O TOPOLOGII NA OBJEKTU TYPU TŘÍDA

Jiří Havlík, Běla Šikulová

Katedra matematiky a fyziky, Univerzita obrany
Kounicova 65 , 612 00 Brno, Česká republika
e-mail : havlik.ji@centrum.cz, bela.sikulova@unob.cz

Abstract: This article is the first one from two articles wrapped in our thoughts on the same subject: topology, classes and ordinals. We are trying here to introduce some natural way the topology on classes and to prove the basic theorems which we are going to applay on the ordinal number class. In this part we raise the issue of the followings: the definition of the topological space based on the concept of class, and we will speak about neighbourhoods, cluster points etc.

Key words: Topology, class, ordinal, ordinal number class, neighbourhood, cluster point.

Úvod

V následujícím výkladu se budeme pohybovat nejen v množinovém univerzu vystavěném na axiomech Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin (tj. na axiomu existence, extenzionality, schématu axiomů vydělení, axiomu dvojice, potence, schématu axiomů nahrazení a axiomu nekonečna a fundovanosti) spolu s axiomem výběru, ale především ve světě, jehož objekty jsou vedle množin i třídy, které se zasluhují o větší rozmanitost jevů tohoto světa a rozšiřují jeho obzor.

Toto pojetí je podrobně vyloženo v knize Teorie množin, jejímiž autory jsou Bohuslav Balcar a Petr Štěpánek, vydalo nakladatelství Academia v Praze roku 1986. Tato kniha je jedním z našich východisek a proto se k ní obracíme v odvolávkách na některá její tvrzení. Proto se čtenář bude setkávat s odkazy jako [TM] II.1.12, který označuje odstavec 1.12 kapitoly II. této knihy. Rovněž přejímáme stadardní označení a definice. Tudíž pojmy, které výslovně nedefinujeme sami, jsou k nalezení – nebude-li řečeno jinak – v [TM].

Dalším zdrojem inspirace nám byla dnes již klasická monografie J.A.Dieudonnè: Foundations of Modern Analysis, Enlarged and Corrected Printing, kterou vydal Academic Press roku 1969 a její pokračování Treatise on Analysis – Volume II vydané týmž nakladatelstvím v roce 1970.

Používáme-li v dalším textu velká písmena k označení objektů, tj. například $A, E, \mathcal{T}, \ldots$, tak tyto objekty jsou typu třídy, což znamená, že jde buď o množinu nebo o vlastní třídu. Naproti tomu malá písmena rezervujeme jednoznačně pro množiny.

Pro pohodlí čtenáře ještě uveďme

- soubor množin s indexovou třídou J značíme $\langle F_j : j \in J\rangle$

- sjednocení a průnik tohoto souboru značíme a rozumíme jím následující:

$$\bigcup_{j\in J} F_j = \{x : (\exists j \in J)(x \in F_j)\}$$

,

$$\bigcap_{j\in J} F_j = \{x : (\forall j \in J)(x \in F_j)\}$$

- a sumu a průnik třídy A značíme a chápeme následovně:

$$\bigcup A = \{x : (\exists a)(a \in A \ \ \& \ \ x \in a)\}$$

,

$$\bigcap A = \{x : (\forall a)(a \in A \rightarrow x \in a)\}.$$

Definice 1. Buďte dány dvě třídy $E, \mathcal{T}$ a buď $E \neq \emptyset$. Říkáme, že E je *třída s topologií* $\mathcal{T}$ nebo zkráceně, že E je *topologický prostor*, jsou-li splněny následující podmínky:

(i) $a, b \in \mathcal{T} \longrightarrow a \cap b \in \mathcal{T}$;

(ii) pro libovolný soubor $\langle a_j : j \in i\rangle$ množin z $\mathcal{T}$ platí $\bigcup\limits_{j\in i} a_j \in \mathcal{T}$;

(iii) $\bigcup \mathcal{T} = E$.

Libovolnou množinu $x \subseteq E$ nazveme *otevřenou* právě tehdy, když $x \in \mathcal{T}$.

Věta 1. Je-li E třída s topologií $\mathcal{T}$, tak $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Důkaz: Stačí v 1. definici položit $i = \emptyset$.

V dalším budeme nové pojmy většinou ihned aplikovat na třídu všech ordinálních čísel On. V následující větě značí pro každé $\alpha, \beta \in On \ \ \& \ \ \alpha < \beta$

$$(\leftarrow, \alpha) = \{\gamma \in On : \gamma < \alpha\}$$

$$(\alpha, \beta) = \{\gamma \in On : \alpha < \gamma < \beta)$$

Tyto množiny $(\leftarrow, \alpha)$ a (α, β) nazýváme otevřené intervaly. Ordinální čísla označujeme malými písmeny řecké abecedy.

Věta 2. Položme

$$\mathcal{T} = \{x : x \subseteq On \ \& \ (\forall \alpha \in x) \ [(\exists \alpha' \in On)(\alpha \in (\leftarrow, \alpha') \subseteq x) \vee$$

$$(\exists \alpha' \in On)(\exists \beta' \in On)(\alpha \in (\alpha', \beta') \subseteq x) \,] \,\} \,,$$

potom On je třída s topologií $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ je tzv. *intervalová topologie* na On.

Důkaz: Nechť $x, y \in \mathcal{T}$ a buď $\alpha \in x \cap y$. Existují otevřené intervaly I_x, I_y tak, že platí $\alpha \in I_x \subseteq x$ & $\alpha \in I_y \subseteq y$. Potom nastane právě jedna ze čtyř následujících situací (a) až (d):

(a) $I_x = (\beta_x, \gamma_x), I_y = (\beta_y, \gamma_y)$.
Položme $\beta = max\ (\beta_x, \beta_y),\ \gamma = min\ (\gamma_x, \gamma_y)\ \rightarrow\ \beta < \alpha < \gamma\ \rightarrow\ \alpha \in (\beta, \gamma)$.
Dále platí:

$$\beta_x \leq \beta < \gamma \leq \gamma_x \rightarrow (\beta, \gamma) \subseteq (\beta_x, \gamma_x)$$

$$\beta_y \leq \beta < \gamma \leq \gamma_y \rightarrow (\beta, \gamma) \subseteq (\beta_y, \gamma_y)$$

a odtud snadno nahlédneme:

$$(\beta, \gamma) \subseteq I_x \cap I_y \rightarrow \alpha \in (\beta, \gamma) \subseteq I_x \cap I_y \subseteq x \cap I_y \subseteq x \cap y.$$

(b) $I_x = (\beta_x, \gamma_x), I_y = (\leftarrow, \gamma_y)$.
Položme $\beta = \beta_x, \gamma = min(\gamma_x, \gamma_y)$. Potom $\beta < \alpha < \gamma \rightarrow \alpha \in (\beta, \gamma)$.
Dále platí:

$$\beta_x \leq \beta < \gamma \leq \gamma_x \rightarrow (\beta, \gamma) \subseteq (\beta_x, \gamma_x)$$

$$\beta < \gamma \leq \gamma_y \rightarrow (\beta, \gamma) \subseteq (\leftarrow, \gamma_y)$$

a odtud uzavíráme:

$$(\beta, \gamma) \subseteq I_x \cap I_y \rightarrow \alpha \in (\beta, \gamma) \subseteq x \cap y.$$

(c) $I_x = (\leftarrow, \gamma_x), I_y = (\beta_y, \gamma_y)$. Další postup je analogický s (b).

(d) $I_x = (\leftarrow, \gamma_x), I_y = (\leftarrow, \gamma_y)$.
Položme $\gamma = min(\gamma_x, \gamma_y) \rightarrow \alpha < \gamma \rightarrow \alpha \in (\leftarrow, \gamma)$.
Dále platí:

$$\gamma \leq \gamma_x \rightarrow (\leftarrow, \gamma) \subseteq (\leftarrow, \gamma_x)$$

$$\gamma \leq \gamma_y \rightarrow (\leftarrow, \gamma) \subseteq (\leftarrow, \gamma_y)$$

a odtud uzavíráme:

$$(\leftarrow, \gamma) \subseteq I_x \cap I_y \rightarrow \alpha \in (\leftarrow, \gamma) \subseteq x \cap y.$$

Z částí (a), (b), (c), (d) plyne, že existuje otevřený interval I, pro který platí $\alpha \in I \subseteq x \cap y$, proto $x \cap y \in \mathcal{T}$.
Nechť $\langle a_j : j \in i \rangle$ je soubor množin z $\mathcal{T}$ a buď $\alpha \in \bigcup_{j \in i} a_j \longrightarrow$ existuje $k \in i$, že $\alpha \in a_k$. Ježto $a_k \in \mathcal{T}$, tak existuje otevřený interval I, že $\alpha \in I \subseteq a_k$, tudíž $\alpha \in I \subseteq \bigcup_{j \in i} a_j$. Proto $\bigcup_{j \in i} a_j \in \mathcal{T}$.
Je zřejmé, že $\bigcup \mathcal{T} \subseteq On$. Nechť $\alpha \in On$, potom $\alpha \in (\leftarrow, \alpha \cup \{\alpha\}) \in \mathcal{T} \rightarrow \ \alpha \in \bigcup \mathcal{T}$. Odtud $On \ \subseteq \bigcup \mathcal{T}$. Celkem tedy $\bigcup \mathcal{T} = On$.

Věta 3. Buď E třída s topologií $\mathcal{T}$. E je vlastní třída právě tehdy, když $\mathcal{T}$ je vlastní třída.

Důkaz: Nechť E je vlastní třída. Platí $\bigcup \mathcal{T} = E$; kdyby $\mathcal{T}$ byla množina, tak $\bigcup \mathcal{T}$ je dle axiomu sumy také množina a to je spor s tím, že E je vlastní třída.

Nyní obráceně: buď $\mathcal{T}$ vlastní třída. Kdyby $\bigcup \mathcal{T}$ byla množina, tak potom $\mathcal{P}(\bigcup \mathcal{T})$ je dle axiomu potence množina. Poněvadž platí

$$a \in \mathcal{T} \rightarrow a \subseteq \bigcup \mathcal{T} \rightarrow a \in \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{T}),$$

tak $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{T})$ a tudíž $\mathcal{T}$ musí být množinou a nikoli vlastní třídou, což je spor s předpoklady. Proto $\bigcup \mathcal{T}$ je vlastní třída a jelikož $\bigcup \mathcal{T} = E$, tak E je vlastní třída.

Věta 4. Libovolná množina ordinálních čísel je otevřená (v intervalové topologii na On) právě tehdy, když je sjednocením nějakého souboru otevřených intervalů tj. intervalů typu $(\alpha, \beta), (\leftarrow, \gamma)$.

Důkaz: Buď $x \in \mathcal{T}$. Ke každému $\alpha \in x$ existuje otevřený interval I_α, že $\alpha \in I_\alpha \subseteq x$. Uvažujme o souboru $\langle I_\alpha : \alpha \in x \rangle$. Potom $\bigcup_{\alpha \in x} I_\alpha = x$.
Nechť $x = \bigcup_{j \in i} I_j$. $(\forall j \in i)(I_j \in \mathcal{T}) \longrightarrow \bigcup_{j \in i} I_j \in \mathcal{T}$, tj. $x \in \mathcal{T}$.

Definice 2. Nechť E je třída s topologií $\mathcal{T}$, $a \subseteq E \ \ \& \ \ a \neq \emptyset, \ b \subseteq E, x \in E, \ A \subseteq E$, potom:

(i) b je *okolí* a právě tehdy, když existuje $o \in \mathcal{T}$, že $a \subseteq o \subseteq b$;
(ii) x je *hromadný bod* třídy A právě tehdy, když libovolné okolí bodu x obsahuje od x odlišný bod třídy A;
(iii) soubor okolí bodu x nazveme *bází okolí* bodu x , jestliže každé okolí bodu x obsahuje jisté okolí z tohoto souboru;
(iv) b je *uzavřená množina* právě tehdy, když b obsahuje všechny své hromadné body; označujeme
$$\mathcal{T}^{[c]} = \{a : a \in \mathcal{P}(E) \ \ \& \ \ a \text{ je uzavřená množina } \};$$
(v) bod třídy A, který není hromadný bod této třídy, nazveme *izolovaný bod* třídy A .

Věta 5. Uvažujme třídu všech ordinálů On s intervalovou topologií. Platí následující tvrzení:

(i) Izolovaná ordinální čísla jsou právě všechny izolované body třídy On.

(ii) Je-li λ izolovaný ordinál, potom soubor obsahující $\{\lambda\}$ je bází okolí bodu λ . Je-li λ limitní ordinál, tak množiny $I_\mu = \{\ \alpha \in On:\ \mu < \alpha \leq \lambda\}$ pro $\mu < \lambda$, tvoří bázi okolí bodu λ .

(iii) Buď dána množina $x \subseteq On\ \&\ x \neq \emptyset$, potom x je uzavřená množina právě tehdy, když supremum každé její neprázdné podmnožiny (a to existuje vždy dle [TM] II.1.12) je prvkem x.

Důkaz: (i): Nechť $\alpha \in On\ \&\ \alpha$ je izolovaný ordinál. Dle [TM] II.1.17 je $\{\alpha\}$ okolí ordinálu α a $\{\alpha\} \cap On = \{\alpha\}$, tedy α je izolovaný bod třídy On.

Nechť $\alpha \in On$ je izolovaný bod třídy $On \ \rightarrow$ existuje okolí $o(\alpha)$ bodu α tak, že $o(\alpha) \cap On = \{\alpha\}$. Poněvadž $o(\alpha) \subseteq On$, tak $o(\alpha) = \{\alpha\}$. Protože $o(\alpha)$ je okolí α, tak existuje $o'(\alpha) \in \mathcal{T}$, že $\alpha \in o'(\alpha) \subseteq o(\alpha)$, tedy $o'(\alpha) = \{\alpha\}\ \&\ o'(\alpha) \in \mathcal{T}$.

Potom buď

1) existuje $\alpha' \in On$, že $\alpha \in (\leftarrow, \alpha') \subseteq \{\alpha\}$ nebo

2) existují $\alpha', \beta' \in On$, že $\alpha \in (\alpha', \beta') \subseteq \{\alpha\}$.

Předpokládejme, že se realizuje možnost 1): musí být $(\leftarrow, \alpha') = \{\alpha\}$, tj. $\{\gamma \in On : \gamma < \alpha'\} = \{\alpha\} \rightarrow \alpha' \neq \emptyset$. Kdyby $\alpha' > 1$, tak $\{0, 1\} \subseteq \{\gamma \in On : \gamma < \alpha'\}$, ale to je spor s tím, že $\{\gamma \in On : \gamma < \alpha'\}$ je jednoprvková množina. Tudíž nutně musí být $\alpha' = 1 \rightarrow \alpha = 0$ a tedy α je izolovaný ordinál.

Předpokládejme, že nastal případ 2) : musí být $\alpha \in \{\gamma \in On : \alpha' < \gamma < \ < \beta'\} \subseteq \{\alpha\} \rightarrow \{\gamma \in On : \alpha' < \gamma < \beta'\} = \{\alpha\} \rightarrow$ pro jediný ordinál α platí $\alpha' < \alpha < \beta'$ (odtud ihned $\alpha \neq 0$) a to může být jenom tehdy, když $\alpha' \cup \{\alpha'\} = \alpha\ \&\ \alpha \cup \{\alpha\} = \beta'$. (Kdyby α nebylo následníkem α' , tj. $\alpha' \cup \{\alpha'\} \neq \alpha$, tak může být jedině $\alpha' \cup \{\alpha'\} < \alpha \rightarrow \{\alpha, \alpha' \cup \{\alpha'\}\} \subseteq \{\gamma \in\ \in On : \alpha' < \gamma < \beta'\}$, což je spor.) Proto α je izolovaný ordinál.

(ii): První část tvrzení je triviální.

Nechť λ je limitní ordinál a buď o okolí ordinálu $\lambda \rightarrow$ existuje $o' \in \mathcal{T}$, že $\lambda \in o' \subseteq o$ a tedy buď

1) existuje $\alpha \in On$, že $\lambda \in (\leftarrow, \alpha) \subseteq o' \subseteq o$, nebo

2) existují $\alpha, \beta \in On$, že $\lambda \in (\alpha, \beta) \subseteq o' \subseteq o$.

V případě 1) je : $\lambda \in \{\gamma \in On : \gamma < \alpha\} \subseteq o \rightarrow \lambda < \alpha$; tudíž pro každé $\mu < \lambda$ (a taková μ existují, neboť λ je limitní ordinál a tedy $\lambda \neq 0, 1$) platí: $\{\alpha' \in On : \mu < \alpha' \leq \lambda\} \subseteq \{\gamma \in On : \gamma < \alpha\} \subseteq o$.

V případě 2) je: $\lambda \in \{\gamma \in On : \alpha < \gamma < \beta\} \subseteq o$. Položme $\mu = \alpha$, pak $\{\gamma \in On : \mu < \gamma \leq \lambda\} \subseteq (\alpha, \beta) \subseteq o$.

Zbývá ukázat, že pro $\mu < \lambda$ jsou množiny I_μ okolí ordinálu λ . Evidentně je $\lambda \in I_\mu\ \&\ I_\mu = (\mu, \lambda \cup \{\lambda\}) \in \mathcal{T}$.

(iii): Nechť $\emptyset \neq x \subseteq On\ \&\ x$ je uzavřená množina. Buď $\emptyset \neq y \subseteq x\ \&\ \alpha = sup(y)$. Je-li $\alpha \in y \rightarrow \alpha \in x$ a není co dokazovat. Předpokládejme $\alpha \notin y$ a buď $o(\alpha)$ okolí α. Existuje otevřený interval $I(\alpha)$, že $\alpha \in I(\alpha) \subseteq o(\alpha)$. Je-li $I(\alpha) = (\beta, \gamma)$, tak $\beta < \alpha$ a tudíž existuje $\delta \in y$, že $\beta < \delta \leq \alpha \rightarrow \delta \in \in I(\alpha) \subseteq o(\alpha)$ & $\delta \in y \subseteq x$ & $\delta \neq \alpha$. Proto α je hromadný bod množiny $x \rightarrow \alpha \in x$ (neboť x je uzavřená množina).

Je-li $I(\alpha) = (\leftarrow, \beta)$, tak pro $0 < \alpha$ stačí postupovat jako v předchozím. Pro $\alpha = 0$ je $y = \{0\}$ a to je spor s $\alpha \notin y$.

Předpokládejme, že množina x není uzavřená. Existuje hromadný bod α množiny x & $\alpha \notin x$. Kdyby $\alpha = 0$, tak $\{0\}$ je okolí bodu 0, ale $\{0\} \cap x = \emptyset$, neboť $0 \notin x$, ale to je spor s předpoklady. Tedy $\alpha \neq 0$. Položme $y = \{\beta \in \in x : \beta < \alpha\}$. Lehce se ukáže, že $y \neq \emptyset$: volme $\mu < \alpha$; k okolí $(\mu, \alpha \cup \{\alpha\})$ bodu α existuje $\lambda_\mu \in x$, že $\lambda_\mu \in (\mu, \alpha \cup \{\alpha\}) \rightarrow \lambda_\mu \neq \mu$, α ; tedy $\lambda_\mu \in y$. Ukážeme, že $\alpha = sup(y)$. Je evidentní, že α je majoranta množiny y . Buď nyní α' taktéž majoranta y a předpokládejme $\alpha' < \alpha$. Potom $(\alpha', \alpha \cup \{\alpha\})$ je okolí α a existuje $\lambda_{\alpha'} \in x$ & $\lambda_{\alpha'} \in (\alpha', \alpha \cup \{\alpha\})$ & $\lambda_{\alpha'} \neq \alpha$, neboť α je hromadný bod množiny x . Platí tedy $\alpha' < \lambda_{\alpha'} < \alpha$ & $\lambda_{\alpha'} \in y$ a to je spor s definicí α'. Tím jsme ukázali, že $\alpha = sup(y)$ & $\emptyset \neq y \subseteq x$ & $\alpha \notin x$.

Věta 6. Nechť E je topologický prostor, potom $\emptyset$ je uzavřená.

Důkaz: Buď $x \in E$ a předpokládejme, že x je hromadný bod $\emptyset$. Pro libovolné okolí u bodu x platí $u \cap \emptyset = \emptyset$ a to je spor s předpokladem. Tedy žádné $x \in E$ není hromadným bodem $\emptyset$ a tudíž $\emptyset$ je uzavřená.

Definice 3. Buď E třída s topologií $\mathcal{T}, A \subseteq E, x \in E$, potom:

(i) bod x nazveme *bodem uzávěru* třídy A právě tehdy, když x je hromadný bod třídy A nebo x je izolovaný bod třídy A ; třídu $\overline{A} = \{x \in E : x$ je bod uzávěru A $\}$ nazýváme *uzávěr* třídy A ;

(ii) třídu A nazveme *uzavřenou* právě tehdy, když $A = \overline{A}$;

(iii) bod x nazveme *vnitřní bod* třídy A právě tehdy, když existuje okolí v bodu x, že platí $v \subseteq A$; třídu $A^\circ = \{x \in A : x$ je vnitřní bod třídy A $\}$ nazveme *vnitřek* třídy A ;

(iv) třídu A nazveme *otevřenou* právě tehdy, když $A = A^\circ$.

Definice otevřené (resp. uzavřené) třídy rozšiřuje předchozí definici otevřené (resp. uzavřené) množiny. Soulad těchto definicí plyne z následující věty 7 tvrzení (iii) a (iv).

Lemma 1. Nechť E je třída s topologií $\mathcal{T}$, $A \subseteq E$, $x \in E$. Bod x je bodem uzávěru třídy A právě tehdy, když libovolné okolí v bodu x má neprázdný průnik s třídou A .

Důkaz: Nechť x je bod uzávěru třídy A a buď v libovolné okolí bodu x. Je-li x hromadný bod třídy A, tak $v \cap A \neq \emptyset$; je-li x izolovaný bod třídy A, tak $x \in A$ a proto $x \in v \cap A \rightarrow v \cap A \neq \emptyset$.
Nechť libovolné okolí v bodu x má neprázdný průnik s třídou A. Jestliže $x \notin A$, tak x je hromadný bod třídy A. Jestliže $x \in A$, tak x je buď hromadný bod třídy A nebo izolovaný bod třídy A. Ve všech případech je tedy x bod uzávěru třídy A.

Poznámka 1. Je-li $a \subseteq E$, kde E je topologický prostor, tak $\overline{a}$ nemusí být nutně množina, tj. může jít o vlastní třídu. To ukazuje následující příklad.

Příklad 1. Buď zvoleno nějaké $\alpha \in On$ a definujme $\mathcal{T}_\alpha = \{ x : x \subseteq On \ \& \ (\alpha \in x \vee x = \emptyset)\}$. Nejprve ukážeme, že na On zavádí $\mathcal{T}_\alpha$ topologický prostor.
Nechť $x, y \in \mathcal{T}_\alpha$; je-li alespoň jedna z množin x, y prázdná, tak $x \cap y \in \mathcal{T}_\alpha$. Buďte $x, y \neq \emptyset$, pak $\alpha \in x \cap y$ a tedy $x \cap y \in \mathcal{T}_\alpha$.
Buď $\langle x_j, j \in i\rangle$ libovolný soubor množin z $\mathcal{T}_\alpha$. Je-li $x_j = \emptyset$ pro každé $j \in i$, tak $\bigcup\limits_{j\in i} x_j = \emptyset \in \mathcal{T}_\alpha$. Nechť pro alespoň jedno $j \in i$ je $x_j \neq \emptyset$, pak $\alpha \in x_j \rightarrow \alpha \in \bigcup\limits_{j\in i} x_j \rightarrow \bigcup\limits_{j\in i} x_j \in \mathcal{T}_\alpha$.
Je evidentní, že $\bigcup \mathcal{T}_\alpha \subseteq On$. Buď $\beta \in On \rightarrow \{\alpha, \beta\} \in \mathcal{T}_\alpha \rightarrow \beta \in \bigcup \mathcal{T}_\alpha$, tj. $On \subseteq \bigcup \mathcal{T}_\alpha$.
Nyní je snadné ukázat, že $\overline{\{\alpha\}} = On$. Je zřejmé, že $\overline{\{\alpha\}} \subseteq On$. Buď $\beta \in On$. Je-li $\beta = \alpha$, je $\beta \in \overline{\{\alpha\}}$. Buď tedy $\beta \neq \alpha$ a nechť v je okolí bodu β, potom existuje $o \in \mathcal{T}_\alpha$, že $\beta \in o \subseteq v \rightarrow \{\beta, \alpha\} \subseteq o \subseteq v \rightarrow \{\beta, \alpha\} \subseteq v \ \ \& \ \ \alpha \in \{\alpha\} \ \ \& \ \ \beta \neq \alpha \rightarrow \beta \in \overline{\{\alpha\}}$.

Věta 7. Buď E třída s topologií $\mathcal{T}$, $A \subseteq E$, $a \subseteq E$; potom platí :

(i) $A = A^\circ \longleftrightarrow E - A = \overline{E - A}$;

(ii) $A = \overline{A} \longleftrightarrow E - A = (E - A)^\circ$;

(iii) $a \in \mathcal{T} \longleftrightarrow a = a^\circ$;

(iv) $a \in \mathcal{T}^{[c]} \longleftrightarrow a = \overline{a}$.

Důkaz: (i): Nechť $A = A^\circ$. Je $E - A \subseteq \overline{E - A}$. Buď $x \in \overline{E - A}$. Kdyby $x \in A$, tak existuje okolí v bodu x, že $v \subseteq A$. Potom $v \cap (E - A) = \emptyset$ a to je spor s $x \in \overline{E - A}$. Tedy $x \notin A \rightarrow x \in E - A$. Celkem máme $E - A = \overline{E - A}$.

Nechť $E - A = \overline{E - A}$. Z definice přímo plyne $A^\circ \subseteq A$. Buď $x \in A \rightarrow x \notin E - A = \overline{E - A}$, tj. x není bod uzávěru třídy $E - A \rightarrow$ existuje okolí o bodu x, že $o \cap (E - A) = \emptyset \rightarrow o \subseteq (E - (E - A)) = (E - E) \cup (E \cap A) = A \rightarrow x \in A^\circ$. Proto $A = A^\circ$.

(ii): Stačí v (i) položit $A = E - B$, kde $B \subseteq E$.

(iii): Buď $a \in \mathcal{T}$. Je zřejmé $a^\circ \subseteq a$. Je-li $x \in a$, tak a je okolím bodu x. Proto $x \in a^\circ$, tj. $a \subseteq a^\circ$. Celkem tedy $a = a^\circ$.
Nechť $a = a^\circ$, tedy každé $x \in a$ je vnitřní bod a ; tudíž ke každému $x \in a$ existuje otevřená množina $o(x)$, že platí $x \in o(x) \subseteq a$. Proto $\bigcup\limits_{x\in a} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x\in a} o(x) \subseteq a$, tj. $\bigcup\limits_{x\in a} o(x) = a$ a dle definice 1 je $\bigcup\limits_{x\in a} o(x) \in \mathcal{T}$, tj. $a \in \mathcal{T}$.

(iv): Nechť $a \in \mathcal{T}^{[c]}$, tedy a obsahuje všechny své hromadné body. Je zřejmé, že $a \subseteq \overline{a}$. Je-li $x \in \overline{a}$, pak x je buď hromadný bod množiny a nebo izolovaný bod množiny a. V případě, že nastane druhá alternativa, je evidentně $x \in a$. Tedy $\overline{a} \subseteq a$.
Nechť $a = \overline{a}$. Tedy libovolný hromadný bod množiny a je prvkem množiny a a množina a je uzavřená i ve smyslu definice 2 .

Věta 8. Nechť E je třída s topologií $\mathcal{T}$ a buď $A \subseteq E$, potom: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}, A^\circ = (A^\circ)^\circ$.

Důkaz: Je evidentní, že $\overline{A} \subseteq \overline{(\overline{A})}$. Nechť $x \in \overline{\overline{A}}$ a buď v okolí bodu $x \rightarrow$ existuje $o \in \mathcal{T}$, že $x \in o \subseteq v \rightarrow$ existuje $y \in \overline{A} \ \ \& \ \ y \in o$ (neboť o je okolí bodu x)

$\rightarrow$ existuje $z \in A$ & $z \in o$ (neboť o je okolí bodu y & $y \in \overline{A}$) $\rightarrow$ existuje $z \in v$ & $z \in A \rightarrow x \in \overline{A}$.
Je evidentní, že $(A^\circ)^\circ \subseteq A$. Nechť $x \in A^\circ \rightarrow$ existuje $o \in \mathcal{T}$, že $x \in o \subseteq A \rightarrow$ pro každé $y \in o$ platí $y \in A^\circ$ & $x \in o \rightarrow x \in (A^\circ)^\circ$.

Věta 9. Uvažujme na On intervalovou topologii a nechť $A \subseteq On$ & $A \neq \emptyset$, potom A je uzavřená třída právě tehdy, když supremum každé její neprázdné podmnožiny je prvkem A .

Důkaz: Nechť A je uzavřená třída, $x \subseteq A$ & $x \neq \emptyset$. Dle [TM] II.1.12(ii) existuje $sup(x)$, položme $\lambda = sup(x)$. Je-li $\lambda = 0$, pak $x = \{0\} \rightarrow \lambda \in A$. Dále předpokládejme $\lambda \neq 0$. Buď V okolí bodu $\lambda \rightarrow (\exists o \in \mathcal{T})(\lambda \in o \subseteq V) \rightarrow (\exists \beta \in On)(\exists \gamma \in On)(\lambda \in (\beta,\gamma) \subseteq V) \rightarrow \beta < \lambda \rightarrow (\exists \xi \in x)(\beta < \xi \leq \lambda) \rightarrow \xi \in A$ & $\xi \in V \rightarrow \lambda \in \overline{A} = A$.

Předpokládejme, že A není uzavřená třída $\rightarrow (\exists \lambda \in \overline{A})(\lambda \notin A)$. Kdyby $\lambda = 0$, tak $\{0\}$ je okolí λ , ale $\{0\} \cap A = \emptyset$ a to je spor s předpoklady (neboť λ je hromadný bod A). Tudíž $\lambda \neq 0$. Položme $x = \{\alpha : \alpha \in A$ & $\alpha < \lambda\}$. Nejprve ukážeme, že $x \neq \emptyset$: nechť $\mu < \lambda$, potom $(\mu, \lambda \cup \{\lambda\})$ je okolí bodu $\lambda \rightarrow (\exists \xi \in A)(\xi \in (\mu, \lambda \cup \{\lambda\})) \rightarrow \xi \in A$ & $\xi \leq \lambda$. Poněvadž $\lambda \notin A$ & $\xi \in A$, tak $\lambda \neq \xi$. Odtud $\xi \in A$ & $\xi < \lambda \rightarrow \xi \in x$.
Nyní dokážeme $\lambda = sup(x)$. Je zřejmé, že λ je majoranta x. Buď nyní λ' taktéž majoranta x a předpokládejme $\lambda' < \lambda$. Množina $(\lambda', \lambda \cup \{\lambda\})$ je okolí $\lambda \rightarrow (\exists \xi \in A)(\xi \in (\lambda', \lambda \cup \{\lambda\})) \rightarrow \lambda' < \xi \leq \lambda$ & $\xi \in A$ & $\xi \neq \lambda$ (neboť $\lambda \notin A$); odtud $\xi \in x$ a λ' není majoranta x, což je ale spor. Proto $\lambda = = sup(x)$ & $x \neq \emptyset$ & $x \subseteq A$ & $\lambda \notin A$.

Věta 10. Existuje taková vlastní třída E s topologií $\mathcal{T}$, že $\mathcal{T}^{[c]}$ je množina.

Důkaz: Položme $E = \mathcal{T} = On$. Potom $\mathcal{T}^{[c]} = \{0\}$. Nejprve ukážeme, že E je topologický prostor. Nechť $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$, potom $\alpha \cap \beta$ je dle [TM] II. 1.7 (ii) opět ordinál, tzn. $\alpha \cap \beta \in \mathcal{T}$. Buď $\langle \alpha_i, i \in j \rangle$ libovolný soubor ordinálů z $\mathcal{T}$, potom $\bigcup_{i \in j} \alpha_i$ je dle [TM] II.1.12 (iii) ordinální číslo, tj. $\bigcup_{i \in j} \alpha_i \in \mathcal{T}$. $\bigcup \mathcal{T} = = \bigcup On \subseteq On$, dle [TM] II.1.6 . Nechť $\alpha \in On$, pak $\alpha \cup \{\alpha\} \in On$ a tudíž $\alpha \in \bigcup On = \bigcup \mathcal{T}$. Celkem tedy $On \subseteq \bigcup \mathcal{T}$, proto $\bigcup \mathcal{T} = On = E$.

Dle věty 6 je $0 \in \mathcal{T}^{[c]}$. Nechť α je libovolný ordinál a uvažujme o třídě $\overline{\{\alpha\}}$. Buď tedy $\beta \in On$ & $\beta \neq \alpha$. Nechť $v(\beta)$ je libovolné okolí bodu β. Musí existovat $o(\beta) \in \mathcal{T}$, že platí $\beta \in o(\beta) \subseteq v(\beta)$. Poněvadž $\mathcal{T} = On$, tak $o(\beta) = \gamma$, kde γ je ordinál, přičemž $\beta \in \gamma \subseteq v(\beta)$, tj. $\beta < \gamma \subseteq v(\beta)$. Nyní uvažujme o ordinálech $\beta > \alpha$. Bude tedy existovat ordinál γ, že bude platit $\alpha < \beta < \gamma \subseteq v(\beta)$, ovšem musí být $\alpha \in \gamma$ a proto

$$\{\alpha\} \cap v(\beta) \supseteq \{\alpha\} \cap \gamma = \{\alpha\} \neq \emptyset.$$

Tudíž libovolný ordinál $\beta \geq \alpha$ je bodem uzávěru $\{\alpha\} \rightarrow \overline{\{\alpha\}}$ je vlastní třída.
Uvažujme nyní o libovolné množině $a \neq \emptyset$ & $a \subseteq E$. Potom $\overline{a}$ je vlastní třída (plyne to z předchozího: $a \neq \emptyset \rightarrow$ existuje $\alpha \in On$ & $\alpha \in a \rightarrow$ libovolný bod ležící v $\overline{\{\alpha\}}$ je bodem uzávěru množiny $a \rightarrow \overline{\{\alpha\}} \subseteq \overline{a} \rightarrow \overline{a}$ je vlastní třída).

Předpokládejme, že existuje $a \in \mathcal{T}^{[c]}$ & $a \neq \emptyset$. Dle věty 7 (iv) musí být $a = \overline{a}$, což je spor, neboť na jedné straně rovnosti stojí množina a na druhé vlastní třída. Tím jsme ukázali, že $\mathcal{T}^{[c]} = \{0\}$.

Definice 4. Nechť E je třída s topologií $\mathcal{T}$. Topologie $\mathcal{T}$ je *regulární* na E právě tehdy, když $\bigcup \mathcal{T}^{[c]} = E$.

Věta 11. Nechť E je vlastní třída s topologií $\mathcal{T}$, přičemž $\mathcal{T}$ je regulární na E. Potom $\mathcal{T}^{[c]}$ je vlastní třída.

Důkaz: stejný jako u věty 3 .

Věta 12. Nechť E je třída s topologií $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ je regulární na E právě tehdy, když $(\forall x \in E)\ (\overline{\{x\}} \in \mathbb{V})$. Pozn. symbol $\mathbb{V}$ zde značí univerzální třídu.

Důkaz: Nechť $\mathcal{T}$ je regulární topologie na E, tj. $\bigcup \mathcal{T}^{[c]} = E$ a buď $x \in E \to$ existuje $y \in \mathcal{T}^{[c]}$, že $x \in y\ \&\ y = \overline{y} \to \{x\} \subseteq y = \overline{y} \to \overline{\{x\}} \subseteq \overline{y}\ \&\ y = \overline{y} \to \overline{\{x\}} \subseteq y \to \overline{\{x\}} \in \mathbb{V}$. Nechť pro každé $x \in E$ je $\overline{\{x\}}$ množina. Je evidentní, že $\bigcup \mathcal{T}^{[c]} \subseteq E$. Buď $x \in E \to \{x\} \subseteq E \to \overline{\{x\}}$ je množina a užitím vět 7 a 8 dále máme $\overline{\{x\}} \in \mathcal{T}^{[c]} \to x \in \bigcup \mathcal{T}^{[c]}$ tj. $E \subseteq \bigcup \mathcal{T}^{[c]}$. Celkem tedy $\bigcup \mathcal{T}^{[c]} = E$.

Závěr

Článek se zabývá rozšířením základního topologického pojmového aparátu budovaného na pojmu množiny do oblasti tříd a jeho názornou aplikací v oblasti třídy ordinálních čísel a jejich podtříd.

Literatura

[1] BALCAR,B., ŠTĚPÁNEK,P.: Teorie množin, 1.vydání, Praha: Academia, 1986.
[2] DIEUDONNÈ,J.A.: Foundation of Modern Analysis, Enlarged and Corrected Printing, New York: Academic Press, 1969.
[3] DIEUDONNÈ,J.A.: Treatise on Analysis - Volume II, New York: Academic Press, 1970.