Zlatý rez a numerická optimalizácia
Golden ratio and numerical optimization

Magdalena Tomanová
Fakulta sociálno-ekonomických vzťahov
TnUNI Alexandra Dubčeka v Trenčíne
Študentská 2, Trenčín
magdalena.tomanova@tnuni.sk

Abstract: The Irrational number Golden ratio is an important mathematical constant. It can be found and it is used in various areas. Until recently the use of Golden ratio has been limited mainly to areas of art and architecture. Today a use has also been found in economics, especially in numerical optimization. This article describes the principle of finding a minimum of unimodal function using Golden ratio.

Keywords: Golden ratio. One-dimensional optimization. Numerical optimization. Unimodal function.

1 Úvod

Jednou z najdôležitejších myšlienok v ekonómii je nepochybne myšlienka optimalizácie. Vo všeobecnosti možno povedať, že takmer každá činnosť človeka je ovplyvnená snahou urobiť ju čo najvýhodnejšie, najefektívnejšie. Snažíme sa cestovať čo najkratšou cestou, kúpiť čo najlepší výrobok za čo najnižšiu cenu a pod. Podobne sa to deje vo firmách a podnikoch. Súčasťou každodenného rozhodovania manažmentu podnikov je predovšetkým snaha o dosiahnutie čo najvyššej účinnosti či zisku alebo snaha o čo najnižší odpad z výroby, najmenšie prestoje, čo najefektívnejšie využitie surovinových zdrojov, pracovného času a pod. Rôzne činnosti a procesy uskutočňované človekom môžeme popísať funkciou, ktorú v ekonómii nazývame účelová funkcia . Optimalizačným procesom potom nazývame hľadanie najmenšej, respektíve najväčšej hodnoty účelovej funkcie. Je potrebné nájsť takú hodnotu nezávisle premennej (premenných), pri ktorej daný trhový subjekt maximalizuje či minimalizuje svoju účelovú funkciu.

Z matematického hľadiska ide pri riešení optimalizačných problémov o hľadanie lokálnych extrémov – lokálneho minima, resp. lokálneho maxima funkcie. V matematicky opísateľných problémoch je jedno, či hľadáme minimum danej účelovej funkcie alebo jej maximum. Stačí si uvedomiť, že $max\big(f(x)\big) = -min(-f(x))$. Preto ďalej budeme hovoriť len o minimalizácii funkcie.

2 Zlatý rez

Zlatý rez (zlaté číslo) je pojem, ktorý je širokej verejnosti málo známy, neporovnateľne menej známy ako napr. Ludolfovo číslo π. Na stredných školách sa žiaci so zlatým rezom stretnú iba výnimočne, nie je zaradený do štátnych vzdelávacích programov stredných škôl. Časť študentov sa s týmto pojmom zoznámi na vysokej škole. Žiaľ, väčšina vysokoškolákov nikdy. Napriek tomu, že zlatý rez je pre podstatnú časť populácie neznámy, naše oko je naň zvyknuté a pomer zlatého rezu vnímame prirodzene. Geometrické tvary odvodené od tohto čísla sa považujú za esteticky veľmi príťažlivé. Mnohé geometrické proporcie v prírode sú odvodené práve od tohto čísla, jeho výskyt je skutočne veľký – na rastlinách, schránkach mäkkýšov, v kryštalických štruktúrach látok, ba dokonca i na ľudskom tele.

Pravdepodobne sa zlatý rez prvýkrát vyskytol v Euklidových spisoch v úlohe o úsečke. Existujú indície, že dávne civilizácie poznali niektoré oblasti výskytu zlatého rezu, dokonca ho aj vedome využívali, príkladom môžu byť stavby pyramíd alebo tvorba antického sochára Feidia. S určitosťou vieme povedať, že zlatý rez pri svojej tvorbe využívali majstri z obdobia renesancie. Známy obraz Leonarda da Vinci Posledná večera je taký pôsobivý práve preto, že autor pri jeho maľovaní uplatnil zlatý rez. I Raffaelova Sixtínska madona môže byť vtesnaná do pomerov zlatého rezu.

Súčasnosť objavuje nové oblasti výskyty zlatého rezu – okrem biológie to je chémia, fyzika, ale aj teória hudby a ďalšie. Ako príklad uvedieme, že zlatý rez sa uplatňuje v štruktúre molekuly DNA nášho genetického programu, ale tiež vedci analýzami sonát W. A. Mozarta zistili, že skoro všetky sú rozdelené na dve časti, presne podľa zlatého rezu. Prvá sekcia je vývoj a prezentácia motívu a druhá, dlhšia, je pohľad do motívu z iného uhla.

Objavujú sa stále nové možnosti využitia zlatého rezu – pri sadzbe kníh, vo fotografii, tvorbe reklamných tlačív, v internetovej grafike. Svoje uplatnenie našiel aj v ekonómii - pri numerickom riešení optimalizačných úloh, konkrétne pri hľadaní minima unimodálnej funkcie.

Iracionálne číslo zlatý rez, ozn. φ, skonštruujeme ako pomer dvoch častí úsečky AB, ktorá je rozdelená bodom C tak, aby platilo, že pomer dĺžky celej úsečky $|AB| = a$ ku jej dlhšej časti $|AC| = x$ je rovnaký ako pomer dlhšej časti $|AC| = x$ ku kratšej$|CB| = a - x$. Teda platí:

$$\varphi = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Odtiaľ

$$\frac{x + a - x}{x} = \frac{x}{a - x}$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi.$$

Po ďalšej úprave riešime rovnicu

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Rovnici vyhovuje jeden kladný koreň – zlatý rez

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618.$$

Zlatý rez $\varphi \doteq 1{,}618$ môžeme vyjadriť ako zlatý pomer

$$\varphi \doteq 1{,}618 \doteq \frac{1}{0{,}618}.$$

3 Jednorozmerná numerická optimalizácia

Optimalizačné metódy sa v literatúre delia na jednorozmerné a viacrozmerné, a to podľa funkcie, ktorej extrém hľadáme. Ak má účelová funkcia iba jeden parameter, a teda je funkciou jednej premennej, hovoríme o jednorozmerných optimalizačných metódach. Ak je účelová funkcia funkciou viac premenných, hovoríme o viacrozmernej optimalizácii.

Jednorozmerné optimalizačné algoritmy, ktorými sa budeme zaoberať, sa ďalej delia podľa toho, či v algoritme používame deriváciu funkcie alebo nie, a to na metódy bez využitia derivácií, tzv. priame metódy a metódy s využitím derivácie funkcie.

Medzi priame metódy jednorozmernej optimalizácie patrí:

- metóda dichotómie alebo metóda polovičného delenia intervalu,
- metóda využívajúca rovnomerné rozdelenie bodov na intervale $\langle a,b\rangle$,
- metóda využívajúca Fibonacciho čísla
- metóda zlatého rezu.

Všetky uvedené metódy vyžadujú, aby funkcia $f(x)$ bola na intervale $\langle a,b\rangle$ unimodálna, t.j. aby mala na tomto intervale jedno lokálne minimum, naľavo od ktorého je funkcia klesajúca a napravo rastúca.

V stručnosti popíšeme princíp priamych numerických optimalizačných algoritmov pre jednorozmerný prípad . Uviedli sme, že ani jedna z priamych jednorozmerných metód nevyužíva deriváciu účelovej funkcie. Založené sú na výbere deliacich bodov intervalu. V nich sa určia hodnoty účelovej funkcie a následne sa zúži interval $\langle a,b\rangle$ napr. na interval $\langle a,x_2\rangle$, v ktorom sa minimum nachádza, resp. sa vypustí interval v ktorom sa minimum nemôže nachádzať. Všetky uvedené metódy sa líšia len v spôsobe, akým vkladáme do intervalu $\langle a,b\rangle$ deliace body. Pri metóde dichotómie vkladáme dva deliace body x_1, x_2 .

K dispozícii tak máme okrem hodnôt $f(a), f(b)$ ďalšie dve funkčné hodnoty $f(x_1)$, $f(x_2)$. Pôvodný interval $\langle a,b\rangle$ sme rozdelili na tri menšie intervaly $\langle a,x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, b\rangle$. S využitím predpokladu unimodálnosti funkcie vieme s určitosťou povedať, v ktorom z týchto intervalov sa minimum nachádzať nemôže. Zúžili sme teda pôvodný interval $\langle a, b\rangle$ napr. na $\langle a, x_2\rangle$. Stred x_s tohto nového intervalu je aproximácia bodu minima x_{min}. Pre presnosť odhadu je dôležité umiestnenie bodov x_1, x_2. Od ich polohy závisí, aký veľký interval odstránime a akej chyby sa dopustíme. Pre odhad chyby platí:

$$| x_s - x_{min}| \leq \frac{b-a}{4}.$$

Najlepšie umiestnenie bodov nie je možné určiť, no napriek tomu je možné zvoliť body veľmi dobre. Rozhodujúcou je dĺžka intervalu, ktorý odstránime. Je možné odstrániť až polovicu intervalu, a preto hovoríme o metóde dichotómie alebo o metóde polovičného delenia intervalu. Pri ďalšej uvedenej metóde sa medzi krajné body intervalu $\langle a, b\rangle$ rovnomerne vloží n deliacich bodov, čím sa interval rozdelí na $n+1$ menších intervalov. Pri metóde využívajúcej Fibonacciho čísla sa počet deliacich bodov intervalu $\langle a, b\rangle$ zhoduje s číslami Fibonacciho postupnosti. Táto metóda má nevýhodu, ktorou je fakt, že ak náhodou získame možnosť pridať aj ďalšie body, tak predchádzajúce delenie a príslušné výpočty nedokážeme využiť a delenie intervalu $\langle a, b\rangle$ sa musí úplne zmeniť.

Pre konkrétne daný problém v praxi je vždy potrebné vybrať vhodnú metódu. Metódy, ktoré sú pre určitý typ úloh mimoriadne efektívne, môžu pri iných typoch úloh zlyhávať.

3 Metóda zlatého rezu

Základnou myšlienkou metódy zlatého rezu je postupný výber bodov, prispôsobujúci sa aktuálnej situácii, a využitie predtým použitých bodov pri ďalšom rozhodovaní. Pri postupnom vkladaní bodov sa utvára systém do seba zapadajúcich intervalov $I_i = \langle a_i,\ b_i\rangle$, platí teda $\langle a, b\rangle \supset \langle a_1,\ b_1\rangle \supset \langle a_2,\ b_2\rangle \dots \supset \langle a_n,\ b_n\rangle$, i$\in \{1, 2, \dots n\}$. Pritom sa zároveň zachováva podobnosť intervalov I_i v pomere zlatého rezu – to znamená, že pomer dĺžky celej úsečky ku dlhšej časti je rovný pomeru dlhšej časti úsečky ku kratšej časti.

Popíšeme teraz postup vkladania deliacich bodov.
Do intervalu vložíme dva body u_1, v_1, ktoré rozdelia interval na tri časti. Pre body u_1, v_1 platí:

$$u_1 = a + (1-r)(b-a) \qquad v_1 = b - (1-r)(b-a).$$

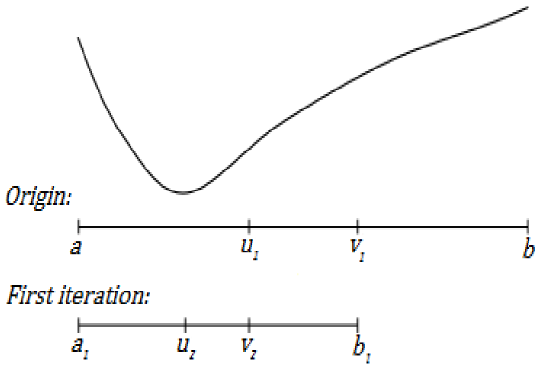
Hodnota $r = 0{,}618$, čiže je to hodnota pomeru zlatého rezu, odtiaľ je aj názov tejto metódy.

Následne vypočítame hodnoty $f(u_1)$, $f(v_1)$. Vďaka predpokladu unimodálnosti funkcie vieme, že $f(u_1)$, $f(v_1)$ sú menšie ako $max(f(a), f(b))$. Nastať môže jedna z možností:

- ak platí $f(u_1) < f(v_1)$, potom sa minimum nachádza v zúženom intervale $\langle a,\ v_1\rangle$

- ak platí $f(\ u_1) > \ f(\ v_1\ )$, potom sa minimum nachádza v zúženom intervale $\langle\ u_1, b\rangle$.

Ďalší postup je zrejmý – do úvahy berieme zúžený interval $\langle a_1,\ b_1\rangle$ (ktorým je v zmysle predchádzajúcich označení interval $\langle a,\ v_1\ \rangle$, resp. $\langle\ u_1, b\rangle$) a vložíme doň deliace body $u_2,\ v_2,$ rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcom kroku. Vypočítame hodnoty $f(\ u_2),\ f(\ v_2\ ),$ interval opäť zúžime a označíme $\langle a_2,\ b_2\rangle$.



Obr. 1 Princíp delenia intervalu pri metóde zlatého rezu

Ako výpočet postupuje, interval $\langle a_i,\ b_i\rangle$ sa neustále zmenšuje. Presnú hodnotu bodu minima x_{min} aproximujeme stredom intervalu, ktorý sme získali posledným delením.

Pre odchýlku výpočtu ε platí:

$$\frac{h_n}{2} \leq \varepsilon,$$

kde h_n je šírka intervalu po poslednom delení. Z uvedeného vzťahu vieme určiť počet krokov, ktoré je nutné urobiť pre dosiahnutie vopred danej presnosti.

Označme h šírku pôvodného intervalu $\langle a, b\rangle$. Po každej iterácii sa šírka intervalu zmení $r-$ násobne.

$$h = |b - a|$$

$$h_1 = |b_1 - a_1| = r|b - a|$$

.

.

$$h_n = |b_n - a_n| = r^n|b - a|$$

Výraz $r^n|b - a|$ dosadíme do vzťahu

$$\frac{h_n}{2} \leq \varepsilon$$

$$\frac{r^n|b-a|}{2} \le \varepsilon$$

a po úprave dostaneme

$$n \ge \frac{\ln \frac{2\varepsilon}{|b-a|}}{\ln r}.$$

Minimálny počet krokov, potrebných pre dosiahnutie vopred stanovenej presnosti ε, je n, tento počet vypočítame z posledného vzťahu.

Na záver uvedenou metódou vyriešime príklad :

Metódou zlatého rezu nájdite minimum funkcie $f(x) = e^x - 4x + 2$ na intervale $\langle 0{,}2\rangle$. Požadovaná presnosť je $\varepsilon = 0{,}01$.

Riešenie:

Zo vzťahu

$$n \ge \frac{\ln \frac{2\varepsilon}{|b-a|}}{\ln r}$$

vypočítame, že na dosiahnutie požadovanej presnosti potrebujeme desať iterácií.

1. krok

Nájdeme body u_1, v_1 použitím vzťahov $u_1 = a + (1-r)(b-a), v_1 = b - (1-r)(b-a)$

a vypočítame v nich funkčné hodnoty

$u_1 = 0{,}763932$ $f\,(u_1) = 1{,}090972$

$v_1 = 1{,}236068$ $f\,(v_1) = 0{,}497781$

Pretože $f\,(u_1) > f\,(v_1)$, zúžime interval $\langle a, b\rangle = \langle 0{,}2\rangle$ na $\langle a_1,\ b_1\rangle = \langle\, u_1, b\rangle = \langle 0{,}763932\ \ ,2\rangle$.

2. krok

Nájdeme body $u_2,\ v_2$ z intervalu $\langle a_1,\ b_1\rangle$ a vypočítame v nich funkčné hodnoty.

V druhom kroku už máme bod $u_2 = 1{,}236068$ (je to vlastne bod v_1 z 1. kroku) dopočítame $v_2 =$ 1, 527864 a vypočítame $f\,(u_2),\ f\,(v_2)$.

$f\ (u_2) = 0,497781$

$f\ (v_2) = 0,496867$

Pretože $f(u_2) > f(v_2)$, zúžime interval $\langle a_1,\ b_1\rangle = \langle 0,763932\ ,2\rangle$ na interval $\langle a_2,\ b_2\rangle = \langle u_2, b\rangle = \langle 1,236068\ \ ,2\rangle$.

V 10. kroku interval zúžime na $\langle a_{10},\ b_{10}\rangle = \langle 1{,}373835, 1{,}390097\rangle$. Stred intervalu $\langle a_{10},\ b_{10}\rangle$ x_s = 1, 381966 aproximuje bod minima x_{min} . Hodnota funkcie vo vypočítanom bode x_s= 1, 381966 je 0,454860. Skutočné minimum dosahuje funkcia v bode $x_{min} = \ln 4$ a jeho hodnota je $6 - 8ln2 = 0,454823$.

4 Záver

Vyučovanie teórie zlatého čísla, ktoré bolo v minulosti označované aj ako "božské číslo", ustúpilo v súčasnej dobe do úzadia. Množstvo štruktúr nášho sveta sa riadi zákonmi zlatého rezu a v mnohých oblastiach vedomej ľudskej činnosti má uplatnenie. Preto tento ústup nepovažujeme za správny a máme za to, že zlatý rez by mal mať svoje miesto v osnovách matematiky stredných, resp. už aj základných škôl.

Literatúra

[1] DOSTÁL, Z., BEREMLINSKI, P.: *Metody optimalizace*. 2012. [online]. http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metody_optimalizace_obr.pdf . Accessed: 1. Feb 2014.

[2] MATHEWS, JOHN H.: *Numerical methods for mathematics, science and engineering.* 2.vydanie. London: Prentice Hall International, 1992. ISBN 0-13-625047-5.

[3] MRÁZEK, J.: *Taje matematiky.* Praha. Práce, 1986. 248 s. ISBN 24-025-86.

[4] VESELÝ, J.: *Zlatý řez a co vše s ním souvisí*. Učitel matematiky 6, č. 3, 1998 153 - 158.