# O DIDAKTICKOM VYUŽITÍ ROZKLADU NIEKTORÝCH DELTAÉDROV NA ŠTVORSTENY

**Oliver Židek**

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: oliver.zidek@gmail.com

**Abstract.** The paper is describing the solution of the decomposition of deltahedrons with 10 and 20 faces to tetrahedrons. The solution for icosahedrons affords the possibility to construct a puzzle which will be very helpful in teaching process. This puzzle can support the spatial imagination and combinatoric thinking of students.

**Key words:** intuition, manipulative geometry, deltahedron

## 1. Úvod

Štúdium matematiky nás často presviedča o tom, že využitie intuície má najmä v didaktike matematiky veľký význam. Podľa [3] rozumieme pod slovom intuícia poznanie vnuknutím vycíteným bez náležitého rozumového zdôvodnenia. Na niekoľkých príkladoch ukážeme ako fenomén intuície môže v určitej fáze získavania poznatkov pomáhať a zároveň uvedieme príklady toho, kedy intuícia zlyháva a nastupuje sila rozumového matematického poznávania. Je vhodné, aby žiak bol pri vyučovaní postavený do situácie, v ktorej sa stáva objaviteľom nových poznatkov, aby ich dával do súvislostí, experimentoval, tvoril hypotézy a snažil sa ich zdôvodňovať, prípadne dokazovať [7].

V prácach [5], [6] sa čitateľ môže oboznámiť so skupinou konvexných mnohostenov, ktorých všetky steny sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Tieto telesá sa nazývajú deltaédry. Z histórie je známe, že do roku 1947 boli tieto telesá, ako systematický celok, ľudstvu takmer neznáme a v uvedenom období poznatky o nich spracovali matematici Freudenthal a Waerden [2]. Dá sa ukázať, že existuje práve 8 typov deltaédrov. Sú to 4-sten, , 6-sten, 8-sten, 10-sten, 12-sten, 14-sten, 16-sten a 20-sten. Už vymenovaný zoznam deltaédrov nabáda všimnúť si určitú zákonitosť v postupnom narastaní počtu stien od 4-stena až po 16-sten. Potom nastáva určitá „medzera“ a množina deltaédrov je ukončená 20-stenom (pravidelným ikosaédrom). Na modeloch týchto telies môžeme podrobnejšie pozorovať ich ďalšie vlastnosti súvisiace s počtom stien, hrán a vrcholov. Všetky uvedené údaje spĺňajú vlastnosti určitých aritmetických postupností, vrátane neexistujúceho 18-stenného deltaédra. Práve tu sa realita odmieta podrobiť našej predstave o totálnom poriadku, tu zlyháva intuícia, ktorá nám doteraz pomáhala a nastupuje sila rozumového poznávania a dokazovania.

## 2. Modely deltaédrov

Príklad „s objavením“ deltaédrov nám umožní ilustrovať naznačený proces využitia a zlyhania intuície aj v nasledujúcej problémovej úlohe. Najskôr si všimneme, že zo všetkých deltaédrov majú telesá typu 6-sten, 8-sten, 10-sten a 20-sten osobitné postavenie. Môžeme ich považovať za akési zoskupenie špeciálnych zhodných štvorstenov.

**Úloha:** *Zhotovte modely 6-stenného, 8-stenného, 10-stenného a 20-stenného deltaédra ako produkty zoskupenia zhodných štvorstenov.*

**Poznámka:** Táto problémová úloha bola niekoľkonásobne overovaná v geometrickej príprave štúdia učiteľstva pre 1.stupeň ZŠ a ukázala sa ako veľmi vhodná. Jej riešenie má projektový charakter so všetkými možnosťami využitia tímovej práce. Proces riešenia bol pri niektorých deltaédroch sprevádzaný určitým spontánnym pokusom zhotoviť si príslušný počet modelov pravidelných 4-stenov a prikladať ich vhodne vedľa seba. Čiastočný neúspech tohto postupu bol často povrchne zdôvodnený „malou" nepresnosťou v práci pri zhotovovaní modelov 4-stenov. Až dôsledná presnosť modelov a následný neúspech pri skladaní štvorstenov boli podnetom pre zlyhanie intuície a následné vyjadrenie pochybností o príslušnej hypotéze. Nastala didakticky priaznivá situácia pre „nástup" prísne rozumového matematického uvažovania. V ďalšej časti uvedieme stručné, kombinované postupy riešenia tejto úlohy.

### 2.1. Model 6-stenného deltaédra

Najtriviálnejšie zoskupenie 4-stenov predstavuje *6-stenný deltaéder*, pretože môže vzniknúť z dvoch zhodných pravidelných tetraédrov. Táto jednoduchá skúsenosť a intuícia nám „našepkáva", že podobne vznikne 8-sten, 10-sten a 20-sten. Realita i teoretický poznatok nás presvedčia o tom, že tomu tak nie je.

### 2.2. Model 8-stenného deltaédra

V prípade *8-stenného deltaédra* sa intuícia o pravidelnosti štvorstenov, z ktorých je tento model zhotovený, príliš neobjavila. Príčina je pravdepodobne v tom, že uvedené teleso je v geometrickej príprave častejšie frekventované a už pri jeho zobrazení vo voľnom rovnobežnom premietaní sa študent stretne s poučením, že dĺžka hrany telesa a vzdialenosť stredu od vrcholu telesa sa nerovnajú.

### 2.3. Model 10-stenného deltaédra

V prípade *10-stenného deltaédra* môže byť pomôckou pri riešení poznatok o tom, že 10-stenný deltaéder sa skladá z dvoch zhodných pravidelných 5-bokých ihlanov so stotožnenými postavami. Tieto ihlany majú podstavné hrany zhodné s bočnými hranami. *Aká situácia vznikne pri pokuse skonštruovať 10-stenný deltaéder pomocou piatich pravidelných štvorstenov?* Umiestnime ich tak, aby mali „stotožnenú" jednu hranu a susedné štvorsteny nech majú spoločnú jednu stenu. Už experimentom sa presvedčíme o tom, že v tejto konfigurácii pravidelných štvorstenov vzniká určitá nepresnosť, čo dáva podnet pre exaktný výpočet, alebo grafické riešenie načrtnutého problému, ktoré môže čitateľ nájsť v práci [6]. Zatiaľ čo študent učiteľstva pre primárne vzdelávanie uprednostní experiment a intuíciu, študent učiteľstva matematiky by mohol načrtnutý výpočet zvládnuť aj viacerými postupmi.

### 2.4. Model 20-stenného deltaédra

*Model 20-stenného deltaédra* (ikosaédra) zložený zo štvorstenov predpokladá hlbšie poznanie jeho geometrických vlastností. Poučenie z predchádzajúcej časti môžeme s úspechom použiť aj pri naznačenej konštrukcii ikosaédra. Ak by sme však riešili túto úlohu izolovane (bez predchádzajúcej prípravy), stretli by sme sa v praxi pravdepodobne taktiež s mylnou predstavou, že „k stavebnici" ikosaédra je možné použiť pravidelné štvorsteny (zlyhanie intuície). Ako motivácia pre riešenie tohto problému nám môže poslúžiť snaha vyrobiť pre deti skladaciu štvorstenovú súpravu ikosaédra, ktorého steny by boli označené hodnotami 1, 2, 3, ..., 20. Súprava obohatená o ďalšie technické vlastnosti (magnetická príťažlivosť stien) by mohla súžiť deťom rôzneho veku ako vhodná kombinatorická hračka rozvíjajúca priestorovú predstavivosť a manipulačnú zručnosť. Pre študenta učiteľstva môže predchádzajúca motivácia zapôsobiť na vzbudenie hlbšieho záujmu o vlastnosti geometrických telies.

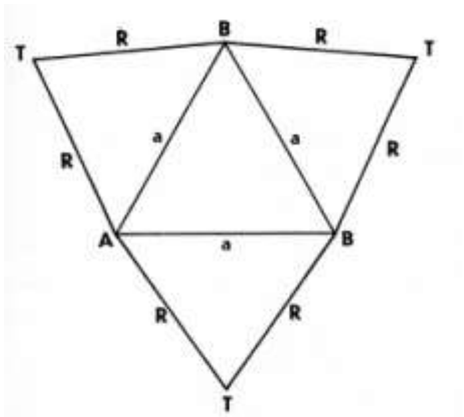
Konštruovaná skladacia súprava musí obsahovať 20 zhodných štvorstenov. Podstava každého z nich bude rovnostranný trojuholník – povrchová stena hľadaného ikosaédra. Bočné steny štvorstenov nebudú rovnostrannými trojuholníkmi, avšak budú to rovnoramenné trojuholníky. Príslušné štvorsteny môžeme teda nazvať ako pravidelné trojboké ihlany s určitými špeciálnymi vlastnosťami.

Keďže pravidelný 20-sten patrí do množiny pravidelných mnohostenov, môžeme každému z nich opísať guľovú plochu. Konštrukcia alebo výpočet veľkosti polomeru guľovej plochy opísanej pravidelnému ikosaédru určuje **dĺžku bočných hrán príslušných štvorstenov, z ktorých má byť 20-sten zložený.** Táto nenáročná úloha nás uviedla do problematiky „miery“ pravidelného 20-stena a úspech pôvodnej „konštruktérskej“ úlohy predpokladá vyriešenie naznačenej geometrickej problematiky.

Z didaktického hľadiska má táto fáza riešenia silný motivačný náboj. Študenti nemajú radi vypreparované „suché“ geometrické úlohy ako napr. narysuj, zostroj, vypočítaj atď., ak nevidia konkrétnu užitočnosť príslušnej činnosti. V tejto fáze riešenia problému je malá teoretická „odbočka“ dovolená, týka sa pojmu antihranol a obsahuje ukážku vyriešenia dĺžky bočnej hrany štvorstena (pravidelného trojbokého ihlana) v závislosti od dĺžky podstavnej hrany [6].

Model pravidelného ikosaédra zložený z 20-tich zhodných štvorstenov môžeme po predchádzajúcich úvahách zhotoviť podľa nasledujúceho postupu:

- Z tvrdšieho papiera (kartónu) si vystrihneme 20 kusov sietí jednotlivých štvorstenov. Každá zo sietí bude obsahovať: 1 rovnostranný trojuholník so stranou „a“, ďalej 3 rovnoramenné trojuholníky zostrojené nad základňou „a“ (ramená podľa konštrukcie alebo podľa výpočtu, v najjednoduchšej verzii podľa obr. 1).
- Pomocou lepidla zhotovíme modely štvorstenov z pripravených sietí. (Môžeme použiť lepiacu pásku alebo príklopy na stenách siete a lepidlo.)
- Pri presnom vyhotovení štvorstenových modelov môžeme z nich zložiť model pravidelného 20-stena ako pevný model (lepením) alebo rozoberateľný model, ktorý má ďalšie didaktické uplatnenie.




*Obr.1. Sieť štvorstena - pravidelného trojbokého ihlana*

## 3. Opis rozoberateľnej súpravy

Je vhodné, aby jednotlivé štvorsteny mali rôznofarebné steny. Osvedčilo sa použiť 5 farieb. Nech sú farby stien, ktoré po zložení telesa nevidieť, napr. červená, modrá, zelená a žltá. Piata farba sa vyskytuje na povrchu zloženého ikosaédra a môže byť označená hodnotami 1, 2, 3, ..., 20. Z hľadiska orientácie a rozmiestnenia farieb potrebujeme dva typy sietí štvorstenov. Opisovaný prototypový model je vyrobený z papiera a v troch stenách každého štvorstena je umiestnený magnet. Polarita magnetických stien umožňuje spojiť vedľa seba iba tie steny, ktoré sú nesúhlasne orientované. Steny s rovnakými farbami, nech sa odpudzujú (nepriťahujú). Sila magnetického pôsobenia umožňuje postupne fixovať model. Zakódovaný systém magnetickej príťažlivosti vyjadruje tabuľka.

| | **č** | **m** | **z** | **ž** |
|---|---|---|---|---|
| **č** | - | + | - | + |
| **m** | + | - | + | - |
| **z** | - | + | - | + |
| **ž** | + | - | + | - |

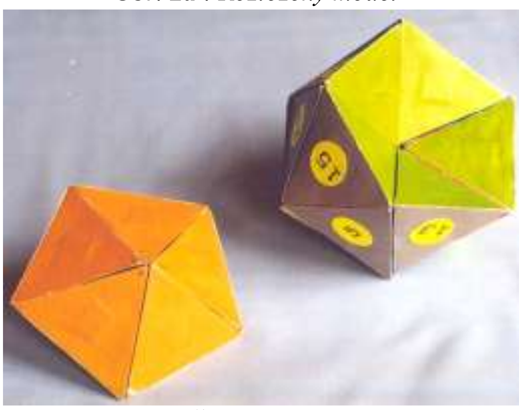
Prvý riadok a prvý stĺpec označuje skratkou farbu príslušnej steny. V jednotlivých priesečníkoch stĺpcov a riadkov je znamienkom + označená príťažlivá sila a znamienkom – je označená odpudivá sila.

Ďalšie technické rady pre svojpomocnú výrobu opisovanej didaktickej hračky spočívajú v tom, že je výhodné vyhotoviť si najskôr pevné, ale najmä presné modely štvorstenov a až dodatočne vkladať do stien magnetky podľa projektu. *Otvory pre magnetky* si pripravíme „krížovým rezom" pomocou ostrého noža. Potom vložíme opatrne magnetku a zalejeme kvalitným lepidlom. Celú stenu nakoniec prelepíme tapetou príslušnej farby. Ak chceme, aby hračka bola trvanlivejšia, zvolíme samolepiacu tapetu z umelej hmoty.

*Číslovanie* „povrchovej steny" je vhodné zvýrazniť krúžkom v stene, na ktorom je vytlačená príslušná hodnota steny. Profesionálne vyrobený model by bolo potrebné zhotoviť napr. dutý s tenkostenným ľahkým povrchom alebo plný z ľahkého materiálu, z dôvodu zachovania funkčnosti magnetiek.

*Obr. 2a : Rozložený model*

*Obr. 2b: Čiastočne zložený model*



*Obr. 2c: Ďalšia fáza skladania modelu*

*Obr. 2d: Zložený model ikosaédra*

Hotová súprava nájde svoje uplatnenie a obľúbenosť u detí rôzneho veku. Už päť až šesť ročné deti môžu s úspechom rozložiť a **zložiť model podľa predlohy**. Vlastné overovanie ukázalo, že uvedenú úlohu splnili deti za 30 - 40 minút. Tú istú úlohu splnili 15 - 16 roční žiaci za 7 - 10 minút, avšak niektoré dospelé osoby potrebovali na riešenie úlohy podstatne dlhší čas.

Ďalší postup (náročnejší) je **skladanie modelu bez predlohy**. Riešení je veľa, avšak každé z nich má vlastnosť, že číselný údaj na strane štvorstena je na povrchu telesa. Inak nevznikne finálny produkt – ikosaéder.

Najnáročnejšie riešenie je to, kedy *súčet hodnôt na protiľahlých stenách je konštantný*, t. j. 21. Aj týchto riešení je veľa a ich obmena je po primeranom tréningu nenáročná. Ďalšie modifikácie hry s uvedenou stavebnicou si užívateľ ľahko vymyslí. Súpravu môžeme taktiež použiť na testovanie úrovne kombinatorického myslenia v súčinnosti s rozvojom priestorovej predstavivosti u detí i dospelých rôzneho veku.

## 4. Záver

Skladačka bola prezentovaná na Medzinárodnom kongrese matematikov v roku 1994 vo Švajčiarku a niekoľko rokov bola prostredníctvom krátkeho textu a fotodokumentácie poskytnutá čitateľom stránky www.matika.sk. Na originalitu nápadu technického riešenia skladačky bolo v uvedenej súvislosti zaznamenaných niekoľko zahraničných ohlasov. Keďže princíp magnetického uchytenia jednotlivých komponentov skladačky nebol autorsky chránený, môžeme sa domnievať, že bol odpozorovaný, alebo možno aj nezávisle vynájdený autormi iných - nápadne podobných „didaktických hračiek“, vyrábaných oveľa neskôr v krajinách tzv. východného sveta.

## Literatúra

[1] BOHNERT, F. *Elementare Stereometrie*. Leipzig: 1910.

[2] GOWAN, W. E. *A Rekursive Aproach to the Construction of the Deltaedra.* Mathematics Teacher, 1978, No. 3.

[3] IVANOVÁ, M. a kol. *Slovník cudzích slov.* Bratislava: SPN, 1979.

[4] PŘÍHONSKÁ, J. Barevné kostky aneb matematika hrou. In: *Sborník mezinárodní konference ICPM ´05*. Liberec: TU, 2006, str. 203-209. ISBN 80-7372-055-8.

[5] ŽIDEK, O. Didaktické využitie intuície v procese získavania matematických poznatkov. In: *ACTA Faculatatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis*. Trnava: 2006, roč. 10. ISBN 80-8082-110-0.

[6] ŽIDEK, O. Netradičné konštrukcie niektorých deltaédrov. In.: *Matematika IV. Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Comenianae*. Bratislava: UK, 1996. ISBN 80-88868-00-9.

[7] ŽILKOVÁ, K. *Heuristika v informatizácii výučby matematiky*. Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum, 88 s., 2006. ISBN 80-8052-261-8.