

# ŠKOLSKÁ MATEMATIKA AKO VÝSLEDOK MENTÁLNEJ KONŠTRUKCIE

Dušan Jedinák

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita  
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR  
e-mail: [djedinak@truni.sk](mailto:djedinak@truni.sk)

**Abstract.** School mathematics like a result of a mental construction. Impulse for intending mathematics teachers for a content and an organization of teaching.

**Key words:** teaching of mathematics, elementary and secondary schools.

## 1. Základné predpoklady

Ak je učenie sa proces konštruovania poznatkových štruktúr, tak vyučovanie školskej matematiky vyžaduje pravidelné vytváranie takých situácií, v ktorých študent uskutočňuje svoj vlastný intelektuálny výkon (porozumenie je vždy subjektívne konštruované). Voľne povedané: učitelia sa človek má v primeranej miere hlbšie porozumieť základným abstraktným matematickým pojmom a súvislostiam medzi nimi. Pretože matematika je myšlienková štruktúra popísaná systémom axiém, definícií a viet aj so svojimi dôkazmi, tak pri vyučovaní a učení sa školskej matematiky je zvlášť dôležité a nevyhnutné postupné získanie vhl'adu do celej problematiky (motivácie, separované modely, univerzálne modely, abstraktné vedomosti a ich štrukturalizácia). Bez hlbšieho vnútorného záujmu a výrazne kladného vôľového postoja, osobitých myšlienkových foriem, špecifických postupov usudzovania i argumentácie, abstraktnej predstavivosti a systematickej pojmovej výstavby nemožno uspieť ani v budovaní elementárnych základov matematickej kultúry. Neformálne matematické porozumenie je vždy prejavom vytrvalej myšlienkovvej dôslednosti i ochoty prekonať prekážky vo vnímaní a odhaľovaní súvislostí. Jednou z ciest, aby vedomosti zo školskej matematiky neboli iba formálne, je dôsledné uplatňovanie zásady: **vhl'ad – porozumenie – použitie**. Ak majú byť matematické vedomosti užitočnou súčasťou ľudskej kultúry, tak majú zvýrazniť a rozvíjať samostatné a kritické myslenie, využívať abstraktné prístupy pri rôznej reprezentácii a odhaľovať rôznorodé hierarchizované štruktúry pojmov a súvislostí medzi nimi. Matematický spôsob uvažovania rozvíja hlavne **poznávacie schopnosti** (analýza a porozumenie javov a vzťahov, abstrakcia, zovšeobecnenie, objavovanie súvislostí, rozvoj predstavivosti, tvorba pojmov, štruktúra poznatkov), **vyhraňuje postoje a významy** (formulácia myšlienok, príčinné vysvetľovanie, argumentácia, organizácia informácií, kritický prístup a poučenie sa aj z chýb), **zvýrazňuje komunikáciu** (nevyhnutnosť zdôvodňovania tvrdení, neverbálne a symbolické vyjadrovanie, logická argumentácia, diskusia a porovnávanie názorov). *Matematika je pátranie po štruktúrach a pravidelnostiach, ktoré usporadúvajú a zjednodušujú svet* (P.A. Griffith). Naši významní didaktici matematiky M. Hejný a F. Kuřina vyjadrili presvedčenie [2]: *Zmysel vyučovania matematiky spočíva v rozvoji matematickej kultúry študujúcich; jej podstatnou zložkou je rozumieť matematike a vedieť ju aplikovať... Matematické vzdelanie by malo mať zmysel a malo by byť užitočné. Malo by žiakom prinášať uspokojenie a radosť.*

## 2. Charakteristické znaky a princípy

Ani školská matematika sa nedá účinne zvládnuť len učením sa bez porozumenia, aj keď tam sú také prvky učiva, ktoré sa stačí naučiť spamäti. Vyučovací predmet **matematika** už v ZŠ a potom v SŠ nevyhnutne vyžaduje učenie sa s porozumením, aby si študujúci vytvárali svoje vlastné chápanie matematických javov a súvislostí. Didaktickou problematikou takýchto výchovno-vzdelávacích postupov sa zaoberá **pedagogický konštruktivizmus** (ako spojenie kognitívneho a sociálneho konštruktivizmu). Uvedme, s ohľadom na špecifické vyučovanie školskej matematiky, jeho charakteristické znaky a princípy [15]:

- Kládne sa dôraz predovšetkým na **učenie sa**, doplnené dialógom medzi žiakmi a učiteľom s cieľom hlbšieho systematického porozumenia.
- Vyžaduje a podporuje sa iniciatíva usmernenej zvedavosti, aktivita tvorivého skúmania a odhaľovania súvislostí, samostatná myšlienková argumentácia učiacich sa.
- Rešpektujú sa motivačné postoje žiakov, ich učebné štýly, stratégie i podnetné návrhy na obsah vyučovania.
- Zabezpečujú sa autentické matematické skúsenosti v kontexte reálnych životných situácií, riešenie problémových úloh na úrovni najbližšej zóny pochopenia, vytvára sa dostatočný časový priestor.
- Nezanedbáva sa spätná väzba, v diskusii sa odstraňujú vzniknuté rozpory, povzbudzuje sa k novým predstavám (hypotézam).

### 3. Praktické návrhy

Po viacročných skúsenostiach z didaktickej prípravy budúcich učiteľov matematiky pre ZŠ odporúčam všetkým učiteľom matematiky, aby so svojimi žiakmi a študentmi vyskúšali hore spomínaný prístup aj na dolu uvedených školských matematických úlohách [4-8]:

1. Dvaja matematici (**A**; **B**) sa takto zhovárali:
 

**A**: Súčin veku mojich troch synov je 36.

**B**: Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich.

**A**: Súčet veku mojich synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.

**B**: Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.

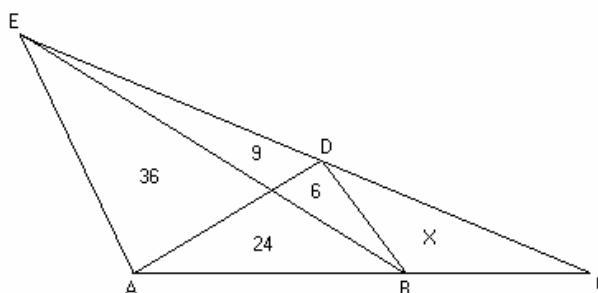
**A**: Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.

**B**: Ďakujem, to stačí, už poznám vek tvojich synov.

Koľko rokov má každý zo spomínaných synov?

Koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?
2. Na tanečnom večierku bolo 20 mladých ľudí (chlapci a dievčatá). Mária tancovala so siedmimi chlapcami, Oľga s ôsmimi, Viera s deviatimi, atď. Posledná Helena tancovala so všetkými chlapcami. Koľko chlapcov bolo na večierku?
3. V našom meste sú  $\frac{3}{5}$  žien vydatých za  $\frac{2}{3}$  mužov. Aká časť obyvateľstva je slobodná (nežije v manželstve)?
4. Vo veštiarni sedia vedľa seba tri bohyne: *Pravda*, *Lož* a *Múdrosť*. *Pravda* vždy hovorí pravdu, *Lož* vždy klame a *Múdrosť* hovorí tak aj onak (niekedy pravdu, niekedy lož). Zistíte, v akom poradí sedia bohyne, ak postupne odpovedali na otázky takto: Kto sedí vedľa teba? *Pravda*. Kto si? *Múdrosť*. Kto sedí vedľa teba? *Lož*.
5. Sedem hubárov nazbieralo spolu 100 húb tak, že každý z nich nazbieral iný počet. Dokážte, že medzi nimi sú traja takí, ktorí dohromady nazbierali aspoň 50 húb.
6. Predstavte si, že napíšete všetky prirodzené čísla od 1 do 5555. Koľkokrát pritom napíšete číslicu 9?
7. Nájdite trojciferné prirodzené číslo, ktoré po vydelení tromi za sebou idúcimi jednocifernými číslami dáva súčet zvyškov 21.

8. V tombole je 100 žrebov a 10 výhier. Máme dva žreby. Aká je pravdepodobnosť, že výhra pripadne aspoň na jeden náš žreb?
9. Stanovte počet šesťciferných prirodzených čísel, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísel 42, 63 ?
10. Čísla na obrázku znamenajú veľkosti obsahov príslušných trojuholníkov. Stanovte  $x$ , t.j. obsah trojuholníka BCD.



11. Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je **najväčšia** hodnota, ktorá **sa nedá** vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?
12. Koľko je možností pridelenia štyroch študentov na preskúšanie trom učiteľom, ak požadujeme:
  - aby každý študent bol preskúšaný **aspoň jedným** učiteľom;
  - aby každý študent bol preskúšaný **práve jedným** učiteľom;
  - aby každý učiteľ preskúšal **aspoň jedného** študenta;
  - aby každý učiteľ preskúšal **práve jedného** študenta.
13. Koľko usporiadaných trojíc prirodzených čísel  $x, y, z$  vyhovuje vzťahu  $x \cdot y \cdot z = 10^6$  ?
14. Dokážte, že existuje práve jeden trojuholník, ktorého dĺžky strán sú tri po sebe idúce prirodzené čísla a jeho jeden vnútorný uhol je dvojnásobkom druhého.
15. Dokážte, že číslo  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sa nedá napísať ako súčet niekoľkých za sebou idúcich prirodzených čísel.
16. Nech  $p$  je ľubovoľné prvočíslo väčšie ako 3. Dokážte, že ak číslo  $p^n$  má práve 20 cifier, potom niektoré tri z nich sú rovnaké.
17. Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup, akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach, ak nie sú k dispozícii žiadne závažia.

#### 4. Záverečné presvedčenie

Ak sa vážne zamyslíme nad základnými povinnosťami zodpovedného učiteľa matematiky z konštruktivistického pohľadu vedenia vyučovania a štúdia školskej matematiky môžeme zvýrazniť niektoré jeho podstatné a nenahraditeľné úlohy:

- Intenzívne ovládanie základných matematických teórií, ktoré sú základom didaktického systému školskej matematiky spolu s tvorivým špecifickým uplatňovaním pedagogicko-psychologických zásad a vyučovacích postupov i všeobecných zákonov učenia sa.
- Vytrvalá aktívna schopnosť didakticko-pedagogicky skúmať, rozpracúvať a s tvorivou systematickosťou vo vyučovacom procese realizovať tematiku školskej matematiky s prihliadnutím na vek, študijné a pracovné prostredie i schopnosti žiakov.
- Uplatňovanie flexibilných a variabilných vyučovacích i študijných postupov pre žiakov s rôznymi vzdelávacími potrebami v individuálnom, činnostnom a celostnom výchovno-vzdelávacom prístupe.

- Sprístupňovanie matematiky ako vhodne popularizovanej a kladne motivovanej špecifickej ľudskej civilizačno-kultúrnej aktivity, ktorá odhaľuje rozmanitosť, pravidelnosť a vzájomnú prepojenosť spoznávaných abstraktných štruktúr odrážajúcich svet, v ktorom žijeme a vytvárame myšlienkové modely.

*Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tu prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu* (G. Polya). Matematické myslenie nám sprostredkúva vzťah medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom. Matematika nám pomáha pochopiť obrovskú rozmanitosť jednotlivostí sveta. Dôsledným zmysluplným vedením vyučovania školskej matematiky môžeme prispievať k zúšľacht'ovaniu ľudských duší matematickou kultúrou.

## 5. Krátky apendix

Zdá sa mi, že spomínaný konštruktivistický prístup ku vzdelávaniu veľmi pôsobivo a vtipne vystihol už známy **Galileo Galilei** (1564-1642): *Nemôžete nikoho nič naučiť. Môžete mu prinajlepšom pomôcť, aby to sám v sebe našiel.*

## Literatúra

- [1] HEJNÝ, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK-PdF, 2004.
- [2] HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.
- [3] FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett, 1977.
- [4] JEDINÁK, D.: Dokážeme, že sa nedá. *ROZHLEDY M-F*, roč. 82 (2007), č.1, s.54-56. Praha: JČMF, 2007.
- [5] JEDINÁK, D.: Odvaha i rozvaha pre dokazovanie v školskej matematike. *M-F-I* (časopis pro výuku na ZŠ a SŠ); Praha; roč. 15 (2005-2006) č.4, s.203-212.
- [6] JEDINÁK, D.: Percentá sú zradné čísla pomerné. *ROZHLEDY M-F*, roč. 82 (2007), č.2, s.51-53. Praha: JČMF, 2007.
- [7] JEDINÁK, D.: Vhodná predstava – cesta k úspechu (aj pri štúdiu matematiky). *M-F-I* (časopis pro výuku na ZŠ a SŠ); Praha; roč. 14 (2004/2005) č.5, s.263-268.
- [8] JEDINÁK, D.: Úlohy školskej matematiky, ktorých riešenie mám rád. *UČITEL MATEMATIKY*; Praha – Brno: JČMF, 2005; roč.14 (2005), č.1 (57), s. 51-58.
- [9] KUŘINA, F.: Realismus konstruktivních přístupů k vyučování matematice. In: *Vedecké štúdie KU*, roč. 2, č. 1, s. 40-47, Ružomberok 2002.
- [10] KUŘINA, F. – PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.
- [11] LOKŠOVÁ, I.-LOKŠA, J.: *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál, 1999.
- [12] PERNÝ, J.: Konstruktivismus ve vyučování matematice. In: *Matematika v škole dnes a zajtra* (zborník z konferencie, s.236-242); Ružomberok: PdF-KU, 2007.
- [13] POLYA, G.: *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton: Princeton University Press, 1954.
- [14] POLYA, G.: *Mathematical discovery I., II.*. New York – London: John Wiley, 1965.
- [15] TUREK, I.: *Inovácie v didaktike*. Bratislava: MPC, 2005.