné na: <http://www.peda.com/>.