6 Limita funkcie

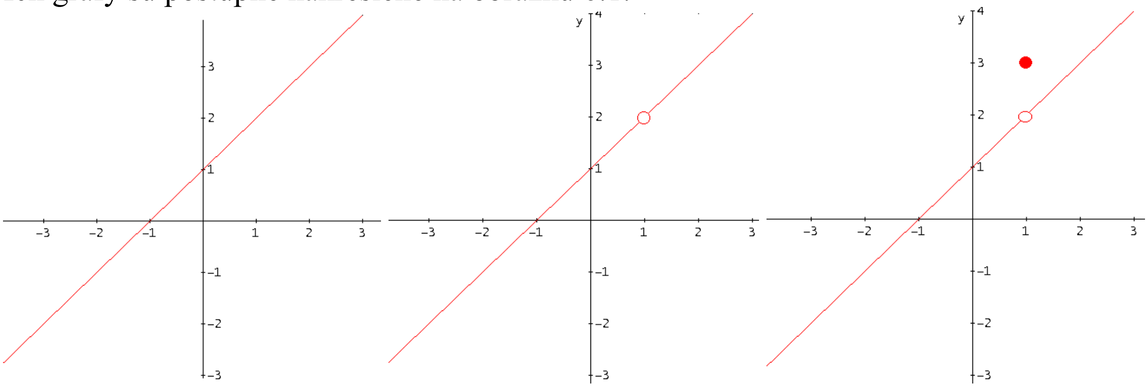
6.1 Myšlienka limity, interval bez bodu

Intuitívna myšlienka limity je prirodzená, ale definovať presne pojem limity je značne obtiažne. Nech *f* je funkcia a nech a je reálne číslo.
Čo znamená zápis $\lim_{x \to a} f(x) = b$? Tento zápis má v presných pojmoch vystihnúť myšlienku, že $f(x)$ sa blíži bodu *b*, ak sa *x* blíži k bodu *a* (pričom *x* je rôzne od *a*). Definičný obor musí obsahovať interval (*x*,*a*), (*a*,*x*) alebo aj oba, ale bod *a* nemusí obsahovať.
Hodnota funkcie v bode *a*, ak vôbec existuje, nemusí mať so skúmanou otázkou nič spoločné, teda limita sa nemusí rovnať hodnote funkcie v danom bode.

Príklad 6.1.

Dané sú funkcie $f(x) = x+1$, $g(x) = x+1, x \neq 1$ a $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{ak } x \neq 1 \\ 3 & \text{ak } x = 1 \end{cases}$.

Ich grafy sú postupne nakreslené na obrázku 6.1.



Obr. 6.1

Z obrázka intuitívne zistíme, že ak sa *x* blíži k bodu *a*=1, funkčné hodnoty pre každú z uvedených funkcií sa blížia k bodu 2. Teda $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = 2$, pričom *f*(1)=2, *g*(1) nie je definovaná a *h*(2)=3.

6.2 Definícia limity

Nech je funkcia *f*(*x*) definovaná pre všetky $x \neq a$ z nejakého okolia bodu *a*. Hovoríme, že limita funkcie *f*(*x*) pre *x* idúce k *a* sa rovná *b* ($\lim_{x \to a} f(x) = b$) práve vtedy, ak pre každú postupnosť $\{x_n\} \to a$ čísel x_n z definičného oboru funkcie *f*, $x_n \neq a$, má postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}$ limitu *b*.

Poznámka:
Ak *a*, *b* v predchádzajúcej definícii sú čísla, potom hovoríme o vlastnej limite vo vlastnom bode. Symboly *a*, *b* môžu byť aj $\pm\infty$. V takomto prípade budeme hovoriť o nevlastnej limite, resp. o limite v nevlastnom bode. Tieto prípady budeme skúmať neskôr.

Niekedy sa zaujímame iba o také postupnosti $\{x_n\} \to a$, pre ktoré platí, že všetky členy x_n sú väčšie ako a (teda x_n sa blíži k a sprava) alebo sú menšie ako a (teda x_n sa blíži k a zľava). V takýchto prípadoch hovoríme o jednostranných limitách. Pojem si vysvetlíme na príklade.

Príklad 6.2.

a) Pomocou grafu funkcie $f(x)=\frac{1}{x}$ určte jednostranné limity $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ a $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(Prvú limitu nazývame limita funkcie *f* zľava v bode 0, druhú limitu nazývame limita funkcie *f* sprava v bode 0.)

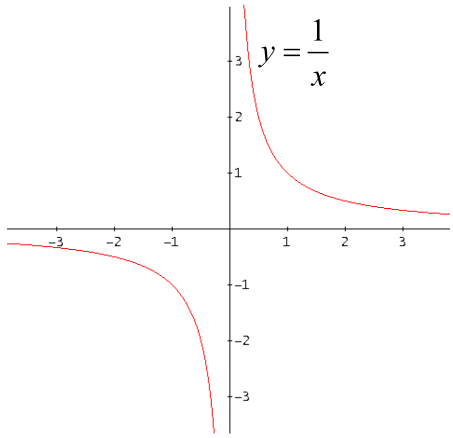
Riešenie:

Z grafu funkcie vidíme, že:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje



Obr. 6.2

b) Pomocou grafu funkcie $f(x)=\frac{1}{x^2}$ určte jednostranné limity $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ a $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

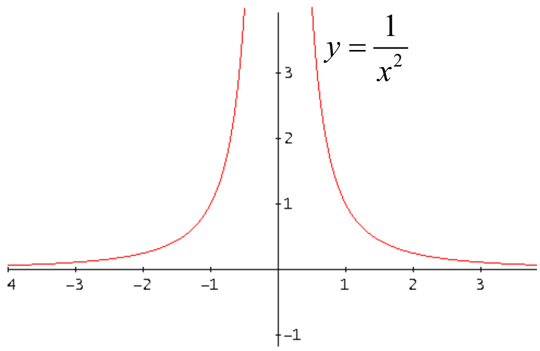
Riešenie:

Z grafu funkcie vidíme, že:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$



Obr. 6.3

Uvedieme teraz dve dôležité vety o limite funkcie.

Veta 6.1. (veta o ohraničenosti) Ak existuje vlastná limita funkcie *f*(*x*) v bode *a*, potom existuje interval okolo bodu *a* (bez bodu a), na ktorom je funkcia *f*(*x*) ohraničená.

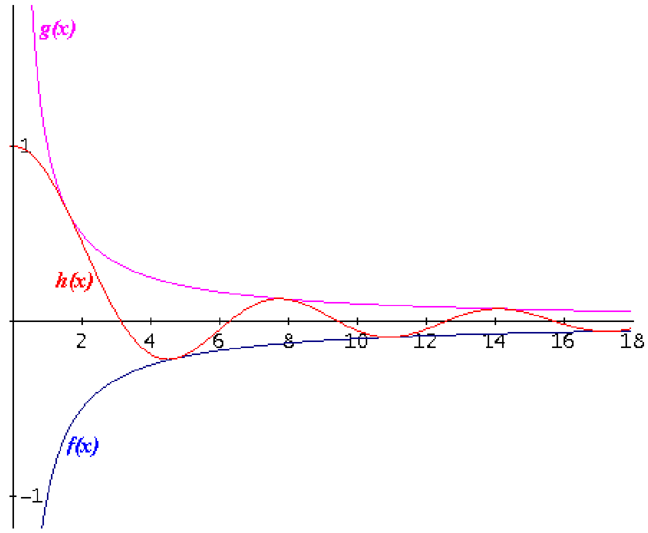
Veta 6.2. (veta o zovretí) Nech na nejakom intervale okolo bodu *a* bez bodu *a* platí: *f*(*x*)≤*h*(*x*)≤*g*(*x*). Nech $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$. Potom aj $\lim_{x\to a} h(x) = b$.

Vetu 6.2 si ilustrujeme na príklade.

Príklad 6.3.

Na intervale $(0;\infty)$ zobrazte grafy funkcií $f(x)=-\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ a $h(x)=\frac{\sin x}{x}$. Všimnite si, že sú splnené predpoklady vety 6.2 pre $a=\infty$. Určte $\lim_{x\to\infty} h(x)$.

Riešenie:
Z obrázka 6.4 vidíme, že pre všetky $x>0$ platí:
$-\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$, teda $f(x) < h(x) < g(x)$.
Naviac $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Predpoklady vety 6.2 sú teda splnené. Preto aj $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$.



Obr. 6.4

6.3 Výpočet limít

Nasledujúca veta je užitočná pre počítanie **vlastných** limít niektorých funkcií obsahujúcich konštanty, *x*, -*f*(*x*), prevrátené funkcie, súčet, rozdiel, súčin, podiel, polynómy a odmocniny z funkcie.

Veta 6.3.

a. **Limita konštanty:** $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

b. **Limita funkcie *f(x)=x*:** $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

c. **Limita funkcie s opačným znamienkom: Ak** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$**, potom** $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right) = -b$.

d. **Limita súčtu a rozdielu: Ak** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b_2$, **potom** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = b_1 \pm b_2$.

e. **Limita súčinu: Ak** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b_2$, **potom** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = b_1 \cdot b_2$.

f. **Limita podielu. Ak** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b_2 \neq 0$, **potom** $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$.

g. **Limita odmocniny z funkcie: Ak** $f(x) \geq 0$ **a** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, **potom** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{b}$.

h. **Limita súčinu čísla a funkcie:** $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Príklad 6.4.
Pomocou vety 6.3 vypočítajte:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^3 - 2x - 1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

Riešenie:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^3-2x-1\right)=\lim\limits_{x\to 1}3x^3-\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=$

$\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}2\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}1=3\cdot 1\cdot 1\cdot 1-2\cdot 1-1=0$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\dfrac{4^2-3\cdot 4+2}{4^2-4\cdot 4+3}=\dfrac{6}{3}=2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\dfrac{1^2-3\cdot 1+2}{1^2-4\cdot 1+3}=\dfrac{0}{0}$

Pretože po dosadení vyšla v menovateli nula, musíme postupovať inak:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{(x-3)}=\frac{1-2}{1-3}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}}=\dfrac{1+2}{1-2}=\dfrac{3}{-1}=-3$

6.4 Spojitosť funkcie

Funkcia *f*(*x*) je spojitá v bode *a*, ak platí $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$**.**

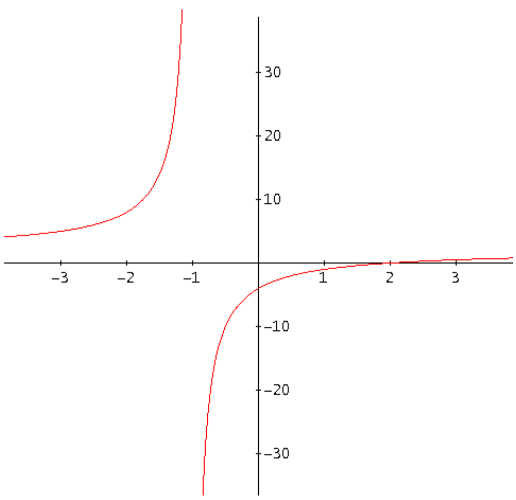
Poznámka:

Predchádzajúca definícia znamená, že funkcia *f*(*x*) je v bode *a* definovaná, má v bode *a* limitu a naviac $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

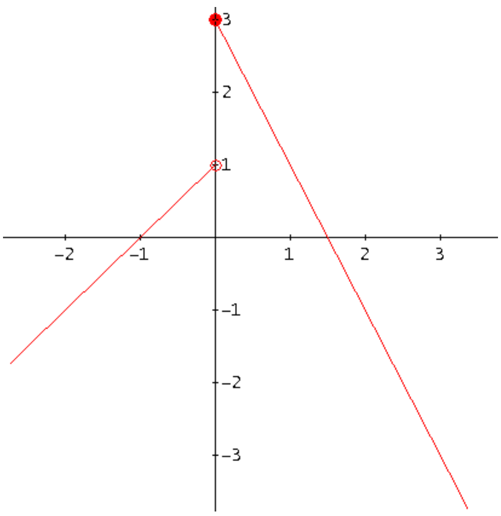
Teraz si uvedieme niekoľko príkladov na funkcie, ktoré nie sú spojité v bode *a*.

Funkcia $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+1}$, ktorej graf je na obrázku 6.5, nie je spojitá v bode -1, nakoľko nie je v tomto bode definovaná.

Funkcia $g(x)=\begin{cases}x+1 & \text{ak } x<0\\ 3-2x & \text{ak } x\geq 0\end{cases}$, ktorej graf je na obrázku 6.6, nie je spojitá v bode 0, nakoľko limita tejto funkcie neexistuje (pretože limity sprava a zľava sa nerovnajú).



Obr. 6.5



Obr. 6.6

Nasledujúca veta charakterizuje základné vlastnosti spojitých funkcií.

Veta 6.4:

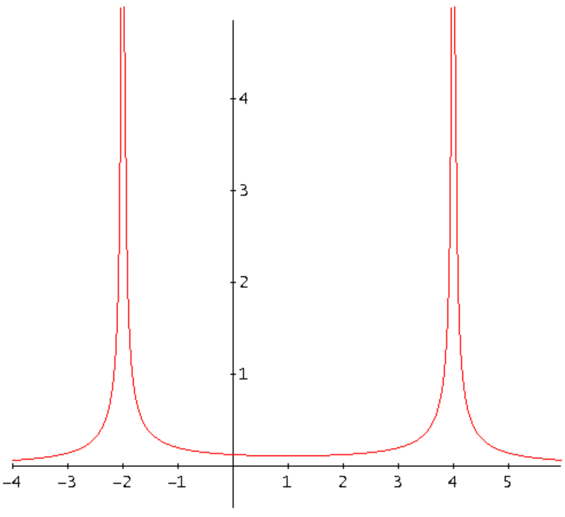
a) **Konštantná funkcia a funkcia *f*(*x*)=*x* sú spojité funkcie.**
b) **Súčet, rozdiel a súčin spojitých funkcií je spojitá funkcia.**
c) **Podiel spojitých funkcií je spojitá funkcia na svojom definičnom obore.**
d) **Ak je funkcia *g* spojitá v bode *a* a funkcia *f* spojitá v bode *g*(*a*), potom aj zložená funkcia *f*(*g*(*x*)) je spojitá v bode *a*.**
e) **Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá na nejakom otvorenom intervale obsahujúcom uzavretý interval $\langle a;b\rangle$, potom je na intervale $\langle a;b\rangle$ ohraničená a dosahuje tu maximum aj minimum.**

6.5 Limita v nevlastnom bode a nevlastná limita funkcie

V tejto časti si uvedieme jednotlivé prípady nevlastných limít. Najprv sa budeme zaoberať prípadom $b=\pm\infty$, t.j. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

Hovoríme, že limita funkcie *f*(*x*) pre *x* idúce k *a* sa rovná ∞ $(-\infty)$ práve vtedy, ak pre každú postupnosť $\{x_n\}\to a$ čísel z definičného oboru funkcie *f* postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}$ má limitu ∞ $(-\infty)$.

Na obrázku 6.7 je znázornený graf funkcie $f(x)=\left|\dfrac{1}{x^2-2x-8}\right|$. Všimnime si, že $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty$ a aj $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\infty$.



Obr. 6.7

Nasledujúca veta charakterizuje základné vlastnosti nevlastných limít.

Veta 6.5.

a) **Ak je funkcia *f*(*x*) v určitom okolí bodu *a* ohraničená a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, potom** $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

b) **Ak** $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ **a *f*(*x*) je kladná pre všetky *x*≠*a* z nejakého okolia bodu *a*, potom** $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\infty$.

c) **Ak** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b>0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ **a pre každé x≠a z nejakého okolia bodu *a* platí *g*(*x*)>0, (resp. *g*(*x*)<0), potom** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ $\left(\text{resp. } -\infty\right)$.

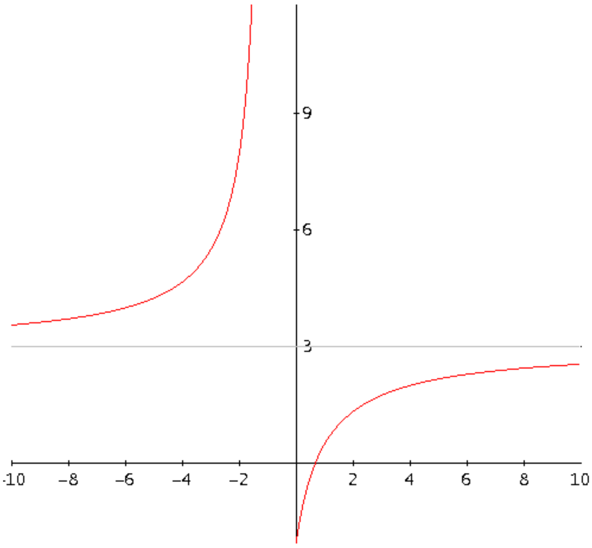
Poznámka: Veta nič nehovorí o prípadoch $\infty - \infty$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Limity pre takéto prípady budeme vedieť riešiť neskôr.

Na záver uvedieme prípad $a = \pm\infty$, t.j. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

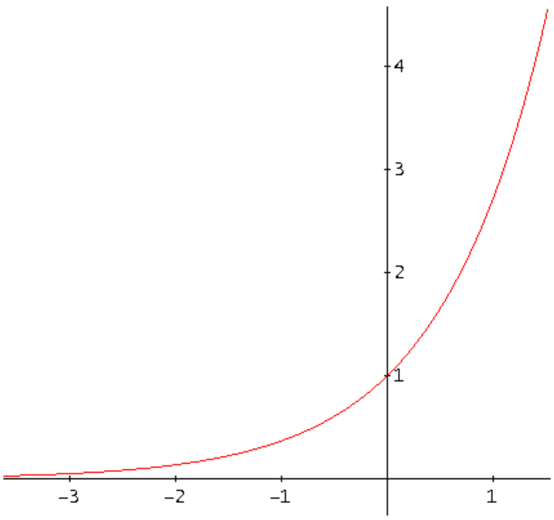
Hovoríme, že limita funkcie *f*(*x*) pre *x* idúce k ∞ **(**$-\infty$**) sa rovná *b* (**$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$**) práve vtedy, ak pre každú postupnosť** $\{x_n\} \to \infty$ **(**$\{x_n\} \to -\infty$**) čísel z definičného oboru funkcie *f* postupnosť funkčných hodnôt** $\{f(x_n)\} \to b$**.**

Na obrázku 6.8 je znázornený graf funkcie $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$. Všimnime si, že $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ a aj $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$.

Na obrázku 6.9 je znázornený graf funkcie $f(x) = e^x$. Všimnime si, že $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.



Obr. 6.8



Obr. 6.9

6.6 Úlohy

Vypočítajte nasledujúce limity, ak existujú:

1. $\lim_{x\to3} \frac{x^2+7x+11}{x^2-6x+9}$

   Riešenie:

   dosadíme: $\frac{3^2+7.3+11}{3^2-6.3+9} = \frac{41}{0}$

zistíme znamienko menovateľa v okolí bodu 3: $x^2-6x+9=\left(x-3\right)^2\geq 0$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7x+11}{x^2-6x+9}=\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{x^2-6x+9}$

Riešenie:

Použijeme metódu „zanedbania minoritných členov". Túto metódu je výhodné použiť v prípade limít typu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$, pričom $p(x)$ a $q(x)$ sú polynomy.

Platí: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

Podobne postupujeme aj pre výpočet $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x+11}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$

Riešenie:

dosadíme: $\dfrac{3^2-5.3+6}{3^2-7.3+12}=\dfrac{0}{0}$

upravíme: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)}{(x-4)}=\dfrac{3-2}{3-4}=\dfrac{1}{-1}=-1$

Pomocné výpočty:

$x^2-5x+6=0$	$x^2-7x+12=0$
$D=(-5)^2-4.1.6=25-24=1$	$D=(-7)^2-4.1.12=49-48=1$
$\sqrt{D}=1$	$\sqrt{D}=1$
$x_1=\dfrac{-(-5)+1}{2.1}=3$	$x_1=\dfrac{-(-7)+1}{2.1}=4$
$x_2=\dfrac{-(-5)-1}{2.1}=2$	$x_2=\dfrac{-(-7)-1}{2.1}=3$
$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$	$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^3-9x^2+27x-27}$

Riešenie:

dosadíme: $\dfrac{3^3-6.3^2+9.3}{3^3-9.3^2+27.3-27}=\dfrac{0}{0}$

upravíme: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^3-9x^2+27x-27}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x^2-6x+9\right)}{(x-3)^3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)^2}{(x-3)^3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-3}$

dosadíme: $\dfrac{3}{3-3}=\dfrac{3}{0}$

zistíme znamienko menovateľa v okolí bodu 3:

pre $x=2,99$ je menovateľ záporný, lebo $2,99-3=-0,01$

pre $x=3,01$ je menovateľ kladný, lebo $3,01-3=0,01$

pretože menovateľ mení znamienko, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-3}$ neexistuje,

a teda neexistuje ani $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^3-9x^2+27x-27}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-5}$

Riešenie:

dosadíme: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{3-5}=\dfrac{-1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$

Riešenie:

dosadíme: $\dfrac{1}{3-3}=\dfrac{1}{0}$

zistíme znamienko menovateľa v okolí bodu 3:

pre $x=2,99$ je menovateľ záporný, lebo $2,99-3=-0,01$

pre $x=3,01$ je menovateľ kladný, lebo $3,01-3=0,01$

pretože menovateľ mení znamienko, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$ neexistuje

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{x^3+22}$

Riešenie:

upravíme „zanedbaním minoritných členov“: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{x^3+22}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{\sqrt{x}+22}$

Riešenie:

upravíme „zanedbaním minoritných členov“: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{\sqrt{x}+22}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}=\infty$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{x^3+22}$

Riešenie:

upravíme „zanedbaním minoritných členov“: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{x^3+22}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{\sqrt{x}+22}$

Riešenie:

Nakoľko funkcia nie je definovaná v okolí bodu $-\infty$ (odmocninu počítame iba z nezáporných čísel), uvažovať o $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+7x+11}{\sqrt{x}+22}$ nemá zmysel

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{3x}$

Riešenie: použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{\sin 4x}$

Riešenie: použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k\cdot x}{\sin(k\cdot x)}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{6x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{6}{4}\cdot(4x)}{\sin 4x}=\frac{6}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{6}{4}\cdot1=\frac{6}{4}$$

uvedomte si, že ak $x\to0$, potom aj $4x\to0$

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{3x}$

Riešenie:

dosadíme: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{3\cdot\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}}=\dfrac{2}{3\pi}$

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{3x}$

Riešenie:

dosadíme: $\dfrac{\cos 0}{3.0}=\dfrac{1}{0}$

zistíme znamienko menovateľa v okolí bodu 0:

pre $x=-0,01$ je menovateľ záporný, lebo $3\cdot(-0,01)=-0,03$

pre $x = 0,01$ je menovateľ kladný, lebo $3 \cdot 0,01 = 0,03$

pretože menovateľ mení znamienko, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{3x}$ neexistuje

15. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3x}$

Riešenie:

dosadíme: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3x} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{\frac{3\pi}{2}} = 0$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$

Riešenie: použijeme vzorec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

dosadíme: $\frac{1}{x} = \frac{1}{0}$

zistíme znamienko menovateľa v okolí bodu 0:

pre $x = -0,01$ je menovateľ záporný

pre $x = 0,01$ je menovateľ kladný

pretože menovateľ mení znamienko, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje, a teda ani $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$ neexistuje

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Riešenie: použijeme vzorec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 1 \cdot \sqrt{0} = 0$

18. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x$

Riešenie:

dosadíme: $\left(\frac{1+1}{1} \right)^1 = 2^1 = 2$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}$

Riešenie: použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{3x}$

Riešenie: použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=e^{3}$$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-x}$

Riešenie: použijeme vzorec $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$

za *a* dosadíme $\sqrt{x^2+x+3}$ ... potom a^2 je x^2+x+3

za *b* dosadíme $\sqrt{x^2-x}$ ... potom b^2 je x^2-x

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+x+3\right)-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-x}}$$

Upravíme „zanedbaním minoritných členov“ podobne, ako v príkladoch 2, 7, 8, 9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x+3}{x^3-2x}$

Riešenie:

dosadíme: $\dfrac{7.0+3}{0^3-2.0}=\dfrac{3}{0}$

zistíme znamienko menovateľa v okolí bodu 0:

pre $x=-0,01$ je menovateľ kladný, lebo $\left(-0,01\right)^3-2\cdot\left(-0,01\right)=-0,000001+0,02>0$

pre $x=0,01$ je menovateľ záporný, lebo $\left(0,01\right)^3-2\cdot\left(0,01\right)=0,000001-0,02<0$

pretože menovateľ mení znamienko, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x+3}{x^3-2x}$ neexistuje

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^4+3}{x^3-2x}$

Riešenie:

dosadíme: $\dfrac{7.0^4+3}{0^3-2.0}=\dfrac{3}{0}$

zistíme znamienko menovateľa v okolí bodu 0:

pre $x=-0,01$ je menovateľ kladný, lebo $\left(-0,01\right)^3-2\cdot\left(-0,01\right)=-0,000001+0,02>0$

pre $x=0,01$ je menovateľ záporný, lebo $\left(0,01\right)^3-2\cdot\left(0,01\right)=0,000001-0,02<0$

pretože menovateľ mení znamienko, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^4+3}{x^3-2x}$ neexistuje