

## Úlohy o vybraných mnohostenoch s ohodnotenými stenami

Lucia Repiská

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita  
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR  
e-mail: [lucia.repiska@gmail.com](mailto:lucia.repiska@gmail.com)

**Abstract:** *Tasks about the chosen polyhedra with the evaluated faces.* The aim of this paper is to show some types of tasks that a pupil is not familiar with but are quite interesting and it is expected to involve geometric spatial imagination skills to solve them. In these tasks are used models of regular hexahedron and dodecahedron.

**Keywords:** tasks, the model of regular hexahedron, the model of regular dodecahedron

### 1 Úvod

V psychológii sa charakterizuje vnímanie ako základný poznávací proces. Dieťa, vníma veci, už od raného detstva, prostredníctvom manipulačnej činnosti, a teda výrazne získava informácie o danom predmete aj na základe hmatu. V predškolskom veku je to najdominantnejší spôsob poznávania. Prostredníctvom hmatu, zraku a niekedy i chuti analyzuje fyzikálne vlastnosti skúmaného objektu. Postupne sa poznávanie stáva riadenou činnosťou, čo sa dosahuje najmä vplyvom cieľavedomej činnosti učiteľov a rodičov jednak v rodinách, ale najmä v školských zariadeniach a školách. Na vyučovacích hodinách matematiky sa manipuluje (prípadne by sa malo) predovšetkým s geometrickými objektmi a s modelmi geometrických telies. Rôzne doterajšie výskumy poukazujú na pozitívny vplyv manipulačnej činnosti na rozvoj nielen koordinácie jednotlivých častí tela dieťaťa, ale aj na rozvoj priestorovej geometrickej predstavivosti.

Úroveň priestorovej geometrickej predstavivosti jedincov je v žiackej komunite spravidla na rôznom stupni rozvoja. Prax ukazuje, že pri vstupe detí do školy je úroveň ich geometrickej predstavivosti vyššia ako predpokladajú osnovy základnej školy. Podľa niektorých výskumov je ideálne obdobie na jej rozvoj uvedenej schopnosti, už v predškolskom veku, v mladšom školskom veku a neskôr sa táto schopnosť už výrazne nemení, ak nie je cieľavedome a intenzívne akcelerovaná. Uvedené tvrdenia sa uvádzajú okrem iných autorov v prácach A. Šarounovej a Liňkovej ([1] In: Molnár, 1996). Ak vychádzame z tohto predpokladu, hlavná fáza rozvoja tejto schopnosti by sa mala odohrávať na prvom stupni základnej školy. Dá sa predpokladať, že na tieto zistenia, ktoré sa objavujú v prácach viacerých autorov, reaguje aj nový štátny vzdelávací program. Podľa neho má v súčasnosti v obsahu vzdelávania a v oblasti stereometrického učiva na prvom stupni základnej školy dominantné zastúpenie budovanie zložitejších telies napríklad z modelov kociek. Požiadavka stavby týchto telies sa objavuje už v druhom ročníku a pretrváva až do štvrtého ročníka.

Pri štúdiu učebníc matematiky, ale aj iných literárnych zdrojov, sme dospeli k záveru, že učivo s aritmetickým obsahom má dominantnejšie zastúpenie. Značne menšiu časť tvoria úlohy na rozvoj priestorovej predstavivosti. S takýmito úlohami sa môžeme častejšie stretnúť v činnosti matematických krúžkov, v literatúre pre voľný čas, obsahujú ho najmä knižné tituly a internetové zdroje s hlavolamami, logickými úlohami a hádankami, prípadne je v testoch, ktoré zisťujú úroveň koeficientu IQ. Zaradenie takýchto úloh na hodinách matematiky je ojedinelé i napriek tomu, že sa

s nimi v živote bežne stretávame. Ako námety vhodných úloh so stereometrickým obsahom uvádzame možnosť využitia niektorých typov mnohostenov, ktorých modely sa vyskytujú jednak v objektoch, ktoré nás obklopujú, prípadne sa používajú pri rôznych spoločenských hrách.

## 2 Kocka v úlohách

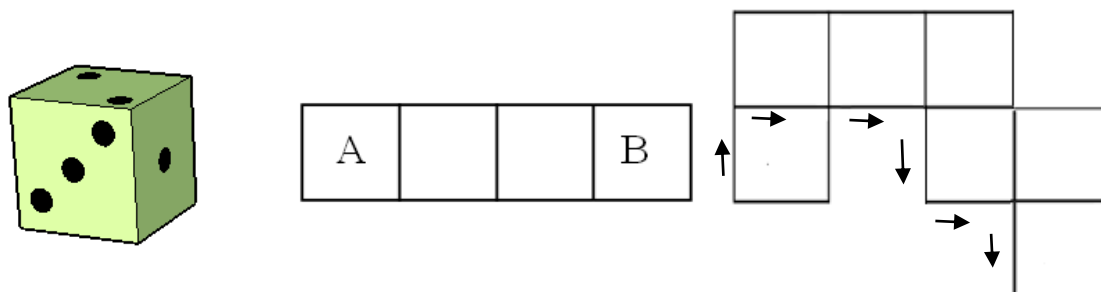
Žiak sa v primárnom vzdelávaní stretáva na hodinách matematiky najmä s modelom kocky. Toto teleso je vhodné najmä pre svoje mnohé špeciálne vlastnosti, ktoré poskytujú veľké možnosti využitia pri tvorbe a riešení úloh. Modelom kocky môže byť aj kocka zo spoločenskej hry „Človeče, nehnevaj sa“, s takouto kockou má skúsenosť takmer každé dieťa. Vďaka pravidlu, že súčet hodnôt na protifaľných stenách je sedem, je možné využiť takýto model kocky v rôznych úlohách. Z dôvodu priradenia určitej hodnoty každej stene kocky, nazvali sme takto upravenú kocku ako „ohodnotenú kocku“.

Oblasti rozvoja priestorovej predstavivosti jednak žiakov základnej školy, ale aj študentov učiteľstva sa dlhoročne venuje v našich podmienkach celý rad odborníkov z odboru didaktiky matematiky medzi ktorých patrí napríklad A. Šarounová, J. Molnár, A. Stopenová, O. Židek a ďalší. Napríklad J. Perný uvádza vo svojich prácach množstvo úloh o ohodnotenej kocke, ktoré vyžadujú takzvanú mentálnu manipuláciu. Autor sa domnieva, že prostredníctvom týchto úloh je možné pozitívne ovplyvňovať rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov rôzneho veku.

V úlohách o ohodnotenej kocke sa vyžaduje mentálna manipulácia s obrazom modelu kocky vo svojej mysli podľa požiadaviek. Ohodnotená kocka nie je pri riešení úloh fyzicky prítomná iba jej „model“ ako dvojrozmerný obrázok (napr. obr. 1). Riešiteľ si kocku musí vedieť predstaviť vo svojej mysli a mentálne s ňou manipulovať. Jedna z možností manipulácie je takzvané odvaľovanie kocky predpísaným smerom. V nasledujúcej úlohe sú použité dva spôsoby označenia smeru pohybu odvaľovania kocky po pláne. V jednom prípade je začiatkové políčko označené písmenom A a koncové políčko písmenom B. Smer odvaľovania je možné označiť aj šípkami ako to naznačuje druhý plán na obr. 1.

### 2.1 Úloha o jednoduchej ohodnotenej kocke

Zistite aká hodnota bude na spodnej stene kocky, ak kocku „odvaľíme“ z polohy znázornenej na obr. 1 (vždy začíname odvaľovať kocku z tejto polohy) v smere šípok alebo podľa predpisu, začiatok pohybu je na políčku A a koniec na políčku B).



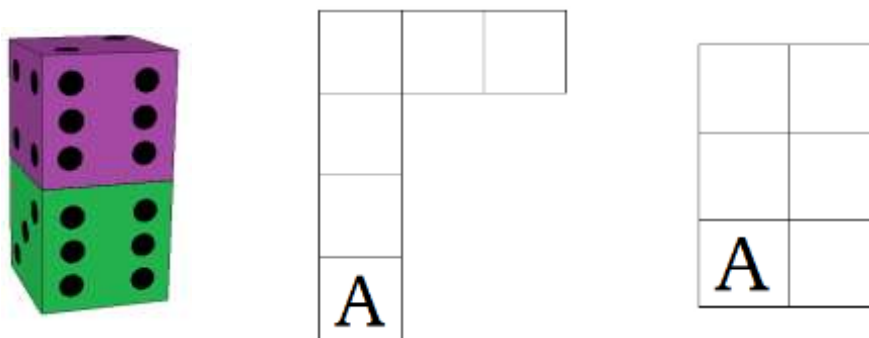
Obr. 1. Model ohodnotenej kocky a možné spôsoby plánov, po ktorých sa kocka odvaľuje

Formulácia podobných úloh sa dá rôznym spôsobom modifikovať veľmi jednoducho zmenou plánu, po ktorom sa daná kocka odvaľuje, zmenou pohľadu na kocku, alebo zámenou hľadania hodnoty na spodnej za vrchnú stenu.

## 2.2 Úloha o dvojitej ohodnotenej kocke

Zbierka ďalších úloh sa dá vytvárať aj upravením ohodnotenej kocky tak, že dve takéto kocky spojíme navzájom jednou stenou („kocky zlepíme“). Spôsobov zlepenia je niekoľko, a preto vzniká veľké množstvo úloh už aj s využitím predchádzajúceho návrhu modifikácie úloh. Príkladom môže byť nasledujúca úloha.

Dve kocky sa zlepili stenami, na ktorých je hodnota päť obr. 2. Zistite aké hodnoty by sa odtlačili, na danom pláne, ak takúto kocku začíname odvažovať z políčka označeného písmenom A.



Obr. 2. Dvojitá ohodnotená kocka a plány jej odvažovania

## 3 Pravidelný dvanásťsten v úlohách

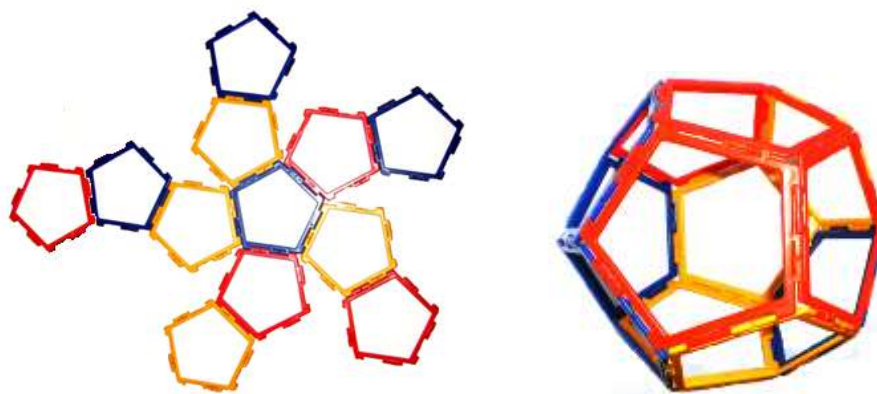
Zaujímavá je úvaha či aj o inom telese ako kocke sa dajú podobné úlohy produkovať a aké sú ich špecifiká pri riešení. Model telesa dodekaéder, t.j. dvanásťsten, nepatrí medzi telesá, s ktorými sa žiaci stretávajú na hodinách matematiky na základných školách a na stredných školách len veľmi zriedkavo. Riešením nasledujúcich úloh žiaci získajú poznatky o danom telese, a zároveň rozvíjajú úroveň svojej geometrickej priestorovej predstavivosti.

Podobne ako kocka je pravidelný dvanásťsten je konvexné teleso, a má analogickú vlastnosť, ktorá sa pri úlohách využíva. Obe telesá majú dvojice rovnobežných stien, t.j. keď sú položené napríklad na doske stola, je zrejmé ktorá stena je považovaná za hornú a ktorá za spodnú stenu. Práve toto je dôležitá podmienka pre jasnosť a zrozumiteľnosť zadania úlohy.

Keďže je pravidelný dvanásťsten pre žiakov neznámym telesom, odporúča sa k textovému zadaniu pripojiť model tohto telesa (napr. obr. 3) alebo krátke poznávanie jeho vlastností napr. prostredníctvom stavebnice Polydron. Vyhотовiť model dvanásťstena a jeho siete je nenáročné propedeutické cvičenie (obr. 4).



Obr. 3. Zobrazenie dvanásťstena v rôznych polohách – vytvoreného pomocou softvéru SketchUp



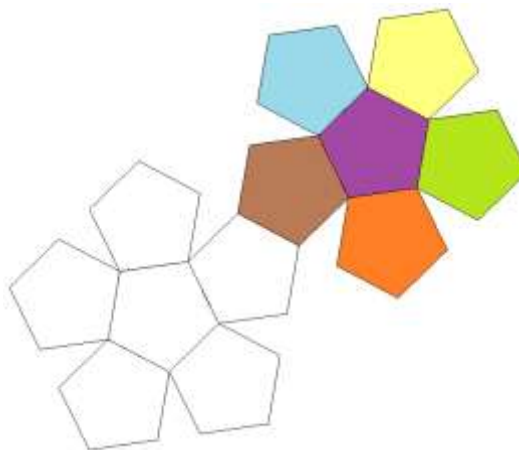
Obr. 4. Zobrazenie modelu a siete dvanásťstena s využitím konštrukčného systému Polydron

### 3.1 Úlohy o dvanásťstene

Ak už žiaci majú určité vedomosti o telese typu pravidelný dvanásťsten, môžu sa zaoberať riešením navrhnutých úloh. Minimálne vedomosti by žiaci mali mať o počte stien a poznať aspoň dva najčastejšie používané rozklady tohto modelu povrchu telesa do siete. Obe siete sú použité v úlohe č. 3. Pre zjednodušenie ich mladší žiaci nazývali „panáčik“ a „kvetky“, keďže pri zapojení fantázie pripomínajú tieto tvary.

#### Úloha č. 1. O farbách

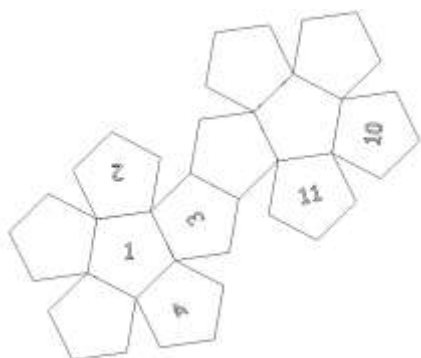
Vyfarbi zvyšné päťuholníky tak, aby po zložení siete vznikol model dvanásťstena, ktorého vždy oproti sebe ležiace steny budú mať rovnakú farbu. Farby možno zadať na jednom „kvetku“ alebo vyfarbiť niektoré časti na oboch.



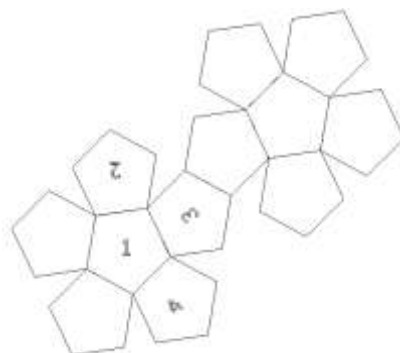
Obr. 5. Farebný dvanásťsten

#### Úloha č. 2. O dopĺňaní čísel do siete dvanásťstena

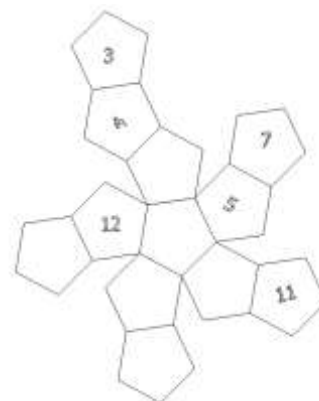
Do siete dvanásťstena doplňte chýbajúce hodnoty tak, by bolo dodržané pravidlo, že súčet hodnôt na protíľahlých stenách je 13.



Obr. 6. Chýbajúce čísla 1



Obr. 7. Chýbajúce čísla 2



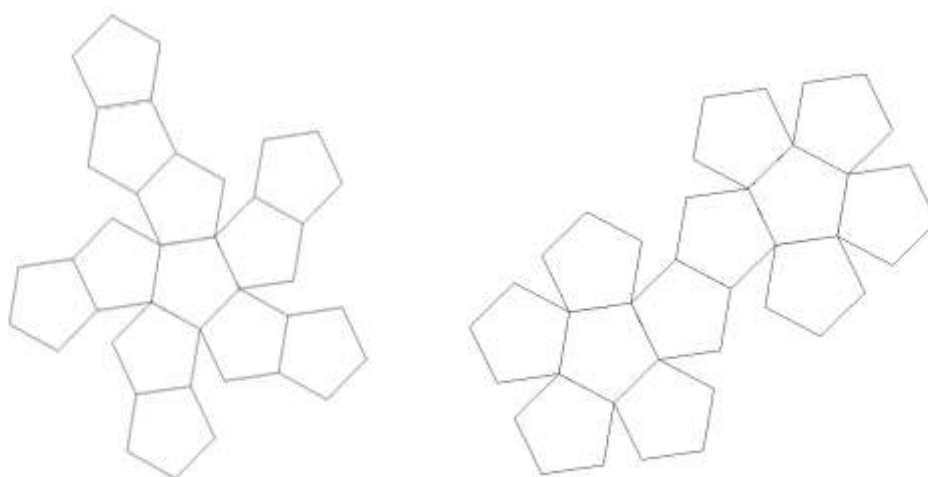
Obr. 8. Chýbajúce čísla 3

Pre typ siete „kvetok“ podobne ako v predchádzajúcej úlohe sú načrtnuté 2 spôsoby zadania. Pri prvom sú hodnoty rozmiestnené na oboch častiach „kvetkov“, pri druhom sú už len na jednej časti a okrem toho dvojice čísel (5, 8) a (6, 7) môžu svoje miesto medzi sebou vymeniť. Teda číslo 5 sa môže vymeniť s miestom označeným číslom 8. Ale analogicky žiak môže vybrať miesto kde umiestni jedno z týchto dvojíc čísel a na základe pravidla o súčte môže správne doplniť k nemu číslo tak, aby spolu vytvorili súčet 13.

Ako najjednoduchšie sa javí doplnenie hodnoty na protiľahlej stene, na ktorej je hodnota 3. Je jasné, že protiľahlá stena po zložení siete bude opäť stred „kvetka“. Pri ostatných číslach je dôležité určiť hlavne prvé dve dvojice čísel, pre každú z nich musí platiť súčet 13. Ostatné čísla sa dajú doplniť jednoducho, keďže čísla nasledujú po sebe. Zložitejší variant môže vzniknúť ak rôzne zmeníme poradie čísel. Vtedy je potrebné každú dvojicu čísel preveriť a správne umiestniť do siete.

### Úloha č. 3. O chýbajúcich číslach

Do prázdnej siete dvanáststena dopíšte hodnoty od 1 do 12 tak, aby bola splnená podmienka, že súčet hodnôt na protiľahlých stenách je 13.



Obr. 9. Prázdne siete dvanáststena

Úloha o chýbajúcich číslach v ohodnotenej sieti je zložitejší variant ako predchádzajúca úloha, pretože sa v sieti nenachádzajú žiadne čísla, čo vedie k divergencii úlohy.

### Úloha č. 4. O neúplnej sieti

Do neúplnej siete dvanásťstena doplňte pravidelné päťuholníky tak, aby po jej zložení vznikol model povrchu pravidelného dvanásťstena.



Obr. 10. Neúplná sieť dvanásťstena so správnym riešením



Obr. 11. Neúplná sieť dvanásťstena s nesprávnym riešením

Obmeny takejto úlohy môžu byť nasledovné:

- zvyšovanie počtu chýbajúcich päťuholníkov v sieti,
- zmena typu siete („kvetky“ sú triviálne, ak žiak dostatočne pozná sieť, je možné použiť i iné tvary siete).

### 4 Záver

Cieľom príspevku bolo priniesť nové námety úloh a podnety pre ich ďalšiu tvorbu jednak pre učiteľov, ale taktiež pre študentov učiteľstva matematiky nielen pre primárny stupeň vzdelávania. Dané úlohy môžu byť vhodným námetom pre ich zaradenie v činnosti matematických krúžkov, ale aj v rozširujúcom učive geometrie. Výhodou týchto úloh je, že žiaci pri rozvoji priestorovej predstavivosti súčasne získavajú znalosti o danom telese. V tomto príspevku sme sa zamerali na dva mnohosteny (kocka a dvanásťsten) avšak viaceré telesá majú požadované dvojice rovnobežných stien. Medzi tieto patrí pravidelný osemsten a dvadsaťsten. Pri väčšom počte stien existuje i viac tvarov sietí, čo znamená možnosť vytvoriť viac úloh, avšak pri hľadaní všetkých rôznych tvarov sietí mnohostenov neexistuje algoritmus, ktorý by danú úlohu kompletne riešil.

*Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu s názvom „Manipulačné a virtuálne geometrické modelovanie v príprave učiteľov pre primárne matematické vzdelávanie“ (MŠ KEGA 028UK-4/2011).*

### Literatúra

- BRANICKÝ, R. 2003. *Priestorové schopnosti žiaka v stereometrii* (Rigorózna práca). Bratislava : Pedagogická fakulta UK, 2003. 216 s.
- MOLNÁR, J., PERNÝ, J., STOPENOVÁ, A. 2006. *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji*. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. JČMF Praha 2006, ISBN 80-7015-085-8. [CDROM]
- PERNÝ, J. 2009. *Některé faktory ovlivňující prostorovou představivost žáků*. In *Matematika z pohľadu primárneho vzdelávania*. Banská Bystrica : UMB Banská Bystrica, 246 s. ISBN 978-80-8083-742-6. 2009.

- 
- [4] REPISKÁ, L., ŽIDEK, O., ŽILKOVÁ, K. 2009. Geometrické modelovanie v programe SketchUp. In *Potenciál prostredia IKT v školskej matematike I.*, [online], 2009, roč. I., ISBN 978-80-223-2754-1. Dostupné na: [http://www.webmatika.sk/zbornik-1/clanky/Repiska.Zidek.Zilkova/Geometricke\\_modelovanie.SketchUp.pdf](http://www.webmatika.sk/zbornik-1/clanky/Repiska.Zidek.Zilkova/Geometricke_modelovanie.SketchUp.pdf).
- [5] ŽIDEK, O. 1999. Modely niektorých špeciálnych mnohostenov. In *Matematika v prípravě učitelů 1. stupně ZŠ*. Olomouc : Univerzita Palackého, str. 78-81, 1999.
- [6] ŽIDEK, O. 1998. Konvexné poloprávdelné mnohosteny, In *Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis*, Ser. B, no. 2, 1998, p. 175-183.