HARMÓNIA V ŠKOLSKEJ MATEMATIKE

Dušan Jedinák[1]

[1]Tríbečská 2136, 955 01 Topoľčany, SR

e-mail: dusan.jedinak@satronet.sk

Abstract. Jedinák, D.: *Harmony in school mathematics, Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C.* Proposed paper deals with various aspects of harmony that appears in school mathematics. It brings several useful examples showing harmony and beauty of some mathematical relationships that can be used in mathematics teaching.

Keywords: popularization and motivation in the education of mathematics, elementary and secondary schools

1 Úvod pre harmóniu

Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta (H. Weyl, 1885 – 1955). Známy nemecký filozof Ernst Cassirer (1874 – 1945) sa zaoberal aj epistemologickými problémami vo filozofii matematiky. Rád si pripomínam jeho myšlienku: *Číslo je nástrojom nášho prenikania do prírody a skutočnosti. Príroda ako celok aj so svojimi špeciálnymi oblasťami je – číslo a harmónia.* Zdá sa mi, že túto predstavu možno podporiť už pri vyučovaní školskej matematiky. Začal som sledovať hlbšie pojem harmónia a jeho použitie. V 48. ročníku MO v kategórii Z-9 bola zadaná úloha na určenie dĺžky priečky lichobežníka s danými veľkosťami základní, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami. Hľadaná veľkosť tejto priečky je **harmonickým priemerom** veľkostí oboch základní. Nie je to tam explicitne uvedené, a tak som vyhľadal postupne príslušné doplnenie. Možno tým aspoň čiastočne naplním známy odkaz matematika a filozofa A.N. Whiteheada (1861 – 1947): *Vo veku rozumu nemôže existovať aktívny záujem, ktorý by odsunul nabok všetku nádej na víziu harmónie pravdy. Uspokojiť sa s rozporom znamená narušiť úprimnosť a morálnu čistotu. Patrí k sebaúcte intelektu, aby sledoval každé zauzlenie v myslení až do konečného rozuzlenia*.

2 K pojmu harmónia

Harmónia znamená (z gréckeho *harma*) spojenie pevného s pohyblivým, súlad, súzvuk, súhra, zladenie, vyrovnanosť, súmernosť časti a celku, proporcionalita. Znamená to aj rovnaké číselné pomery (napríklad spájanie, význam i použitie akordov v hudobnej skladbe), výraz zákonitosti a miery vo svete, protiklad chaosu (organizovanosť), bezkonfliktná jednota doplňujúcich sa protikladov.

3 Z gréckych dejín

Pytagorovci, filozofické spoločenstvo a bratstvo nasledovníkov *Pytagora* (asi 582 – 497 pred n. l.), sa okrem iného zaoberali aj preniknutím do tajomstva čísiel a otázok harmónie. Možno ako prví v histórii začali chápať prirodzené čísla ako abstraktné entity, ktoré samé o sebe charakterizujú príčinný svet javov [3]. Objavili harmonické postupnosti v témach hudobnej stupnice (oktáva: pomer 1:2 pri dĺžkach strún, kvinta 2:3, kvarta 3:4). Vytvorili možnú charakteristiku všetkých vecí a javov v povahe pomerov čísiel, to dnes znamená, že základné sily vesmíru možno vyjadriť jazykom matematiky.

Už *Archytas z Tarentu* (asi 428 – 365 pred n. l.) uvádzal niekoľko typov stredných veličín – priemerov a medzi nimi aj aritmetický, geometrický a **harmonický priemer**.

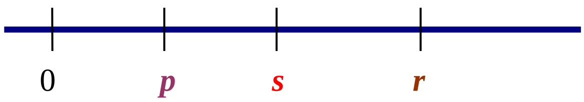
Ak bola daná trojica kladných čísiel $a > b > c$, tak **harmonický priemer** bol daný ako $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$; z toho vyplýva, že $b = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$.

Poznámka. Aj dnes je **harmonický priemer** čísiel a, c zadefinovaný tiež ako prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt a, c, teda $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$.

Aristoteles (384 – 322 pred n. l.) vo svojej *Metafyzike* uviedol, že pytagorovci si to predstavovali takto: *Celé nebo je harmónia a číslo*.

4 Dnešný zápis

V súčasnosti môžeme **harmonický priemer** chápať a vysvetliť aj takto:
Ak prvé je ***p***, posledné ***r***, tak pre prostredné ***s*** (s uvedenou vlastnosťou) bude platiť (pozri Obr.1)



Obr. 1

$$\frac{s-p}{p} = \frac{r-s}{r},$$

$$\text{teda} \quad s{\cdot}r - p{\cdot}r = p{\cdot}r - p{\cdot}s$$

$$s{\cdot}(r+p) = 2{\cdot}p{\cdot}r$$

$$s = \frac{2 \cdot p \cdot r}{p+r}$$

a to je práve ***harmonický priemer čísel p, r***.

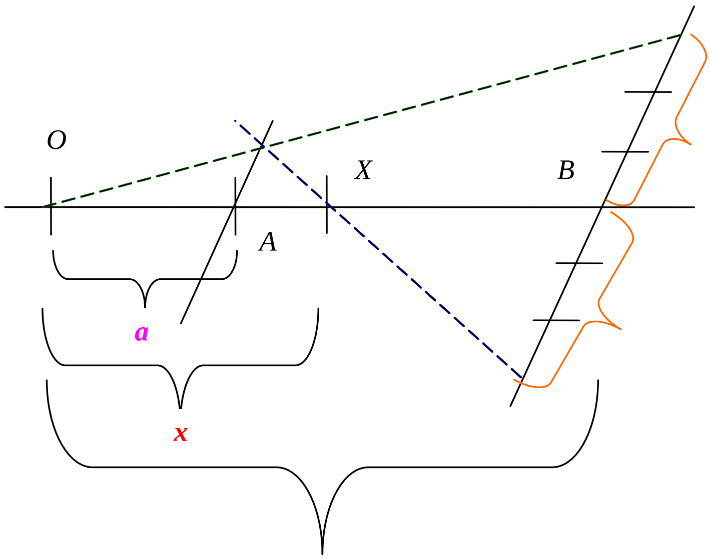
5 Matematická definícia

V odbornej literatúre nájdeme aj tento prístup:
Nech sú dané na priamke dva rôzne body A, B a bod $X \neq B$. ***Pomer usporiadanej trojice*** bodov A, B, X je definovaný ako číslo $\lambda(ABX) = \pm\ |AX| / |BX|$.
Ak je X vonkajším bodom úsečky AB, alebo $X = A$, platí znamienko + ; ak X je vnútorným bodom úsečky AB platí znamienko – .

Nech sú dané na priamke dva rôzne body A, B a bod X, $X \neq B$ a bod Y, $Y \neq B$. ***Dvojpomer usporiadanej štvorice*** bodov A, B, X, Y je číslo $\delta(ABXY) = \lambda(ABX) / \lambda(ABY)$.

Usporiadanú štvoricu bodov, ktorých dvojpomer sa rovná –1 nazývame ***harmonická štvorica bodov*** (body X, Y sú *harmonicky združené* vzhľadom na body A, B).

Ak pre harmonickú štvoricu bodov $ABXO$ označíme $|OA| = \boldsymbol{a}$, $|OB| = \boldsymbol{b}$, $|OX| = \boldsymbol{x}$, tak (podľa Obr. 2) dostaneme:



Obr. 2

$$-1 = \delta(ABXO) = \frac{\lambda(ABX)}{\lambda(ABO)}$$

$$-1 = \frac{-\frac{|AX|}{|BX|}}{+\frac{|AO|}{|BO|}} = \frac{-\frac{(x-a)}{(b-x)}}{\frac{a}{b}}$$

$$-1 = -\frac{b(x-a)}{a(b-x)}$$

$$ab - ax = bx - ab$$

$$2ab = ax + bx$$

$$x = \frac{2ab}{a+b};$$

ale aj $x = \dfrac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$.

Pre nenulové čísla a, b výraz $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ t.j. aj $x = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ nazývame ***harmonický priemer*** čísiel a, b (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).

Všeobecnejšie: **harmonický priemer** kladných čísiel $x_1, x_2, \dots, x_n$ je

$$x_{harm.} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} .$$

Harmonický rad je nekonečný rad, v ktorom každý jeho člen (okrem prvého) je harmonickým priemerom oboch svojich susedných členov, napr. rad, ktorého n-tý člen $a_n = \frac{1}{n}$, t.j. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$ tento rad je divergentný, jeho súčet je $+\infty$, lebo

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\ldots$$

$$\ldots$$

Ale $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0{,}5772156649\ldots$

Poznámka. Číslo γ sa nazýva aj ***Eulerova***, resp. ***Euler-Mascheroniho konštanta***, o ktorej sa nevie, či je číslom racionálnym alebo iracionálnym. Túto konštantu však treba odlíšiť od známeho ***Eulerovho čísla***, ktoré je definované: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=2{,}718281828459045\ldots$ a je základom prirodzených logaritmov.

Rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ nazývame ***anharmonickým radom***, konverguje a má súčet $ln\ 2$.

6 Naša súčasnosť

Naozaj by bolo by zaujímavé vedieť, s akou úspešnosťou vyriešia naši žiaci úlohu: **Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h?** Dozvedia sa, že sa v tejto úlohe uplatňuje **harmonický priemer**? Možno by sa nemalo vyskytovať v našich základných a stredných školách to, aby sa študenti nestretli s pojmom **harmónia**, ale ani to, aby nepoznali, čo nazývame **harmonický priemer** (**harmonický stred**).

Profesor *Petr Vopěnka* sa vo svojom článku *Rozpravy s geometrií* (Praha: Panorama, 1989) vyjadril: *V geometrickom svete sa krása stretla s pravdou... Je možné, že do geometrického sveta neprišla krása za pravdou, ale pravda za krásou... Kde bude videná pravda, tam bude hľadaná aj krása a naopak.*

7 Jednoduché úlohy, v ktorých sa vyskytuje harmonický priemer

- Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.
- Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí jeho základní.
- Vypočítajte veľkosť výšky zrezaného rotačného kužeľa, ak veľkosť obsahu jeho plášťa je súčtom veľkostí obsahov jeho podstáv (s polomermi R a r).
- Ukážte, že ak $\boldsymbol{n!}$ (pre každé $n\in N$) postupne vydelíme číslami 1, 2, 3, ..., n–1, n dostaneme **harmonickú postupnosť**.
- Znázornite a odôvodnite vzťah medzi aritmetickým, geometrickým a **harmonickým** priemerom dvoch kladných reálnych čísiel a, b: $\frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}\le\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}$.

7.1 Priemerná rýchlosť je harmonickým priemerom

Úloha: Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.

Riešenie: Priemer dvoch čísel m, n počítame ako $\frac{m+n}{2}$.

$\frac{m+n}{2}$ nazývame *aritmetický priemer* čísel m, n.

Ak sa vám však zdá, že priemerná rýchlosť z danej úlohy je 50 km/h, tak sa mýlite.

Priemerná rýchlosť vo fyzike je podiel celkovej dráhy ku spotrebovanému času.

Teda:

tam............ *dráha s* .... *rýchlosť* v_1= 60 km/h .... *čas* t_1

späť........... *dráha s* .... *rýchlosť* v_2 = 40 km/h .... *čas* t_2

celková dráha 2·s .... *rýchlosť v* .... *čas* $t_1 + t_2$

priemerná rýchlosť: $\bar{v} = \frac{2s}{t_1 + t_2}$, po úprave: $\bar{v} = \frac{2s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{40}} = \frac{2s}{\frac{5s}{120}} = \frac{240s}{5s} = 48$ km/h.

V matematike máme zavedený aj **harmonický priemer *a, b*** $(a, b \in R^+)$ ako

$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).

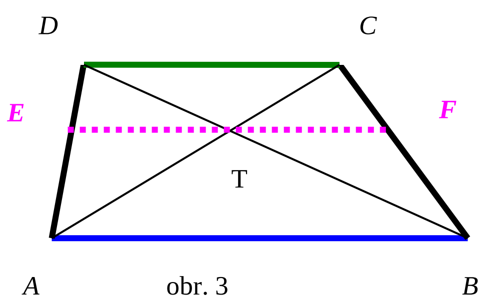
Potom vidíme, že priemerná rýchlosť pohybu po tej istej trase dvomi rôznymi rýchlosťami je **harmonickým priemerom** oboch rýchlostí $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$.

7.2 Uvidieť harmonický priemer

Úloha: Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí oboch jeho základní.

Riešenie:

Označme patričné body ako na obr. 3, kde $|\boldsymbol{AB}| = \boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{CD}| = \boldsymbol{c}$.



obr. 3

Trojuholníky *ABT* a *CDT* sú podobné (podľa vety *uu*, rovnobežky preťaté priečkou – striedavé uhly). Potom platí $|AT| : |TC| = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{c}$, t.j. $|TC| = \frac{c}{a} \cdot |AT|$.

Trojuholníky *TFC* a *ABC* sú tiež podobné (podľa vety *uu*) s koeficientom podobnosti $\frac{|TC|}{|AC|} = \frac{|TF|}{|AB|}$. Teda môžeme vyjadriť $|TF| = \frac{|TC|}{|AC|} \cdot |AB|$,

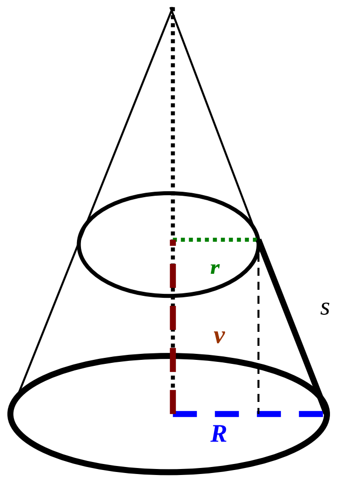
t.j. $$|TF| = \frac{c}{a} \cdot \frac{|AT| \cdot |AB|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Podobne pre trojuholníky *TEA* a *CDA* s koeficientom podobnosti $\frac{|AT|}{|AC|} = \frac{|ET|}{|DC|}$ platí

$$|ET| = \frac{c \cdot |AT|}{|AC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Potom platí $|\boldsymbol{EF}| = |ET| + |TF| = 2 \cdot \frac{a \cdot c}{a + c} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$ a to je **harmonický priemer *a*, *c*.**

7.3 Kužeľ a harmonický priemer



Úloha: Vypočítajte veľkosť výšky zrezaného rotačného kužeľa, ak veľkosť obsahu jeho plášťa je súčtom veľkostí obsahov jeho podstáv (s polomermi $\boldsymbol{R}$ a r).

Riešenie:

Vieme, že veľkosť obsahu plášťa zrezaného rotačného kužeľa je daný vzťahom

$$S_1 = \pi \cdot (R + r) \cdot s, \text{ kde } s = \sqrt{v^2 + (R - r)^2}.$$

Súčet veľkostí podstáv je $S_2 = \pi \cdot (R^2 + r^2)$.

Potom podľa zadania úlohy platí $S_1 = S_2$ a teda aj

$$(R + r) \cdot \sqrt{v^2 + (R - r)^2} = R^2 + r^2 \quad /^2$$

$$(R + r)^2 \cdot \left[v^2 + (R - r)^2\right] = (R^2 + r^2)^2$$

$$v^2 = \frac{(R^2 + r^2)^2}{(R + r)^2} - (R - r)^2$$

$$v^2 = \frac{(R^2 + r^2)^2 - (R - r)^2 \cdot (R + r)^2}{(R + r)^2}$$

$$v^2 = \frac{(R^2 + r^2)^2 - (R^2 - r^2)^2}{(R + r)^2}$$

$$v^2 = \frac{(R^2+r^2+R^2-r^2)\cdot(R^2+r^2-R^2+r^2)}{(R+r)^2}$$

$$v^2 = \frac{2\cdot R^2\cdot 2\cdot r^2}{(R+r)^2}$$

$$v = \frac{2\cdot R\cdot r}{R+r}$$

a to znamená, že **výška** takto požadovaného zrezaného rotačného kužeľa je **harmonickým** priemerom veľkostí polomerov príslušných podstáv.

7.4 Harmónia aj s faktoriálom

Úloha: Ukážte, že ak ***n*!** (pre každé $n \in N$) postupne vydelíme číslami 1, 2, 3, ..., n–1, n dostaneme **harmonickú postupnosť**.

Riešenie: Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ je **harmonická**, ak pre každé $k \in \{2, ..., n-1\}$ platí:

$$a_k = \frac{2.a_{k-1}.a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$$ (k-tý člen je harmonickým priemerom svojich susedov).

Pre náš prípad je $a_k = \frac{n!}{k}$, $k \in \{1, 2, ..., n-1, n\}$;

ukážeme, že $\frac{n!}{k} = \dfrac{2.\frac{n!}{k-1}\cdot\frac{n!}{k+1}}{\frac{n!}{k-1}+\frac{n!}{k+1}}$, pre každé $k \in \{2, ..., n-1\}$.

Upravujeme pravú stranu:

$$\frac{2\cdot\frac{n!}{k-1}\cdot\frac{n!}{k+1}}{\frac{n!}{k-1}+\frac{n!}{k+1}} = \frac{2\cdot\frac{n!\cdot n!}{(k-1)\cdot(k+1)}}{\frac{n!\cdot(k+1+k-1)}{(k-1)\cdot(k+1)}} = \frac{2\cdot n!\cdot n!}{n!\cdot(2k)} = \frac{n!}{k}$$

Napríklad pre $n = 6$ platí: 6!/1, 6!/2, 6!/3, 6!/4, 6!/5, 6!/6, t.j. 720, 360, 240, 180, 144, 120. Táto postupnosť spĺňa definíciu harmonickej postupnosti.
Ukázali sme, že každý člen spomínanej postupnosti (okrem prvého a posledného) je harmonickým priemerom svojich susedov a to znamená, že spomínaná **postupnosť je harmonická**.

7.5 Geometrické znázornenie známych priemerov

Úloha: Znázornite a odôvodnite vzťah medzi aritmetickým, geometrickým a **harmonickým** priemerom dvoch kladných reálnych čísiel: $\frac{2\cdot a\cdot b}{a+b} \le \sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2}$.

Riešenie:
Vieme, že: $\overline{x_a} = \frac{a+b}{2}$, $\overline{x_g} = \sqrt{ab}$, $\overline{x_h} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

Ľahko ukážeme, že $\forall$ a, b $\in$ R + platí: $(a-b)^2 \ge 0$,

$$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 / + 4ab$$

Máme $(a+b)^2 \geq 4ab$, a teda $|a+b| \geq 2\sqrt{ab}$, čo pre kladné čísla a, b znamená, že $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$, a teda $\overline{x_g} \leq \overline{x_a}$.

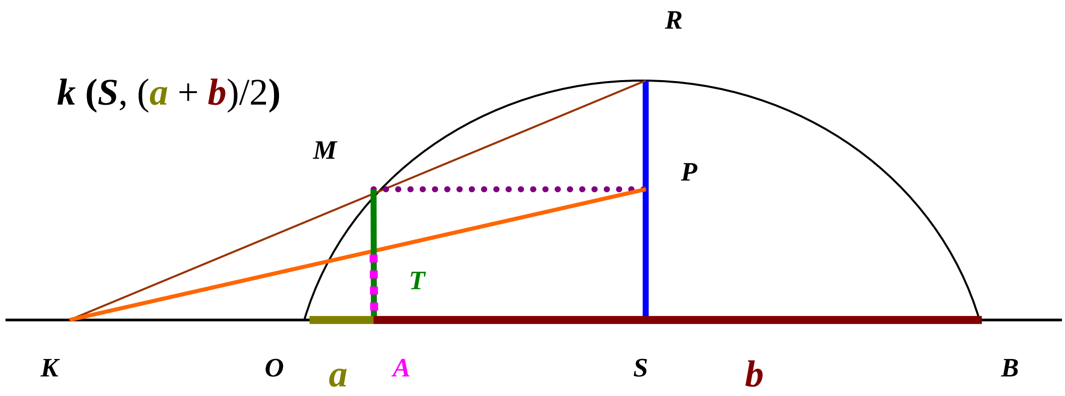
Podobne: Pre $\forall\ a, b \in R^+$ platí:

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 / ab$$
$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 \geq 0 / + 4a^2b^2$$
$$a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 \geq 4a^2b^2$$
$$ab.(a^2 + 2ab + b^2) \geq 4a^2b^2 / \sqrt{}$$
$$\sqrt{ab}.(a+b) \geq 2ab$$
$$\sqrt{a+b} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

teda $\overline{x_h} \leq \overline{x_g}$ .Tieto vzťahy môžeme aj znázorniť:

Aritmetický priemer $\overline{x_a}$ **(*a*, *b*)** je polovicou súčtu ***a*** + ***b***, t.j. (***a*** + ***b***)/2, graficky polovicou úsečky zloženej z dvoch úsečiek dĺžky ***a***, ***b***. **Geometrický priemer** $\overline{x_g}$ (***a***, ***b***) je druhou odmocninou súčinu veľkostí ***a***, ***b***, teda $\sqrt{a \cdot b}$, tam využijeme predstavu z Euklidovej vety o výške. Pre **harmonický priemer** získame predstavu úsečky ***TA*** dĺžky $\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$ využitím rovnoľahlosti v dolu uvedenom obrázku

(tam platí |***PS***| = √(a·b) = |***MA***|; $K = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{AB}$, $T = \overleftrightarrow{PK} \cap \overleftrightarrow{MA}$):



Z podobnosti (rovnoľahlosti) trojuholníkov *KAT* a *KSP*, trojuholníkov *KAM* a *KSR* platí:

$$\frac{|TA|}{|SP|} = \frac{|MA|}{|SR|}$$

po úprave tohto výrazu dostaneme

$$\frac{x}{\sqrt{a \cdot b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{\frac{a+b}{2}}$$

$$x = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} = |\boldsymbol{TA}|.$$

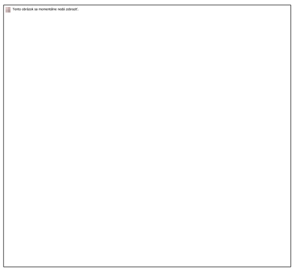
Aj geometricky sme znázornili, že pre každé dve kladné reálne čísla ***a***, ***b*** platí:

$$\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

a to znamená, že

$$\overline{x_h} \leq \overline{x_g} \leq \overline{x_a} \ .$$

8 Vnímavosť pre harmóniu



Pomerne známymi proporčnými pomermi z oblasti výtvarnej kultúry sú *brána harmónie – ianua harmoniae* (pomer veľkosti strany štvorca k veľkosti jeho uhlopriečky) a *zlatý rez – sectio aurea* (pomer, v ktorom je daná úsečka rozdelená na dve časti tak, že pomer veľkosti menšej časti k veľkosti väčšej je zhodný s pomerom veľkosti väčšej časti k veľkosti celej úsečky). Dôslednejšie pochopenie aj tu spomínanej harmónie, nám naznačuje nielen hlbšie historické korene matematických pojmov [1], [2], [5], ale aj ich zdôvodnenejšie vysvetľovanie v priebehu vyučovania školskej matematiky a prípadné používanie v aplikovaných matematických odboroch. Vnímanie harmónie nie je len estetickým alebo hudobným cítením, ale možno aj pomerne exaktným zdôvodnením matematicky zavedených užitočných základných pojmov. *Na svete neexistuje taká veda, ktorá dáva do pohybu toľko harmónie ako matematika.* Vtipným mužom, ktorý predvídal úžasnú praktickú použiteľnosť [4] mnohých matematických disciplín, bol *James J. Sylvester* (1814 – 1897), anglický matematik, stelesnená predstava toho, kto žije medzi ideálnymi číslami, vysoko nad problémami všedného dňa. *Svet nápadov, ktorý matematika obsahuje, je oslavou božskej krásy. Spôsob, akým matematika spája všetky svoje časti, je nekonečný poriadok a absolútny dôkaz pravdy, ktorou sa zaoberá.* Zušľachťovanie nášho myslenia matematickou kultúrou je príležitosť pre odhaľovanie skrytej harmónie, vymoženosť pre stále hlbšie, správnejšie a úplnejšie poznanie abstraktných súvislostí, intuitívny dotyk s mohutnosťou Toho, ktorý je nevyhnutná podstata, prvá príčina i večný zmysel.

Vo svojich motivačných zápiskoch zisťujem, že český matematik *Z. Frolík* (1933 – 1989) sa vyjadril aj takto: *Krása matematiky spočíva v jej harmónii. A nachádzanie harmónie je ... tým najhlbším zdrojom uspokojenia. Je to krása vnímateľná a vnímanie tejto krásy môže dať človeku náplň života. Túto krásu môže človek iba vnímať – a vôbec ju nemusí vytvárať. Skoro žiadny matematikár na gymnáziu vedecky nepracuje, ale každý by mal mať pre krásu matematiky vyvinutú vnímavosť.* Nezanedbateľným impulzom pre učiteľov matematiky v naznačovaní krásy i harmónie v školskej matematike by mohlo byť systematické vytváranie doplnkových stručných učebných a populárno-vedeckých textov z primeranej matematickej problematiky aj s historicko-kultúrnym pozadím doby a osudmi ľudí, ktorí ju tvorili. Ich pravidelné publikovanie by určite aspoň potešilo učiteľov aj ich žiakov.

Literatúra

[1] BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě.* Praha: Prometheus, 2001.

[2] JUŠKEVIČ, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1977.

[3] KOLMAN, A.: *Dějiny matematiky ve starověku.* Praha: Academia, 1968.

[4] NEČAS, J. a kol.: *Aplikovaná matematika I. – II*. Praha: SNTL, 1977.

[5] ZNÁM, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, 1986.